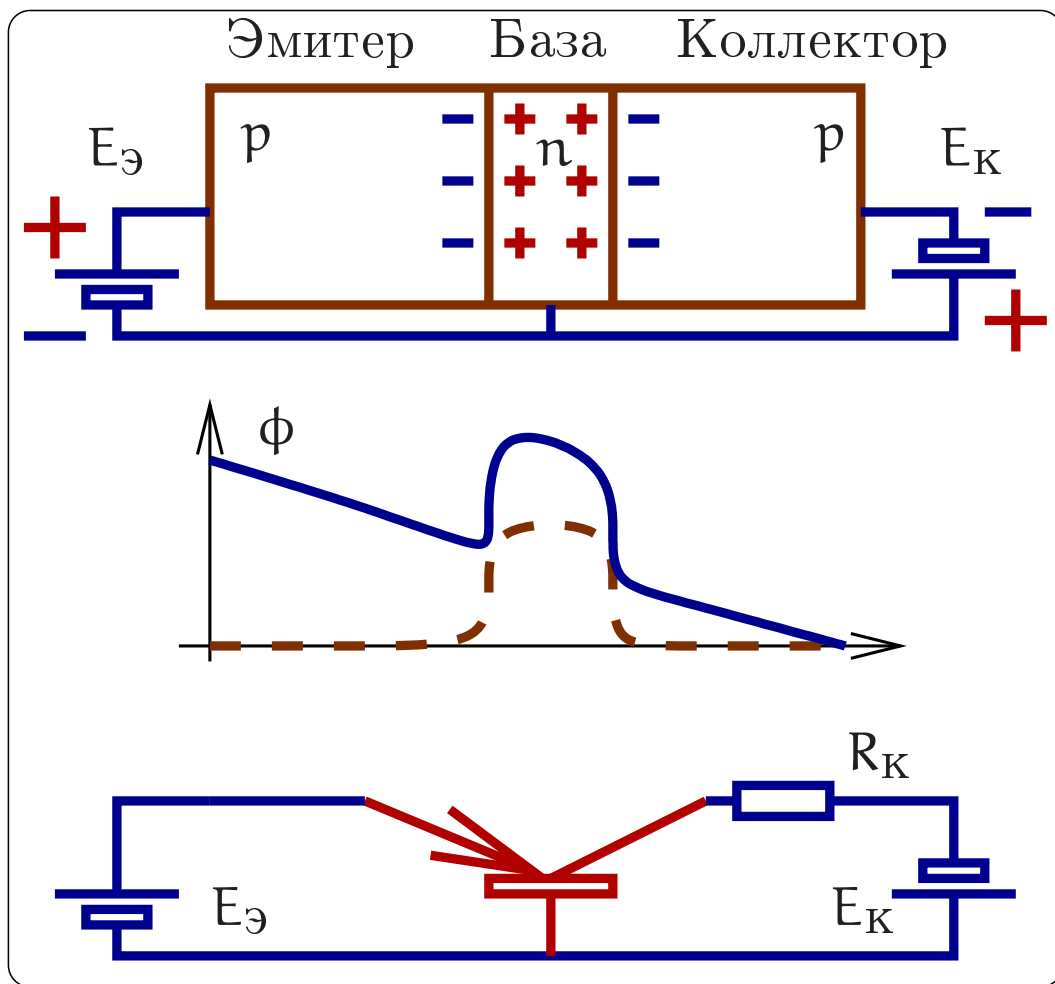
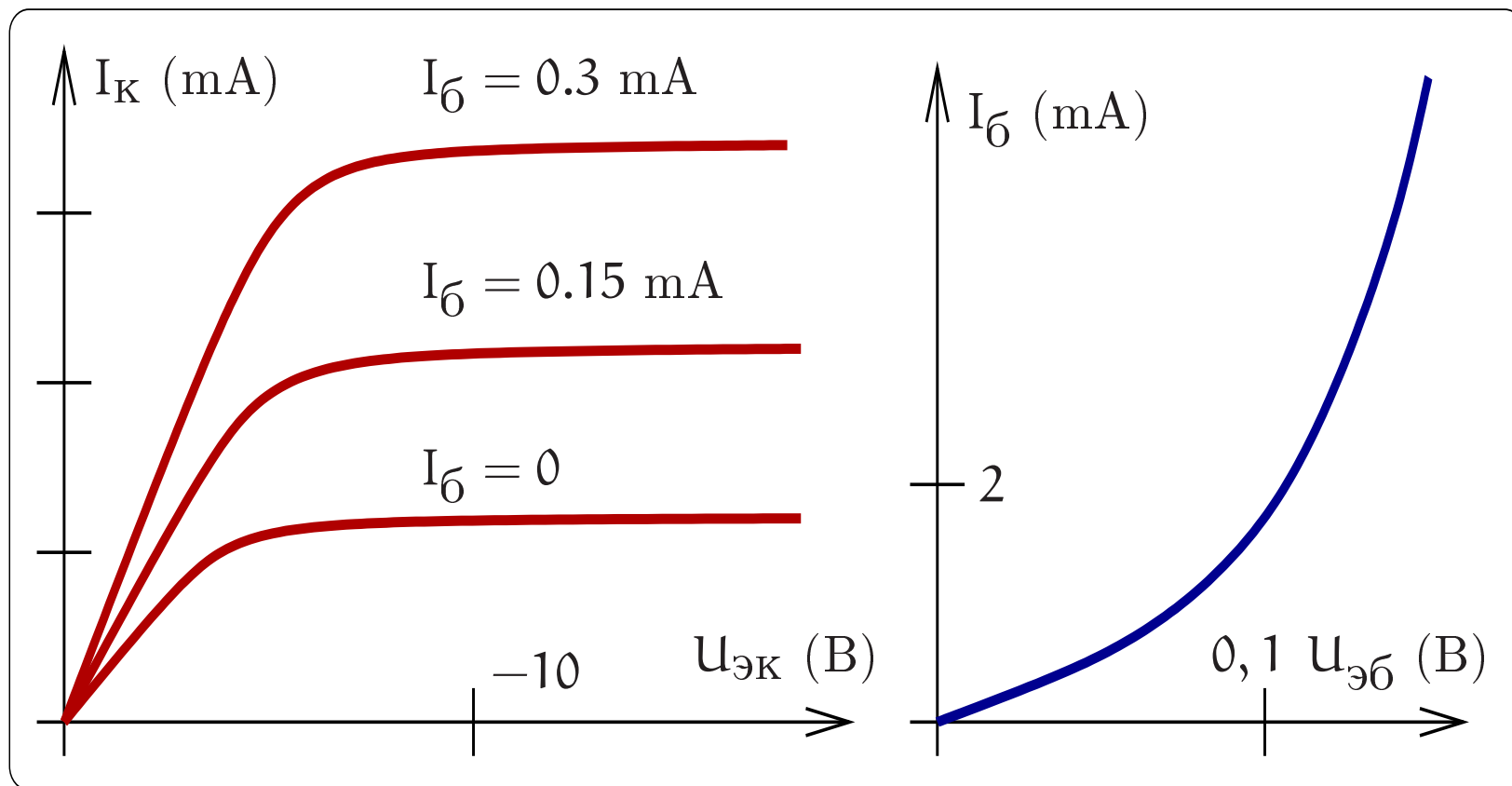


Биполярный транзистор

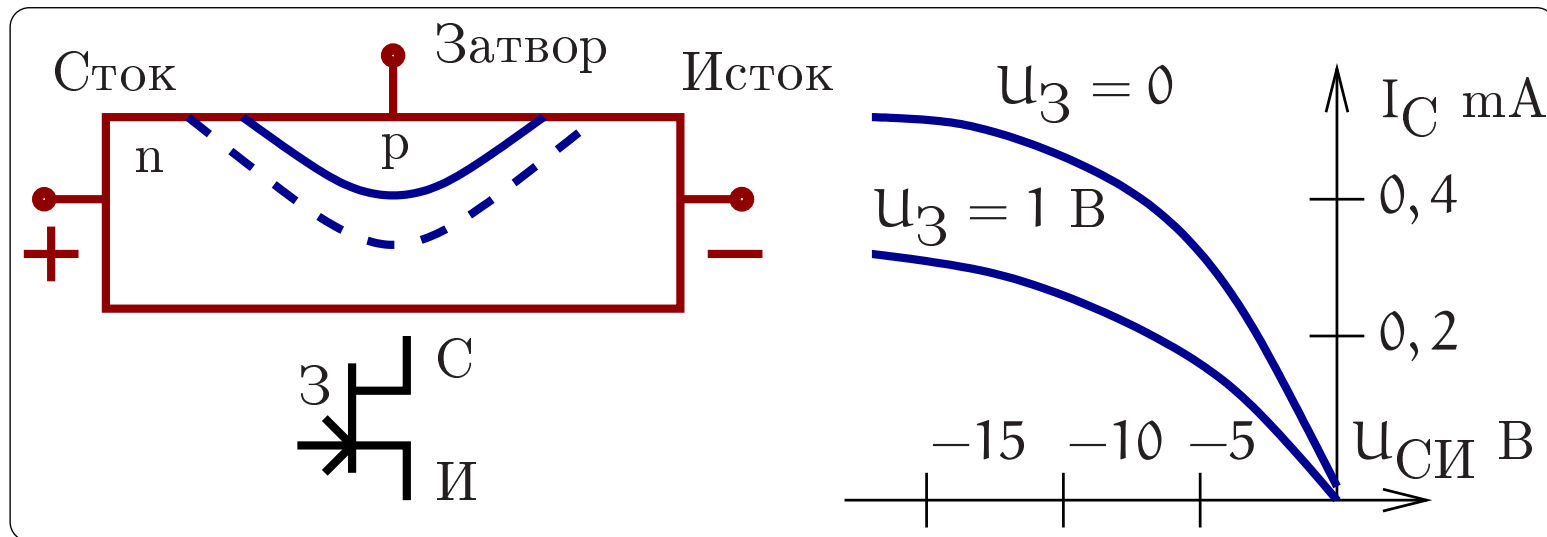


- 1). $+E_э$ — понижение потенц. барьера
- 2). Толщина базы \ll диффузионной длины
- 3). $I_б \ll I_э, I_к, I_э \simeq I_к$, — дырки “промахиваясь” (не рекомбинируя) достигают коллектора.

Характеристики биполярного транзистора



Полевой транзистор (FET)



$$S_{\text{дифф}} = -\frac{\partial I_C}{\partial U_{ЗИ}} \simeq 0,2 \frac{\text{mA}}{\text{V}},$$

$$R_{\text{вх}} = R_{ЗИ} = \frac{\partial U_{ЗИ}}{\partial I_З} \simeq 10^8 \dots 10^{12} \text{ Ом},$$

$$R_{СИ} \simeq 10^4 \text{ Ом}, \quad f = 0 \dots 200 \cdot 10^9 \text{ Гц}$$

Основные параметры полевого транзистора

Входное сопротивление

$$R_{\text{ВХ}} = \frac{\partial U_3}{\partial I_3} \simeq 10^8 \dots 10^{12} \text{ Ом} \quad (1)$$

Крутизна

$$S = \frac{\partial I_C}{\partial U_3} \simeq 10^{-3} \text{ 1/Ом} \quad (2)$$

Выходное сопротивление

$$R_{\text{ВЫХ}} = \frac{\partial U_C}{\partial I_C} \simeq 10^4 \text{ Ом} \quad (3)$$

Усиление по току и напряжению

$$R_{ВХ} = \frac{\partial U_3}{\partial I_3} \simeq 10^8 \dots 10^{12} \text{ Ом}, \quad R_{ВЫХ} = \frac{\partial U_C}{\partial I_C} \simeq 10^4 \text{ Ом},$$

$$S = \frac{\partial I_C}{\partial U_3} \simeq 10^{-3} \text{ 1/Ом},$$

Усиление по току:

$$\frac{\partial I_C}{\partial I_3} = \frac{\partial I_C}{\partial U_3} \times \frac{\partial U_3}{\partial I_3} = SR_{3И} \simeq 10^{-3} \times 10^{12} = \mathbf{10^9} \text{ (!)}$$

Усиление по напряжению:

$$\frac{\partial U_C}{\partial U_3} = \frac{\Delta I_C R_{СИ}}{\Delta I_3 R_{3И}} \simeq 10^9 \times \frac{10^4}{10^8 \dots 10^{12}} \simeq \mathbf{10 \dots 10^5}$$

Усиление электрических сигналов

Классификация:

- Постоянного тока (напряжения).
- Переменного тока (напряжения).
- Узкополосные.
- Широкополосные.
- Импульсные.
- Операционные.
- Сверхвысокочастотные.

