



## Шумы в радиофизических системах

Шум – случайный процесс:  $\xi(t)$

$\xi(t)$  – объединение всех возможных реализаций  $x(t)$

Среднее значение:  $\langle \xi(t) \rangle$

Дисперсия:  $\Delta^2 \xi(t) = \langle \xi^2(t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2$

Эргодическая гипотеза: усреднение по реализациям эквивалентно усреднению по времени:

$$\langle \xi(t) \rangle = \bar{x} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$\Delta^2 \xi(t) = \sigma = \overline{\Delta x^2} = \overline{(x(t) - \bar{x})^2}$$

Стационарный процесс:  $\bar{x}$ ,  $\sigma$  не зависят от времени.



# Шумы в радиofизических системах

Рассмотрим реализацию  $u(t)$  стационарного процесса

Пусть  $\overline{u(t)} = 0$

$B(\tau) = \overline{u(t)u(t - \tau)}$  – автокорреляционная функция

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)u(t - \tau) dt, \quad B(\tau) = B(-\tau), \quad (1)$$

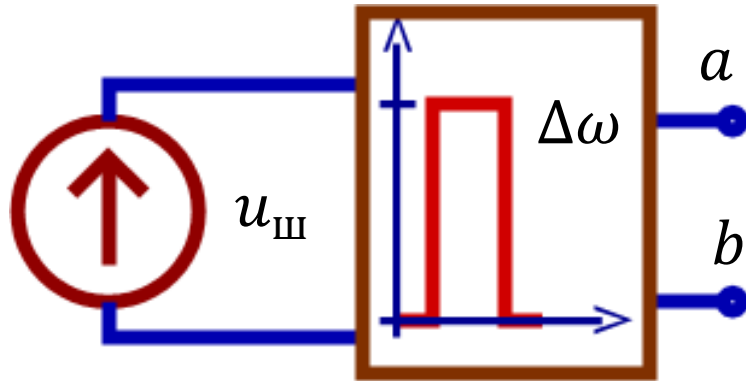
$$B(0) = \sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)^2 dt. \quad (2)$$



# Спектральная плотность

Традиционное определение спектральной плотности мощности шума  $\tilde{S}(\omega)$ :

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3)$$



Физический смысл спектральной плотности мощности шума: среднеквадратичное напряжение шума, генерируемое в единичной спектральной полосе:

$$\Delta u^2 \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_{ab}(t)^2 dt \simeq \tilde{S}_u(\omega) \times 2 \times \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (4)$$

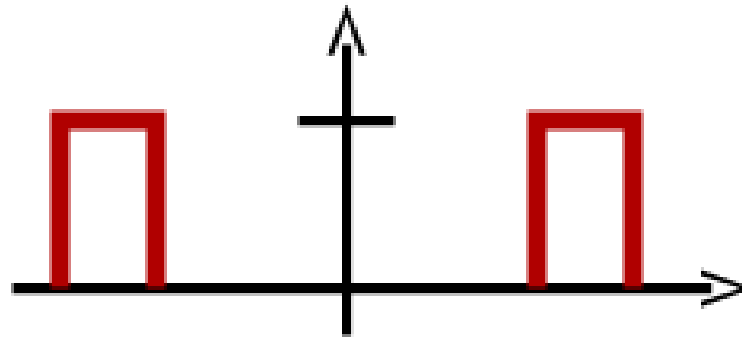


Дисперсия на выходе узкополосного фильтра  $\Delta\omega$  (4):

$$\Delta u_{\Delta\omega}^2 = \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \frac{\overline{u(\omega) u(\omega')^*}}{2\pi\delta(\omega-\omega')} \tilde{S}(\omega) e^{i(\omega-\omega')t} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \quad (5)$$

$$= \tilde{S}_u(\omega) \times 2 \times \frac{\Delta\omega}{2\pi}, \quad (6)$$

(спектральная плотность определена и для положительных, и для отрицательных частот)





## Теорема Винера-Хинчина

Формальное преобразование Фурье случайного процесса:

$$u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{i\omega t} dt, \quad \overline{u(\omega)} = 0,$$

$$\overline{u(\omega) u(\omega')^*} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(t)u(t')} e^{i(\omega t - \omega' t')} dt dt'$$

$$\tau = t - t',$$

$$\overline{u(t)u(t')} = B(t - t') = B(\tau),$$

$$\omega t - \omega' t' = \omega \tau + (\omega - \omega') t',$$

$$\overline{u(\omega) u(\omega')^*} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau$$

$$\text{НО: } \overline{u(\omega) u(\omega')^*} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_u(\omega).$$



## Теорема Винера-Хинчина:

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\sigma = B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

Здесь  $\tilde{S}(\omega)$  – «двусторонняя» спектральная плотность. Очевидно, что это совпадает с традиционным определением (3).



**«Одностороннее» определение спектральной плотности**  
Мы будем пользоваться «односторонним» определением спектральной плотности:

$$S^+(\omega) = 2\tilde{S}(\omega), \omega \geq 0$$

Теорема Винера - Хинчина для  
«односторонней» спектральной плотности:

$$S^+(\omega) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S^+(\omega) \cos \omega \tau \frac{d\omega}{2\pi}$$



Докажем теорему Винера - Хинчина для «односторонней» спектральной плотности:

$$\tilde{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad S^+(\omega) = 2\tilde{S}(\omega)$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad B(\tau) = B(-\tau)$$

$$S^+(\omega) \equiv 2\tilde{S}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B(\tau) (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) d\tau =$$

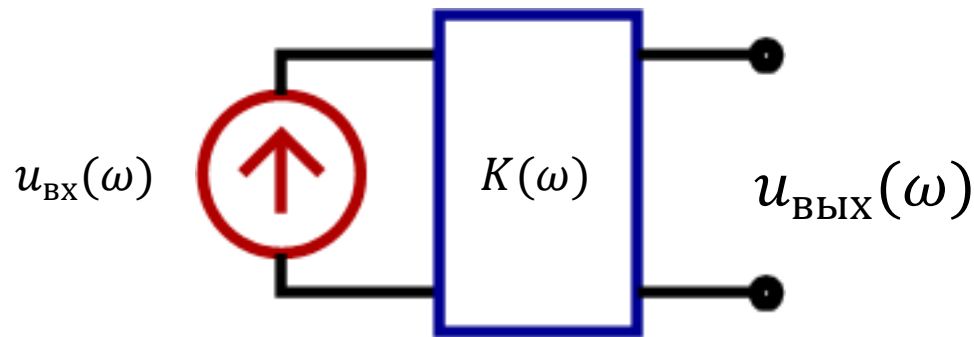
$$= \boxed{4 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau},$$

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} \tilde{S}(\omega) (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) \frac{d\omega}{2\pi} = \boxed{\int_0^{\infty} S^+(\omega) \cos(\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi}}$$





## Преобразование шума в линейных цепях



$$u_{\text{ВЫХ}}(\omega) = K(\omega) u_{\text{BX}}(\omega)$$

$$\overline{u_{\text{BX}}(\omega) u_{\text{BX}}(\omega')^*} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_{\text{BX}}(\omega),$$

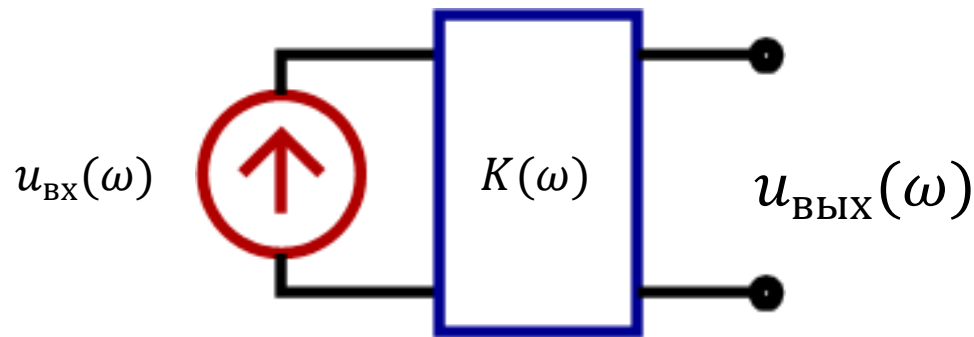
$$\overline{u_{\text{ВЫХ}}(\omega) u_{\text{ВЫХ}}(\omega')^*} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega),$$

$$u_{\text{ВЫХ}}(\omega) = K(\omega) u_{\text{BX}}, \quad \Rightarrow \quad \tilde{S}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = |K(\omega)|^2 \tilde{S}_{\text{BX}}(\omega),$$

Результат:  $\mathbf{S}_{\text{ВЫХ}}(\boldsymbol{\omega}) = |\mathbf{K}(\boldsymbol{\omega})|^2 \mathbf{S}_{\text{BX}}(\boldsymbol{\omega})$



## Преобразование шума в линейных цепях



$$u_{\text{ВЫХ}}(\omega) = K(\omega) u_{\text{BX}}(\omega)$$

$$S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = |K(\omega)|^2 S_{\text{BX}}(\omega)$$

### Размерность спектральной плотности мощности флуктуаций

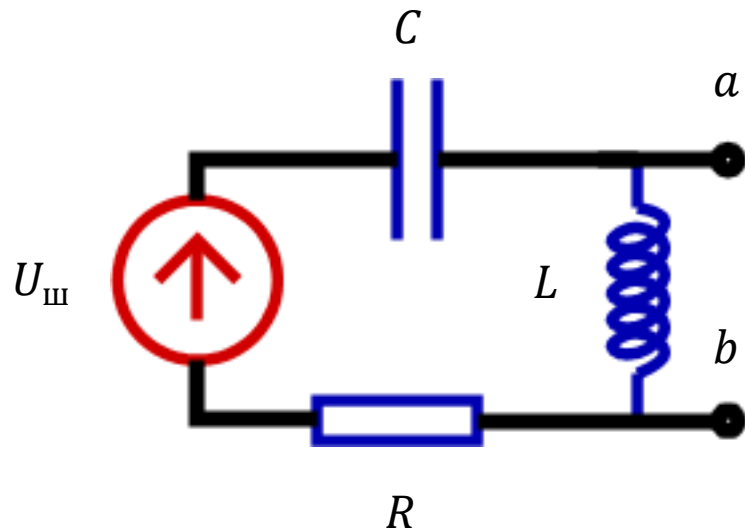
$$[\tilde{S}_u(\omega)] = \frac{\text{В}^2}{\text{Гц}}$$

$$[\tilde{S}_I(\omega)] = \frac{\text{А}^2}{\text{Гц}}$$

- Зависит от того, рассматриваются ли флуктуации напряжения или тока.



## Пример: преобразование шума в линейных цепях



Пусть  $S(\omega)$  --- спектральная плотность мощности шумового напряжения  $U_{ш}$ . Какова спектральная плотность мощности  $S_{ab}(\omega)$  напряжения  $U_{ab}$ ?

$$U_{ab} = U_{ш} \times K(\omega), \quad K(\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L + 1/i\omega C}$$

$$S_{ab} = S(\omega) \times |K(\omega)|^2 = \frac{S(\omega) \omega^2 L^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$



## Белый шум

$$S^+(\omega) = S_{\text{const}} \quad (\text{не зависит от } \omega).$$

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} S^+(\omega) \cos(\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{S_0}{2} \delta(\tau)$$

Это модель шума *без памяти*. ( $\delta$  – коррелированный шум)

В реальности реализован быть не может: несет бесконечную энергию!

