Лекция 2.

Представление о сигналах и способах их описания

Понятие «сигнал». Линейные и нелинейные системы. Принцип суперпозиции. Метод комплексных амплитуд. Спектральный и временной методы описания сигналов и анализа результатов их воздействия на линейные системы. Преобразование Фурье, преобразование Хевисайда-Лапласа. Общие свойства гармонических спектров сигналов.

Сигнал — основное понятие радиофизики. Им можно считать любую функцию координаты или времени, несущую информацию о состоянии объекта (системы), являющегося предметом изучения. Под сигналом мы будем подразумевать любую функцию вида $f(x,y,t)$, несущую информацию о пространственной или временной эволюции измеряемой величины: температуры, напряженности электрического или магнитного полей, яркости свечения, влажности и т. п., характеризующей состояние исследуемого объекта. Каждая из этих величин при отображении на экране осциллографа, монитора или шкале измерительного прибора в конечном итоге преобразуется в электрический ток или напряжение. Поскольку любое изображение можно тем или иным способом разложить на отдельные элементы, то в дальнейшем, рассматривая сигналы, мы будем подразумевать под ними функцию $f(t)$, отображающую неповторяющееся событие в заданной точке исследуемой системы. Это событие может произойти на Солнце — возникновение пятен; в галактике — возникновение сверхновой звезды; на Земле — колебания земной поверхности в результате землетрясения или испытания новых систем вооружения, извержения вулкана, зарождения тайфуна. Каждое из этих событий должно быть зафиксировано с максимальной достоверностью, а результаты его регистрации переданы с максимальной точностью заинтересованным исследователям в любую точку планеты.

Проблема достоверности передачи сигнала однозначно связана с методом его описания — составлением математической модели сигнала. Самое разумное — разложить сигнал по элементарным кирпичикам и выбрать наиболее удобный для конструирования вид кирпичиков — элементарных математических функций. Выбрав кирпичики, составить модель сигнала как суперпозицию кирпичиков — построить дом.

Полученный с использованием разнообразных датчиков, фиксирующих состояние системы, сигнал с неизбежностью должен испытать взаимодействие с каналом передачи. Будем считать, что свойства этого канала не зависят от величины сигнала, т.е. канал ***линеен.*** Это означает, что, рассматривая свойства канала передачи, мы можем использовать ***принцип суперпозиции***, считая, что ***отклик системы на сумму элементарных воздействий*** — кирпичиков, образующих сигнал, ***есть сумма откликов на каждое воздействие в отдельности.***

Задача однозначного описания функции $f(t)$ традиционно решается путем ее разложения на элементарные функции. Необходимо отметить особенность функции $f(t)$, отображающей состояние реального объекта. Процессы, протекающие в многообразных системах, всегда происходят с конечной скоростью, поскольку никакая система не может изменить свое состояние мгновенно, ибо в природе отсутствуют источники бесконечной мощности. По этой причине сигнал, отражающий состояние системы имеет непрерывный или ***аналоговый*** характер. Такая оговорка означает, что реальная функция $f(t)$ всегда удовлетворяет условию Дирихле, т. е. сама функция и скорость ее изменения ограничены во времени.

Это дает основание представить сигнал как суперпозицию элементарных функций, наиболее употребительными из которых являются гармонические функции типа $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Естественно, что эти функции представляют собой математическую абстракцию, поскольку требование их периодичности на интервале времени $-\infty < t < +\infty$ практически не реализуемо. На практике все устройства, генерирующие колебания разной формы и длительности, имеют конечное время жизни. Ни один реальный процесс, так же как и жизнь его наблюдателя, не могут продолжаться бесконечно долго. Тем не менее, такой подход позволяет однозначно описать неповторяющиеся события путем суммирования гармонических функций, каждая из которых характеризуется набором параметров, совокупность которых $\{A, \omega, \varphi\}$ — амплитуду, частоту и фазу мы будем называть ***спектром гармонической функции***, а совокупность $\{A_n, \omega_n, \varphi_n\}$ значений амплитуд, частот и фаз гармонических составляющих, суперпозицией которых может быть представлен сигнал произвольной формы — ***спектром функции*** $f(t)$.