K — коэффициент усиления (передачи)

$$K = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} \text{ — определение}$$

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{U_{\text{ВХ}}(\omega)} \text{ — частотная зависимость}$$

$|\tilde{K}(\omega)|$ — амплитудно-частотная характеристика,

$\arg(\tilde{K}(\omega))$ — фазово-частотная характеристика,

$K(U_{\text{ВХ}})$ — амплитудная хар-ка (учет нелинейности)

Децибеллы:

$$N = 10 \log \frac{W_{\text{ВЫХ}}}{W_{\text{ВХ}}} = 20 \log \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}},$$

$$K = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}},$$

Примеры:

$$K = 100, \Rightarrow N = 40 \text{ Дб},$$

Каскад усилителей:

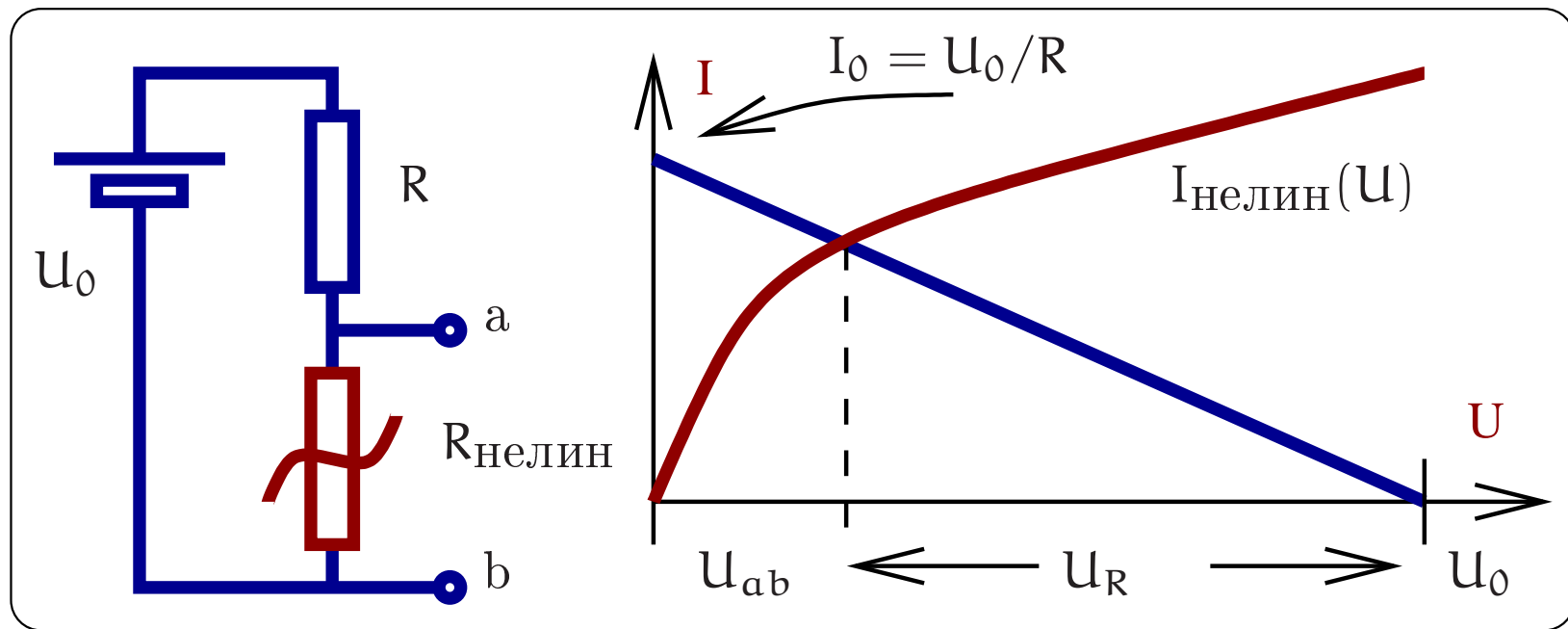
$$K_{\Sigma} = K_1 \times K_2 \times K_3,$$

$$N_{\Sigma} = N_1 + N_2 + N_3,$$

Расчет цепи с нелинейным сопротивлением $R_{\text{нелин}}$

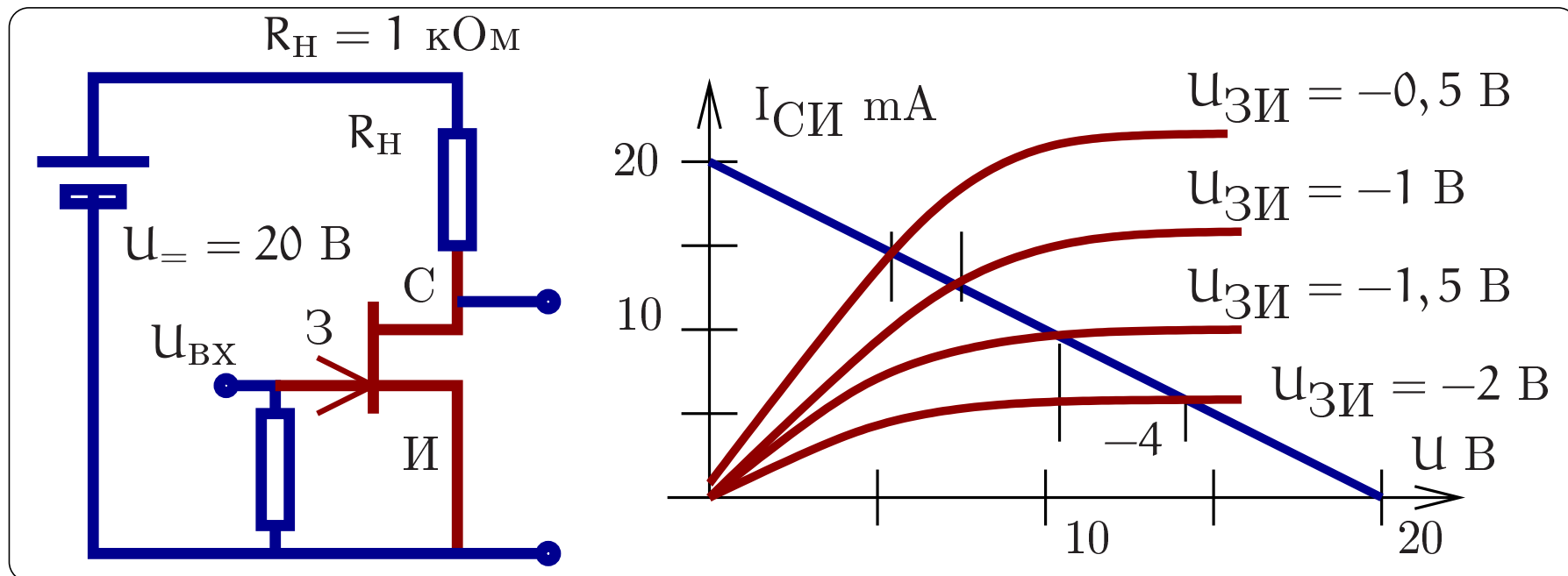
Нелинейная характеристика $I_{\text{нелин}}(U)$ известна.

$$I_{\text{нелин}}(U_{ab}) = (U_0 - U_{ab})/R$$



Транзистор — нелинейное сопротивление, управляемое напряжением на затворе (или базе).

Графический расчет статического К



$$K_u = \frac{\Delta U_{СИ}}{\Delta U_{ЗИ}} = \frac{-4 \text{ В}}{0,5 \text{ В}} = -8, \quad U_З = -2 \text{ В}$$

Инвертирующий усилитель \Rightarrow знак K_u **отрицательный**.

Из графика видны нелинейные искажения $\Rightarrow K_u(U_{ЗИ})$.

При $\Delta U_{ЗИ} = -1 \text{ В}$ коэффициент усиления **меньше**: $K_u \simeq -4$.

Расчет коэффициента усиления по току и по мощности

Примем $R_{ВХ} = 10^7$ Ом, тогда из графика получаем

$$\Delta I_{ВХ} \simeq \frac{0,5 \text{ В}}{10^7 \text{ } \Omega} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ А}$$

$\Delta I_{СИ} = 5$ мА (см. график). Следовательно,

$$K_I = \frac{\Delta I_{СИ}}{\Delta I_{ВХ}} = 10^5.$$

$$K_W = \frac{\Delta I_{СИ}^2 R_H}{\Delta I_{ВХ}^2 R_{ВХ}} = K_I^2 \frac{R_H}{R_{ВХ}} \simeq 10^{10} \times \frac{10^3}{10^7} \simeq 10^6.$$

Аналитический расчет

$$\Delta U_{\Sigma} = 0 = R_H \Delta I_{\text{ВЫХ}} + \Delta U_{\text{ВЫХ}} \Rightarrow \Delta I_{\text{ВЫХ}} = -\frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{R_H} \quad (4)$$

$$\Delta I_{\text{ВЫХ}} = \underbrace{\frac{\partial I_{\text{ВЫХ}}}{\partial U_{\text{ВХ}}}}_S \Delta U_{\text{ВХ}} + \underbrace{\frac{\partial I_{\text{ВЫХ}}}{\partial U_{\text{ВЫХ}}}}_{1/R_{\text{СИ}}} \Delta U_{\text{ВЫХ}} \quad (5)$$

Крутизна $S = \frac{\Delta I_{\text{СИ}}}{\Delta U_{\text{ЗИ}}}$. $R_{\text{СИ}} = \frac{\Delta U_{\text{СИ}}}{\Delta I_{\text{СИ}}}$. Подставляем (4) \rightarrow (5):

$$\frac{-\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{R_H} = S \Delta U_{\text{ВХ}} + \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{R_{\text{СИ}}},$$

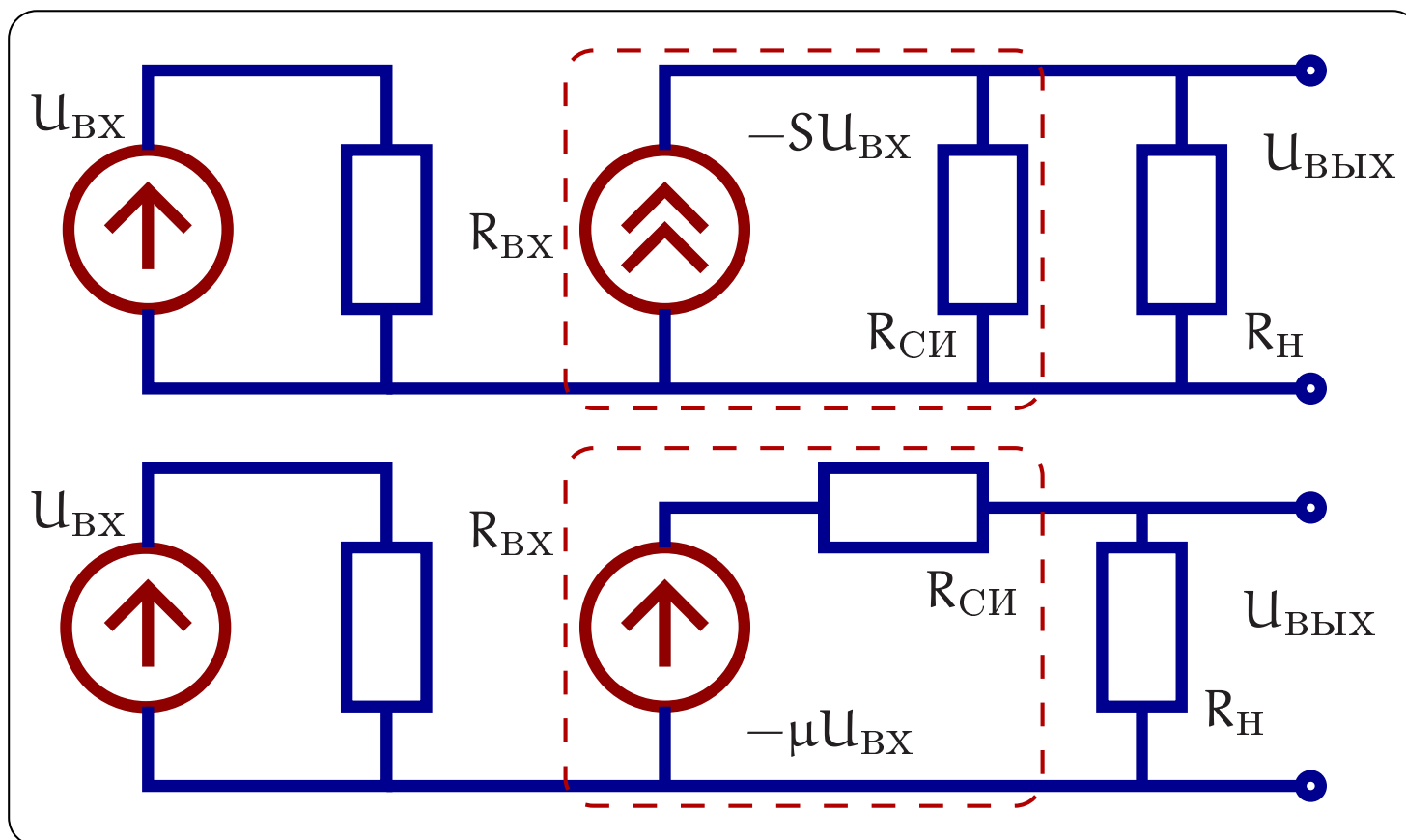
$$K_U = \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{\Delta U_{\text{ВХ}}} = -S \cdot \frac{R_H R_{\text{СИ}}}{R_H + R_{\text{СИ}}} = -\underbrace{S R_{\text{СИ}}}_{\mu} \cdot \frac{R_H}{R_H + R_{\text{СИ}}}$$

$\mu = S R_{\text{СИ}}$. При $R_{\text{СИ}} \gg R_H$ имеем $K_U \simeq -S R_H \simeq -S Z_H(\omega)$.

