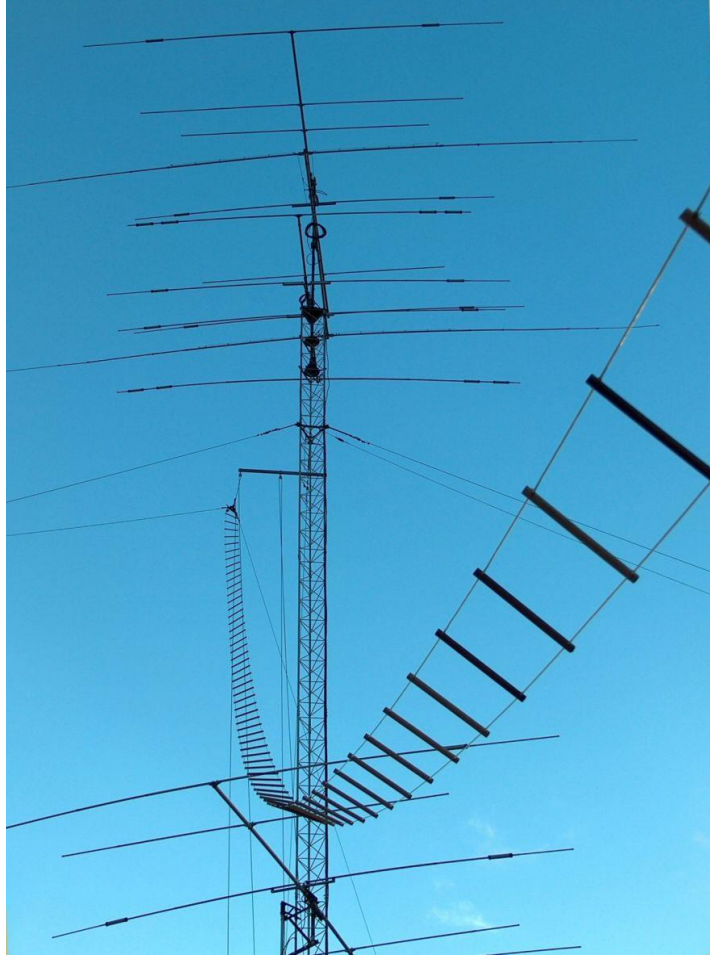
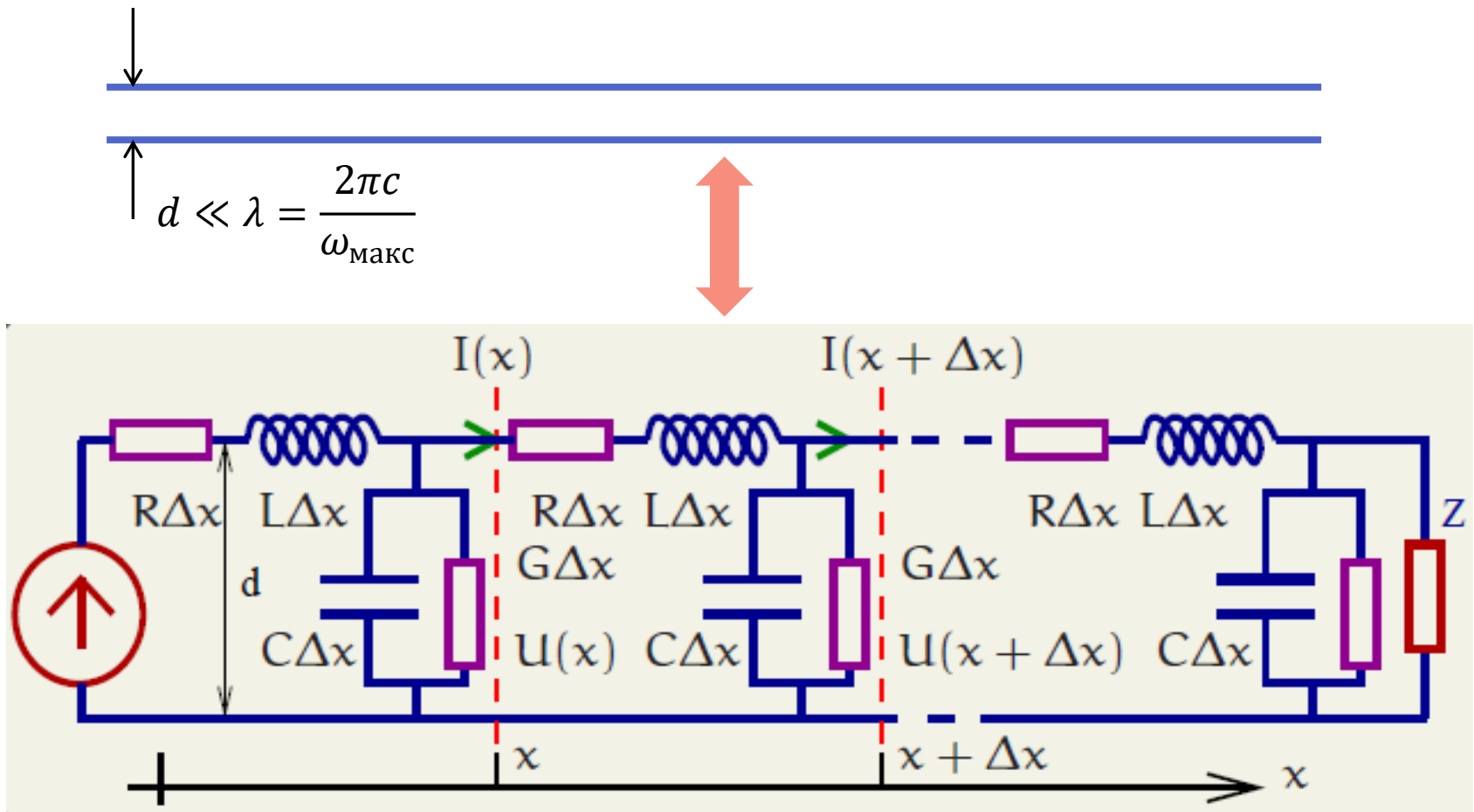