Более компактным и часто более удобным для вычислений является представление гармонической функции как действительной части комплексного числа. При этом используются соотношения Эйлера:

$$\exp(-j\varphi) = \cos\varphi - j\sin\varphi \text{ и } \exp j\varphi = \cos\varphi + j\sin\varphi,$$

дающие основание представить гармонические функции как

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\,\mathrm{Re}\,e^{j(\omega t+\varphi)} = \mathrm{Re}\,\tilde{A}e^{j\omega t} \text{ и } x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\,\mathrm{Im}\,e^{j(\omega t+\varphi)} = \mathrm{Im}\,\tilde{A}e^{j\omega t},$$

где величина $\tilde{A} = \mathrm{e}^{j\omega}$ носит название ***комплексной амплитуды*** гармонической функции (***phasor*** — в англоязычной литературе). Часто символы Re или Im опускают и пишут просто $f(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = \tilde{A}e^{j\omega t}$, подразумевая действительную или мнимую часть этого выражения.

Уточним понятие ***частоты***, поскольку существует терминологическая неоднозначность в его определении и использовании.

Одно из определений ***частоты*** подразумевает физическую величину, характеризующую периодический процесс и равную числу полных его циклов, происходящих в единицу времени. Такую частоту правомерно называть ***циклической,*** обозначать буквами ν, f или F и измерять в единицах Герц

$\left[Гц, Hz, c^{-1}\right]$. Величину, обратную частоте f, называют периодом и измеряют в $[c]$. В частности, частота изменения полярности напряжения в сети переменного тока в России характеризуется величиной 50 Гц или периодом в 20 мс.

Другое определение связано с введением понятия ***круговой или угловой частоты***, измеряемой числом оборотов в единицу времени или числом радиан в секунду $[рад/c; rad/s]$ и обозначаемой как ω. Круговая частота связана с циклической частотой соотношением $\omega = 2\pi f$.

Наряду с неповторяющимися событиями $f(t)$ в микро- и макромире существуют процессы, повторяющихся во времени с разной степенью периодичности. К ним можно отнести суточный ритм вращения Земли, колебания кварцевого генератора, задающего скорость перемещения стрелок кварцевых часов, период пилообразных колебаний генератора развертки изображения в осциллографе или телевизоре и многие другие процессы, не сопровождающиеся приращением информации и в строгом смысле слова сигналом не являющиеся. Такие периодические процессы играют важную служебную роль в радиофизике и технике радиосвязи, и мы будем обозначать их как $F(t)$.

Переход к одиночному событию можно осуществить, устремляя период функции $F(t)$ к бесконечности: при $T \to \infty$ $F(t) \to f(t)$. Это означает, что знание спектральных характеристик периодического процесса позволяет найти характеристики непериодического и наоборот.

Спектральное представление периодических функций

Функция $F(t)$ называется ***периодической***, если существует постоянное число $T > 0$, для которого выполняется равенство:

$$f(t+T) = f(t)$$

для любого *t* из области задания функции. Если задана функция времени $F(t)$ с периодом *T*, то ее можно представить *рядом Фурье:*

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n\right),$$

где $\omega_n = n\omega_0$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$. При этом совокупность величин $\{A_n, \omega_n, \varphi_n\}$ образует ***спектр периодической функции F(t).***

Можно проводить суммирование по **sin** и по **cos**:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \omega_n t,$$

где $\omega_n = \dfrac{2\pi}{T} n = n\omega_0$

Спектральные коэффициенты — амплитуды гармонических составляющих определяются ***обратным преобразованием Фурье***:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)\cos n\omega_0 t \cdot dt \quad \text{для } n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)\sin n\omega_0 t \cdot dt \quad \text{для } n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Тогда ***четные*** функции раскладываются только по **cos**, ***нечетные*** — только по **sin**.

Результат не изменится, если интегрировать $F(t)$ по любому целому периоду функции, то есть не от $-\frac{T}{2}$ до $+\frac{T}{2}$, а от τ до $\tau + T$.

Нетрудно убедиться, что коэффициент $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)dt$ представляет собой ***среднее значение функции за период*** и имеет смысл ***постоянной составляющей*** в спектре сигнала — ***амплитуды спектральной составляющей с нулевой частотой, что соответствует постоянному току.***

Можно раскладывать F(t) в ряд Фурье не по тригонометрическим функциям, а по системе функций $\exp j(\omega_n t + \varphi_n)$:

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{C}_n\right| \exp j(\omega_n t + \varphi_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{C}_n\right| \exp(j \arg \tilde{C}_n)\exp(j\omega_n t),$$

где $\tilde{C}_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} F(t)\exp(-j\omega_n t)dt = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right), n > 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_n + jb_n\right), n < 0 \end{Bmatrix}$, $n = \{-\infty; \infty\}$.

Величину $\left|\tilde{C}_n\right| \exp j\varphi_n = \left|\tilde{C}_n\right| \exp(j \arg \tilde{C}_n)$ называют комплексной амплитудой гармонической функции и обозначают как $\tilde{C}_n$.