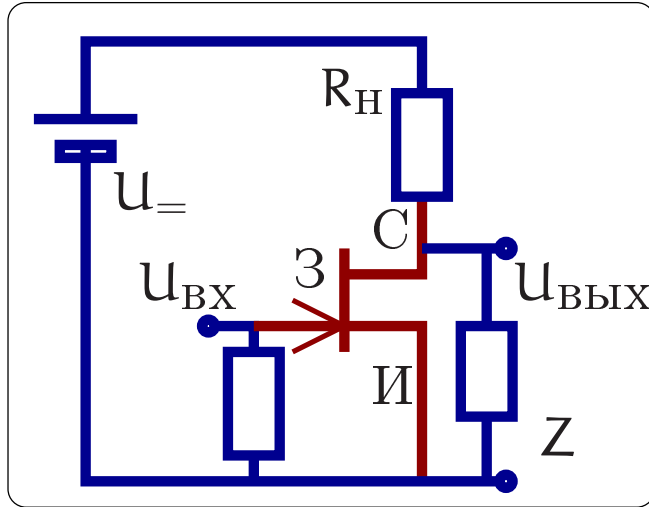
Величины S и $R_{\text{СИ}}$ не постоянны, а зависят от выбора “рабочей точки”.

Эквивалентные схемы усилителя

$$\Delta U_{\text{ВЫХ}} = -S \Delta U_{\text{ВХ}} \times \frac{R_{\text{Н}} R_{\text{СИ}}}{R_{\text{Н}} + R_{\text{СИ}}} = -\mu \Delta U_{\text{ВХ}} \times \frac{R_{\text{Н}}}{R_{\text{Н}} + R_{\text{СИ}}}$$



Расчет простого усилителя



$$0 = R_H \Delta I_{\text{ВЫХ}} + \Delta U_{\text{ВЫХ}} \quad (6)$$

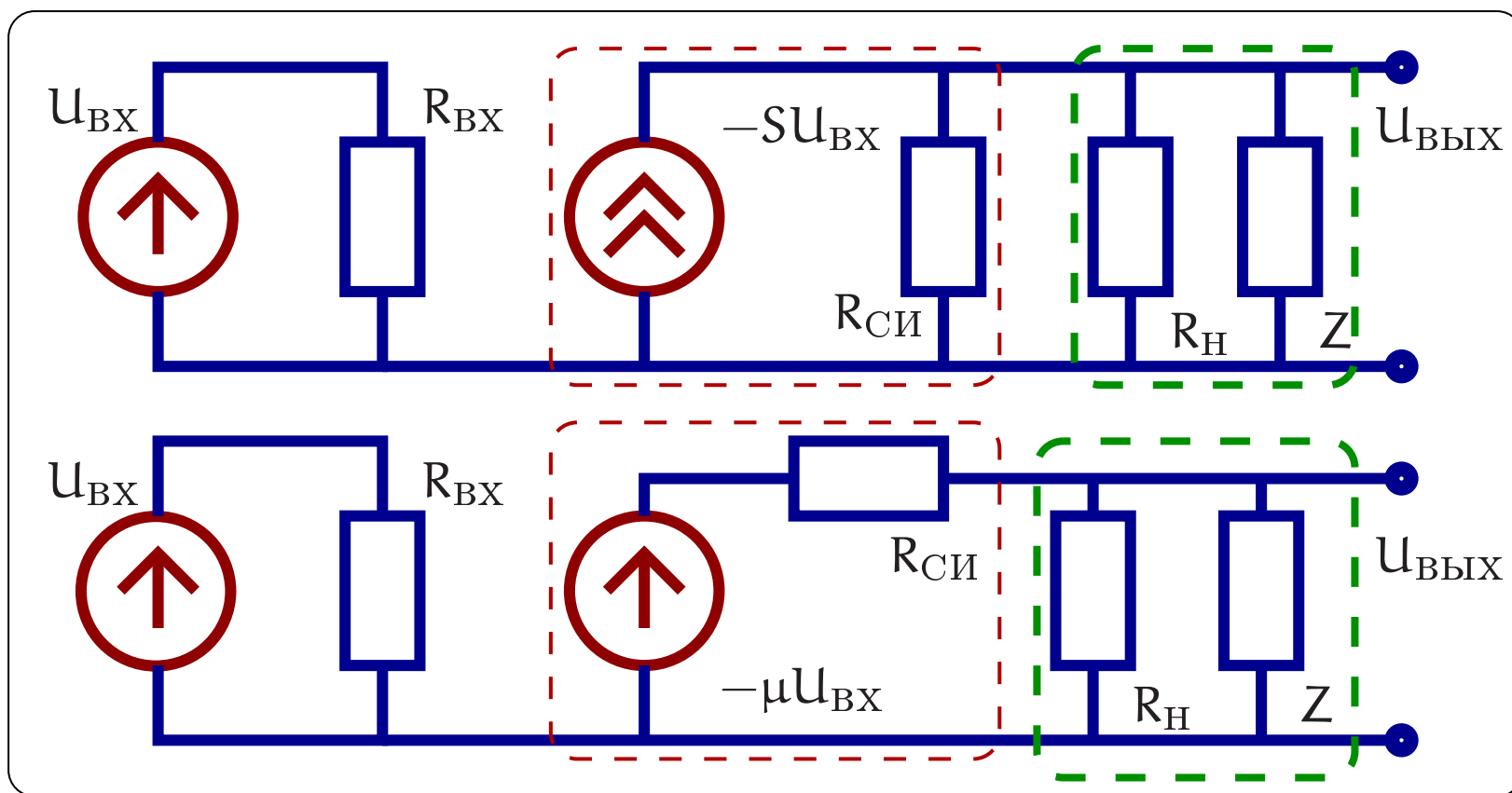
$$\Delta I_{\text{ВЫХ}} = S \Delta U_{\text{ВХ}} + \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{R_{\text{СИ}}} + \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{Z} \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7) получаем:

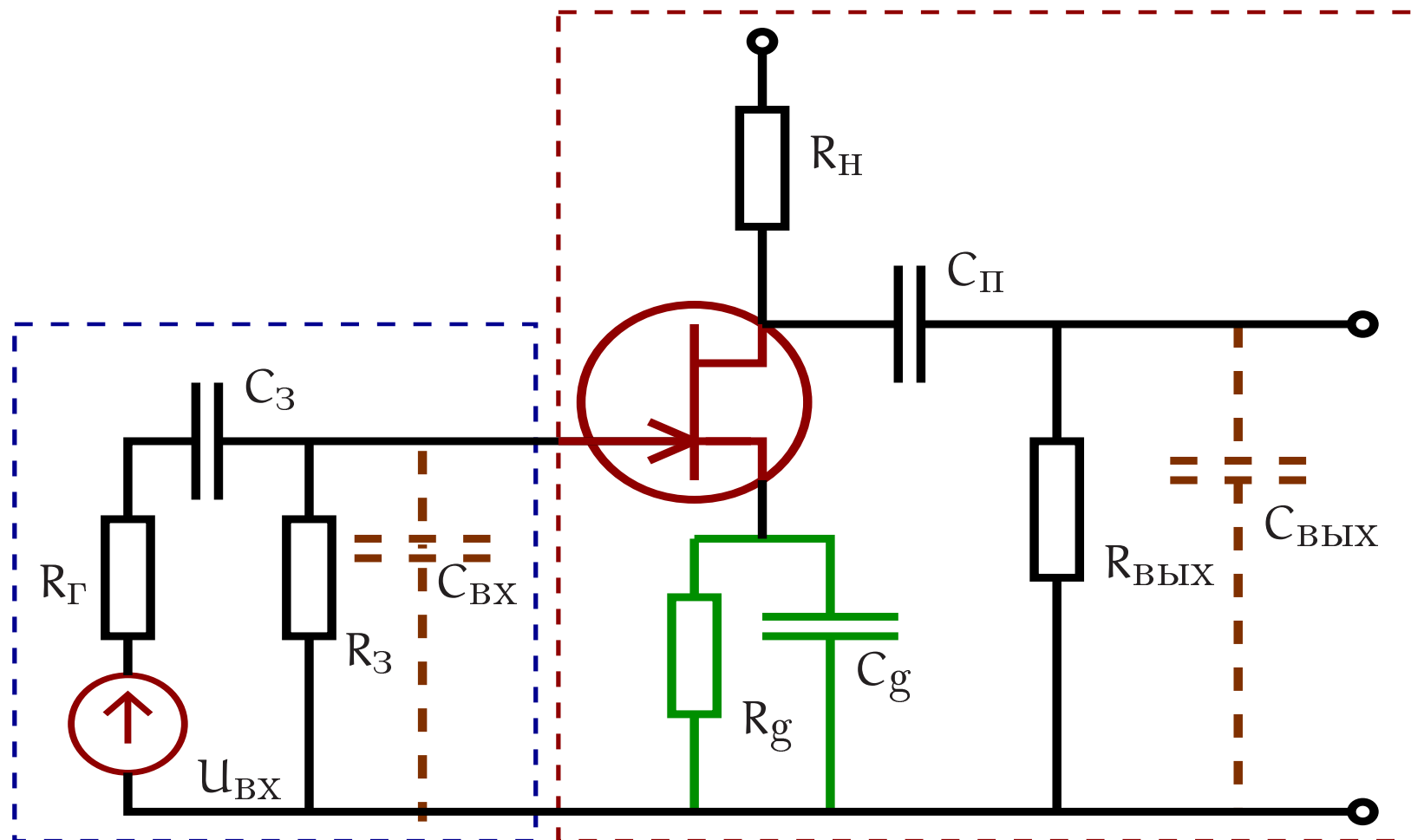
$$S \Delta U_{\text{ВХ}} = -\Delta U_{\text{ВЫХ}} \left(\frac{1}{R_H} + \frac{1}{R_{\text{СИ}}} + \frac{1}{Z} \right), \quad (8)$$

$$S R_{\text{СИ}} \Delta U_{\text{ВХ}} = \mu \Delta U_{\text{ВХ}} = -\Delta U_{\text{ВЫХ}} \times \frac{R_{\text{Э}} + R_{\text{СИ}}}{R_{\text{Э}}}, \quad \frac{1}{R_{\text{Э}}} = \frac{1}{R_H} + \frac{1}{Z} \quad (9)$$

Это соответствует эквивалентным схемам:

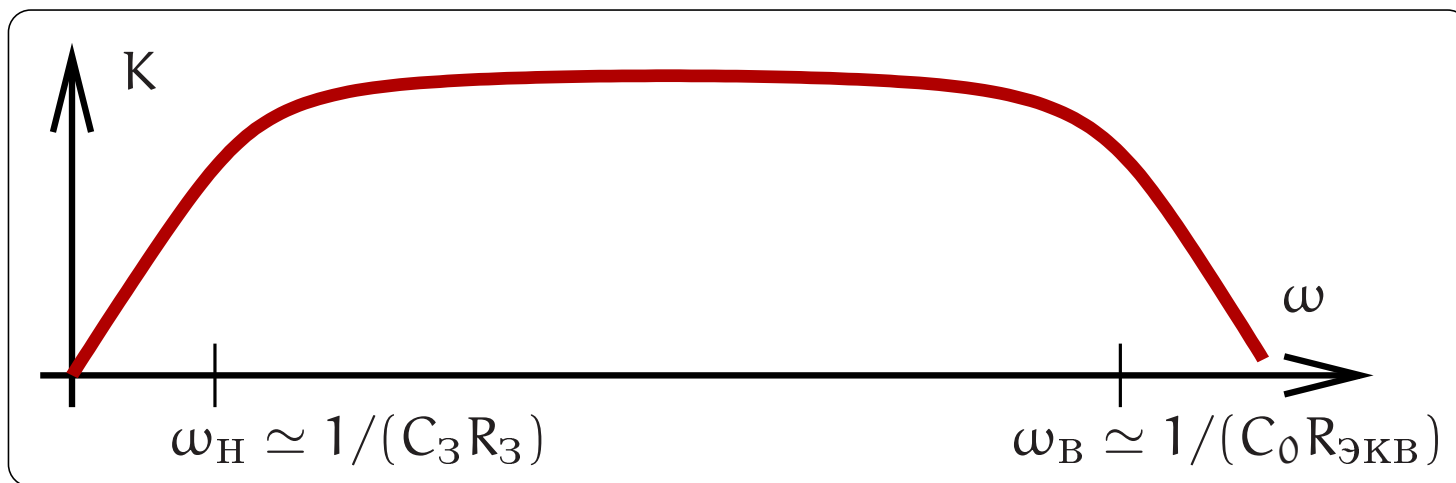
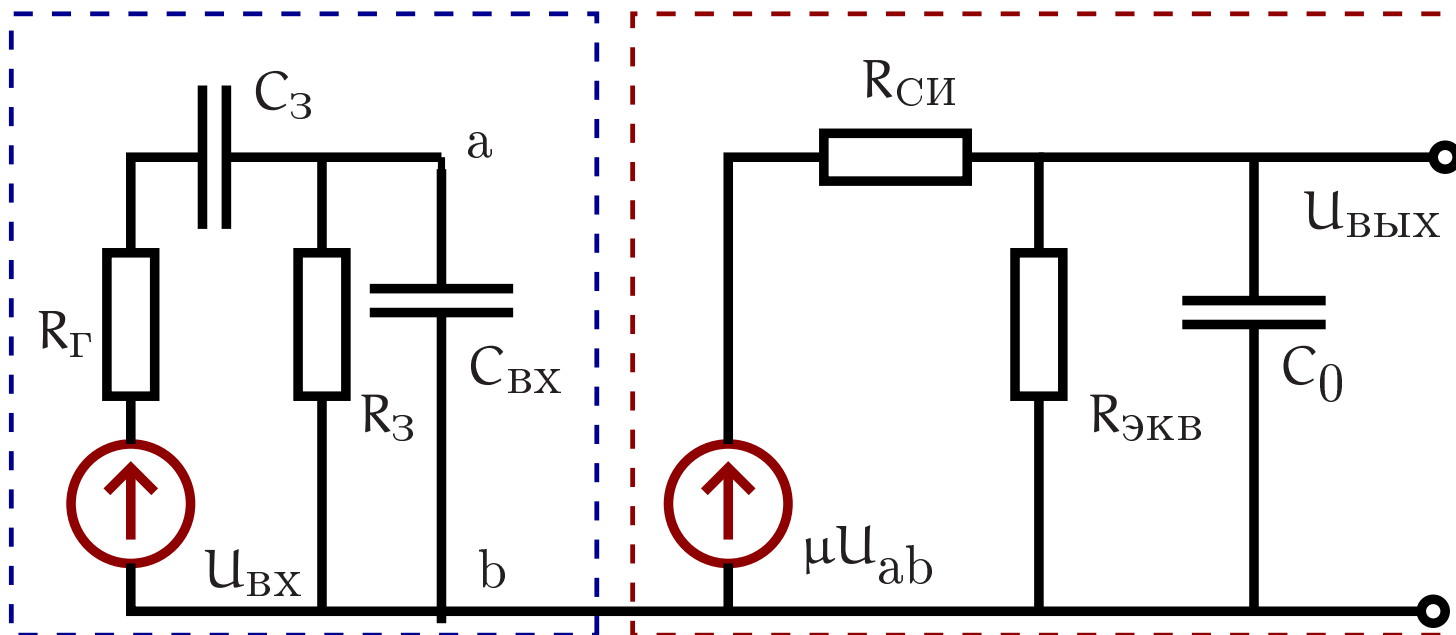


Сопротивления $R_{Н}$ и Z включены **параллельно (!)**

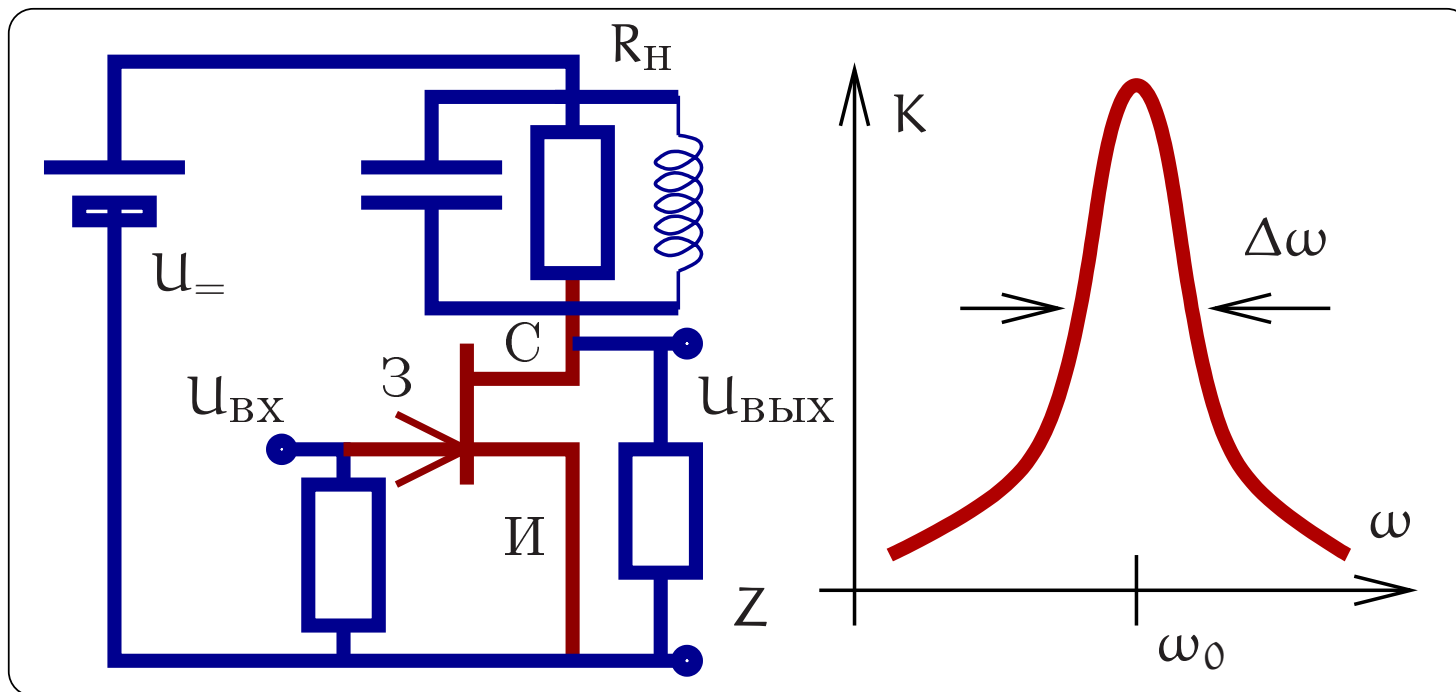
Усилитель переменного напряжения на сопротивлении

$C_{ВХ}$, $C_{ВЫХ}$ — паразитные емкости.

Эквивалентная схема



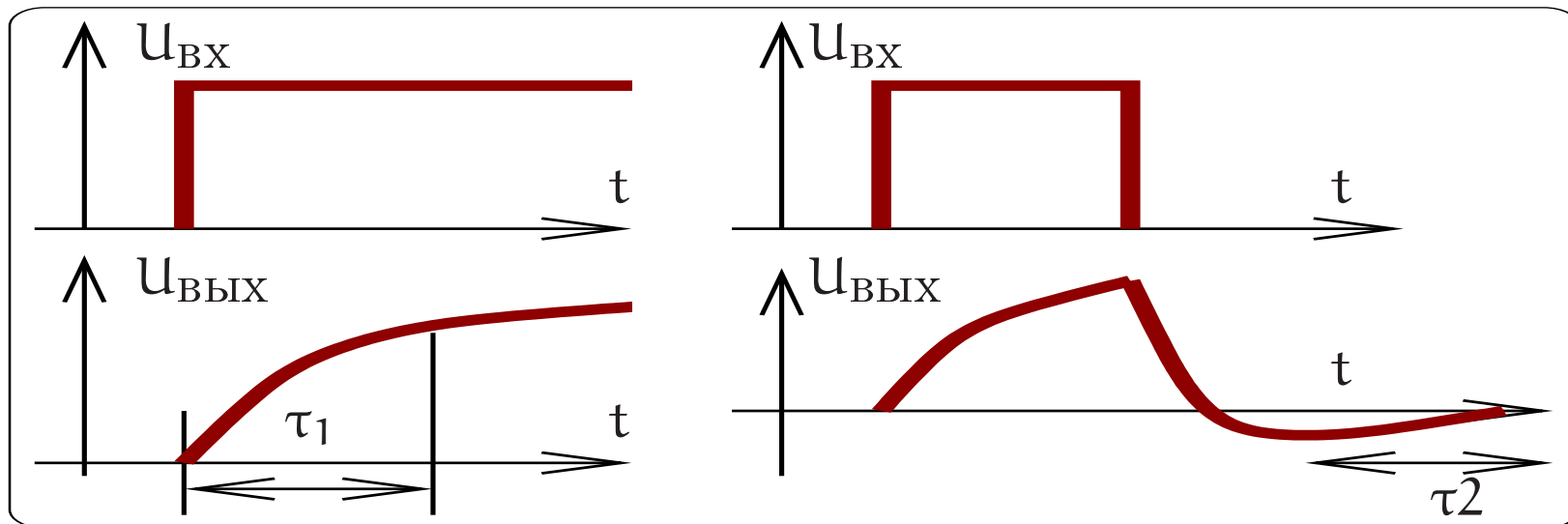
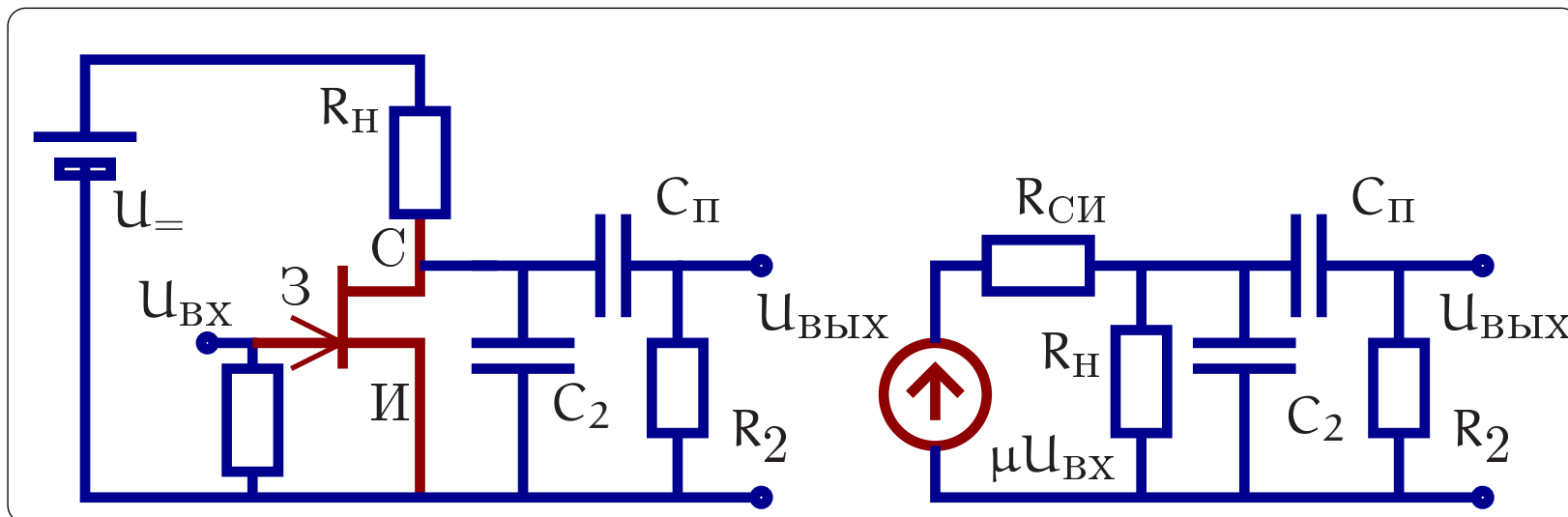
Резонансный усилитель



Если $R_{\text{н}} \ll R_{\text{СИ}}, Z$, то

$$\Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q}, \quad Q = R_{\text{н}} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Переходная характеристика усилителя



Время τ_1 определяет быстроедействие.