# Распределенные системы: Длинные линии

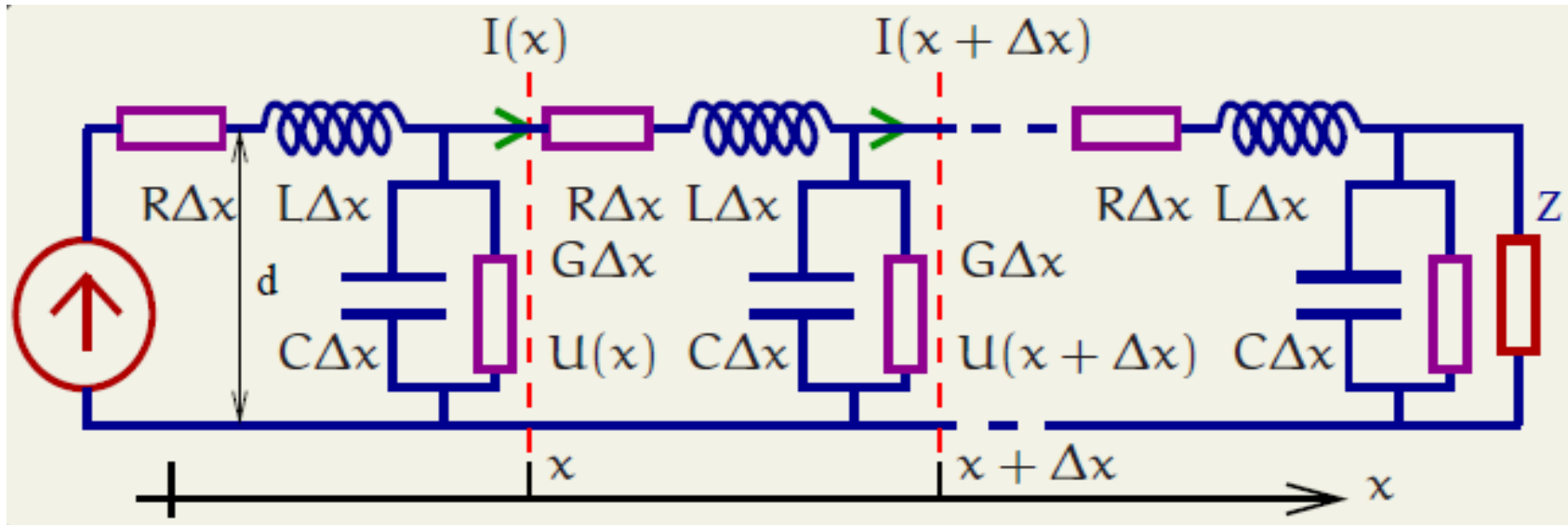




## Эквивалентная схема длинной линии

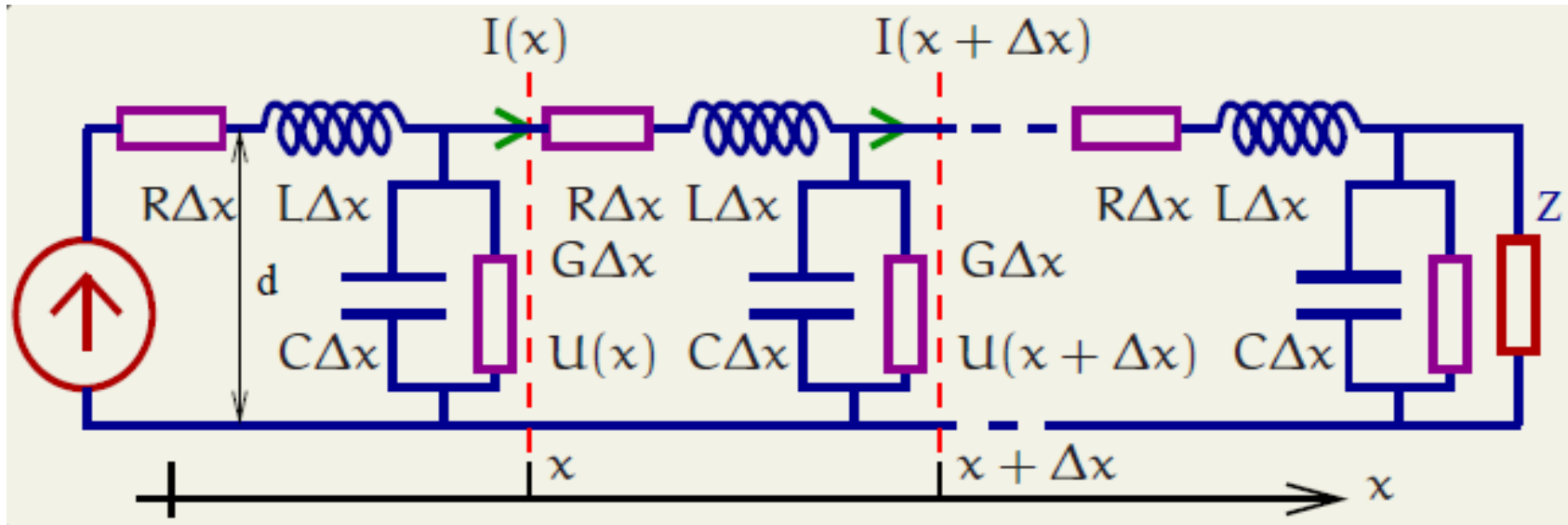


$L$  [Гн/см],  $C$  [Ф/см],  $R$  [Ом/см],  $G$  [См/см].



Количество заряда, «оседающего» на  $\Delta x$  за единицу времени:

$$I(x, t) = I(x + \Delta x, t) + C\Delta x \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + G\Delta x U(x, t),$$
$$-\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + GU(x, t) \quad (1)$$



Изменение напряжения на  $\Delta x$  равно падению напряжения на  $L$  и на  $R$  :

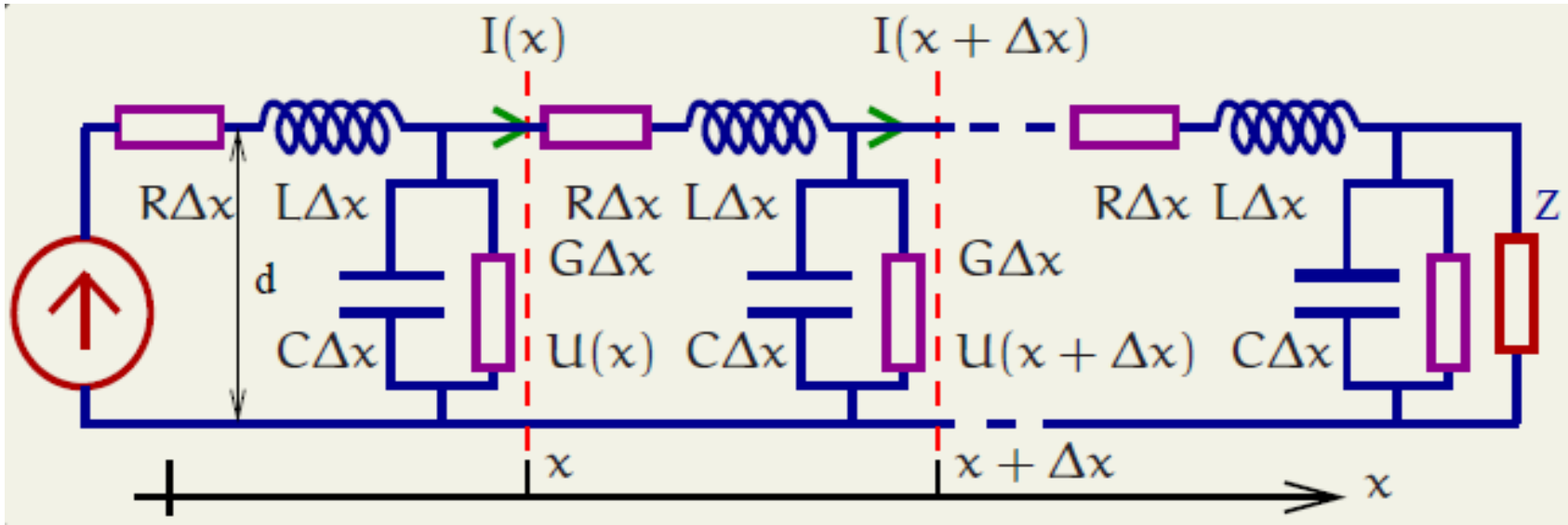
$$U(x, t) = U(x + \Delta x, t) + L\Delta x \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R\Delta x I(x, t),$$
$$-\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R I(x, t) \quad (2)$$



## Телеграфные уравнения («уравнения телеграфистов»)

$$-\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + GU(x, t)$$

$$-\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + RI(x, t)$$



$$L \frac{\partial}{\partial t} \times (1) - \frac{\partial}{\partial x} \times (2) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + GL \partial_t U(x, t) - R \partial_x I(x, t)$$



Пусть потери отсутствуют:  $R = 0$ ,  $G = 0$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} &= C \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}, & \Rightarrow -\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t} &= C \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \\ -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} &= L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}, & \Rightarrow \frac{1}{L} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t \partial x}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}$$

—волновое уравнение!