Спектром **функции** $F(t)$ называют **совокупность величин** $\left\{\left|\tilde{C}_n\right|, \arg \tilde{C}_n = \varphi_n, \omega_n\right\}$. Совокупность $\left|\tilde{C}_n\right|$ образует **спектр амплитуд**, $\varphi_n = \arg \tilde{C}_n$ — **спектр фаз,** ω_n — **спектр частот**.

Если функция $F(t)$ действительная, то для всех $n \neq 0$ выполняется равенство: $\tilde{C}_{-n} = \tilde{C}_n^*$ (знак * обозначает комплексную сопряженность), $\left|\tilde{C}_{-n}\right| = \left|\tilde{C}_n\right|$ и $\varphi_{-n} = \varphi_n$. Это означает, что ***спектр амплитуд*** всегда является ***четной функцией***, а ***спектр фаз — нечетной***.

Спектр периодической функции $F(t)$ с периодом T всегда является **дискретным**, или **линейчатым**, причем гармоники отстоят друг от друга на частотный интервал $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Спектр непериодической функции

Непериодическую функцию времени $f(t)$ можно характеризовать **интегралом Фурье,** вводя величину, определяемую как:

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

и представляющую собой ***прямое преобразование*** Фурье. Тогда функция $f(t)$ может быть найдена как ***обратное преобразование*** Фурье.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}(\omega)\exp(-j\omega t)d\omega \text{ —}$$

Величину $\tilde{S}(\omega)$, представляющую собой ***непрерывную*** или ***сплошную функцию частоты***, называют спектральной плотностью неповторяющегося процесса. $\left|\tilde{S}(\omega)\right|$ характеризует ***распределение амплитуд гармонических составляющих бесконечно близких по частоте, т. е. плотность их спектрального распределения по частоте.*** $\arg\tilde{S}(\omega)$ — характеризует **спектр фаз**.

Единицы измерения спектральной плотности:

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{2\pi\tilde{C}_n}{d\omega} \quad \left[\frac{\text{А}}{\text{Гц}};\ \frac{\text{В}}{\text{Гц}}\right].$$

Существует также понятие спектральной плотности мощности, которая измеряется в [Вт/Гц].

Пример. Найдем $\dot{S}(\omega)$ для прямоугольного импульса. (рис. 2.1.)

Аналитически функцию $f(t)$ можно записать в следующем виде:

$$f(t) = \begin{cases} 0; & t < -\tau/2, \\ A; & -\tau/2 \le t \le \tau/2, \\ 0; & t > +\tau/2. \end{cases}$$

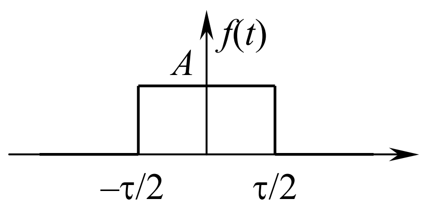


Рис. 2.1.

Отсюда по определению спектральной плотности:

$$\dot{S}(\omega) = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}dt = A\tau\cdot\frac{\sin\omega\tau/2}{\omega\tau/2} = A\tau\,\text{sinc}\,\frac{\omega\tau}{2}.$$

При выводе этого выражения использованы формулы Эйлера, связывающие тригонометрические функции sin и cos с экспонентой. График функции $\dot{S}(\omega)$ представлен на рисунке 2.2.

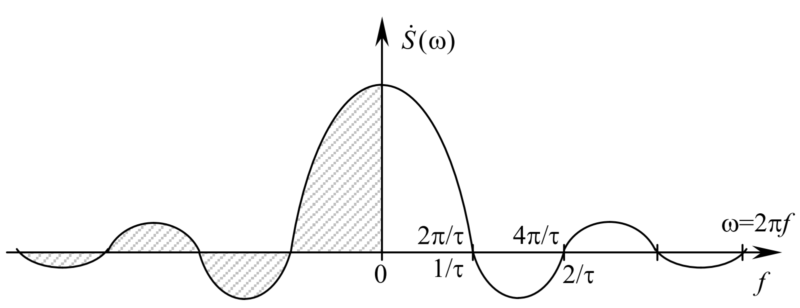


Рис. 2.2.

Отрицательные частоты — следствие математического формализма и физического смысла не имеют. Реально измеряемой величиной является $\left|\tilde{S}(\omega)\right|$.

Общие свойства гармонических спектров сигналов

1. Четность и нечетность спектральных характеристик.