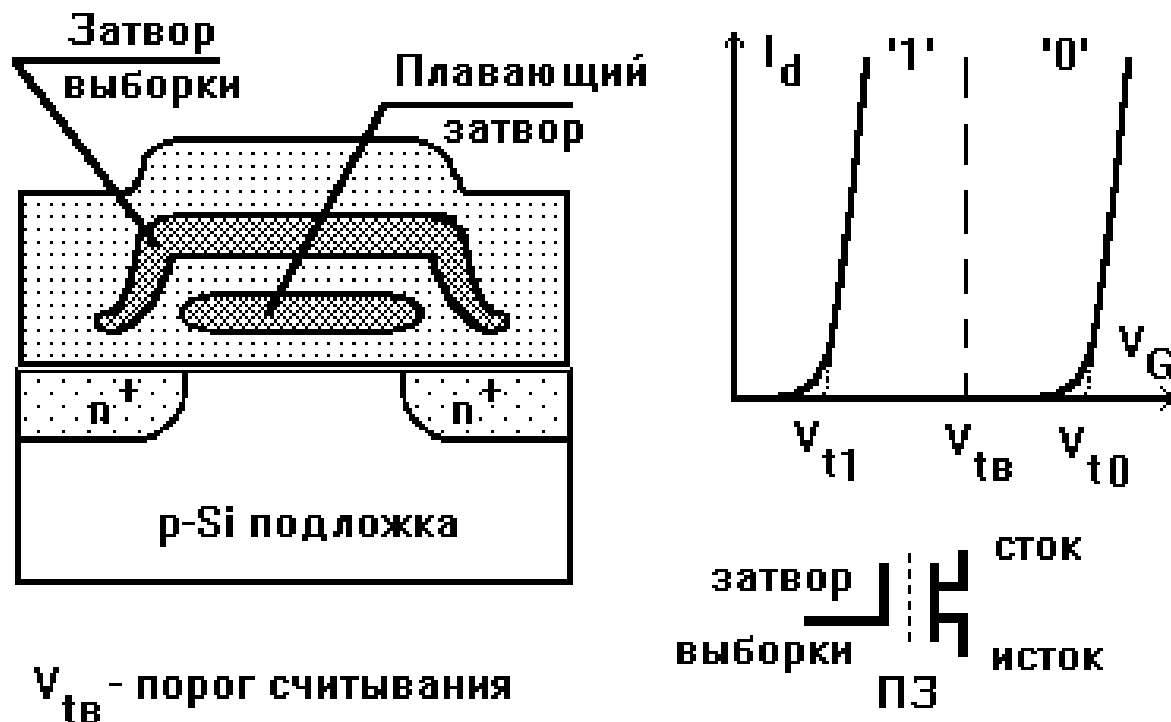
Это важно в радиолокации ($c\tau_1$ – эквивалентная длина), в ядерной физике (схема совпадений) и др.

$$U_{\text{ВХ}} = \mathcal{H}(t), \quad \Rightarrow \quad U_{\text{ВЫХ}} = U_{\text{ВХ}} SR_0 \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right),$$

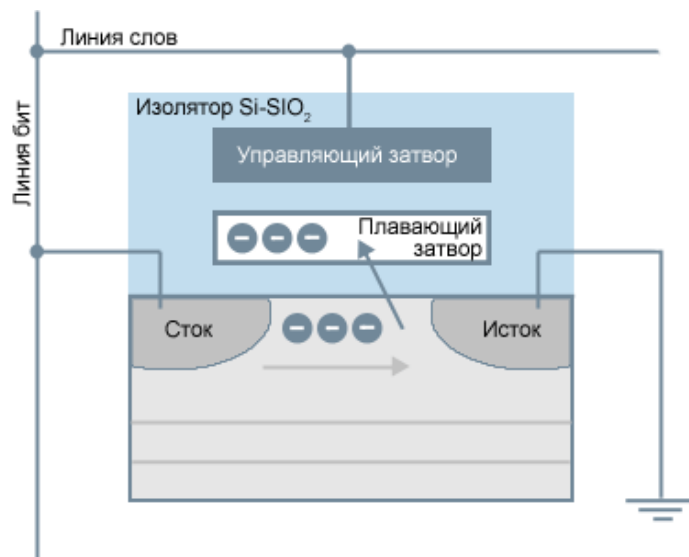
$$\tau_1 = C_2 R_0 = C_2 \frac{R_2 R_{\text{H}}}{R_2 + R_{\text{H}}} \simeq R_{\text{H}} C_2,$$

$$\tau_2 = R_{\text{H}} C_{\text{П}}, \quad \tau_2 \gg \tau_1, \quad (C_{\text{П}} \gg C_2),$$

Технология флэш-памяти



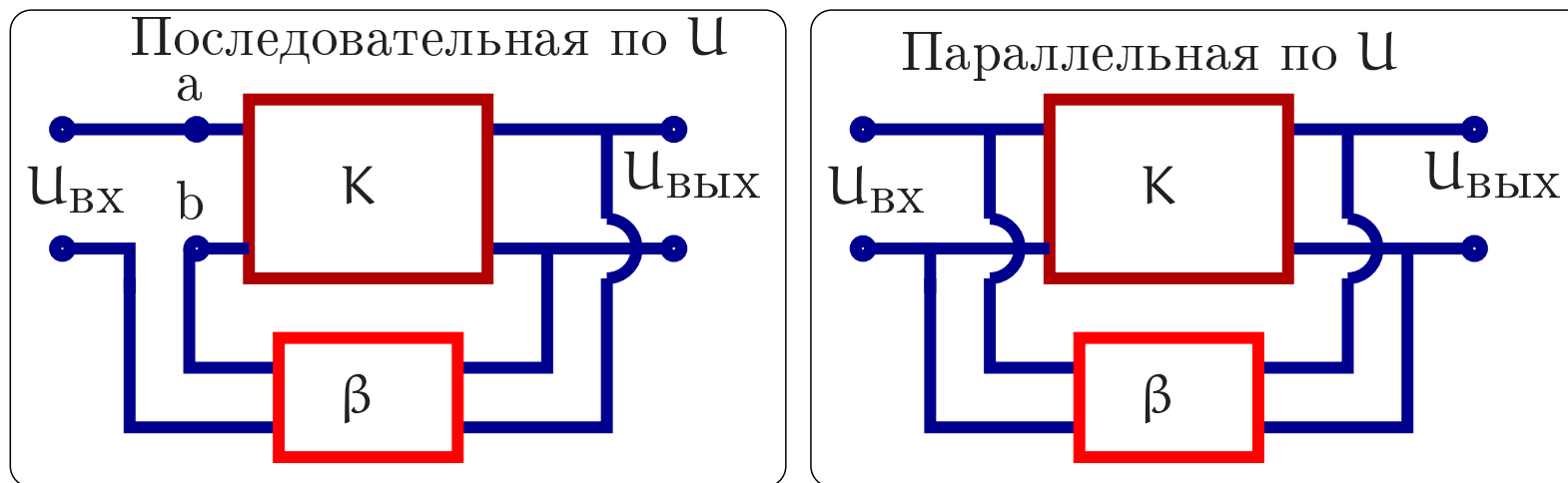
Полевой транзистор с двумя изолированными затворами: управляющим (control) и плавающим (floating).



Положительное поле на управляющем затворе создает канал для электронов. Некоторые из электронов попадают на плавающий затвор, где могут храниться нескольких лет.

Определенный диапазон заряда на плавающем затворе есть “1”, а все, что больше его, — “0”. При чтении распознаются по пороговому напряжению транзистора. Для стирания информации на управляющий затвор подается высокое отрицательное напряжение, и электроны с плавающего затвора туннелируют на исток. Число циклов чтения/записи — от 10^5 до нескольких миллионов. Два типа архитектуры NOR (BIOS, RAM) и NAND (флэш-память).

Обратные связи в усилителях



Для последовательной по напряжению обратной связи:

$$U_{ab} = U_{ВХ} + \beta U_{ВЫХ},$$

$$U_{ВЫХ} = K U_{ab},$$

$$U_{ab} = U_{ВХ} + \beta U_{ВЫХ}, \quad U_{ВЫХ} = K U_{ab},$$

$$K_{\beta} = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{ВХ}} = \frac{U_{ВЫХ}}{U_{ab} - \beta U_{ВЫХ}} = \frac{K(\omega)}{1 - \beta(\omega)K(\omega)}.$$

$$K(\omega) = K_0(\omega)e^{i\phi_k(\omega)}, \quad \beta(\omega) = \beta_0(\omega)e^{i\phi_{\beta}(\omega)},$$

$$\text{a) } \quad \phi_k + \phi_{\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad |K_{\beta}| = \frac{K_0}{1 - \beta_0 K_0},$$

$$\text{b) } \quad \phi_k + \phi_{\beta} = \pi \quad \Rightarrow \quad |K_{\beta}| = \frac{K_0}{1 + \beta_0 K_0}$$

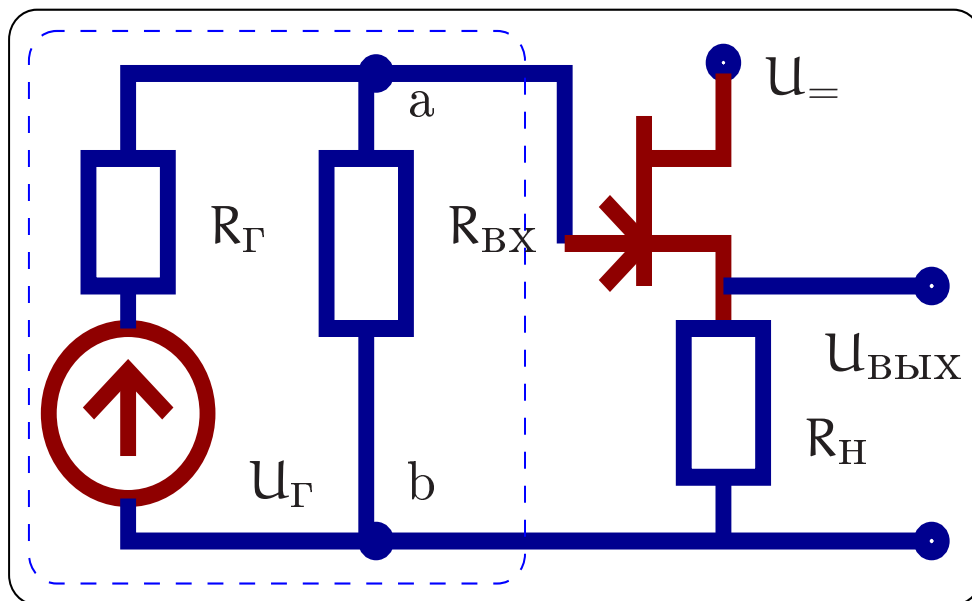
(a) — **положительная** обратная связь,

(b) — **отрицательная** обратная связь.

$$\text{Если } K_0 \beta_0 \gg 1, \quad \text{то } K_{\beta} \simeq \frac{-1}{\beta(\Omega)}$$

Истоковый (эмитерный, катодный) повторитель

Еще один пример устройства с обратной связью



$$R_{\Gamma} \ll R_{\text{ВХ}} \Rightarrow \Delta U_{ab} \simeq U_{\Gamma}, \quad R_{\text{ВХ}} \gg R_{\text{Н}},$$

$$\Delta U_{\text{ЗИ}} = \Delta U_{ab} - R_{\text{Н}} \Delta I_{\text{СИ}} = \Delta U_{ab} - R_{\text{Н}} S \Delta U_{\text{ЗИ}}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\Gamma} &\ll R_{\text{ВХ}} \Rightarrow \Delta U_{\text{аб}} \simeq U_{\Gamma}, & R_{\text{ВХ}} &\gg R_{\text{Н}}, \\
 \Delta U_{\text{ЗИ}} &= \Delta U_{\text{аб}} - R_{\text{Н}} \Delta I_{\text{СИ}} = \Delta U_{\text{аб}} - R_{\text{Н}} S \Delta U_{\text{ЗИ}}, \\
 \Delta U_{\text{ЗИ}} &= \frac{\Delta U_{\text{аб}}}{1 + R_{\text{Н}} S}, \\
 \Delta U_{\text{ВЫХ}} &= R_{\text{Н}} I_{\text{СИ}} = R_{\text{Н}} S \Delta U_{\text{ЗИ}} = \Delta U_{\text{аб}} \frac{R_{\text{Н}} S}{1 + R_{\text{Н}} S} \simeq \Delta U_{\text{аб}}, \\
 K_{\text{U}} &= \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}}}{\Delta U_{\text{ВХ}}} \simeq \frac{R_{\text{Н}} S}{1 + R_{\text{Н}} S} \leq 1, \\
 K_{\text{I}} &= \frac{\Delta I_{\text{ВЫХ}}}{\Delta I_{\text{ВХ}}} = K_{\text{U}} \frac{R_{\text{ВХ}}}{R_{\text{Н}}} \gg 1
 \end{aligned}$$

Устройство для согласования сопротивлений.

Операционный усилитель

Это микросхема, содержащая несколько каскадов усилителей (десятки транзисторов):

- Зависимость коэффициента усиления от частоты:

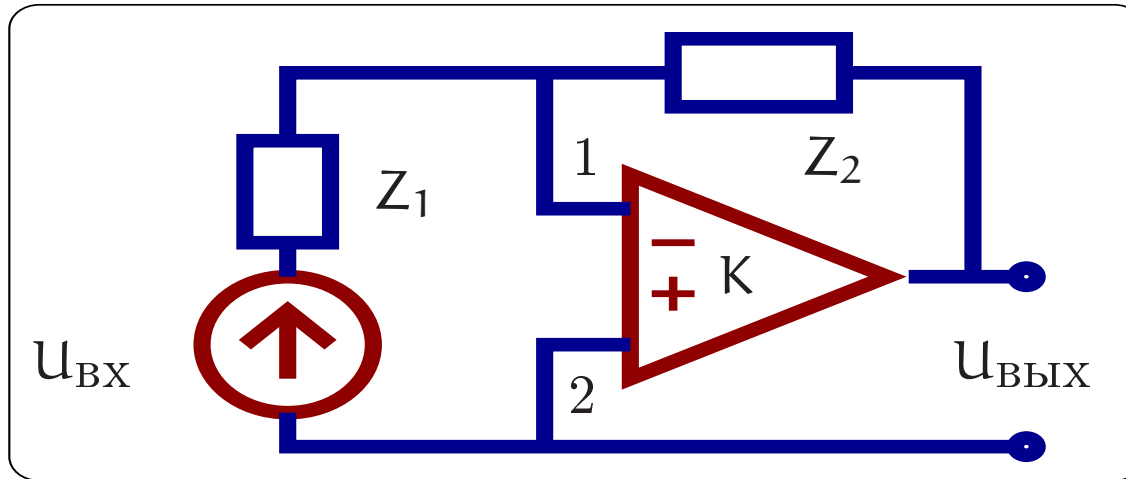
$$K_{oy}(\omega) = \frac{K_{oy}(0)}{1 + i\omega/\omega_B} = \frac{K_{oy}(0)}{1 + iK_{oy}(0)f/f_1}, \quad (10)$$

где ω_B — верхняя частота, $f_1 = (\omega_B/2\pi)K_{oy}(0)$ — частота “единичного усиления”.

$$K_{oy}(0) = 10^4 \dots 10^7, \quad f_1 \simeq 10^6 \dots 10^9 \text{ Гц}$$

- Большое входное сопротивление $R_{вх} \simeq 10^6 \dots 10^{12} \text{ Ом}$
- Малое выходное сопротивление $R_{вых} \simeq 1 \dots 10^3 \text{ Ом}$
- Операционный усилитель **не** используется без цепочки обратной связи.