$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}$$

$$U_+(x, t) = F(t - x\sqrt{LC}) = F(t - x/v_0)$$

(волна бежит "вперед"),

$$I_+(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \times F(t - x\sqrt{LC}) = \frac{U_+(x, t)}{\rho}$$

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{— скорость волны,}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{— волновое сопротивление}$$





$$U_-(x, t) = F(t + x\sqrt{LC}) \quad (\text{волна бежит "назад"}),$$

$$I_-(x, t) = -\sqrt{\frac{C}{L}} \times F(t + x\sqrt{LC}) = -\frac{U_-(x, t)}{\rho}.$$

$$\begin{aligned} \text{Мощность:} \quad W &= (U_+ + U_-)(I_+ + I_-) = \\ &= (U_+ + U_-) \frac{((U_+ - U_-))}{\rho} = \frac{U_+^2}{\rho} - \frac{U_-^2}{\rho} \end{aligned}$$

$$\text{Скорость волны:} \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

**Волновое сопротивление:**

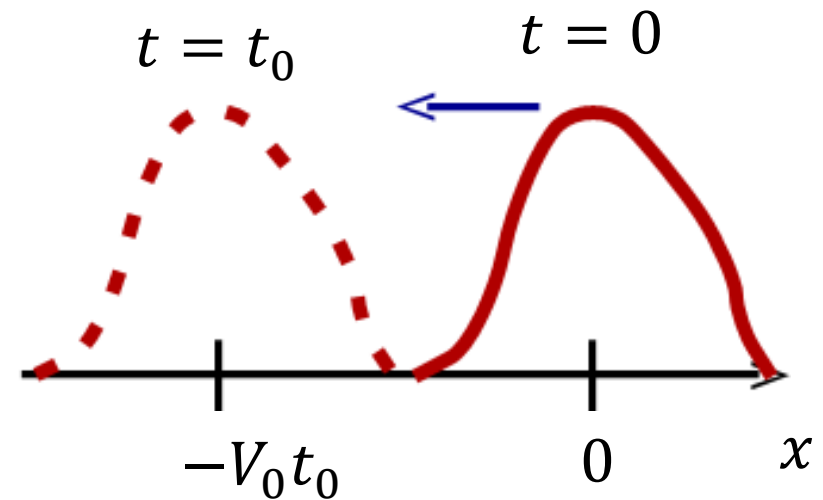
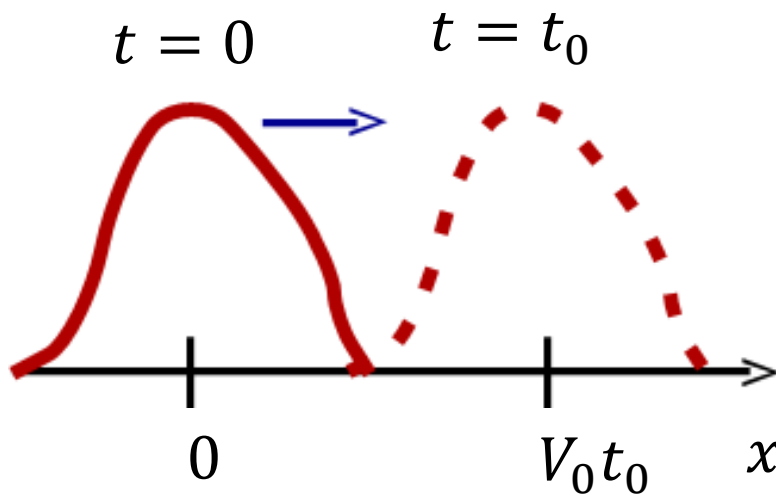
$$\rho = \frac{|U|}{|I|} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad U_+ = \rho I_+, \quad U_- = -\rho I_-$$



# Представление в виде суперпозиции волн, бегущих «вперед» и «назад»

$$F\left(t - \frac{x}{V_0}\right)$$

$$F\left(t + \frac{x}{V_0}\right)$$





## Отражение от нагруженного конца линии

Гармонические волны:  $U, I \sim e^{i\omega t}$ , тогда, если

$$U(x, t) = U_+ e^{i\omega t - ikx} + U_- e^{i\omega t + ikx},$$

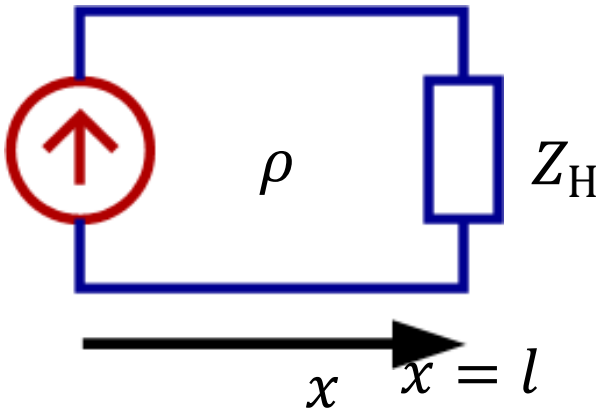
то из (2):  $i\omega L I(x) = ikU_+ e^{-ikx} - ikU_- e^{ikx}$

$$k = \frac{\omega}{v_0} \quad \text{- волновое число}$$

Отсюда получаем:

$$I(x) = \frac{k}{\omega} (U_+ e^{-ikx} - U_- e^{ikx}),$$

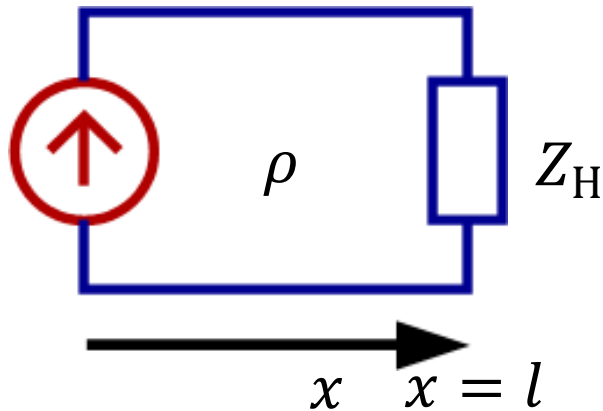
$$I(l) = \frac{1}{\rho} (U_+ e^{-ikl} - U_- e^{ikl}).$$





## Отражение от нагруженного конца линии

$$I(l) = \frac{1}{\rho} (U_+ e^{-ikl} - U_- e^{ikl})$$



Пусть  $l = 0$

$$\frac{U(0)}{I(0)} = \rho \frac{U_+ + U_-}{U_+ - U_-} = Z_H,$$

$$\Rightarrow k_{\text{отр}} \equiv \frac{U_-}{U_+} = \frac{Z_H - \rho}{Z_H + \rho}$$