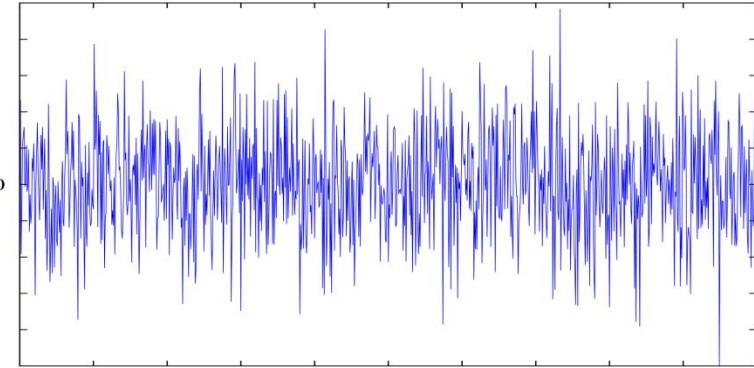
Однако, во многих случаях можно использовать эту модель, если в пределах исследуемой полосы частот  $S^+(\omega) = S_{\text{const}}$

# Основные виды шумов



1). Тепловой шум (белый)

2). Дробовой шум (белый)



3) Генерационно-рекомбинационный шум  
(в полупроводниках)

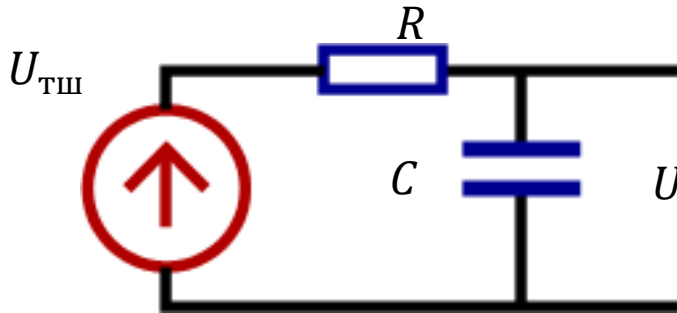
4). Фликкерный шум (избыточный шум или « $1/f$ » - шум)

5). «Технические» шумы



# Тепловой шум

$$S_{\text{ТШ}}^+(\omega) = S_0^+,$$



$$\overline{U_C^2} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_C(\omega).$$

$$U_C(\omega) = \frac{U_{\text{ТШ}}/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)}, \quad S_C^+(\omega) = \frac{S_0^+}{1 + (\omega RC)^2},$$

$$\overline{U_C^2} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{S_0^+}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{S_0^+}{2\pi RC} \operatorname{arctg}(\omega RC) \Big|_0^{\infty} = \frac{S_0^+}{4RC},$$

$$\frac{C\overline{U_C^2}}{2} = \frac{\kappa T}{2},$$

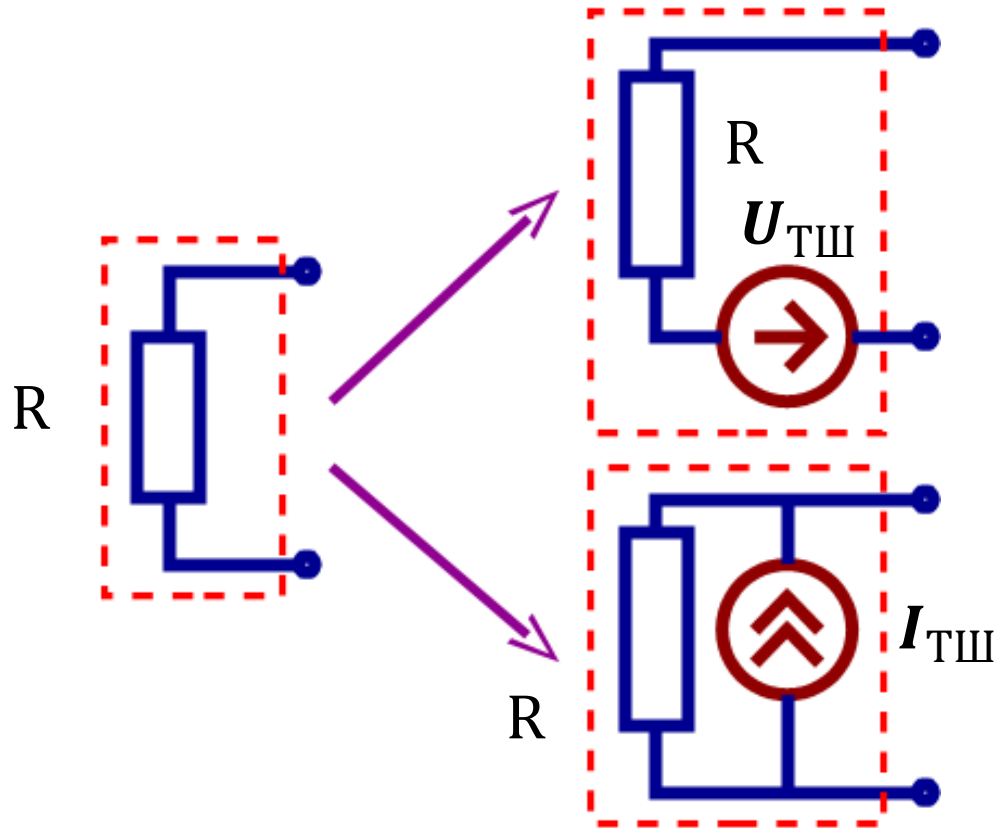
$$\Rightarrow \boxed{S_0^+ = 4\kappa TR},$$

–теорема Найквиста. Флуктуации в полосе  $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$  :

$$\Delta U_{\text{ТШ}}^2 \simeq 4\kappa TR \Delta f = \frac{2}{\pi} \kappa TR \Delta\omega$$



# Эквивалентные представления источников теплового шума:



$$S_U(\omega) = 4kTR,$$

$$S_I(\omega) = \frac{4kT}{R}$$



## Обобщение теоремы Найквиста

$$S_0 = 4R \left( \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1} \right),$$

$$\hbar\omega \ll \kappa T \Rightarrow S_0 = 4\kappa TR$$

В квантовом случае ( $T \rightarrow 0$ ):  $S_0 = 2R\hbar\omega$

$$T = 300^\circ K \Rightarrow f_{\text{гр}} = \frac{\omega_{\text{гр}}}{2\pi} = \frac{\kappa T}{h} \simeq 6 \cdot 10^{12} \text{ Гц.}$$

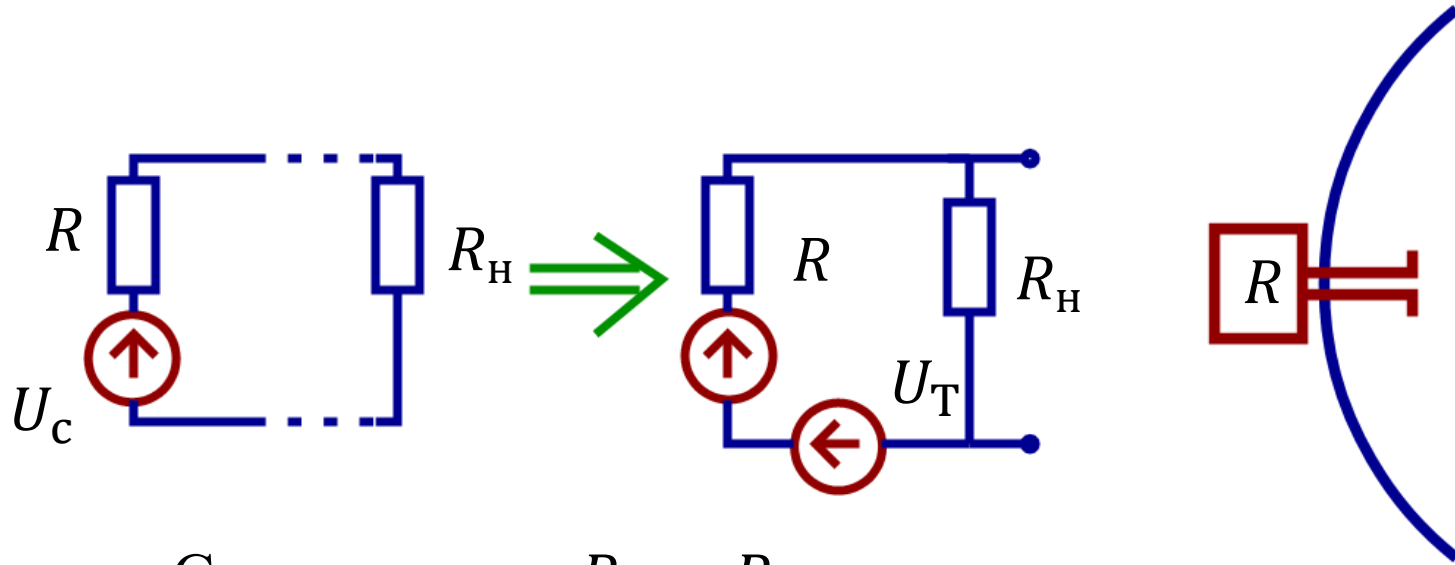
При  $f > f_{\text{гр}}$  надо пользоваться квантовой формулой.

**Теорема Найквиста - частный случай флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ).** Смысл ФДТ: чем больше потери, тем больше спектральная плотность шумов.





# Пример: минимально обнаружимая мощность



Согласование:  $R_H = R$ .

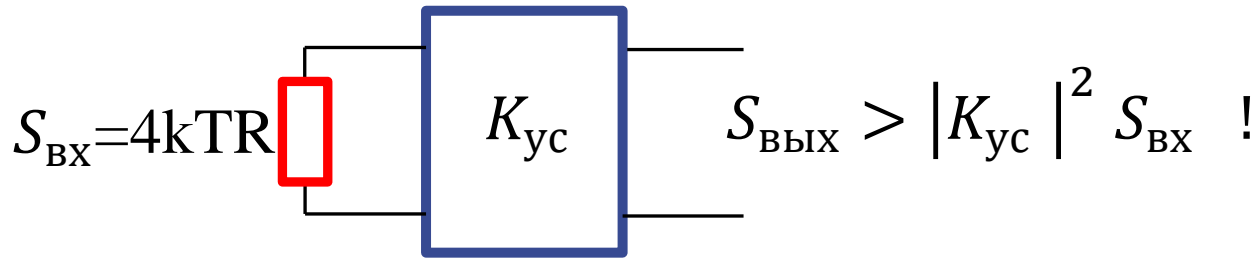
Тепловая мощность:

$$W_T = \frac{U_T^2 R}{(R + R_H)^2} = \kappa T \Delta f$$

Условие обнаружения:  $U_{\text{сигн}}^2 > U_T^2$ , или  $W_{\text{сигн}} > W_T$ .



# Шумы в усилителях



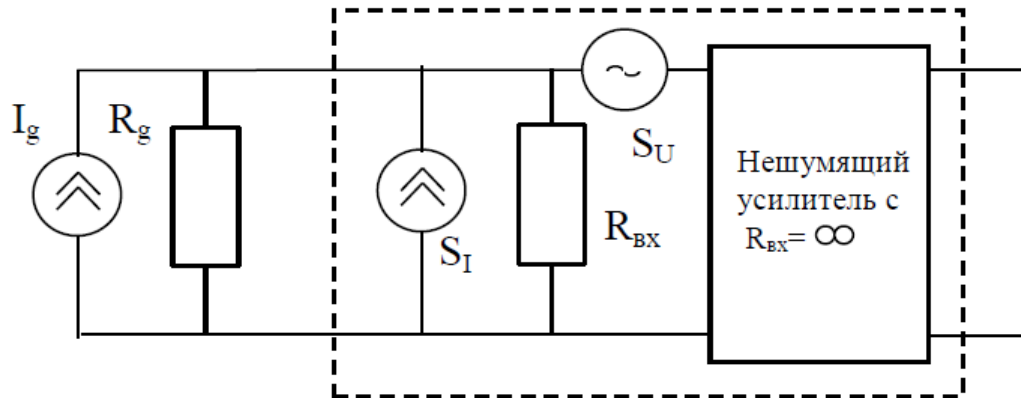
$S_{\text{ВЫХ}}/S_{\text{ВХ}}$  зависит от соотношения  $R$  и  $R_{\text{ВХ}}$

Согласование с источником по шумам – такое  $R$ , что  $S_{\text{ВЫХ}}/S_{\text{ВХ}}$  минимально.