Инвертирующий усилитель: $K < 0$



Выражаем ток I в цепи ОС и $U_{\text{ВЫХ}}$ через напряжение U_{12} :

$$I = \frac{U_{\text{ВЫХ}} - U_{\text{ВХ}}}{Z_1 + Z_2}, \quad U_{12} = U_{\text{ВХ}} + IZ_1, \quad \boxed{U_{\text{ВЫХ}} = -KU_{12}},$$

$$\frac{-U_{\text{ВЫХ}}}{K} = U_{\text{ВХ}} + \frac{U_{\text{ВЫХ}} - U_{\text{ВХ}}}{Z_1 + Z_2} Z_1,$$

$$-\frac{U_{\text{ВЫХ}}}{K} \left(1 + \frac{KZ_1}{Z_1 + Z_2} \right) = U_{\text{ВХ}} \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)$$

Коэффициент усиления K_β :

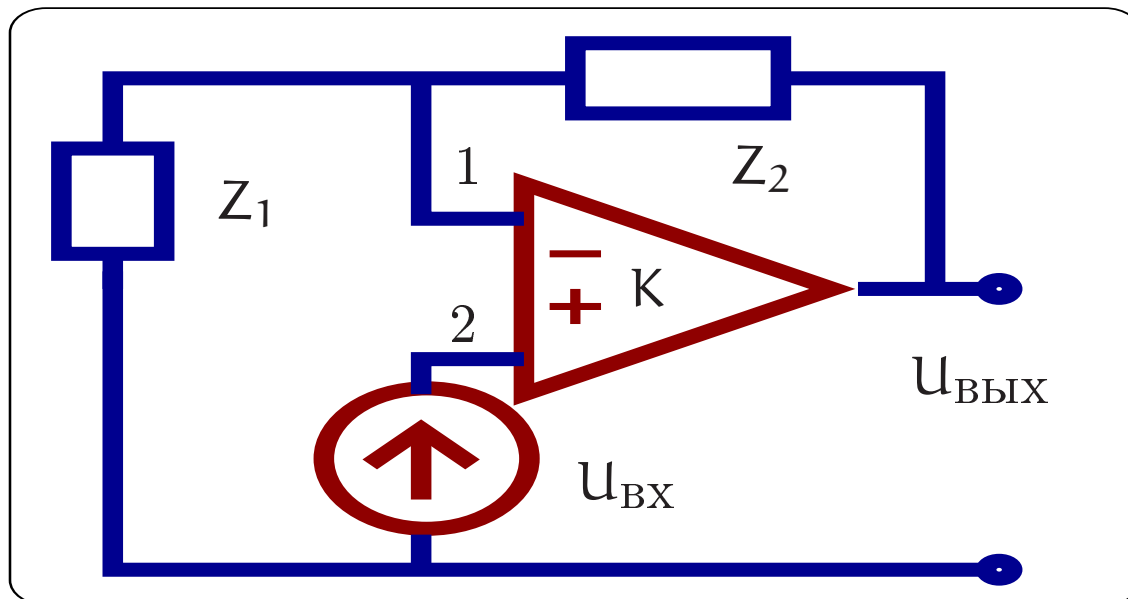
$$K_\beta = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} / \left(\frac{1}{K} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right),$$

$$K_\beta \simeq - \frac{Z_2}{Z_1} \quad \text{при} \quad K \rightarrow \infty.$$

Знак K_β отрицательный — **инвертирующий** усилитель.

Манипулируя частотными зависимостями $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ можно получать нужные величины коэффициента усиления и рабочей полосы усилителя.

Неинвертирующий усилитель: $K > 0$



$$I = \frac{U_{ВЫХ}}{Z_1 + Z_2}, \quad \frac{-U_{ВЫХ}}{K} = U_{12} = + \frac{U_{ВЫХ} Z_1}{Z_1 + Z_2} - U_{ВХ},$$

$$U_{ВХ} = U_{ВЫХ} \left(\frac{1}{K} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)$$

Коэффициент усиления K_β

$$I = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{Z_1 + Z_2}, \quad \frac{-U_{\text{ВЫХ}}}{K} = U_{12} = +\frac{U_{\text{ВЫХ}} Z_1}{Z_1 + Z_2} - U_{\text{ВХ}},$$
$$U_{\text{ВХ}} = U_{\text{ВЫХ}} \left(\frac{1}{K} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)$$

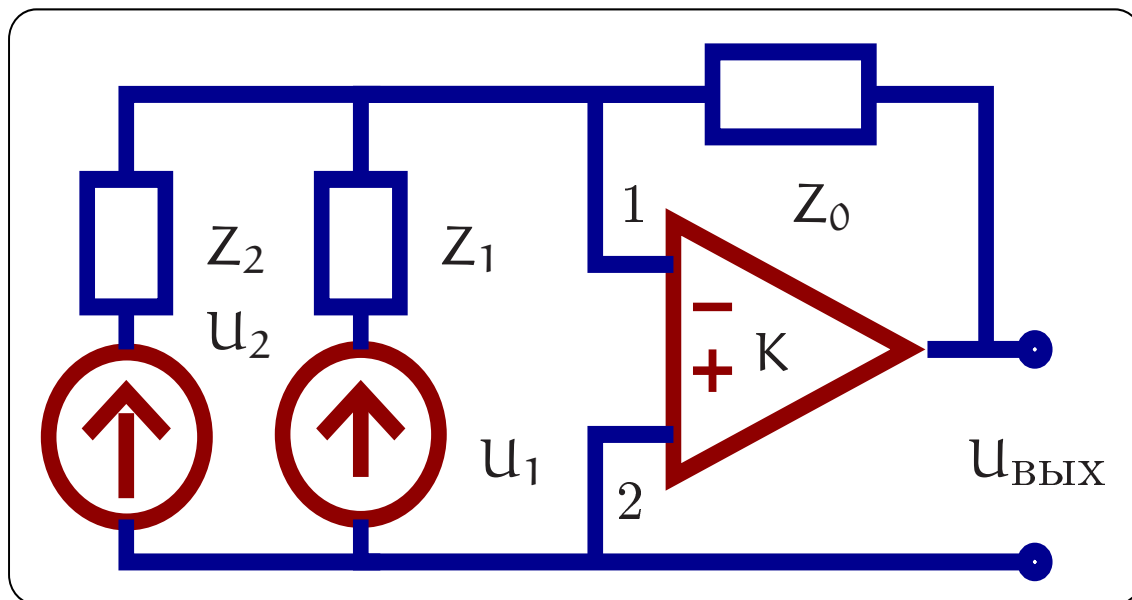
Из последнего соотношения находим коэффициент усиления K_β :

$$K_\beta = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = 1 / \left(\frac{1}{K} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right).$$

$$K_\beta \simeq \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}, \quad \text{при } K \rightarrow \infty.$$

Знак K_β положительный — **неинвертирующий** усилитель.

Сумматор



Определим токи I_1 и I_2 и выразим $U_{\text{ВЫХ}}$:

$$U_{12} = U_1 + I_1 Z_1, \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_{12} - U_1}{Z_1},$$

$$U_{12} = U_2 + I_2 Z_2, \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{U_{12} - U_2}{Z_2},$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{U_{12} - U_1}{Z_1}, & I_2 &= \frac{U_{12} - U_2}{Z_2}, \\
 U_{\text{ВЫХ}} &= U_{12} + (I_1 + I_2)Z_0 = \\
 &= U_{12} + \left(\frac{U_{12} - U_1}{Z_1} + \frac{U_{12} - U_2}{Z_2} \right) Z_0, \\
 U_{\text{ВЫХ}} &= U_{12} \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1} + \frac{Z_0}{Z_2} \right) - Z_0 \left(\frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} \right).
 \end{aligned}$$

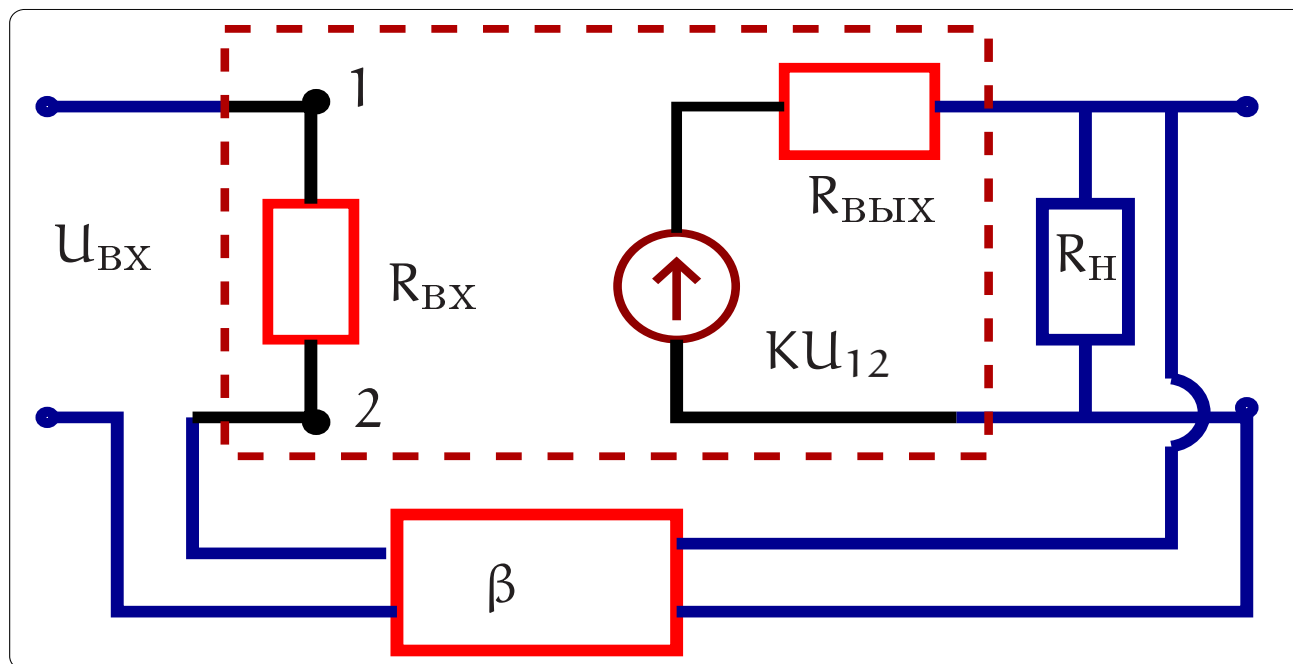
Используем $U_{\text{ВЫХ}} = -KU_{12}$ и возьмем предел $K \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{ВЫХ}} \left(1 + \frac{1}{K} \left(1 + \frac{Z_0}{Z_1} + \frac{Z_0}{Z_2} \right) \right) &= -Z_0 \left(\frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} \right), \\
 U_{\text{ВЫХ}} &\simeq -Z_0 \left(\frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} \right), \quad \text{если } K \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Взвешенная сумма от входных напряжений.