В общем случае  $Z_H = Z_H(\omega)$ , тогда

$$k_{\text{отр}}(\omega) = \frac{Z_H(\omega) - \rho}{Z_H(\omega) + \rho}$$



## Частные случаи

1. Если  $Z_H = \rho$ , то  $U_- = 0$ ,

Тогда вся мощность поглощается нагрузкой

$$W_+ = \left\langle \frac{U_+^2}{\rho} \right\rangle = \frac{|U_+|^2}{2\rho}, \quad W_- = 0,$$

(возможно только для действительных  $Z_H$ )

2. Если  $Z_H = 0$ , то  $U_- = -U_+$ ,

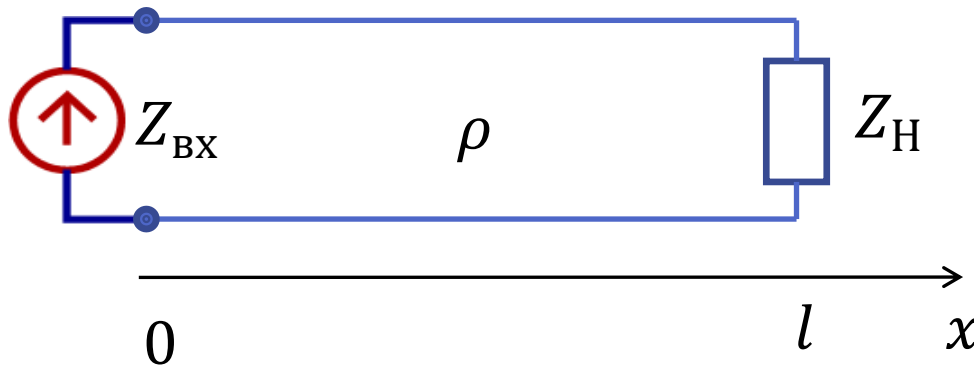
Мощность не поглощается:  $W_+ + W_- = 0$ ,

3. Если  $Z_H = \infty$ , то  $U_- = U_+$ ,

Мощность не поглощается:  $W_+ + W_- = 0$ .



# Входное сопротивление Длинной линии с нагрузкой



Пусть:  $U_{\Gamma} = U_{+}(0)$

Тогда:  $U_{+}(l) = U_{+}(0)e^{-ikl}$

$U_{-}(l) = k_{\text{отр}} U_{+}(l)$

$$U_{-}(0) = U_{-}(l)e^{-ikl} = k_{\text{отр}} U_{+}(0)e^{-2ikl}$$

$$\Rightarrow Z_{\text{ВХ}} \equiv \frac{U_{+}(0) + U_{-}(0)}{I_{+}(0) + I_{-}(0)} = \frac{U_{+}(0) + U_{-}(0)}{U_{+}(0) - U_{-}(0)} \rho = \frac{U_{+}(0)(1 + k_{\text{отр}}e^{-2ikl})}{U_{+}(0)(1 - k_{\text{отр}}e^{-2ikl})} \rho$$

$$Z_{\text{ВХ}} = \frac{1 + k_{\text{отр}}e^{-2ikl}}{1 - k_{\text{отр}}e^{-2ikl}} \rho$$



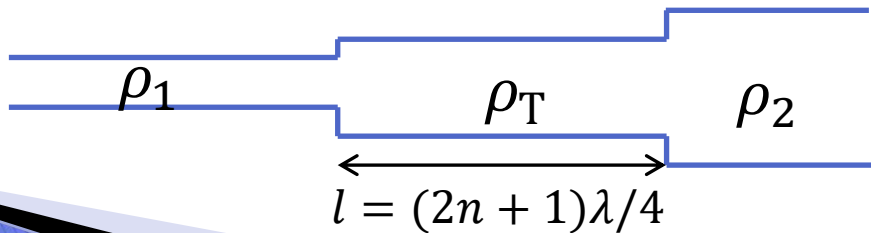
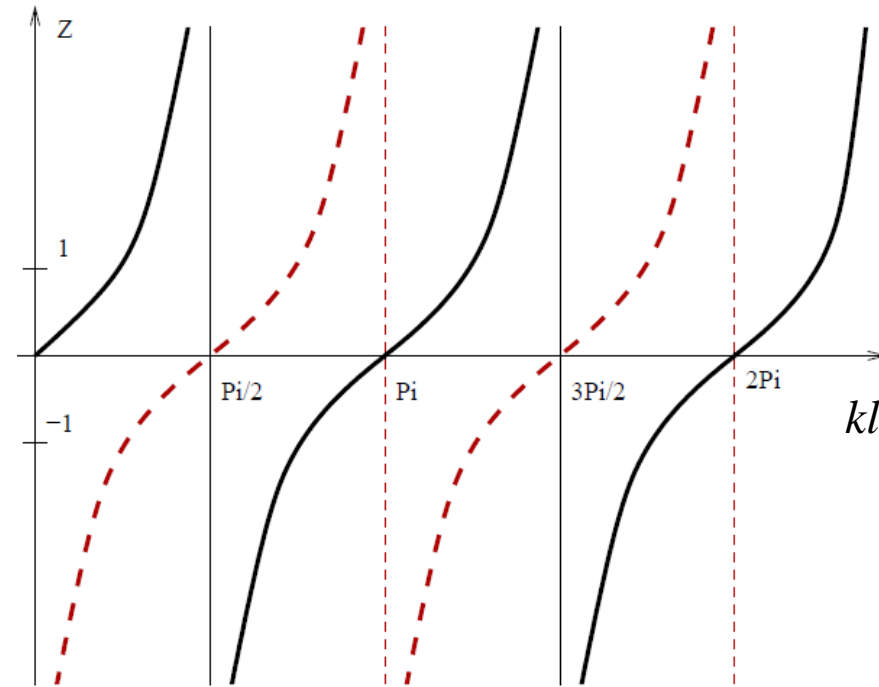
$$Z_{\text{BX}} = \frac{1 + k_{\text{отр}} e^{-2ikl}}{1 - k_{\text{отр}} e^{-2ikl}} \rho$$

$$k_{\text{отр}} = \frac{Z_H - \rho}{Z_H + \rho}$$

## Частные случаи

1.  $k_{\text{отр}} = 0 \Rightarrow Z_{\text{BX}} = Z_H$
2.  $k_{\text{отр}} = 1 \Rightarrow Z_{\text{BX}} = -i\rho \operatorname{ctg}(kl)$
3.  $k_{\text{отр}} = -1 \Rightarrow Z_{\text{BX}} = i\rho \operatorname{tg}(kl)$
4.  $l = \lambda/2 \Rightarrow Z_{\text{BX}} = Z_H$   
- полуволновая «шайба»

5.  $l = (2n + 1)\lambda/4 \Rightarrow Z_{\text{BX}} = \frac{\rho^2}{Z_H}$   
- четвертьволновый трансформатор:



$$\rho_T = \sqrt{\rho_1 \rho_2}$$



## Согласование линий (линий с нагрузкой)

При наличии отражения интерференция порождает стоячую волну.