Тогда:  $S_{\text{ВЫХ}} = |K_{\text{ус}}|^2 \cdot 4k(T_{\text{ВХ}} + T^*)R$

$T^*$  - эффективная шумовая температура усилителя.

Эквивалентная схема:



При  $\frac{R_{\text{ВХ}}^2 S_I}{S_U} \ll 1$

условие согласования

$$R_g = R_{\text{ВХ}}$$

и

$$T^* = \frac{S_U}{kR_{\text{ВХ}}}$$

05.10.2020



# Характеристики шумов в усилителях

Пусть усилитель *согласован с источником по шумам*.

Дисперсия выходного напряжения:

$$U_{n, \text{ВЫХ}}^2 = K^2 \cdot 4k(T_{\text{ВХ}} + T^*)R_{\text{ВХ}} \Delta f$$

Если на входе присутствует сигнал с амплитудой  $U_s$

$$F = \left( \frac{U_s}{U_n} \right)_{\text{ВХОД}}^2 / \left( \frac{U_s}{U_n} \right)_{\text{ВЫХОД}}^2 = \frac{T_{\text{ВХ}} + T^*}{T_{\text{ВХ}}} = 1 + \frac{T^*}{T_{\text{ВХ}}}$$

$F$  --- коэффициент шума усилителя

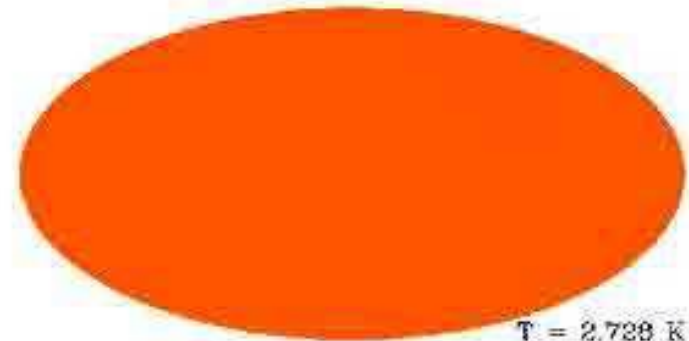
$$F_{\text{дб}} = 10 \log F$$

Усилитель на полевых транзисторах (FET):  $T^* \cong 1^\circ \text{ К}$  (очень хорошие, при физической  $T = 4^\circ \text{ К}$ ). При комнатной температуре "хороший"  $T^* \cong 20^\circ \text{ К}$   
(  $F_{\text{дб}} = 0.3$ ,  $F = 1.07$  )

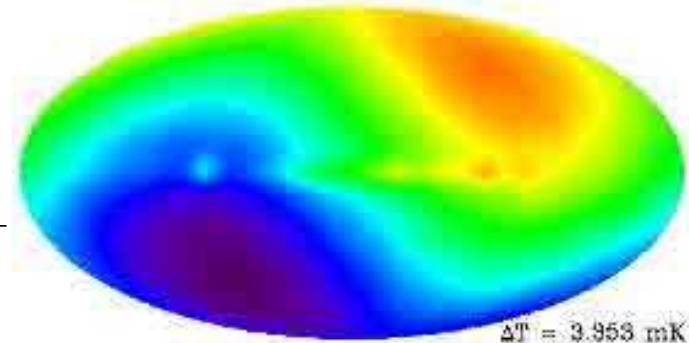


# Пример: реликтовое излучение

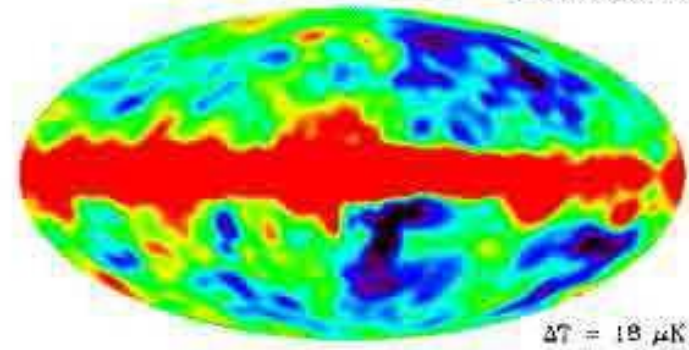
«Изображение» Вселенной в момент последнего рассеяния



Эксперименты Cobe (1989-1991), Реликт – неоднородность реликтового излучения.

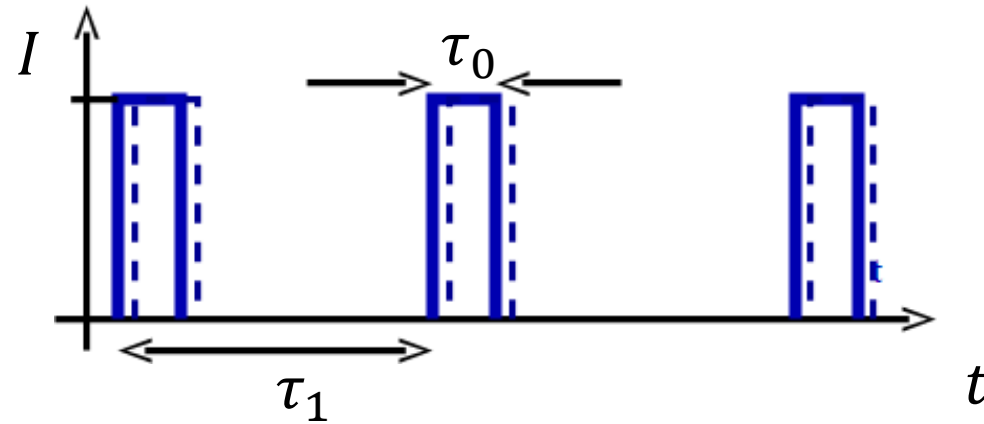
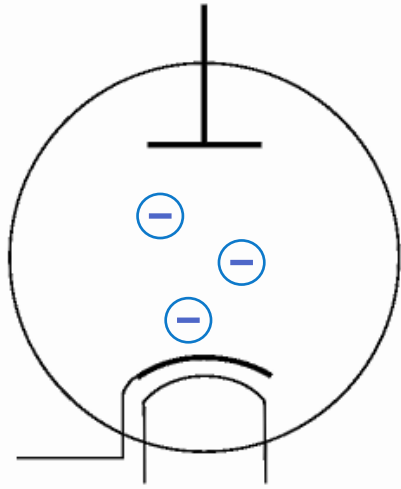


WMAP (2001) - подтвердил и уточнил данные Реликта и КОБЕ





# Дробовой шум



$$\tau_0 \ll \tau_1 \quad \bar{I} = \frac{e}{\tau_1}$$

$$\overline{I(t)I(t-\tau)} = B(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I(t)I(t-\tau) dt$$

$$B(\tau) = \frac{I_0^2}{\tau_1} (\tau_0 - |\tau|), \quad \text{если } |\tau| < \tau_0,$$
$$B(\tau) = 0, \quad \text{если } |\tau| > \tau_0.$$



Нас интересуют частоты  $\omega \ll 1/\tau_0$ , поэтому можно считать, что

$$B(\tau) = \frac{I_0^2 \tau_0^2}{\tau_1} \delta(\tau) = \frac{e^2}{\tau_1} \delta(\tau)$$

Рассчитываем спектральную плотность:

$$S_{\text{др}}(\omega) = 4 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{e^2}{\tau_1} = 2e\bar{I}$$

$$\Delta I^2 = S_{\text{др}}(\omega) \cdot \frac{\Delta \omega}{2\pi} = 2e\bar{I} \Delta f.$$

Это теорема Шоттки:

$$S_{\text{др}}(\omega) = 2e\bar{I}$$



## Условия применимости теоремы Шоттки:

- Малое время  $\tau_0$  “импульса тока” -  $\omega\tau_0 \ll 1$ .  
Если  $\omega\tau_0 \geq 1$ , то  $S_{\text{др}}(\omega)$  меньше (!).
- Нет корреляции между зарядами.  
(На самом деле из-за кулоновского отталкивания может возникать депрессия дробового шума).
- Нет сгустков зарядов.  
(На самом деле есть - спектральная плотность  $S_{\text{др}}(\omega)$  растет на низких частотах).

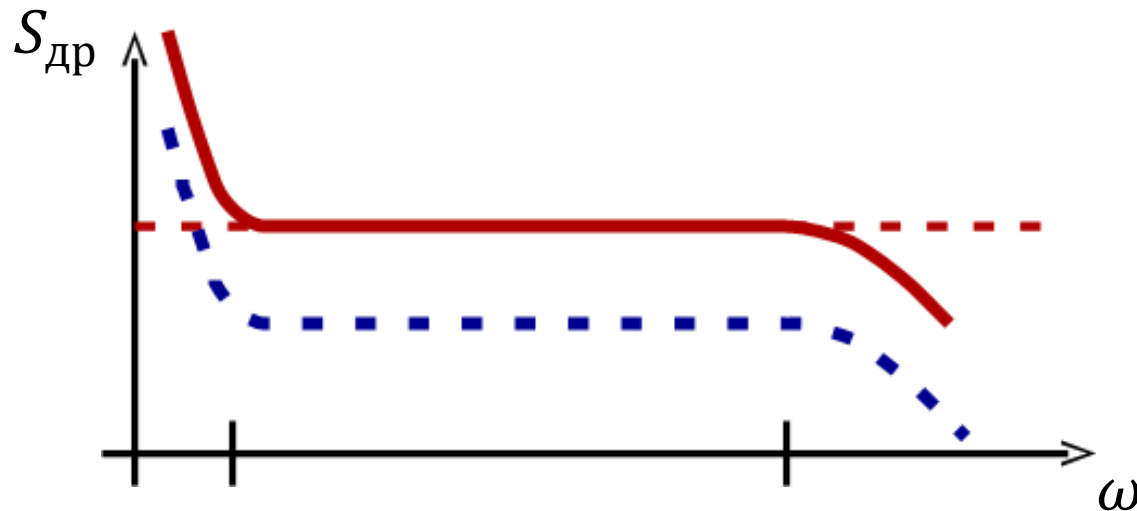


## Обобщенная формула Шоттки:

$$S_{\text{др}} = \beta(\omega) \Gamma \times 2e\bar{I}, \quad \beta(\omega) = \frac{1}{\omega^\alpha},$$

$$\alpha \simeq 1 \quad \omega < 2\pi \times 10^3 \text{ Гц},$$

$$\beta(\omega) \simeq 0.5 \quad \text{при} \quad \omega \simeq 1/\tau_0, \quad 0.05 < \Gamma \leq 1.$$







## Генерационно-рекомбинационный шум

Источник: флуктуациях числа свободных носителей заряда в зоне проводимости.

Пусть  $N_0$  - среднее число носителей в зоне проводимости,  $\overline{\delta N^2}$  - его дисперсия,  $\tau_N$  - характерное время жизни этих носителей.

Тогда:  $B_N(0) \equiv \overline{\delta N^2}$

а для  $t \neq 0$   $B_N(t) \equiv \overline{\delta N^2} \exp(-t/\tau_N)$ .