Очевидно обобщение: $U_{\text{ВЫХ}} \simeq -Z_0 \sum_n U_n / Z_n$

Входное сопротивление в усилителе с ОС



Без обратной связи: $R_{ВХ} = \frac{U_{ВХ}}{I_{ВХ}}$

С обратной связью: $R_{ВХ}^{\beta} = \frac{U_{ВХ}}{I_{ВХ}} \Big|_{\beta}$

Вывод R_{BX}^{β}

$$U_{12} = I_{BX} R_{BX} = U_{BX} + \beta U_{ВЫХ},$$

$$U_{ВЫХ} = K I_{BX} R_{BX},$$

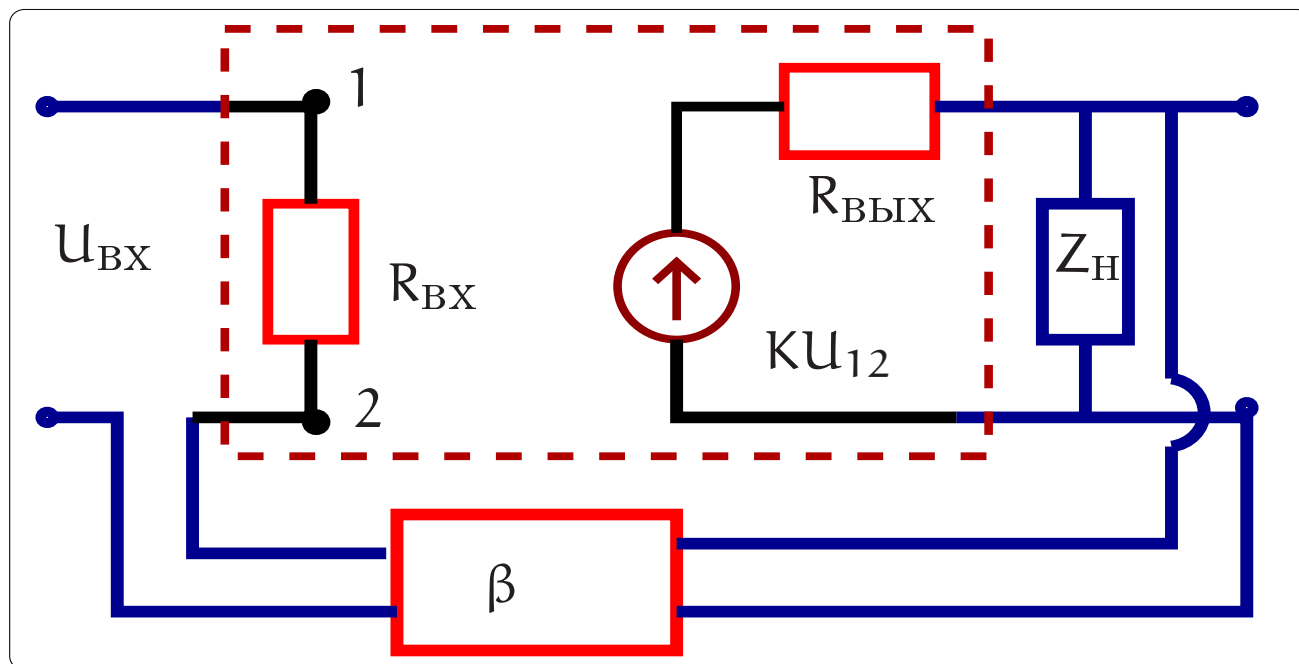
$$I_{BX} R_{BX} = U_{BX} + K\beta I_{BX} R_{BX},$$

$$I_{BX} R_{BX} (1 - K\beta) = U_{BX},$$

$$R_{BX}^{(\beta)} \equiv \frac{U_{BX}}{I_{BX}}.$$

$$R_{BX}^{(\beta)} = R_{BX} (1 - K\beta)$$

Выходное сопротивление в усилителе с ОС



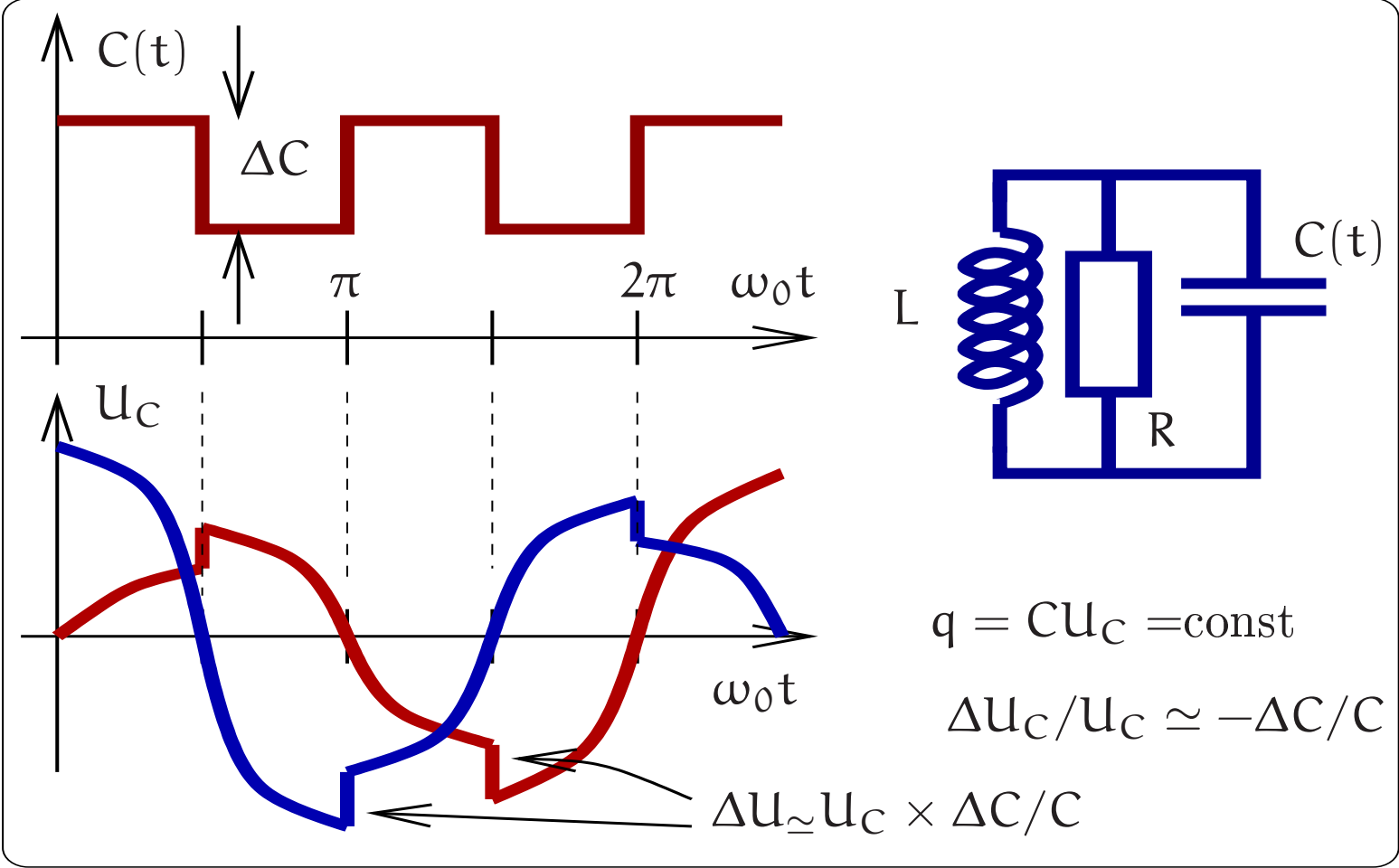
Без обратной связи:
$$U_{ВЫХ} = KU_{ВХ} \frac{Z_{Н}}{Z_{Н} + R_{ВЫХ}},$$

С обратной связью
$$U_{ВЫХ} = K_{\beta} U_{ВХ} \frac{Z_{Н}}{Z_{Н} + R_{ВЫХ}^{\beta}}$$

$$\begin{aligned}
 U_{12} &= U_{ВХ} + \beta U_{ВЫХ}, \\
 U_{ВЫХ} &= K U_{12} \frac{Z_H}{Z_H + R_{ВЫХ}} = K (U_{ВХ} + \beta U_{ВЫХ}) \frac{Z_H}{Z_H + R_{ВЫХ}}, \\
 U_{ВХ} &= \frac{U_{ВЫХ}}{K} \left(\frac{Z_H + R_{ВЫХ}}{Z_H} - K\beta \right) = \\
 &= \frac{U_{ВЫХ} (1 - K\beta)}{K} \left(1 + \frac{R_{ВЫХ}}{Z_H (1 - K\beta)} \right), \\
 U_{ВЫХ} &= U_{ВХ} \frac{K}{(1 - K\beta)} \times \frac{Z_H}{Z_H + \frac{R_{ВЫХ}}{1 - K\beta}},
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{R_{ВЫХ}^{(\beta)} = \frac{R_{ВЫХ}}{1 - K\beta}}$$

Параметрический усилитель



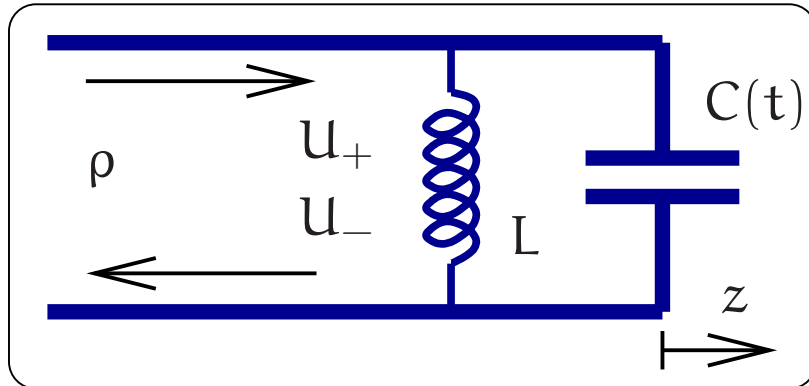
Релаксация за $T/2$: $\frac{\Delta U_C}{U_C} \Big|_{\text{rel}} = - \left(1 - e^{T/2\tau^*} \right) \simeq -\frac{T}{2\tau^*} = -\frac{\pi}{2Q},$

Параметрическая подкачка: $\frac{\Delta U_C}{U_C} \Big|_{\text{param}} = \pm \frac{\Delta d}{d} = \pm m,$

Полное изменение: $\frac{\Delta U_C}{U_C} \Big|_{\text{full}} = -\frac{\pi}{2Q} \pm m,$

Экв. добротность: $Q_{\text{ЭКВ}} = \frac{Q}{1 \mp 2mQ/\pi}$

Одноконтурный параметрический усилитель



$$C = \frac{C_0}{1 + m \sin(2\omega_0 t + \phi)}. \quad (11)$$

$$u^+(t) = U_0^+ \sin(\omega_0 t - \omega_0 z/c) \quad (12)$$

$$u^+ + u^- = \frac{q}{C}, \quad \frac{q}{C} = Li, \quad (13)$$

$$\frac{u^+ - u^-}{\rho} = \dot{q} + I. \quad (14)$$

Выражаем I через q (13) и дифференцируем (13, 14):

$$\dot{u}^+ + \dot{u}^- = \frac{\dot{q}}{C}, \quad (15)$$

$$\frac{\dot{u}^+ - \dot{u}^-}{\rho} = \ddot{q} + \frac{q}{LC}. \quad (16)$$

Делим (15) на ρ и складываем с (16):

$$\frac{2\dot{u}^+}{\rho} = \ddot{q} + \frac{\dot{q}}{\rho C} + \frac{q}{LC} = \quad (17)$$

$$= \ddot{q} + \frac{\omega_0 \dot{q}}{Q} + \omega_0^2 \left(1 + m \sin(2\omega_0 t + \phi) \right) q, \quad (18)$$

$$u^- = \frac{q}{C} - u^+, \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{\rho C}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (19)$$

Нет модуляции емкости ($m = 0$):

$$\frac{2\omega_0 U_0^+}{\rho} = \frac{\omega q_0}{\rho C} \Rightarrow q_0 = 2U_0^+ C$$

$$U^- = U_0^+ \sin(\omega_0 t + \omega_0 z/c).$$

Есть модуляция $m \neq 0$. Отбрасываем члены с частотой $3\omega_0$ (Справка: $\sin \alpha \sin \beta = 1/2(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$):

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{U}^+(t)}{\rho} &= \frac{2\omega_0 U^+}{\rho} \cos \omega_0 t = \\ &= q_0 \sin \omega_0 t \left((-\omega_0^2 + \omega_0^2(1 + m \sin(2\omega_0 t + \phi))) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_0^2 q_0}{Q} \cos \omega_0 t = \right. \\ &\approx \frac{\omega_0^2 m q_0}{2} \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{\omega_0^2 q_0}{Q} \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

$$\frac{2\omega_0 U^+}{\rho} \cos \omega_0 t \simeq \frac{\omega_0^2 q_0}{Q} \left(\frac{mQ}{2} \cos(\omega_0 t + \phi) + \cos \omega_0 t \right)$$

При $\phi = 0$ получаем: ($Q = \rho \omega_0 C_0$)

$$q_0 = \frac{2U_0^+ C_0}{1 + mQ/2}, \quad u^- = \frac{q}{c} - u^+$$

$$u_0^- = u_0^+ \left(\frac{2}{1 + \frac{mQ}{2}} - 1 \right)$$

$$u^- = u_0^+ \left(\frac{1 - \frac{mQ}{2}}{1 + \frac{mQ}{2}} \right) \sin(\omega_0 t + \omega_0 z/c)$$

Амплитуда отраженной волны **меньше** амплитуды падающей.

$$\frac{2\omega_0 U^+}{\rho} \cos \omega_0 t \simeq \frac{\omega_0^2 q_0}{Q} \left(\frac{mQ}{2} \cos(\omega_0 t + \phi) + \cos \omega_0 t \right)$$

При $\phi = \pi$ получаем:

$$q_0 = \frac{2U_0^+ C_0}{1 - mQ/2}, \quad U_0^- = U_0^+ \left(\frac{2}{1 - \frac{mQ}{2}} - 1 \right)$$

$$U^- = U_0^+ \left(\frac{1 + \frac{mQ}{2}}{1 - \frac{mQ}{2}} \right) \sin(\omega_0 t + \omega_0 z/c)$$

Амплитуда отраженной волны **больше** амплитуды падающей.

