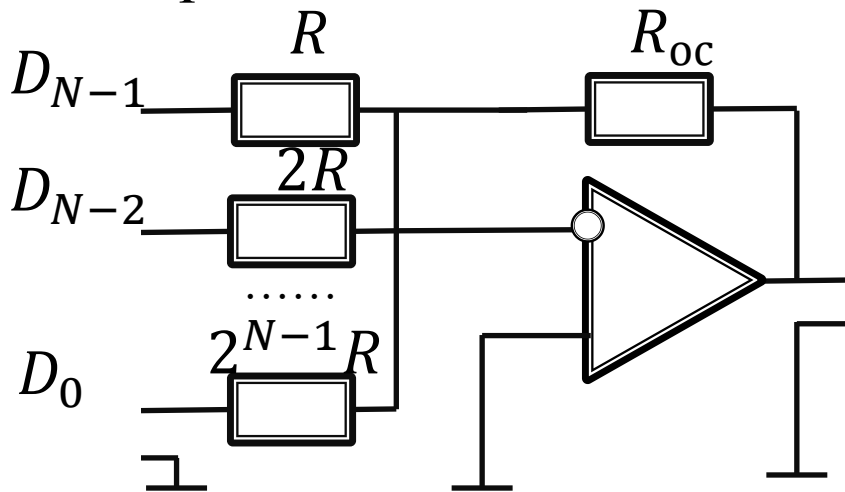




# Цифроаналоговые и Аналого-цифровые преобразователи.

**ЦАП (DAS)** – формирует на выходе напряжение (ток) соответствующей цифровому коду, поступившему на вход.

ЦАП на основе ОУ с коммутируемыми весовыми резисторами:



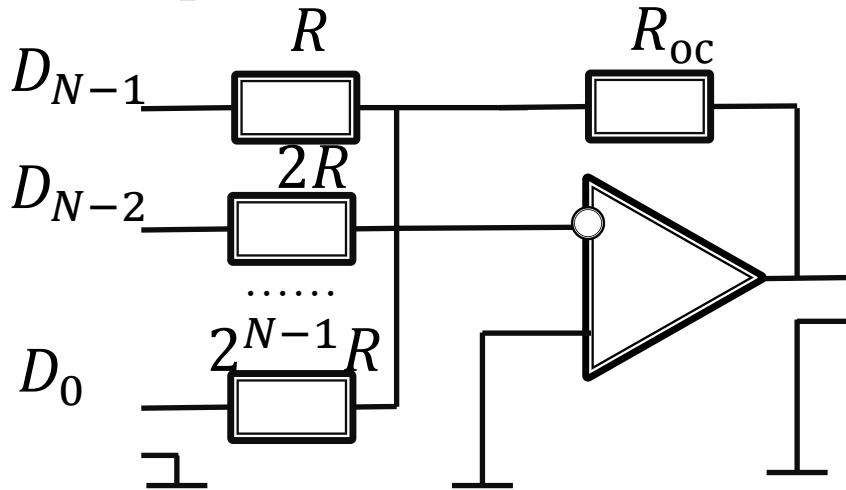
$$U_{\text{ВЫХ}} = -U_1 R_{\text{oc}} \sum_i \frac{D_i}{2^{N-1-i} R}$$

$$D_i = [0,1]$$



# Цифроаналоговые и Аналого-цифровые преобразователи.

ЦАП на основе ОУ с коммутируемыми весовыми резисторами:



$$U_{\text{ВЫХ}} = -U_1 R_{oc} \sum \frac{D_i}{2^{N-1-i} R}$$

$$D_i = [0,1]$$

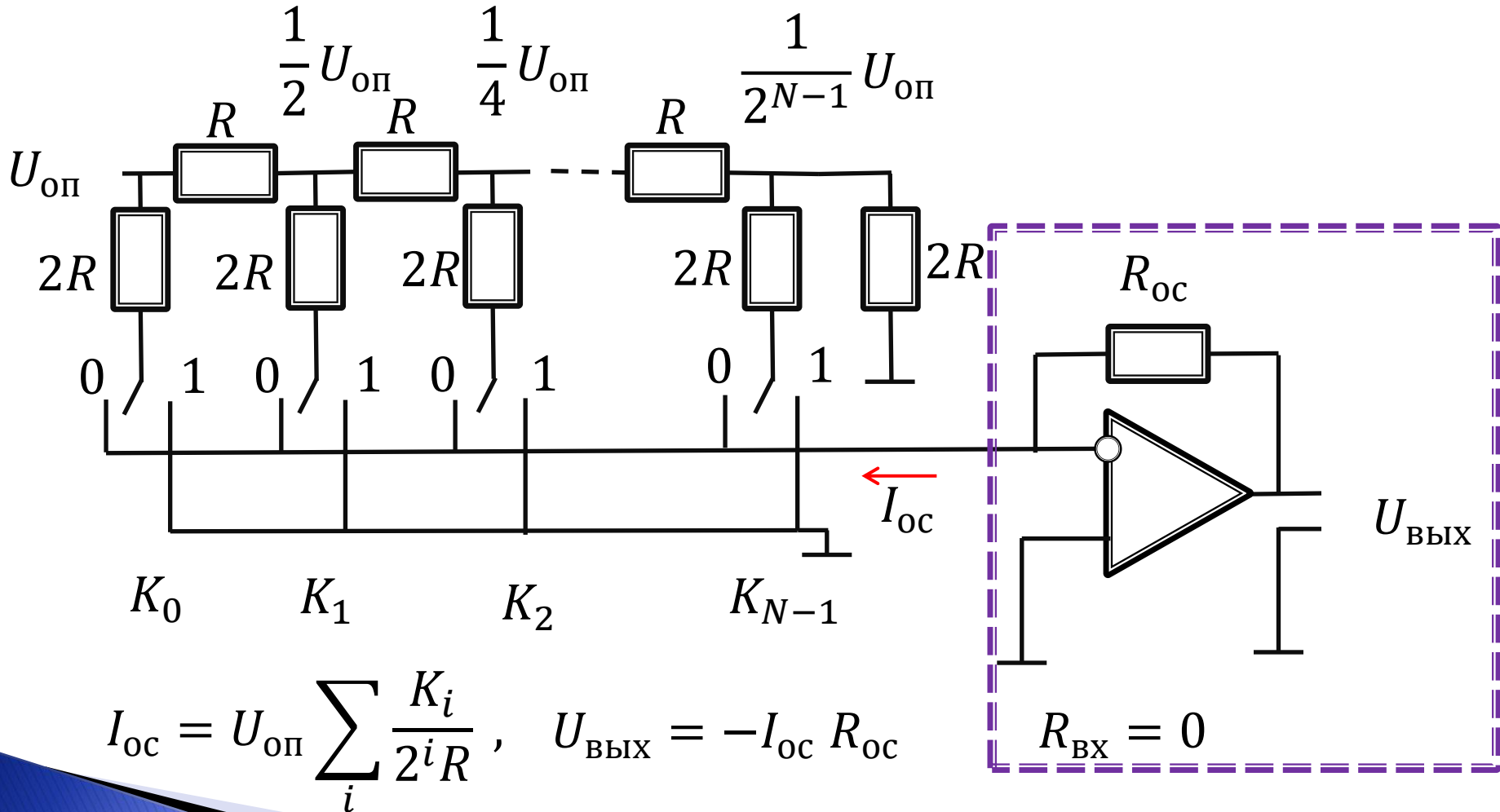
Точность зависит от точности и стабильности параметров резисторов. При большой разрядности ЦАП технологически трудно выполнить резисторы с перепадом сопротивлений точно в  $2^{N-1}$  раза.

Удобно изготавливать резисторы с *одинаковыми* сопротивлениями.