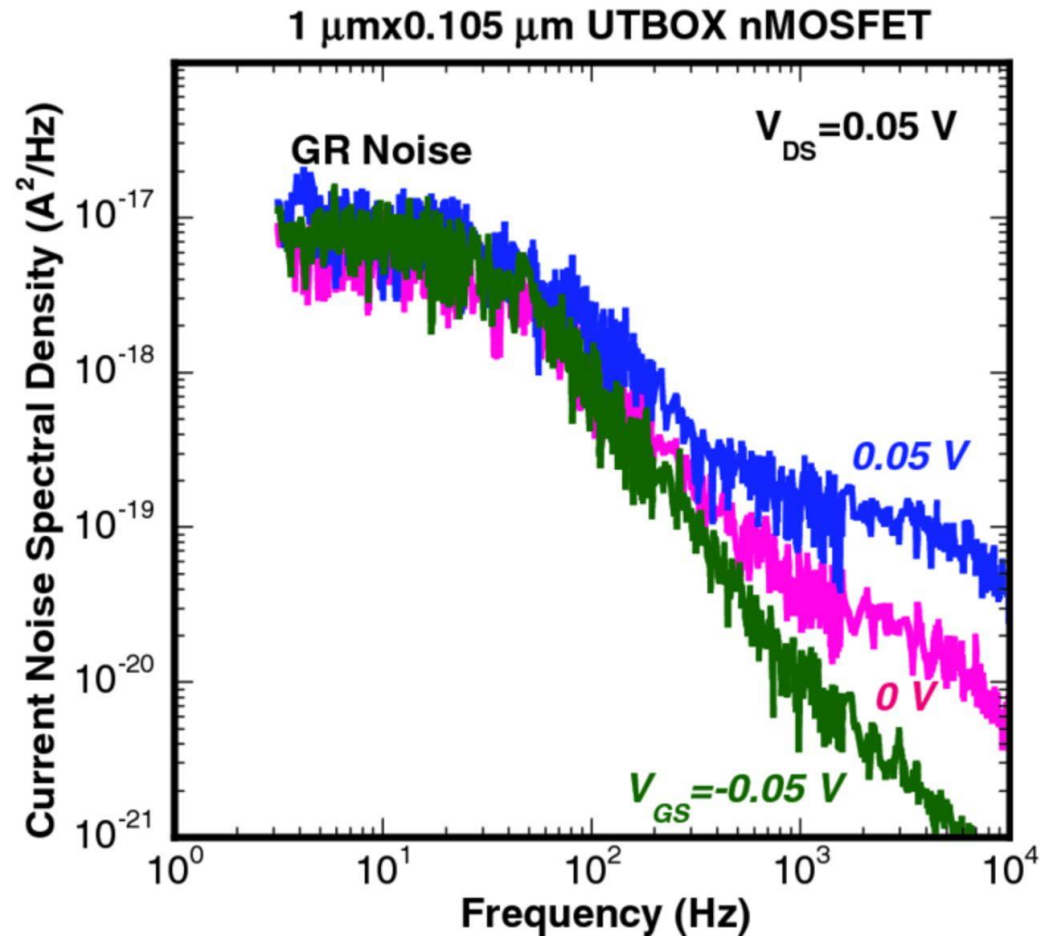
$$S_{N,ГР}^+(\omega) = 4 \int_0^{\infty} B_N(t) \cos(\omega t) dt = 4 \overline{\delta N^2} \int_0^{\infty} \exp(-t/\tau_N) \cos(\omega t) dt =$$
$$4 \overline{\delta N^2} \frac{\exp(-t/\tau_N) \left(-\frac{1}{\tau_N} (\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t))\right)}{\left(-\frac{1}{\tau_N}\right)^2 + \omega^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{4 \overline{\delta N^2} \tau_N}{1 + (\omega \tau_N)^2}.$$



# Генерационно-рекомбинационный шум

$$S_{I,GR}^+(\omega) = I_0^2 \frac{\overline{\delta N^2}}{N_0^2} \frac{4\tau_N}{1 + (\omega\tau_N)^2}$$

Для типичных полупроводников генерационно-рекомбинационный шум наблюдается на частотах до нескольких гигагерц.





## Фликер-шум

называется так же *шумом мерцания*, *избыточным шумом* или шумом "1/f" - шум, плотность мощности которого, ниже некоторой граничной частоты, растет с уменьшением частоты.

$$S = S_0 \frac{1}{f^\alpha}$$

$$\alpha = 0.8 \dots 1.4.$$

Источниками фликер-шума в электронных устройствах являются медленные изменения свойств материалов устройств.



## Фликер-шум

Предположим, что есть много релаксационных механизмов с различными  $\tau$ .

$D(\tau)$  - их распределение в диапазоне  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$

Суммарная спектральная плотность:

$$S(\omega): \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\tau}{\omega^2 \tau^2 + 1} D(\tau) d\tau$$

Если  $D(\tau) \sim \tau^{-1}$ , то  $S(\omega) \sim \omega^{-1}$   
в диапазоне частот  $\tau_2^{-1} \ll \omega \ll \tau_1^{-1}$ .



# Стабилизация частоты автогенераторов

Почему  $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$ ? как сделать  $\frac{d\omega}{dt} \rightarrow 0$ ?

Причины нестабильности частоты:

- Технические (долговременная нестабильность)
  - Нестабильность температуры контура.
  - Старение.
  - Дрейфы различных параметров.
- Флуктуационные (кратковременная нестабильность)
  - Тепловые.
  - Дробовые (если есть).
  - Квантовые.



## Техническая нестабильность частоты

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \alpha_{\text{т.к.ч.}} \Delta T, \alpha_{\text{т.к.ч.}} = \frac{d\omega_0}{\omega_0 dT} \text{ --- температурный}$$

коэффициент частоты (т.к.ч.).

Во многих случаях  $\alpha_{\text{т.к.ч.}} \simeq \alpha_T$  - линейный коэффициент теплового расширения.

Пример:  $\alpha_T \simeq 2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}^\circ, \Delta T = 5 \text{ mK} \Rightarrow \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \simeq 2 \cdot 10^{-5} \times 5 \cdot 10^{-3} \simeq 10^{-7}$  - обычный результат.

Кварцевый генератор (кристалл  $SiO_2$  заполняет емкость  $LC$ -

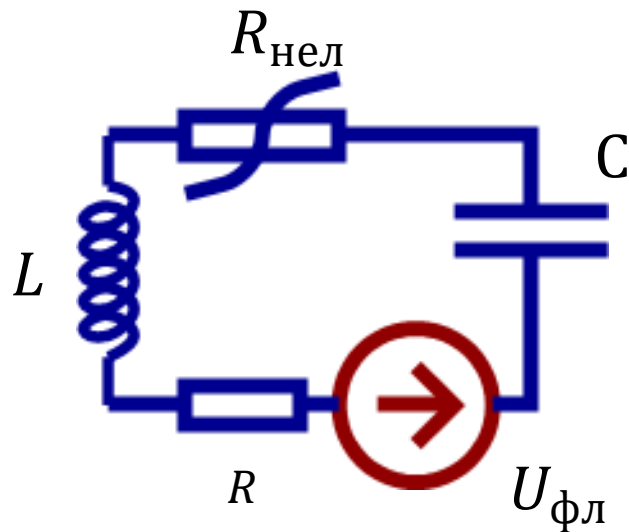
генератора, пьезоэффект):  $\alpha_{\text{т.к.ч.}} \simeq 10^{-8} \text{ 1/K}^\circ \Rightarrow \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \simeq 1 \cdot 10^{-10}$

за 1 сек.  $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \simeq 1 \cdot 10^{-7}$  за год (старение).

Старение и дрейфы: нет общей теории, есть эмпирические результаты. Любое физическое (и количественное!) понимание их механизмов приводит к уменьшению нестабильности.



# Флуктуационная нестабильность частоты автогенератора



Уравнение для заряда  $q$ :

$$L\ddot{q} + \underbrace{(R + R_{\text{нел}})}_{\text{в среднем } = 0} \dot{q} + \frac{q}{C} = U_{\text{фл}}$$

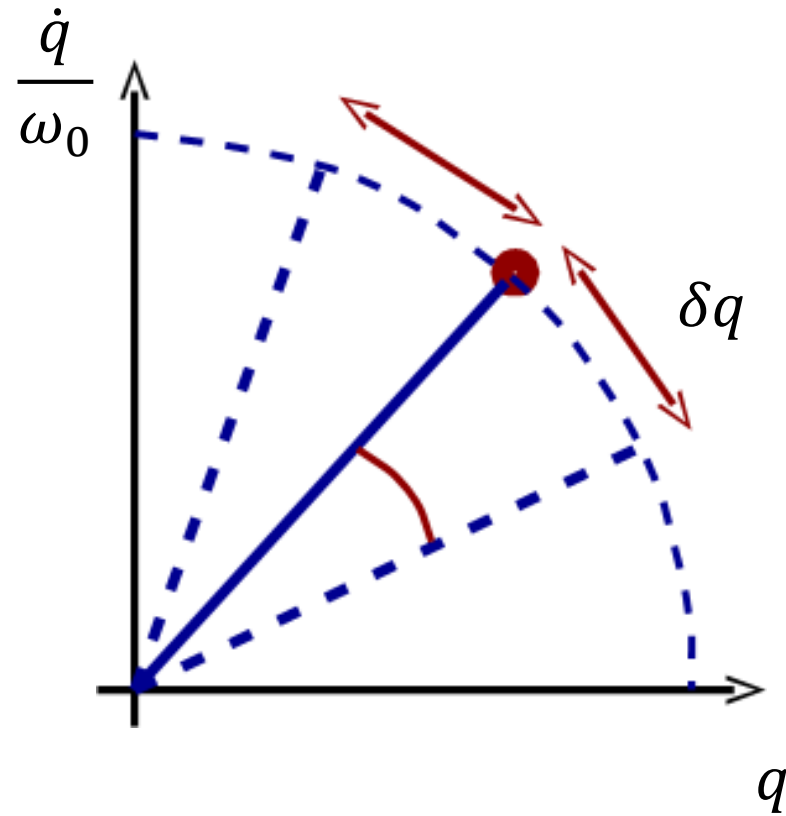
Амплитуда определяется нелинейностью. В общем виде:

$$\begin{aligned} q(t) &= (q_0 + \Delta q) \cos(\omega t + \Delta\varphi) \simeq \\ &\simeq (q_0 + \Delta q) \cos(\omega t) - q_0 \Delta\varphi \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Пренебрежем нелинейностью и оценим  $\Delta q$  и  $\Delta\varphi$  в линейном приближении.



# Флуктуации на фазовой плоскости







Используем не строгий, но наглядный вывод:

1. Пусть на контур действует резонансный гармонический источник в течение времени  $t_0 \ll 2\pi/\omega_0$ :

$$L\ddot{\delta q} + \frac{\delta q}{C} = U_0 \cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad \delta q = \frac{U_0 t_0}{2L\omega_0}$$

2. Заменим

$$U_0 \rightarrow \sqrt{\frac{4\kappa TR}{t_0}}, \quad \omega_0 t_0 \ll 1, \quad \text{но } t \gg t_0$$

Тогда изменение заряда за время  $t_0$ :

$$\delta q_{t_0} = \sqrt{\frac{4\kappa TR}{t_0}} \times \frac{t_0}{2L\omega_0} = \frac{\sqrt{4\kappa TR t_0}}{2L\omega_0}$$

Если  $t \gg t_0$ , то вариации  $\delta q_T$  складываются независимо:

$$\Delta q_t \simeq \frac{\sqrt{4\kappa TR t_0}}{2L\omega_0} \times \sqrt{\frac{t}{t_0}} = \frac{\sqrt{\kappa TR t}}{L\omega_0},$$



$$\Delta\varphi_t \simeq \frac{\Delta q_t}{q_0} = \frac{\sqrt{\kappa T R t}}{L\omega_0} \times \frac{1}{q_0} = \frac{\sqrt{\kappa T t L\omega_0/Q}}{Lq_0\omega_0} = \sqrt{\frac{\kappa T t}{L\omega_0 Q q_0^2}},$$

$$W = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{\omega_0^2 q_0^2 R}{2} \Rightarrow q_0^2 = \frac{2W}{\omega_0^2 R} = \frac{2W}{\omega_0^2} \times \frac{Q}{\omega_0 L},$$

$$(\Delta\varphi_t)^2 = \frac{\kappa T t}{L\omega_0 Q} \times \frac{\omega_0^2}{2W} \times \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{\kappa T \omega_0^2 t}{2Q^2 W} = Dt,$$

$$(\Delta\varphi_t)^2 = Dt, \quad \mathbf{D} = \frac{\kappa T \omega_0^2}{2Q^2 W}$$

$D$  - коэффициент диффузии фазы (фаза «гуляет» как броуновская частица).