Коэффициент стоячей волны КСВ (VSWR):

$$VSWR = \frac{1 - k_{\text{отр}}}{1 + k_{\text{отр}}}$$

Если  $Z_H$  — действительная величина, то

$$VSWR = \left( \frac{Z_H}{\rho} \right)^{\pm 1}$$

(знак выбирается так, что бы  $VSWR > 0$ )





## Длинная линия с потерями

Рассмотрим случай  $G, R \neq 0$ :

$$U = U(x) e^{i\omega t}, \quad I = I(x) e^{i\omega t},$$

$$(1): \quad -\partial_x I(x) = (i\omega C + G)U(x),$$

$$(2): \quad -\partial_x U(x) = (i\omega L + R)I(x),$$

$$\partial_x(2) \text{ и } (1): \quad \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 U(x) = 0,$$

$$\gamma^2 = (R + i\omega L)(G + i\omega C), \quad \gamma = \alpha + ik,$$

– постоянная распространения



## Малые потери.

Если  $R \ll \omega L$ ,  $G \ll \omega C$ , то

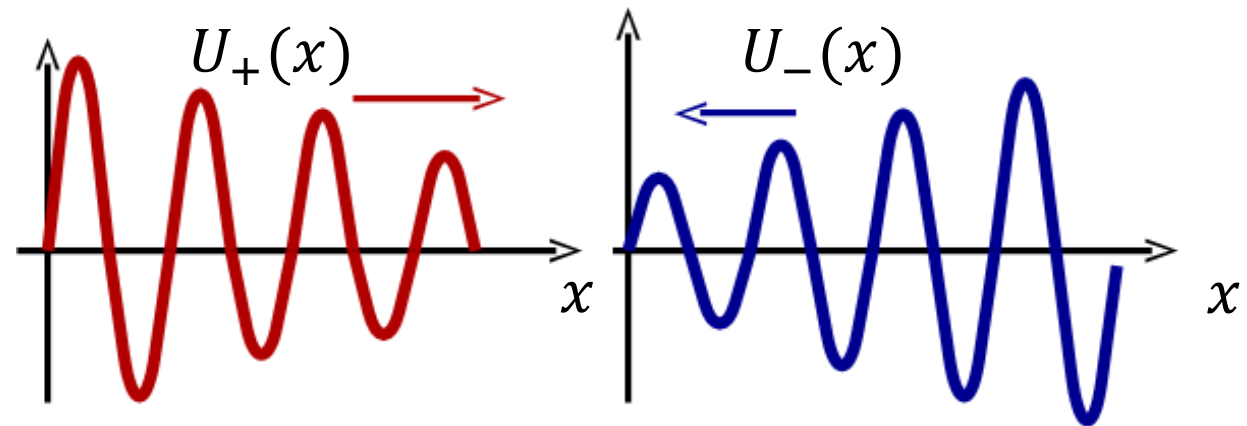
$$\gamma^2 \cong -\omega^2 LC \left( 1 - \frac{i\omega(LG+CR)}{\omega^2 LC} \right),$$

$$\gamma \cong \pm i\omega\sqrt{LC} \left( 1 - \frac{i(LG+CR)}{2\omega LC} \right) = \pm \frac{i\omega}{v_0} \pm \frac{1}{2} \left( G\rho + \frac{R}{\rho} \right),$$

$$\gamma_+ \cong -ik - \delta, \quad \gamma_- \cong ik + \delta, \quad k = \frac{i\omega}{v_0}, \quad \delta = \frac{1}{2} \left( G\rho + \frac{R}{\rho} \right),$$

$$U(x) = U_+(x) + U_-(x),$$

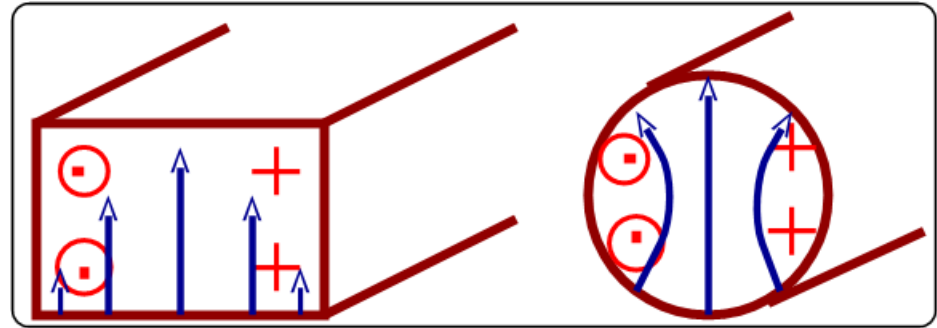
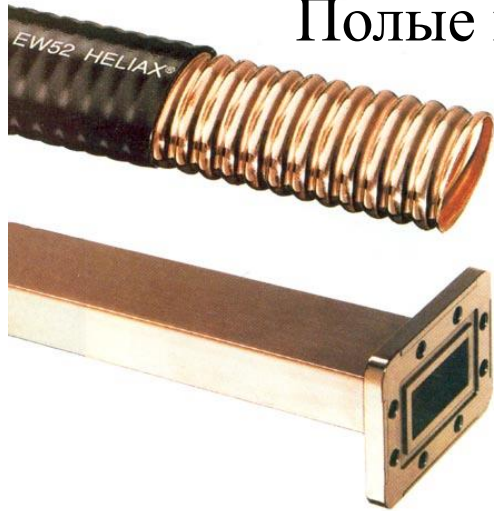
$$U_+(x) = U_+ e^{i\omega t} e^{(-ik-\delta)x}, \quad U_-(x) = U_- e^{i\omega t} e^{(ik+\delta)x}.$$



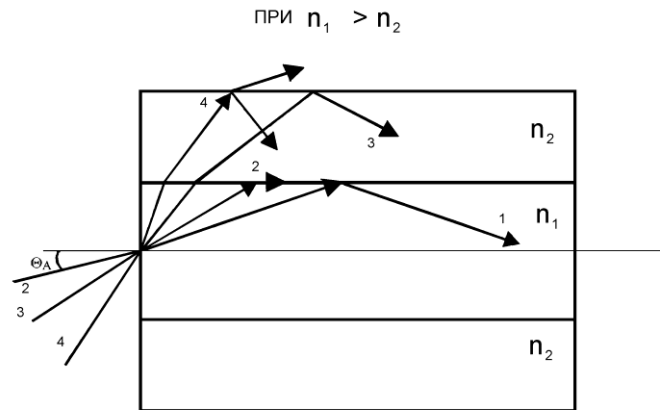


# Другие распределенные колебательные системы (условие поперечной квазистационарности не выполнено!)

## Полые металлические волноводы



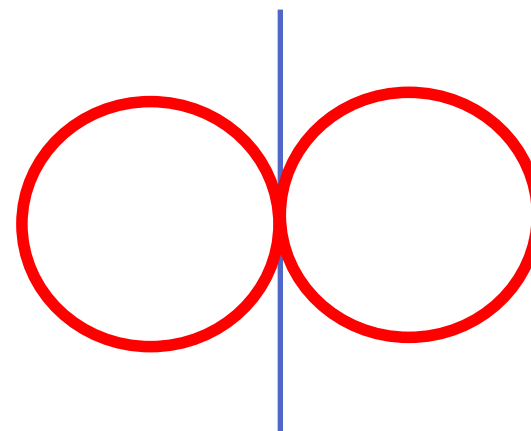
## Диэлектрические волноводы



# Излучающие системы.



## Полуволновый диполь



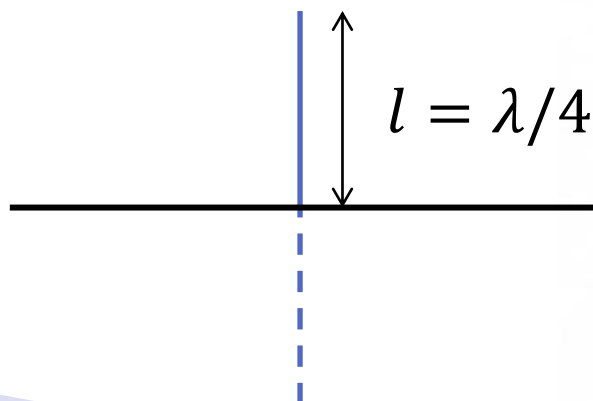
$$l = \lambda/2$$

$$Z_{\lambda/2} \cong 73 \text{ Ом}$$

(чисто активное - отражения нет)