# Цифроаналоговые и Аналого-цифровые преобразователи.

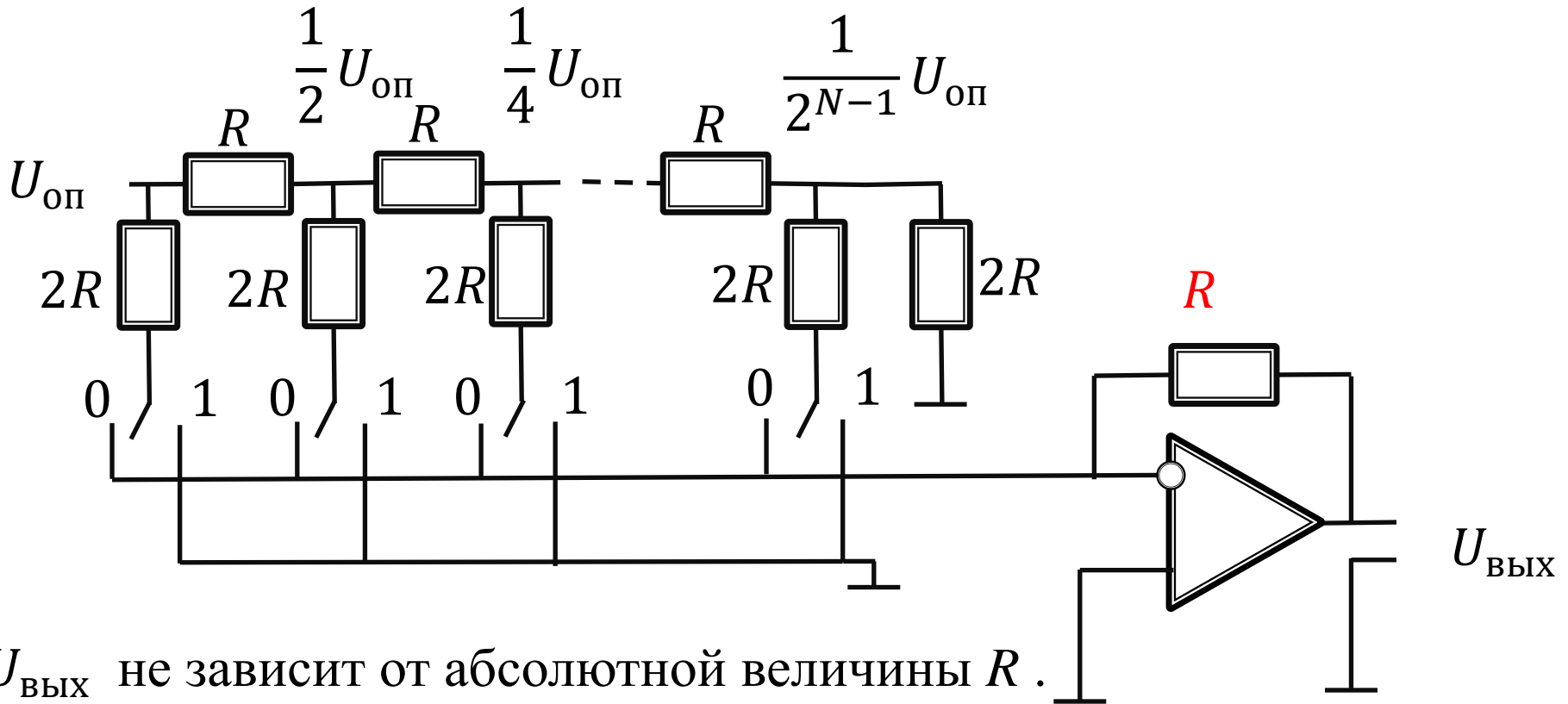
ЦАП на основе ОУ с матрицей резисторов  $R$  -  $2R$ :





# Цифроаналоговые и Аналого-цифровые преобразователи.

ЦАП на основе ОУ с матрицей резисторов  $R$  -  $2R$ :



$U_{\text{вых}}$  не зависит от абсолютной величины  $R$ .

Чем выше **идентичность** в звеньях матрицы, тем точнее осуществляется преобразование.