Можно ввести время когерентности  $\tau_{\text{КОГ}}$  и длину когерентности  $L_{\text{КОГ}}$ :

$$(\Delta\varphi_T)^2 = \pi^2 = D\tau_{\text{КОГ}}, \quad L_{\text{КОГ}} = c\tau_{\text{КОГ}}.$$



## Естественная ширина линии

Получим формулу для относительной естественной ширины линии  $\Delta\omega_T/\omega_0$  автогенератора

$$\Delta\omega_T \simeq \frac{\Delta\varphi_T}{t}, \quad \frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \frac{\Delta\varphi_T}{\omega_0 t}.$$

$$\frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \sqrt{\frac{\kappa T}{2Q^2 W t}},$$

$$\text{при } T \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2Q^2 W t}}$$

- формула Таунса.



## Пример:

Пусть  $Q = 10^2$ ,  $W = 1 \text{ mW}$ ,  $T = 300 \text{ K}$ ,  $t = 1 \text{ сек}$ ,  
 $\omega_0 = 10^7 \text{ сек}^{-1}$ . Тогда

$$\Delta\omega_T/\omega_0 \simeq 1.4 \cdot 10^{-11},$$

$$\tau_{\text{КОГ}} \simeq 5 \cdot 10^8 \text{ сек},$$

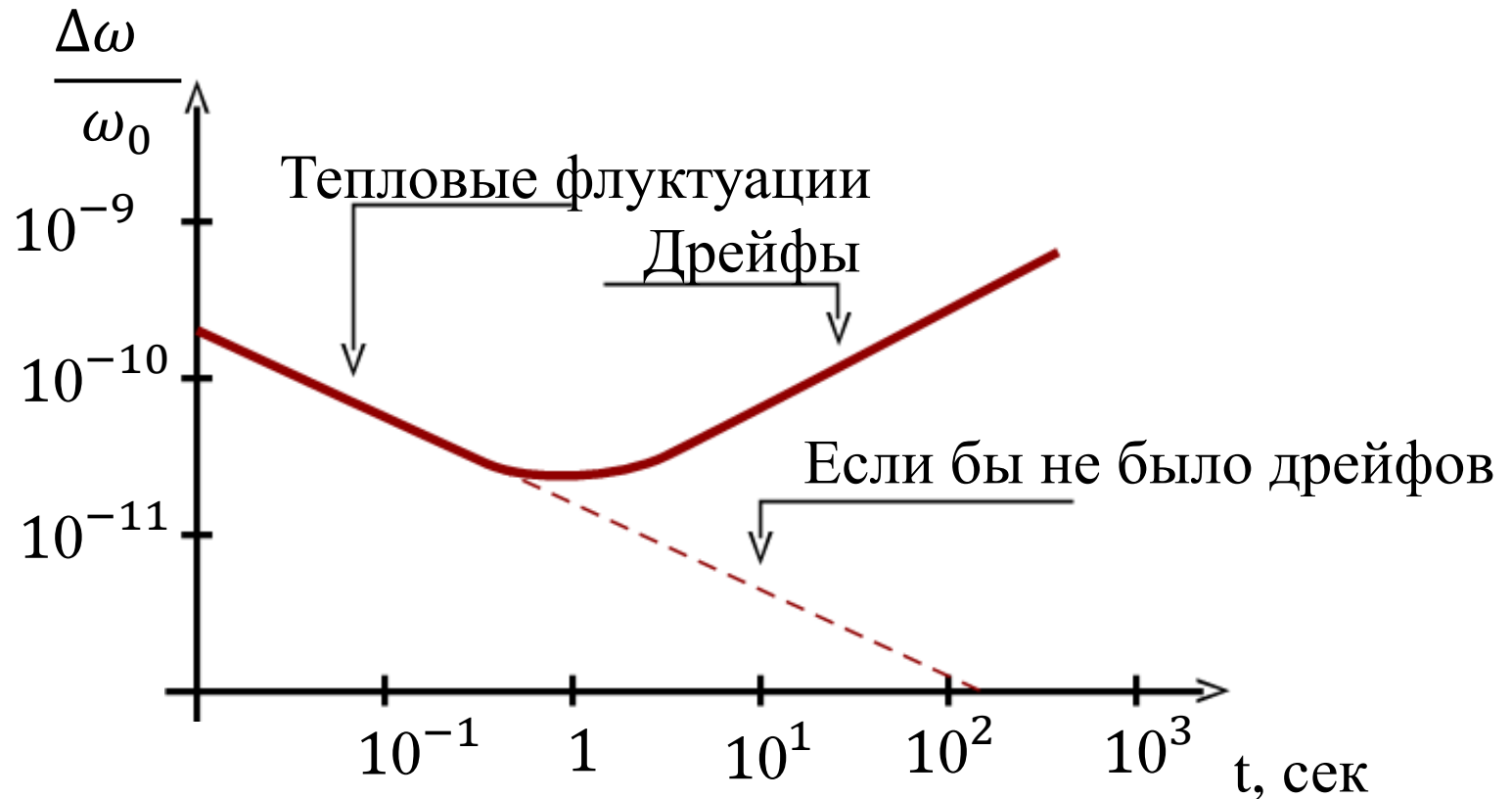
$$L_{\text{КОГ}} \simeq 1.5 \cdot 10^{17} \text{ м.}$$

## Кварцевый генератор:

$$Q \simeq 10^7, \Rightarrow \Delta\omega_T/\omega_0 \simeq 1/4 \cdot 10^{-16} \text{ (за 1 сек)}.$$

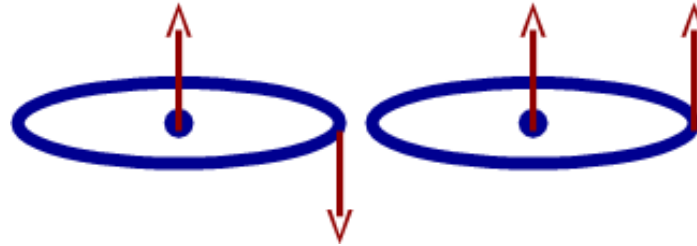


## Пример для кварцевого генератора





## Водородный стандарт



$$f_{00} = 1\,420\,405\,751,786 \pm 0,004 \text{ Гц}$$

Уровень воспроизведения

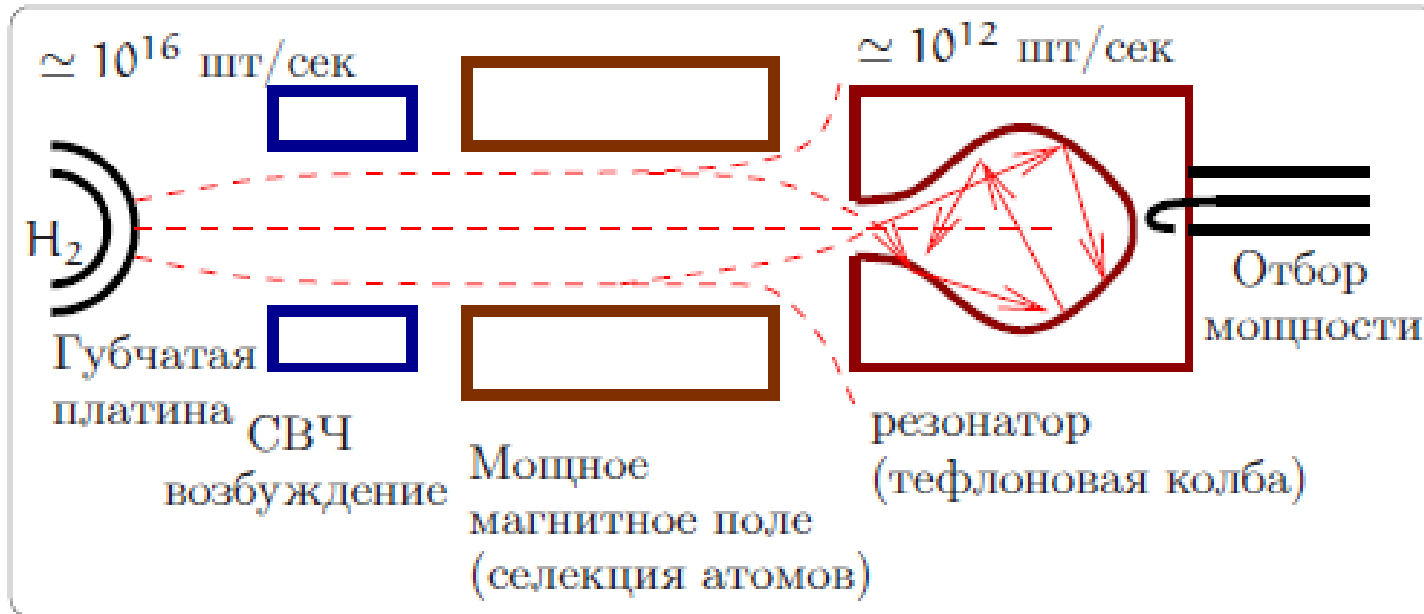
(метрологическая точность):

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq 3 \cdot 10^{-13}$$

Мазерный эффект: **M**icrowave  
**A**mplification by **S**timulated **E**mission of  
**R**adiation = **MASER**.



## Принципиальная схема водородного мазера



Мощность водородного мазера:

$$W \approx 10^{12} \times 2\pi\hbar f_{00} \approx 10^{-12} \text{ Вт},$$



Технические уходы водородного мазера:

$$\Delta B \cong 7 \cdot 10^{-3} \text{ Гс} \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 3 \cdot 10^{-12}$$

$$\Delta T_{\text{пучка}} \cong 1 \text{ К}^\circ \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 1.5 \cdot 10^{-13}$$

$$\text{Достижение: } \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 3 \cdot 10^{-16} \text{ за 3 часа}$$

Примерно столько же дают СВЧ автогенераторы, стабилизированные СПР.