Диаграмма направленности

## Четвертьволновый излучатель



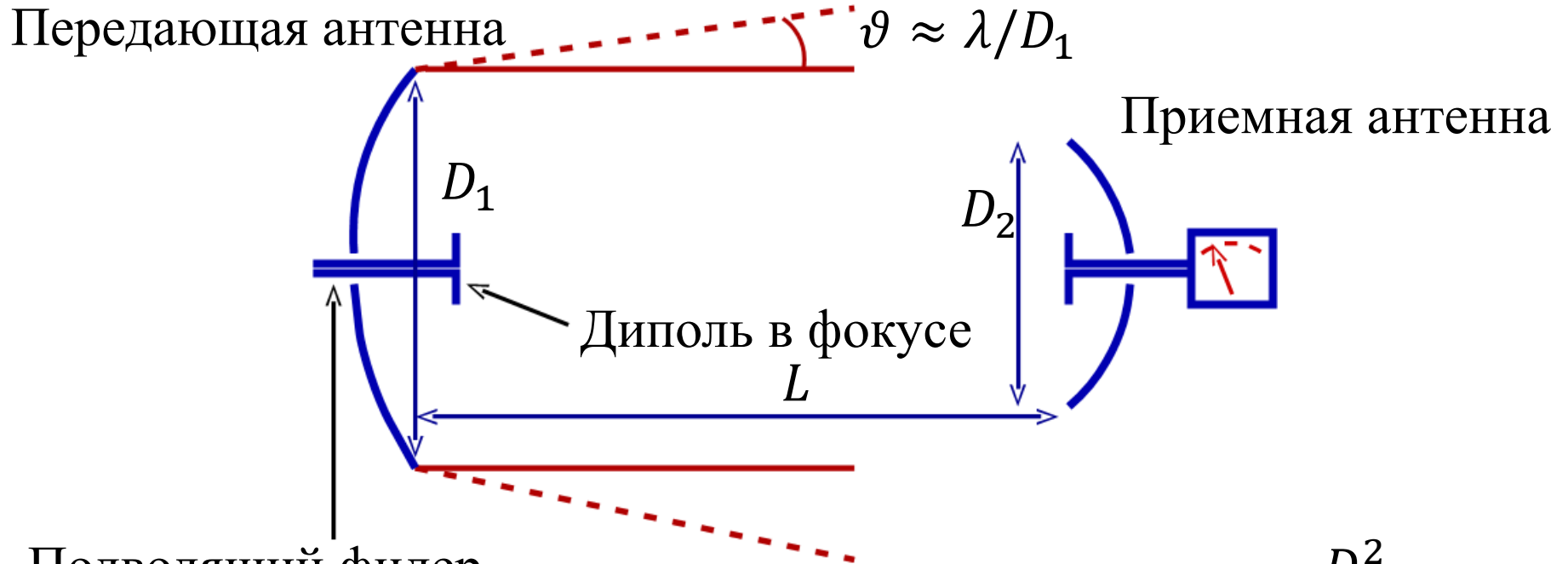
$$l = \lambda/4$$





# Излучающие системы.

## Формирование диаграммы направленности



Подводящий фидер  
(длинная линия)

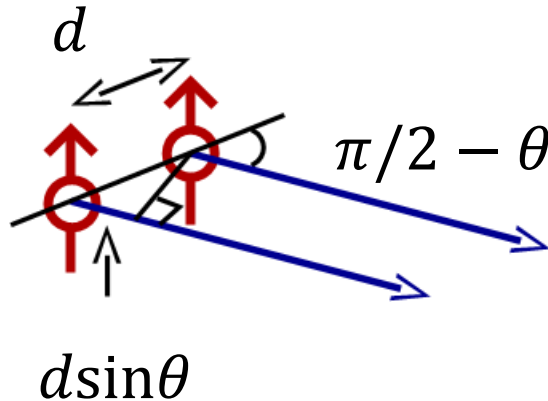
$$\Delta E = W_{\text{прием}} \tau = W_{\text{передат}} \times \frac{D_2^2}{\left(L \frac{\lambda}{D_1}\right)^2} \tau =$$



$$= W_{\text{передат}} \tau \times \left(\frac{D_1 D_2}{L \lambda}\right)^2$$



## Направление излучения



Пусть  $a$  - амплитуда волны, создаваемой каждым диполем,  $\varphi$  - разность фаз между ними.

Ищем  $A$  - амплитуду от двух диполей:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta + \varphi, \quad a \cos\omega t + a \cos(\omega t + \Delta\phi) = A \cos(\omega t + \dots),$$

$$A^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cos\Delta\phi = 4a^2 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} = 4a^2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta + \frac{\varphi}{2} \right)$$

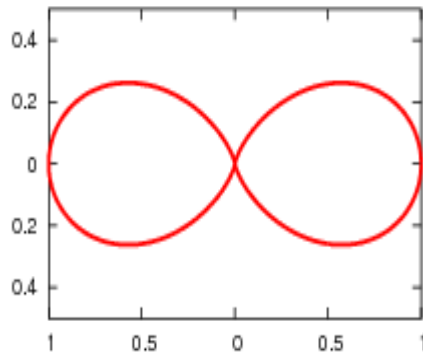
Пусть  $\varphi = 0$  -- волны когерентны. Тогда максимумы при

$$\sin\theta = \pm m \frac{\lambda}{d}, \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