Для действительного сигнала $f(t)$ величина $\left|\tilde{S}(\omega)\right|$ — амплитудно-частотная характеристика **(АЧХ)** есть четная функция; $\arg\tilde{S}(\omega)$ — фазово-частотная характеристика **(ФЧХ)** всегда нечетная функция: $\tilde{S}(-\omega) = \tilde{S}^*(\omega) = -\tilde{S}(\omega)$.

2. Линейность (принцип суперпозиции).

Пусть $f_1(t) \Leftrightarrow \tilde{S}_1(\omega)$, $f_2(t) \Leftrightarrow \tilde{S}_2(\omega), \dots f_N(t) \Leftrightarrow \tilde{S}_N(\omega)$.

Тогда $f_1(t) + f_2(t) + \dots f_N(t) \Leftrightarrow \tilde{S}_1(\omega) + \tilde{S}_2(\omega) + \dots\tilde{S}_N(\omega)$.

Условимся, что знак $\Leftrightarrow$ будет означать взаимно однозначное соответствие.

3. Ослабление или усиление сигнала — умножение $f(t)$ на константу α.

Пусть $f(t)$ характеризуется спектральной плотностью $\tilde{S}(\omega)$: $f(t) \Leftrightarrow \tilde{S}(\omega)$, тогда в силу линейности преобразования Фурье $\alpha f(t) \Leftrightarrow \alpha\tilde{S}(\omega)$.

4. Изменение масштаба $f(t)$ — сжатие или растяжение сигнала во времени.

Пусть $f(t) \Leftrightarrow \tilde{S}(\omega)$, тогда $f(\beta t) \Leftrightarrow \frac{1}{\beta}\tilde{S}(\frac{\omega}{\beta})$. При $\beta < 1$ происходит сжатие сигнала (расширение спектра), при $\beta > 1$ — его расширение (сжатие спектра).

5. Сдвиг сигнала во времени — задержка распространения сигнала ($f(t) \Rightarrow f(t-\tau)$).

Пусть $f(t) \Leftrightarrow \tilde{S}(\omega)$. $f(t-\tau) \;\Leftrightarrow\; \dot{S}_\tau(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$.

Выполнив замену переменных $t - \tau = t^*$, получим:

$\dot{S}_\tau(\omega) = \tilde{S}_\tau(\omega) = \tilde{S}(\omega)\exp(-j\omega\tau)$: при задержке сигнала каждая спектральная составляющая получает фазовый сдвиг, пропорциональный частоте.

6. Сдвиг спектра сигнала — теорема о переносе спектра.

Пусть гармоническая функция $\cos\omega_0 t$ меняет свою амплитуду по закону $f(t)$.

$f(t) \Leftrightarrow \tilde{S}(\omega)$; $\cos\omega_0 t = \dfrac{\exp j\omega t + \exp\left(-j\omega t\right)}{2}$. Тогда спектр функции $f(t)\cdot\cos\omega_0 t$ может быть найден как

$$\tilde{S}_{f(t)\cdot\cos\omega_0 t}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp j\omega t\cdot\frac{\exp j\omega_0 t+\exp\left(-j\omega_0 t\right)}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp j\left(\omega+\omega_0\right)t\cdot dt+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp j\left(\omega-\omega_0\right)t\cdot dt=\frac{1}{2}\tilde{S}\left(\omega+\omega_0\right)+\frac{1}{2}\tilde{S}\left(\omega-\omega_0\right)$$

Это означает, что наложение сигнала на гармоническое колебание с частотой ω_0, называемой ***несущей частотой***, позволяет сместить спектр сигнала в область высоких частот и тем самым увеличить число источников информации, одновременно работающих в эфире, и обеспечить эффективное возбуждение высокочастотных электромагнитных колебаний антенами малых размеров. Такая возможность является основной мотивировкой интенсивного освоения сверхвысокочастотного и оптического диапазонов длин волн.

Спектр исходного сигнала и спектр сигнала, получившегося в результате перемножения, изображены ра рисунке 2.3.

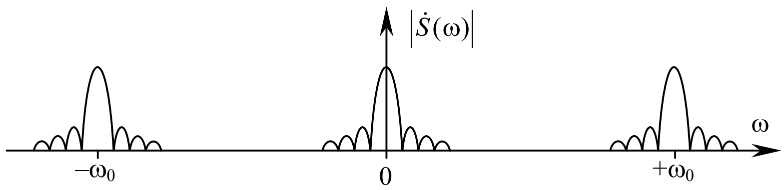


Рис. 2.3.