# Основные параметры ЦАП



- **Разрядность** – число двоичных разрядов входного кода (N).
- **Диапазон выходной величины** – интервал значений выходного напряжения

$$U_{min} \div U_{max}$$

- **Относительная разрешающая способность** определяется как величина, обратная числу уровней квантования

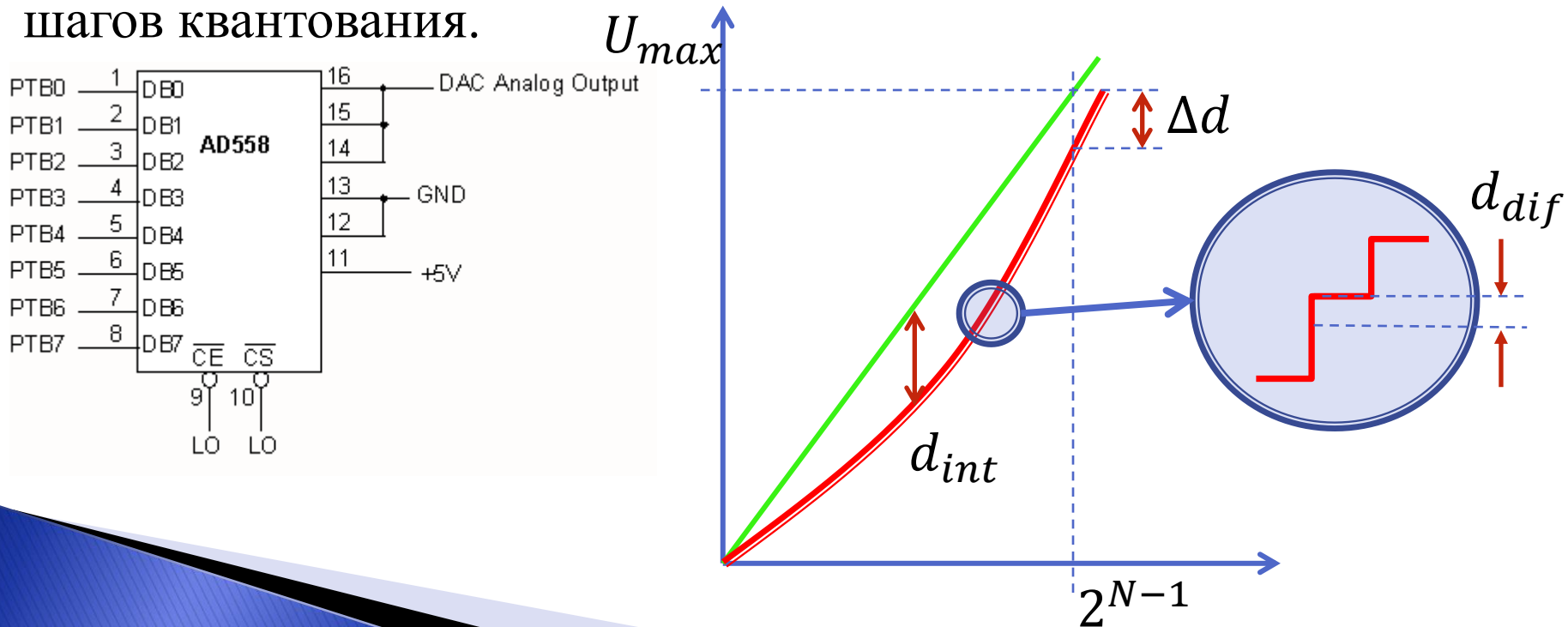
$$d_r = \frac{1}{2^N - 1}$$

- **Абсолютная разрешающая способность** – численно равна шагу квантования

$$d_A = \frac{U_{max}}{2^N - 1} = \Delta U$$



- **Абсолютная погрешность преобразования  $\Delta d$**  – максимальное отклонение выходного напряжения в конечной точке реальной характеристики преобразования от идеальной.
- **Интегральная нелинейность преобразования ЦАП –  $d_{int}$**  определяет максимальное отклонение реальной характеристики от идеальной
- **Дифференциальная нелинейность преобразования ЦАП  $d_{dif}$**  численно равна максимальной разности двух соседних шагов квантования.





**Время установления**  $t_{\text{уст}}$  выходного напряжения или тока — интервал времени от начала изменения входного двоичного кода от минимального до максимального значения до момента когда выходной аналоговый сигнал достигнет заданной величины.

**Максимальная частота преобразования**  $f_{\text{пр}}$  — наибольшая частота смены входного кода.

Современные ЦАП многообразны по схемотехнике и часто интегрируются с микропроцессорами.