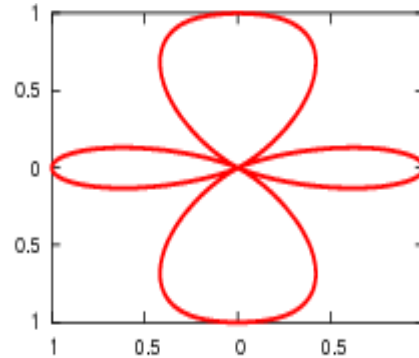


## Примеры диаграмм (в плоскости $\perp$ диполям):

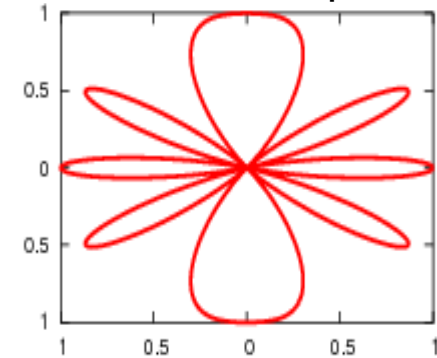
$$d = \lambda/2, \quad \phi = 0$$



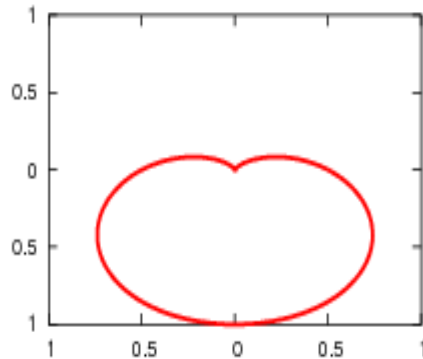
$$d = \lambda, \quad \phi = 0$$



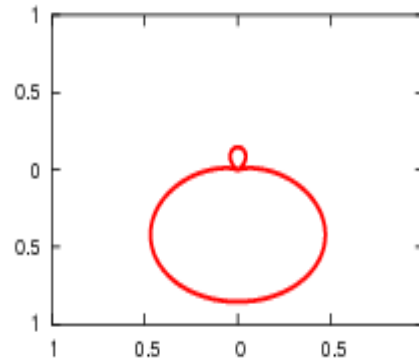
$$d = 2\lambda, \quad \phi = 0$$



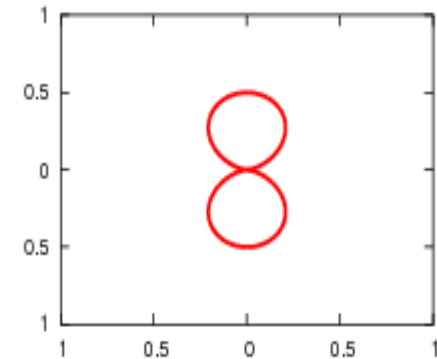
$$d = \lambda/4, \quad \phi = \pi/2$$



$$d = \lambda/4, \quad \phi = 3\pi/4$$

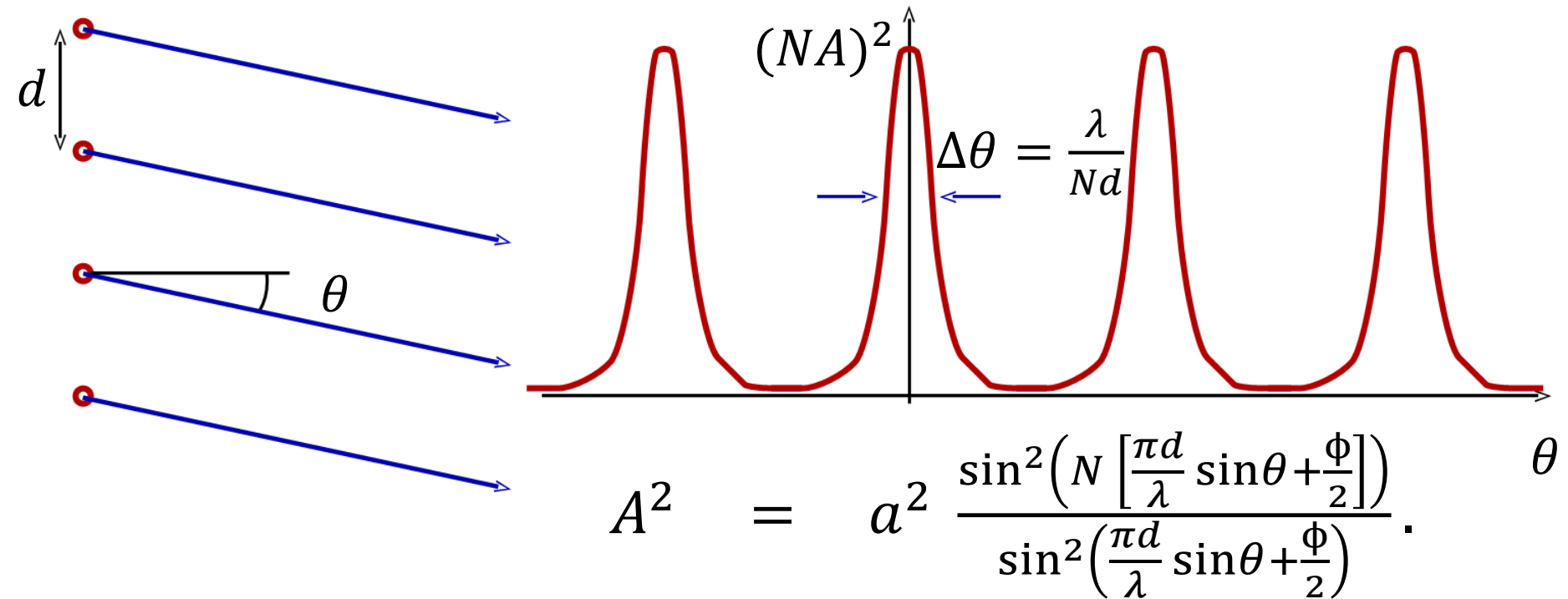


$$d = \lambda/4, \quad \phi = \pi$$





## N когерентных (синфазных) диполей



$\phi$  - разница фаз между соседями.

При  $d < \lambda/2$  - только один пик. Можно управлять диаграммой направленности электрически – **нет вращающихся частей.**





## Вывод формулы для амплитуды излучения решетки диполей

$$A^2 = a^2 \left| \sum_{n=0}^N e^{in(kd\sin\theta + \phi)} \right|^2 = a^2 \left| \frac{1 - e^{iN(kd\sin\theta + \phi)}}{1 - e^{i(kd\sin\theta + \phi)}} \right|^2$$

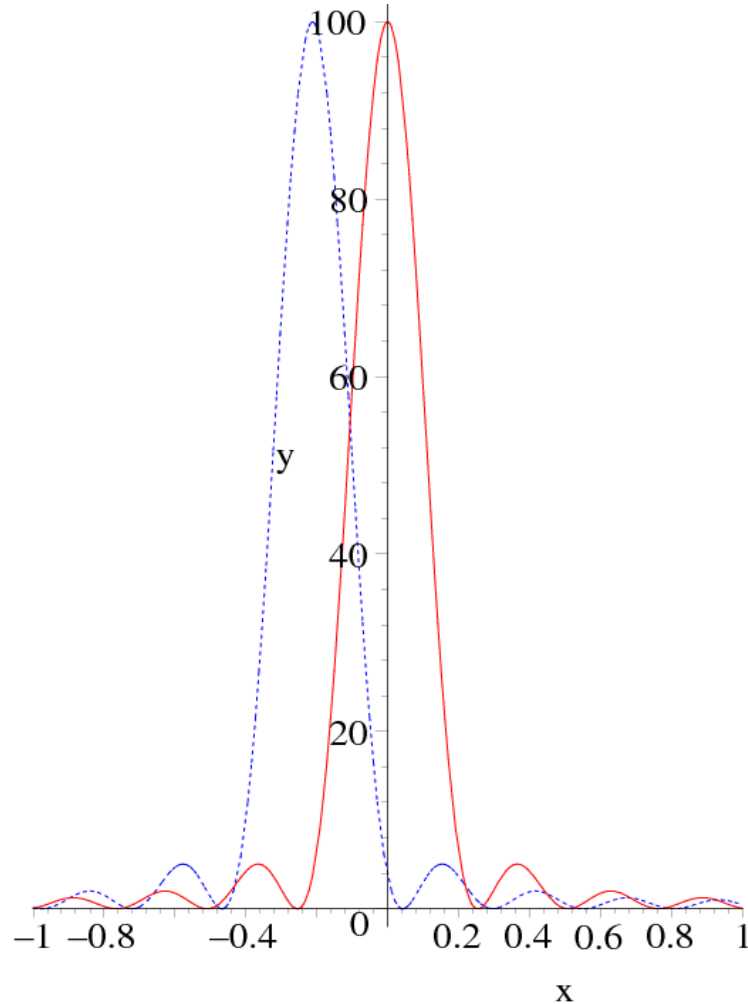
Вспомогательная формула:

$$\begin{aligned} |1 - e^{i\alpha}|^2 &= |1 - \cos\alpha - i\sin\alpha|^2 = (1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \\ &= 2(1 - \cos\alpha) = 4\sin^2(\alpha/2) \end{aligned}$$

$$A^2 = a^2 \frac{\sin^2[N(kd\sin\theta + \phi)/2]}{\sin^2[(kd\sin\theta + \phi)/2]} = a^2 \frac{\sin^2\left(N \left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta + \frac{\phi}{2}\right]\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin\theta + \frac{\phi}{2}\right)}.$$