## **Cs стандарт – эталон частоты, времени, и...длины!**

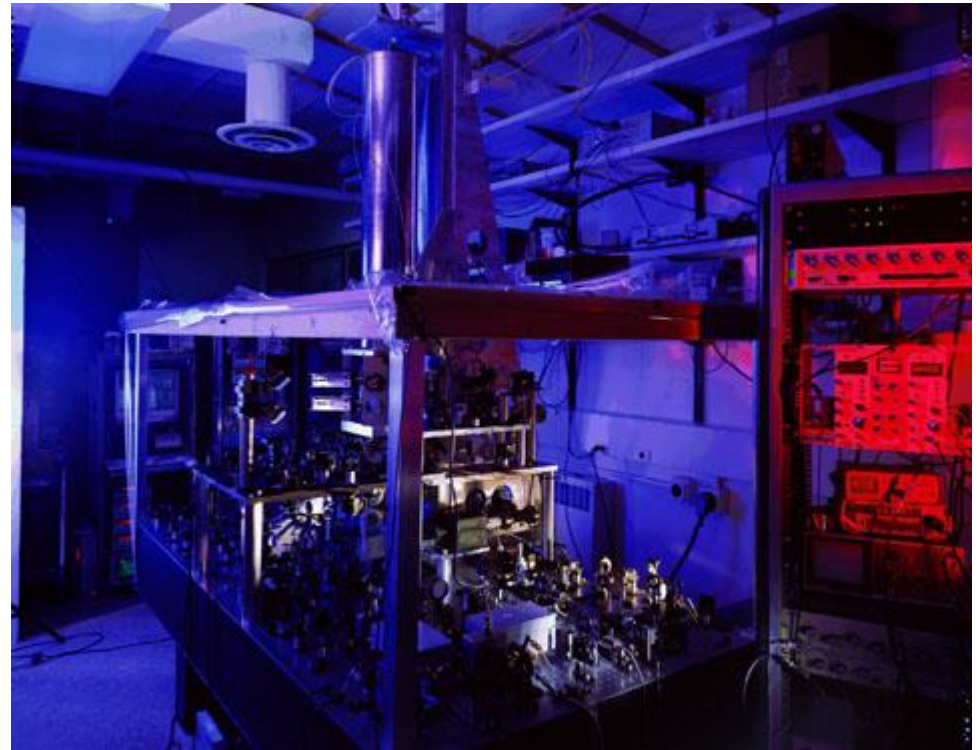
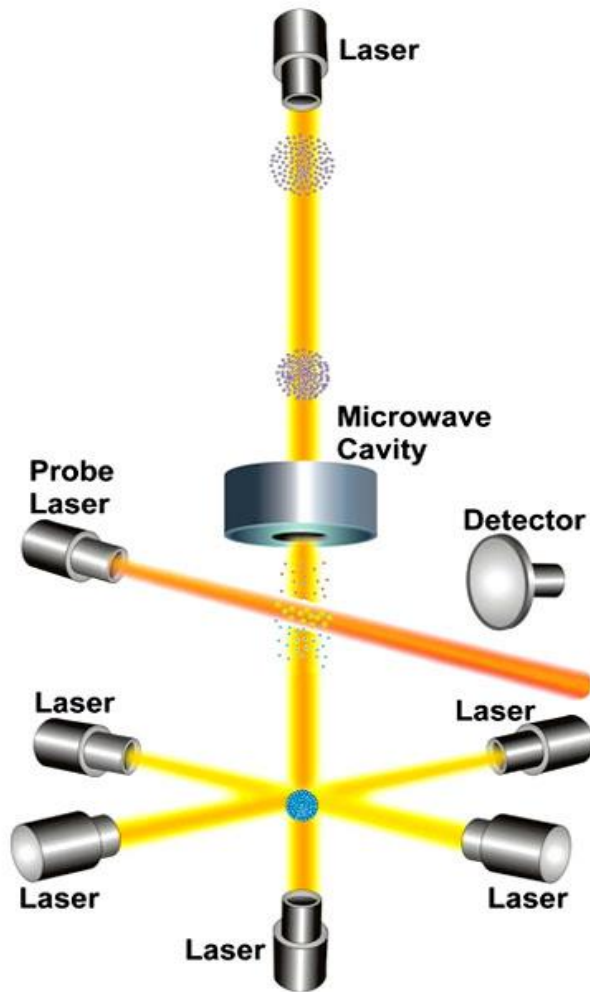
В настоящее время атомные стандарты частоты на основе изотопа  $^{133}\text{Cs}$  обеспечивают воспроизводимость на уровне  $1 \times 10^{-15}$ .

Именно это предопределило переопределение секунды, как основной единицы СИ, через интервал времени, равный 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного (квантового) состояния атома цезия-133 (1967 г., уточненная редакция 1997 г.).

В 1983 году другая основная единица СИ – метр так же была переопределена. Принято, что метр — это длина пути, проходимого светом в вакууме за  $1 / 299792458$  секунды, таким образом, метр определяется исключительно через фундаментальную константу и стандарт частоты.



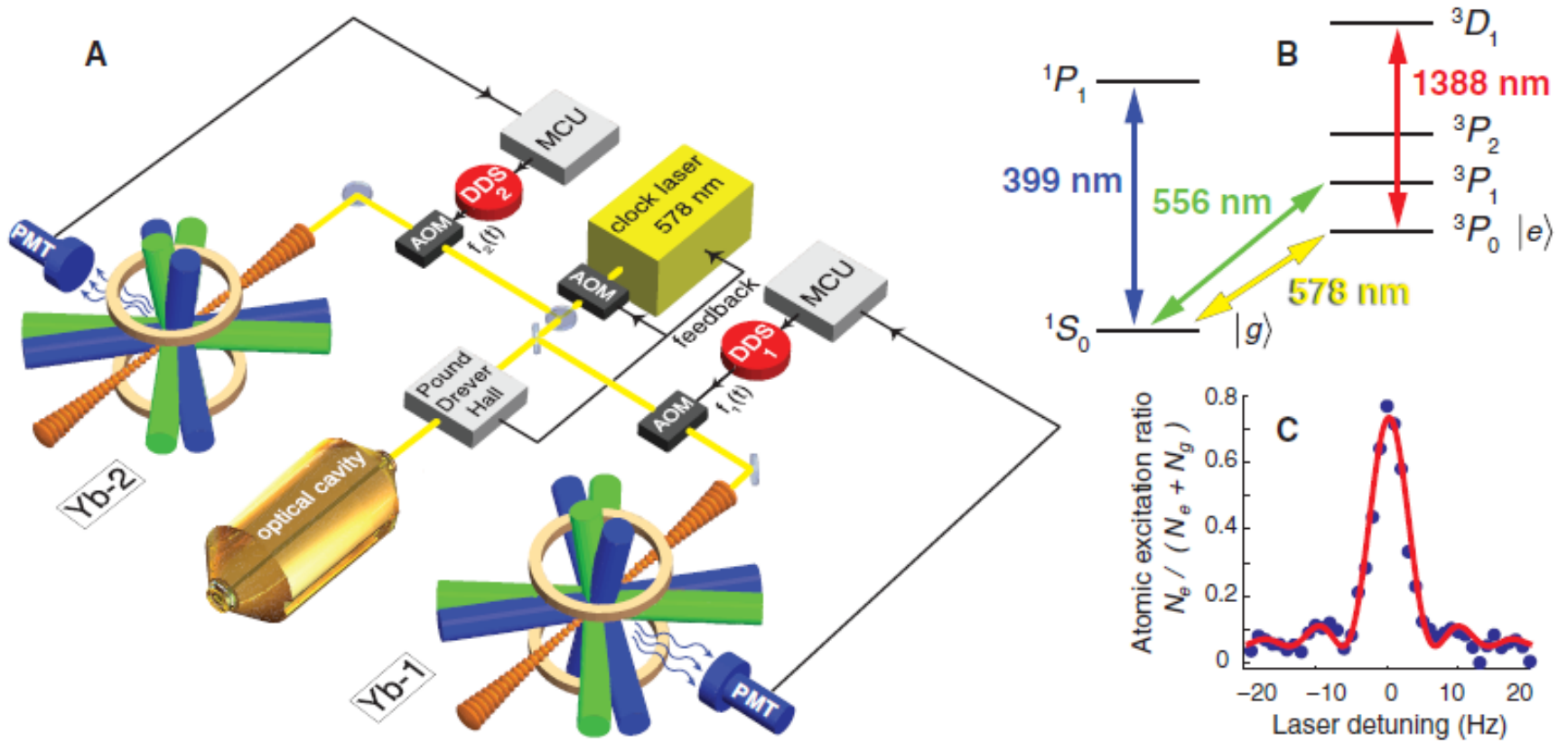
# Цезиевый «фонтан»



Атомное облако, охлажденное до  $\sim 2 \mu\text{K}$   
«подбрасывается» вверх. Время полета  
(=время взаимодействия) -  $\sim 1 \text{ с}$ .