7. **Энергия сигнала, переносимая в заданной полосе частот. Равенство Парсеваля или теорема Рейли.**

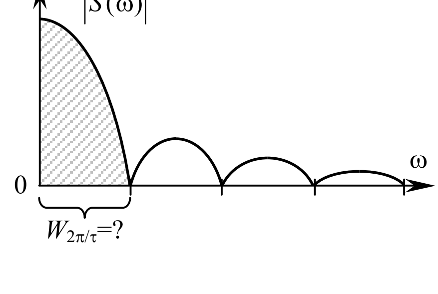
Если задана функция $f(t)$ — (ток или напряжение, протекающий (падающее) через сопротивление в 1 Ом)), то полная энергия сигнала, переносимая в бесконечной полосе частот, определяется выражением:

$$W_{\text{полн}}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{S}(\omega)\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega t}dtd\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{S}(\omega)\cdot\tilde{S}^*(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\tilde{S}(\omega)\right|^2 d\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left|\tilde{S}(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Полученное выражение дает долю полной энергии сигнала, переносимой в заданной полосе частот, и позволяет проектировать реальные устройства обработки информации..

Оценим, какая же доля энергии однополярного прямоугольного сигнала передается в полосе частот от 0 до $2\pi/\tau$. В качестве спектральной функции возьмем функцию $\dot{S}(\omega)=A\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$, соответствующую прямоугольному импульсу. Тогда величина $\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi/\tau}\left|\dot{S}(\omega)\right|^2 d\omega$ показывает, какая доля энергии сосредоточена в первом максимуме функции $\left|\dot{S}(\omega)\right|$.



При вычислении интеграла придется использовать понятие функции интегральный синус - Si. Табулированное значение этой функции можно найти, например, в книге Янке, Эмде «Таблицы специальных функций».

Оказывается, что доля энергии, переносимой в полосе частот до $2\pi/\tau$, оказывается равной 90% полной энергии сигнала:

$$W_{2\pi/\tau} = 0{,}9W_{\text{полн}}.$$

Если расширить полосу частот вдвое, то

$$W_{4\pi/\tau} = 0{,}95W_{\text{полн}}.$$

Перейдем от круговой частоты ω к циклической частоте f. Пределы интегрирования по f при этом изменятся как: $0 < f < 1/\tau$. При этом соотношение полосы частот Δf с длительностью импульса $\Delta\tau$ примет вид

$$\boxed{\Delta f \cdot \Delta\tau \approx 1}$$

Это выражение носит название *соотношение Рэлея*. Для прямоугольного импульса оно оказывается точным равенством.

8. Спектр производной.

Пусть $f(t) \Leftrightarrow \tilde{S}(\omega)$. Найдем спектр функции $\frac{d}{dt}f(t)$.

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\exp(j\omega t)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\frac{d}{dt}\exp(j\omega t)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega S(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

Отсюда следует, что $\frac{d}{dt}f(t) \Leftrightarrow S_{\frac{d}{dt}f(t)}(\omega) = j\omega S(\omega)$

9. Спектр первообразной $\int f(t)dt$.

Пусть $f(t) \Leftrightarrow \tilde{S}(\omega)$. Найдем спектр функции $\int f(t)dt$.

$$\int f(t)dt = \int\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\exp(j\omega t)d\omega\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\left(\int \exp(j\omega t)dt\right)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\omega)}{j\omega}\exp(j\omega t)d\omega$$

Отсюда следует, что $\int f(t)dt \Leftrightarrow S_{\int f(t)dt}(\omega) = \frac{1}{j\omega}S(\omega)$

10. Свёртка функций $f(t)$ и $g(t)$ — операция $f(t)*g(t) = \int f(t)\cdot g(t-\tau)d\tau$, показывающая «схожесть» одной функции с отражённой и сдвинутой копией другой. Понятие свёртки обобщается для функций, определённых на группах, а также мер.

Автокорреляционная функция

Наряду со спектральным подходом к анализу (описанию) сигналов на практике часто используют характеристику, несущую информацию о скорости изменения или длительности сигнала, которую можно получить без его разложения на гармонические составляющие. Такой временной характеристикой является ***корреляционная функция,*** определяемая как

$$B_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot f(t-\tau)dt,$$

где τ — временной сдвиг сигнала. Функция $B_f(\tau)$ характеризует степень подобия функции сдвинутой во времени копии $f(t-\tau)$. При $\tau = 0$ функция $B_f(\tau)$ принимает максимальное значение $B_f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt$, представляющее собой значение полной энергии, переносимой сигналом. Очевидно, что $B_f(\tau)$ является четной функцией, т. е.

$$B_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot f(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot f(t+\tau)dt,$$

поскольку при взятии интеграла безразлично, опережает или запаздывает сигнал $f(t)$ свою копию $f(t \pm \tau)$.