**Пример: диаграмма направленности.  $N = 10$ .**  
 **$d = \lambda/4$  (один пик),  $\phi = 0, \pi/6$**



**Антенна типа YAGI:**  
Энергия подводится только к одному диполю, сдвиги фазы создаются небольшим изменением длины (расстройкой) элементов



## То же самое для приема:

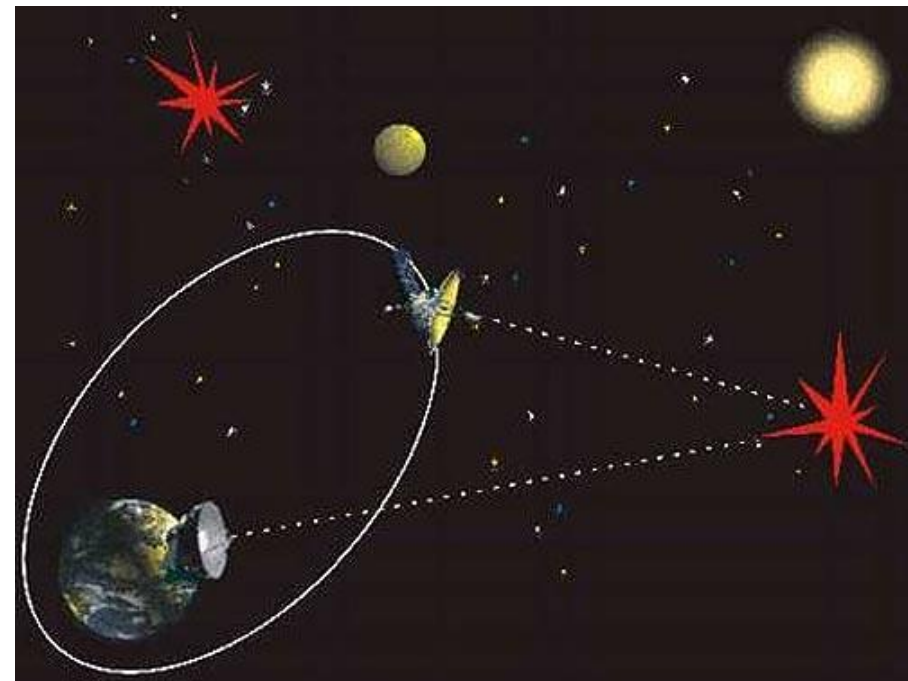
если есть фазовая решетка из  $N \gg 1$  приемников, то вводя различные времена задержки в каждом приемнике, можно ``слушать" ВСЕ небо.

Два приемника, разнесенные на расстояние  $L$ , дают угловое разрешение источника  $\theta \sim \lambda/L$ .

**Астрокосмический центр ФИАН-  
Проект «Радиоастрон»:**

$\lambda = 1.2$  см,  $L = 300000$  км  
(апогей эллиптической орбиты),  
 $\theta \sim 10$  мксек

В оптике такого (пока) нет.





# Российская космическая обсерватория «Радиоастрон»

Проект «Радиоастрон» позволит увидеть далекие объекты космоса в небывалом разрешении

**Параболическая антенна**  
• Диаметр – 10 м  
• Состоит из 27 твердых лепестков из углеродистого пластика

**Малонаправленные антенны**

**Фокальный модуль**

**«Радиоастрон» – первый в истории российский радиотелескоп на орбите**

Он будет изучать:

- ядра галактик
- черные дыры
- нейтронные звезды
- облака межзвездной плазмы
- гравитационное поле Земли
- и многие другие объекты и явления Вселенной

Заказчик: Роскосмос

Головной исполнитель проекта: НПО имени Лавочкина

Разработчик научной аппаратуры: Астрокосмический центр ФИАН

Запуск: 18 июля 2011

Срок активного существования: не менее 5 лет

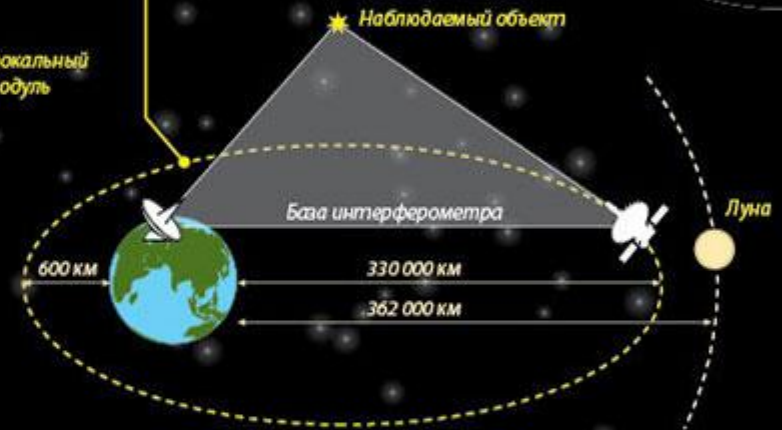
**Служебный модуль «Навигатор»**

**Высокоинформативный радиокомплекс**

**Солнечные батареи**

**Орбита: высокоэллиптическая**

- апогей: 330 000 км
- перигей: 600 км
- период обращения: 8,2 суток



«Радиоастрон» будет работать совместно с международной сетью наземных радиотелескопов, образуя **гигантский наземно-космический телескоп (т.н. интерферометр)** высочайшего углового разрешения.

Это позволит получить изображения далеких объектов **в тысячу раз более детальные, чем у орбитального телескопа «Хаббл»**





## CERTIFICATE

**The largest radio space telescope  
is the Spektr-R,  
which is 10 metres across,  
and was launched from the  
Baikonur Cosmodrome  
in Kazakhstan,  
on 18 July 2011**

OFFICIALLY **AMAZING**



© GUINNESS WORLD RECORDS LIMITED 2012. THIS CERTIFICATE DOES NOT NECESSARILY DENOTE AN ENTRY INTO ANY PRODUCTS DISTRIBUTED OR OWNED BY GUINNESS WORLD RECORDS LIMITED AND MUST NOT BE REPRODUCED WITHOUT PRIOR WRITTEN PERMISSION OF GUINNESS WORLD RECORDS LIMITED.

[GUINNESSWORLDRECORDS.COM](http://GUINNESSWORLDRECORDS.COM)

# Радиотелескоп FAST (Китай): Площадь 500 м<sup>2</sup>





# Проект SKA: Радиотелескоп с эффективной площадью антенн $1 \text{ км}^2$