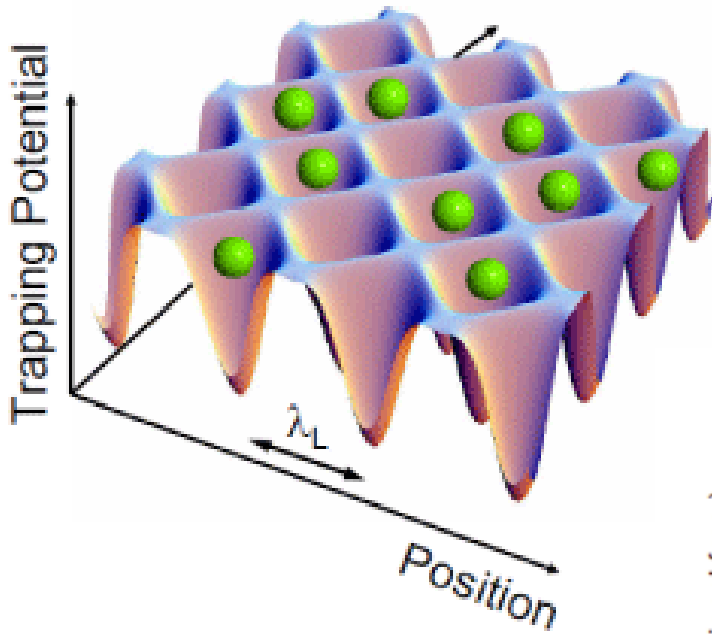


# Часы на основе атомов иттербия в оптической «решетке»

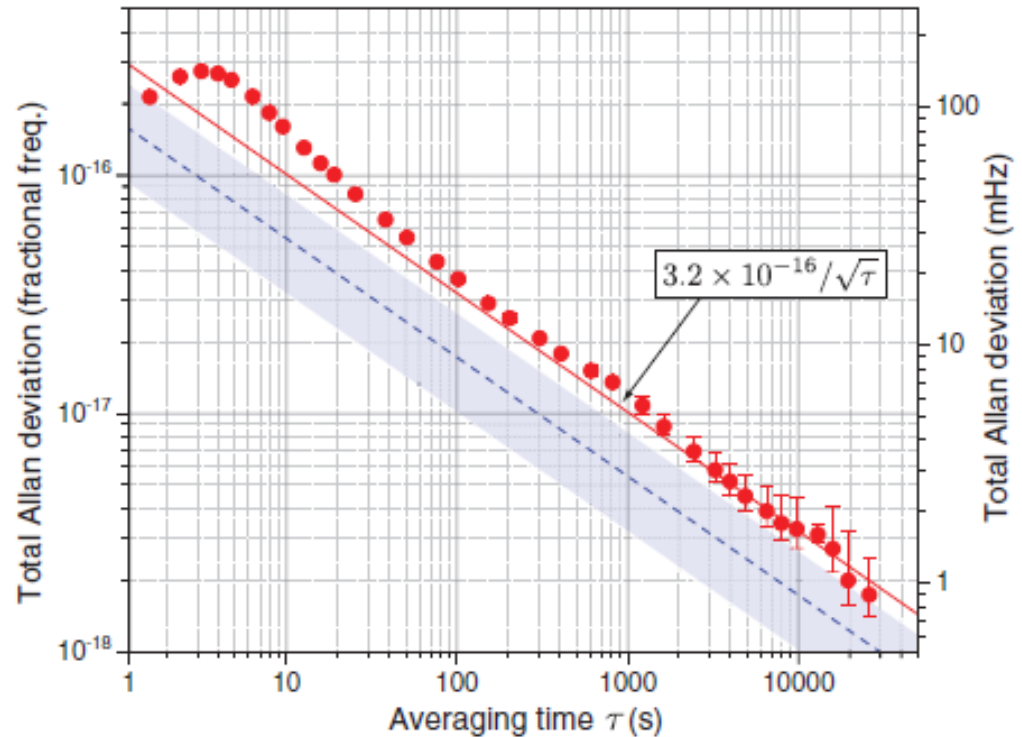




# Часы на основе атомов иттербия в оптической «решетке»

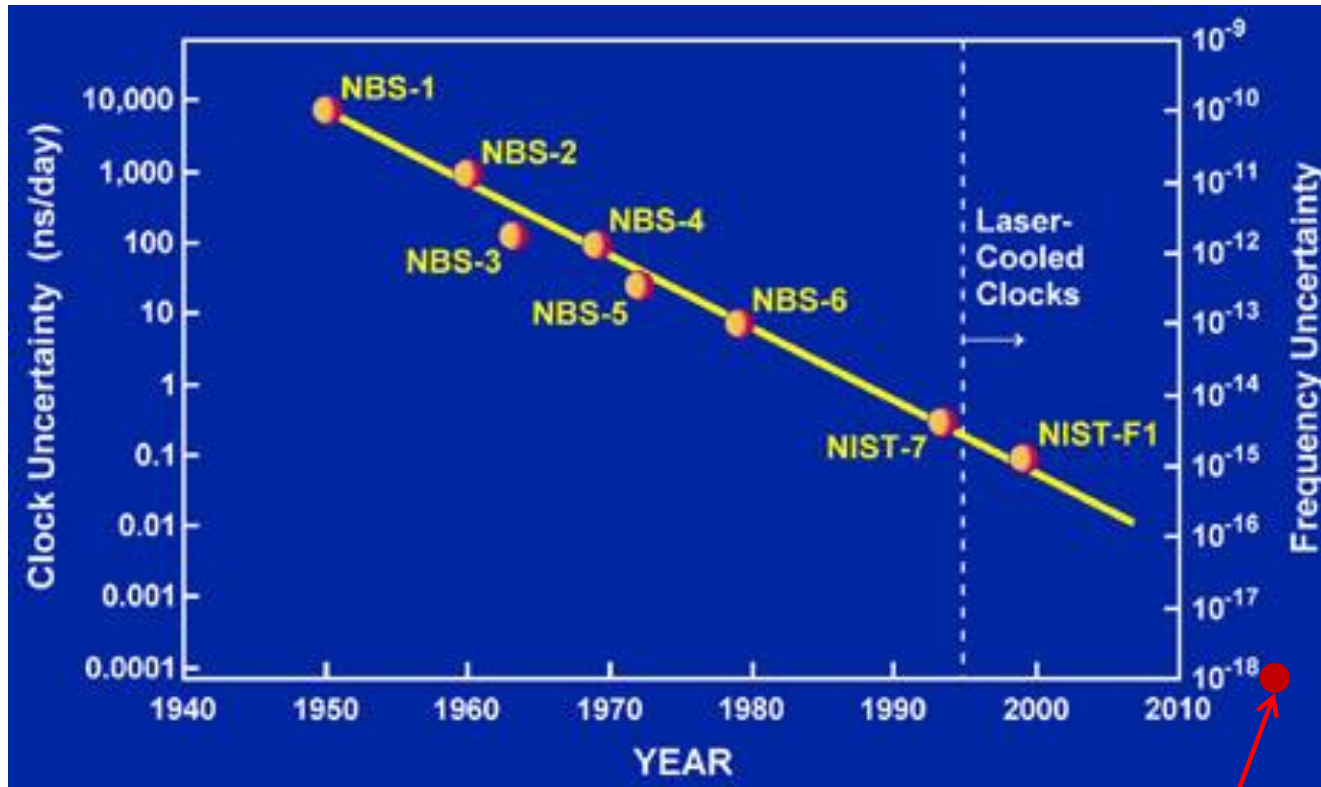


~5000 атомов Yb охлажденных с 800 К до 10  $\mu$ К захватываются в магнито-оптическую ловушку с периодическим потенциалом





# Стандарты частоты – прогресс.



*Science* **341**, 1215 (2013) **NIST**



# Фемтосекундный лазер

Спектр фемтосекундного лазера - гребенка линий:

$$f_n = f_0 + n f_r, \quad f_r = 1/\tau_r$$

( $f_0$  - возникает из-за разницы групповой и фазовой скорости в резонаторе лазера). Важно, что:

- Спектр покрывает почти октаву.



# Фемтосекундный лазер

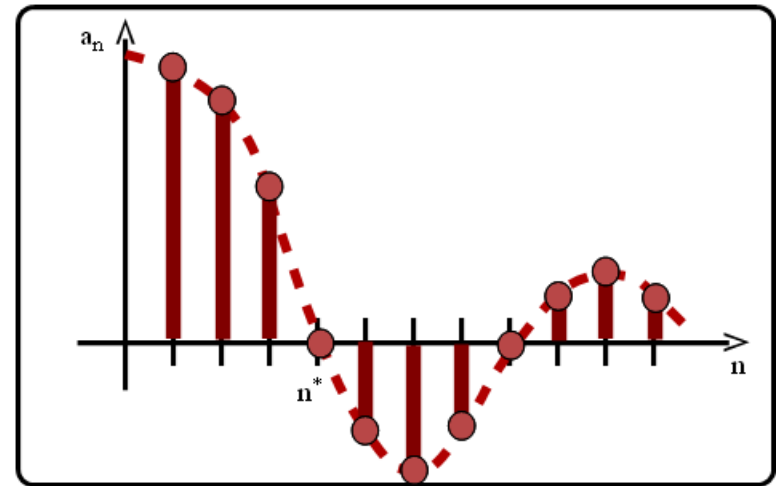
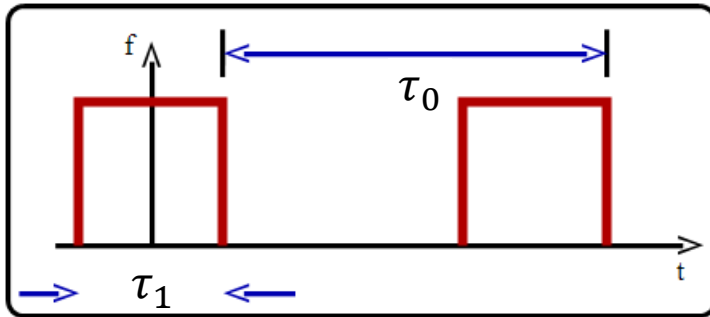
Спектр фемтосекундного лазера - гребенка линий:

$$f_n = f_0 + n f_r, \quad f_r = 1/\tau_r$$

( $f_0$  - возникает из-за разницы групповой и фазовой скорости в резонаторе лазера). Важно, что:

- Спектр покрывает почти октаву.

*вспоминаем:*



$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau_0}$$

$$n^* \cong \frac{\tau_0}{\tau_1}$$

# Фемтосекундный лазер



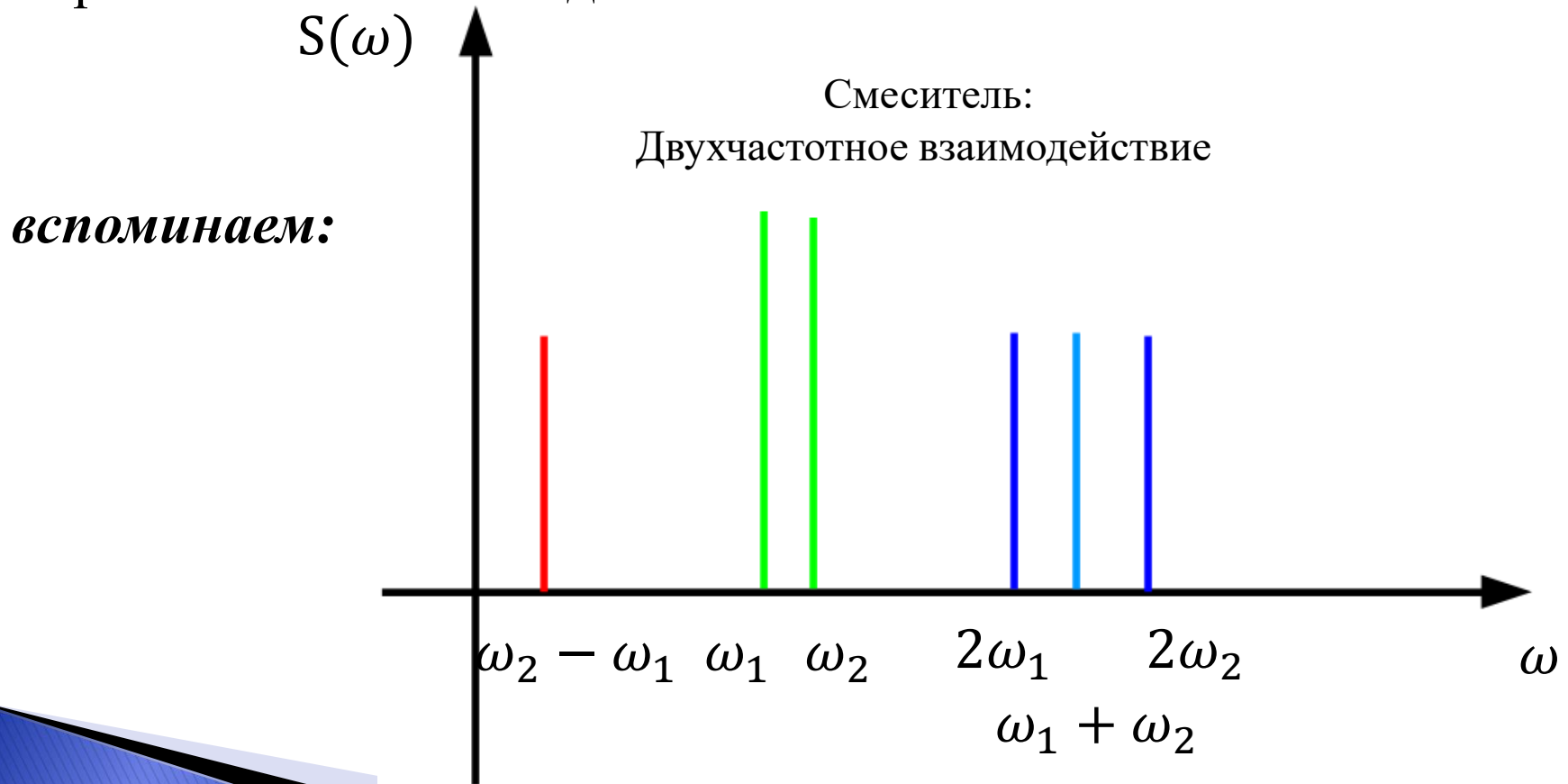
- Может быть уширен пропусканием через «фотонно-кристаллический» (ФК) волновод».
- Практически отсутствует дисперсия групповой скорости в ФК волноводе.