Квантовый осциллятор и сжатые состояния

Когрентные состояния

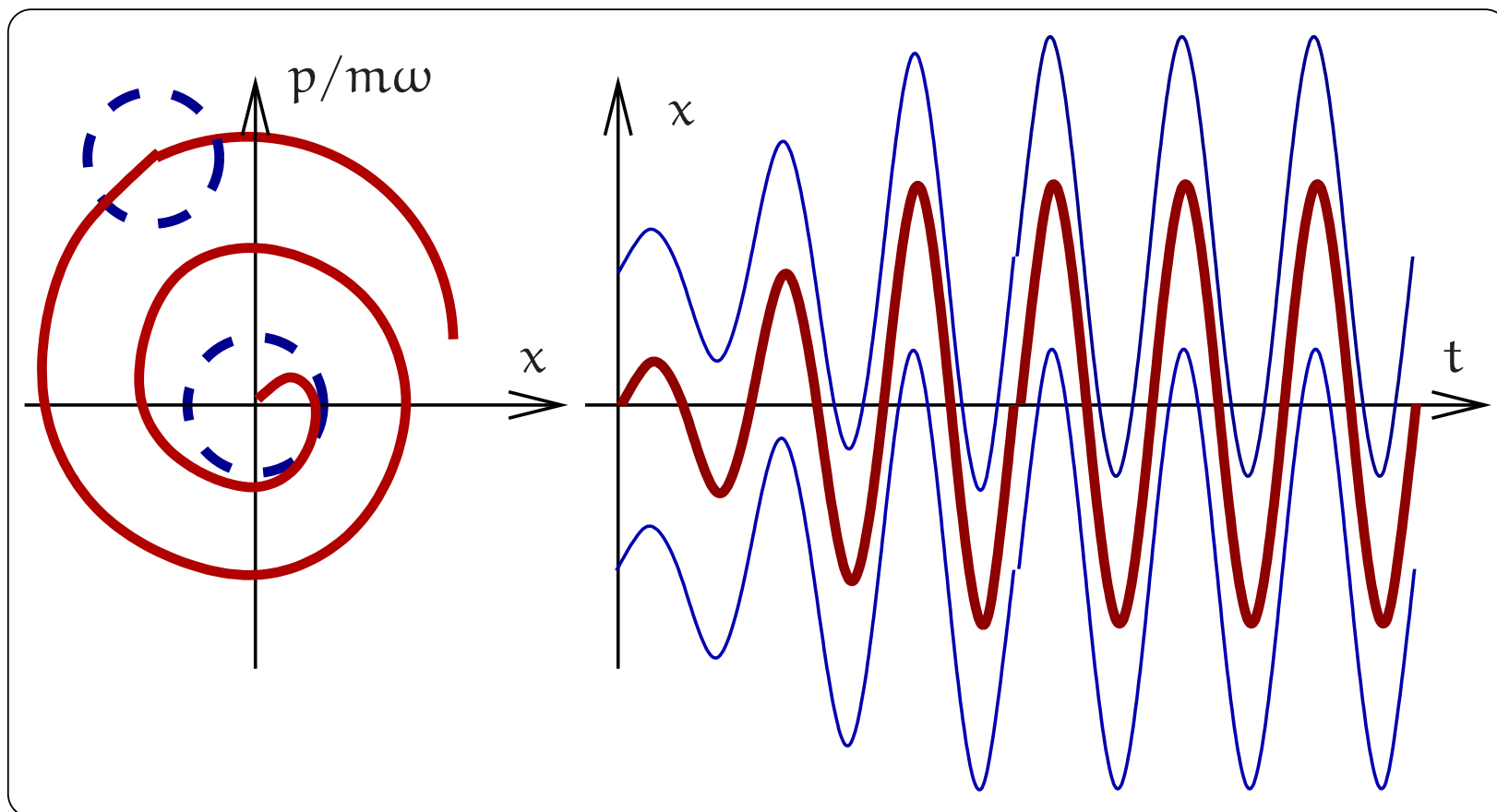
Найдем энергию основного состояния квантового осциллятора:

$$\mathcal{E} = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{m\omega^2 \Delta x^2}{2} + \frac{\Delta p^2}{2m} \geq \frac{m\omega^2 \Delta x^2}{2} + \frac{1}{2m} \times \frac{\hbar^2}{4 \Delta x^2},$$

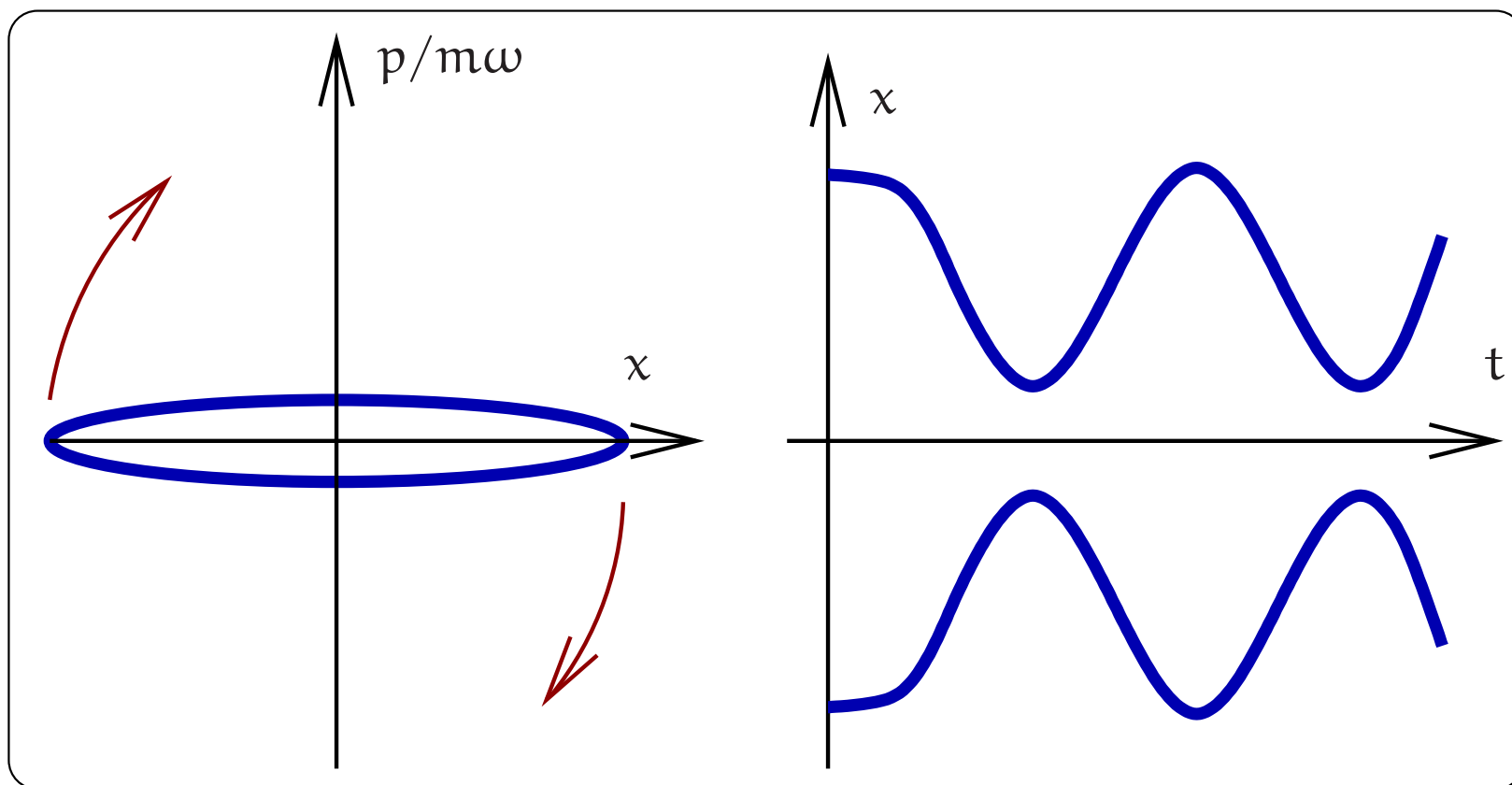
$$\mathcal{E}_{\min} = 2\sqrt{\frac{m\omega^2}{2} \times \frac{\hbar^2}{8m}} = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \text{при оптимальном } \Delta x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

При действии классической силы на осциллятор в основном состоянии **средняя** координата двигается по классической траектории, а **неопределенность** координаты остается Δx_0 .

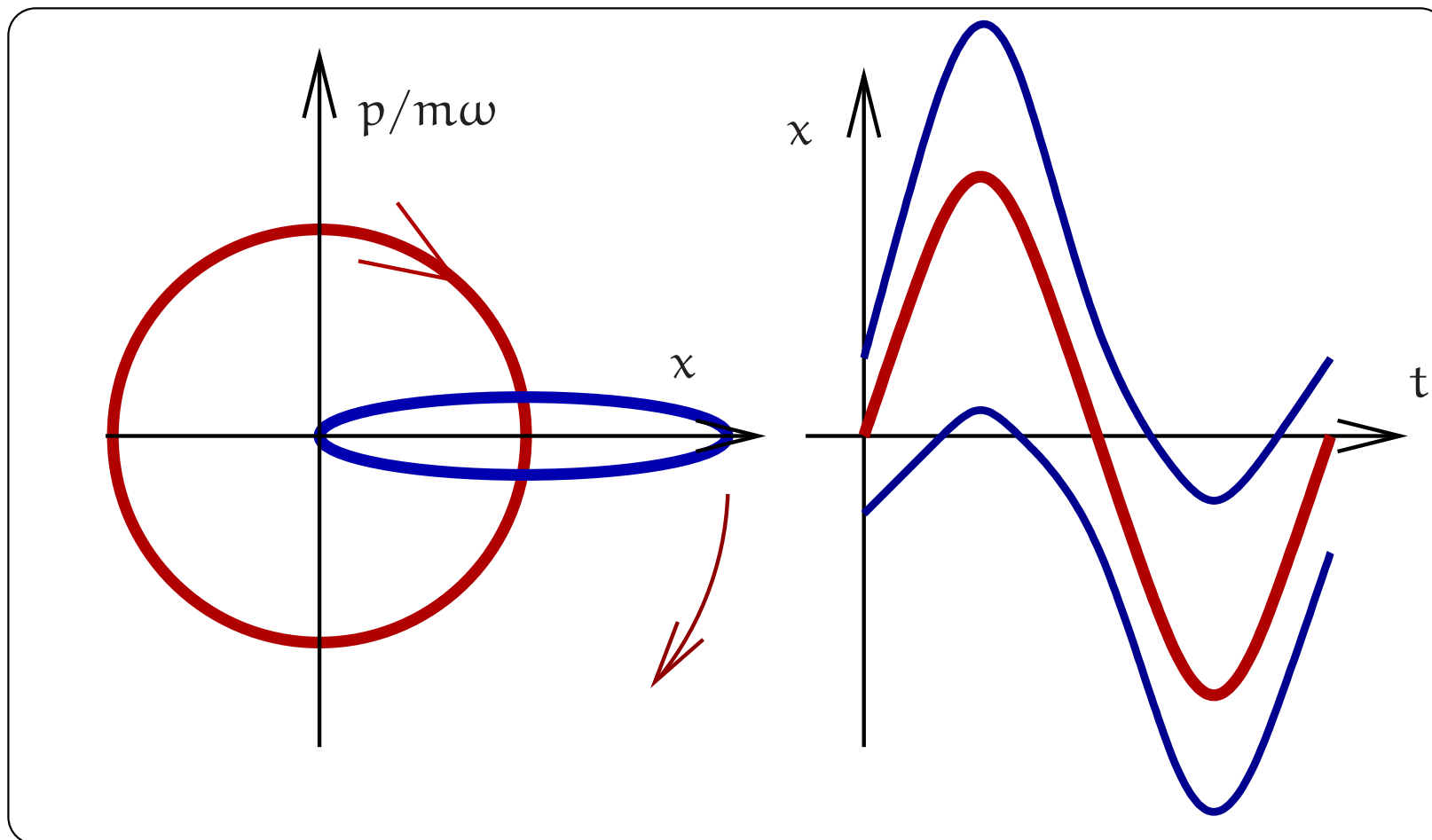
Когерентные состояния



Сжатый вакуум



Сжатые состояния



Достигнуто в оптике (Kimble, Polzik):

$$\frac{\Delta x_0^2}{\Delta x_{\text{squeezed}}^2} \simeq 3$$

Схема эксперимента (нелинейный кристалл: $\epsilon = \epsilon + \chi^{(2)}E$)