# Фемтосекундный лазер



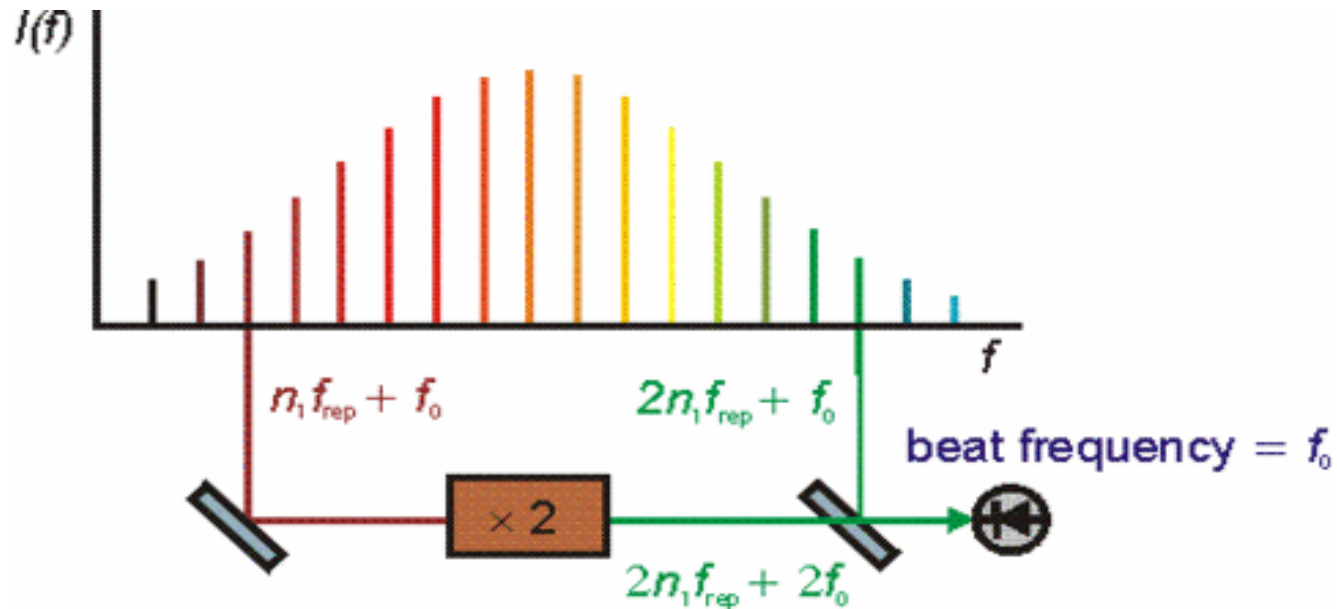
- Может быть уширен пропусканием через «фотонно-кристаллический» (ФК) волновод».
- Практически отсутствует дисперсия групповой скорости в ФК волноводе.



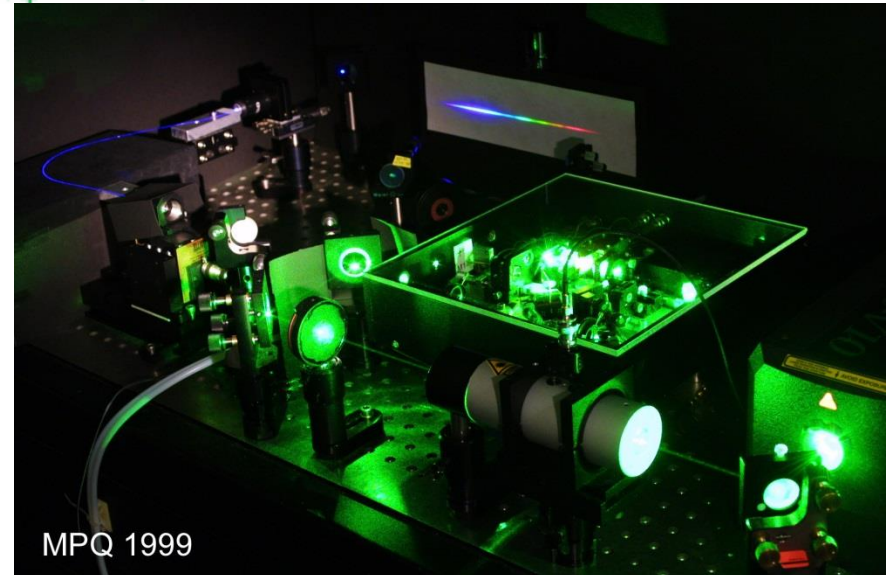


# Оптическая «гребенка»

транспорт эталонной частоты в оптический диапазон



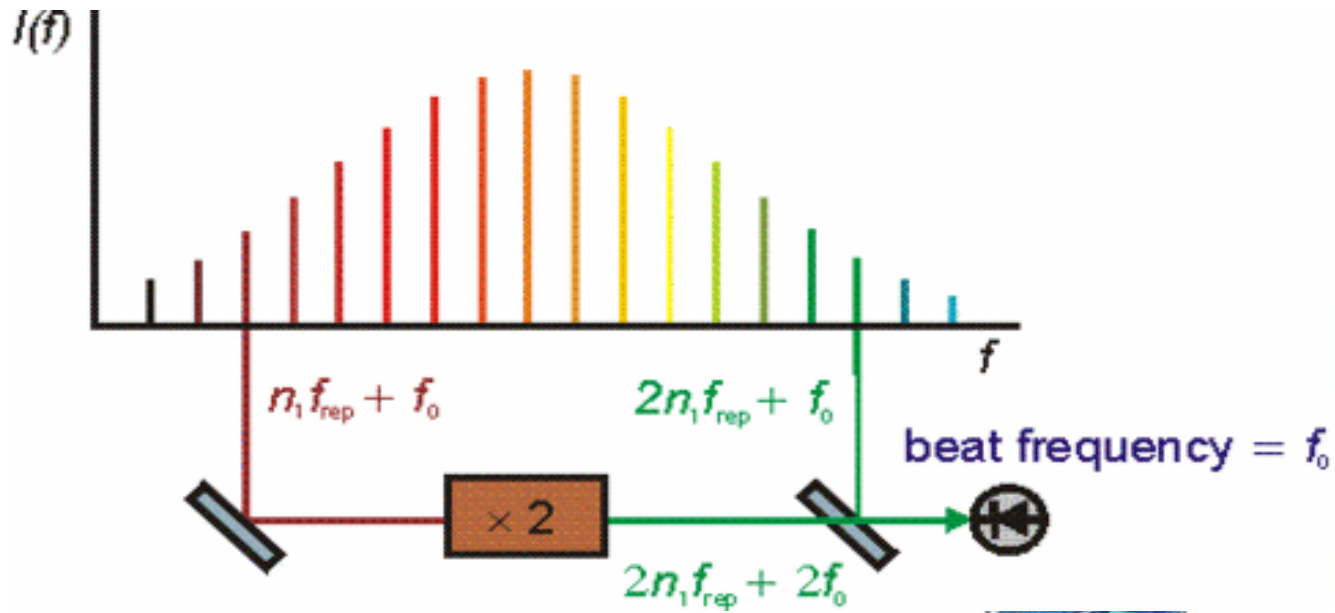
Theodor W. Hänsch and  
John L. Hall :  
Нобелевская премия 2005 г.





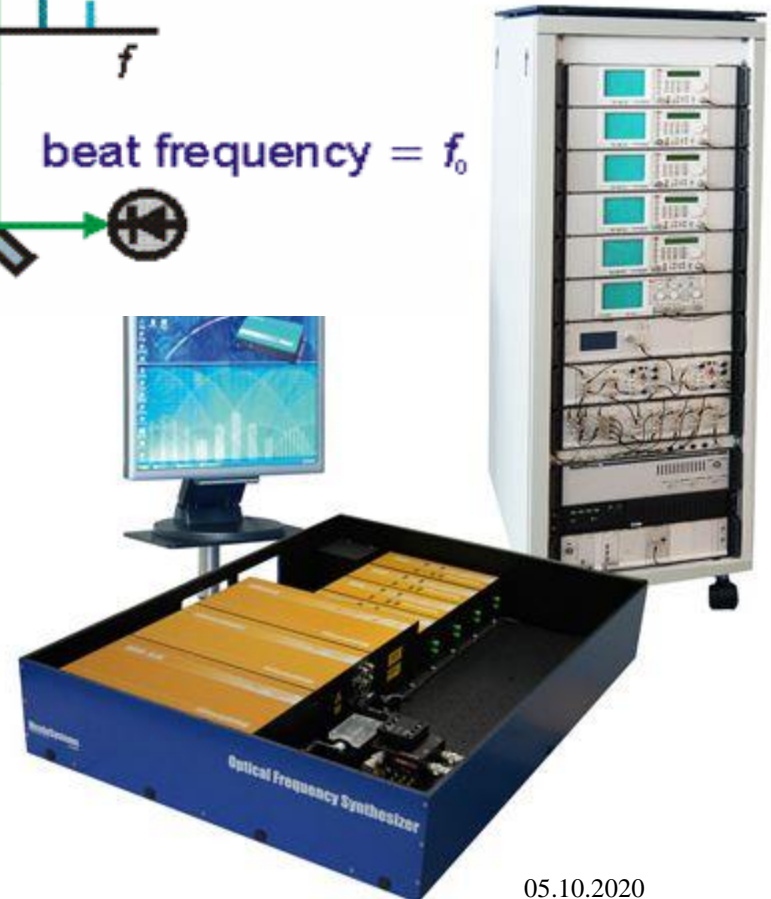
# Оптическая «гребенка»

транспорт эталонной частоты в оптический диапазон



Hänsch and  
John L. Hall

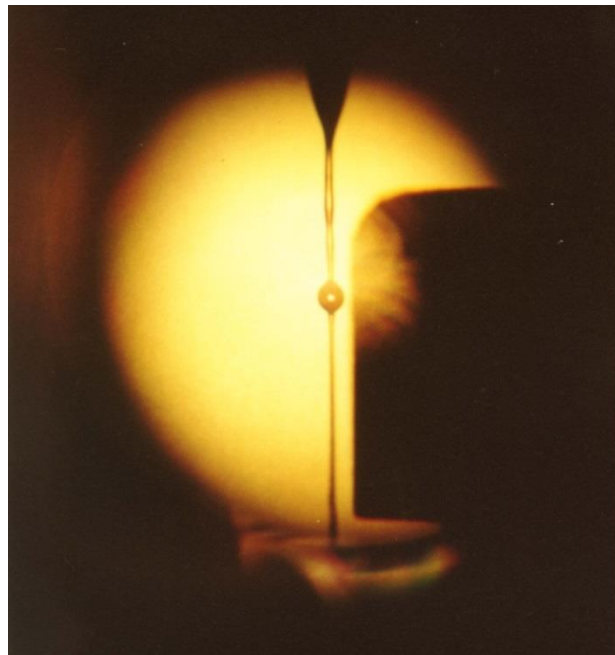
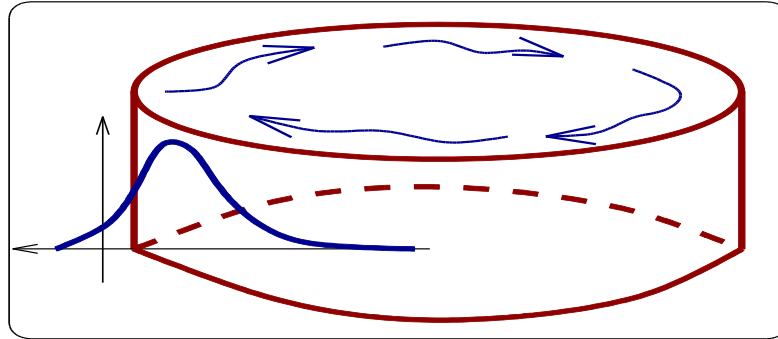
© Menlo Systems 2013





# Оптическая «гребенка» - Дальнейшее развитие: применение оптических микрорезонаторов

*вспоминаем:*



$$Q \sim 10^{10}$$

# Оптическая «гребенка» - Дальнейшее развитие: применение оптических микрорезонаторов



ARTICLES

PUBLISHED ONLINE: 24 JUNE 2012 | DOI: 10.1038/NPHOTON.2012.127

nature  
photonics

## Universal formation dynamics and noise of Kerr-frequency combs in microresonators

T. Herr<sup>1</sup>, K. Hartinger<sup>1,2</sup>, J. Riemensberger<sup>1</sup>, C. Y. Wang<sup>1,3</sup>, E. Gavartin<sup>1</sup>, R. Holzwarth<sup>2,3</sup>,  
M. L. Gorodetsky<sup>4</sup> and T. J. Kippenberg<sup>1,3\*</sup>