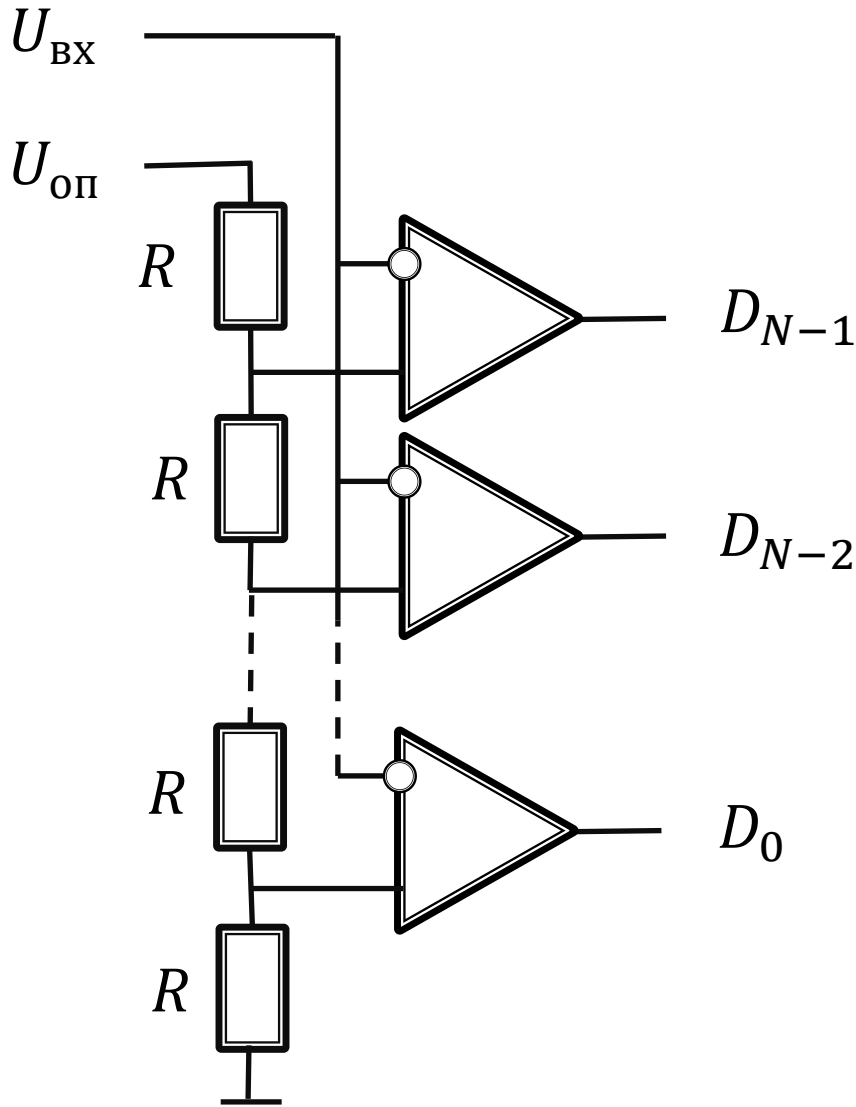
# Примеры микросхем ЦАП



Модель	Функция	Разрядность, (бит)	Время установления, (мкс)	Напряжение питания (В)	Интерфейс
MAX 1578	Одноканальный 8-бит. быстродейств. ЦАП	8	0,025	+2,7 ... +3,3	mP/8
MAX 5233	12-бит. двухканальн. ЦАП со встроенным источником опорн. напряжения	10	10	+5	Послед. SPI
MAX 514	Четырехканальный 12-бит. КМОП ЦАП	12	1	+5	Последов.
MAX 5544	Недорогой 14-бит. ЦАП	14	1	+5	Послед. SPI
MAX 5264B	8 канальный 14-бит. ЦАП с параллельным входом	14	22	+7...+14, -5...-9, +5	mPI
MAX 5444	16-бит. ЦАП с последовательным интерфейсом	16	1	+3	Послед. SPI



# АЦП параллельного преобразования

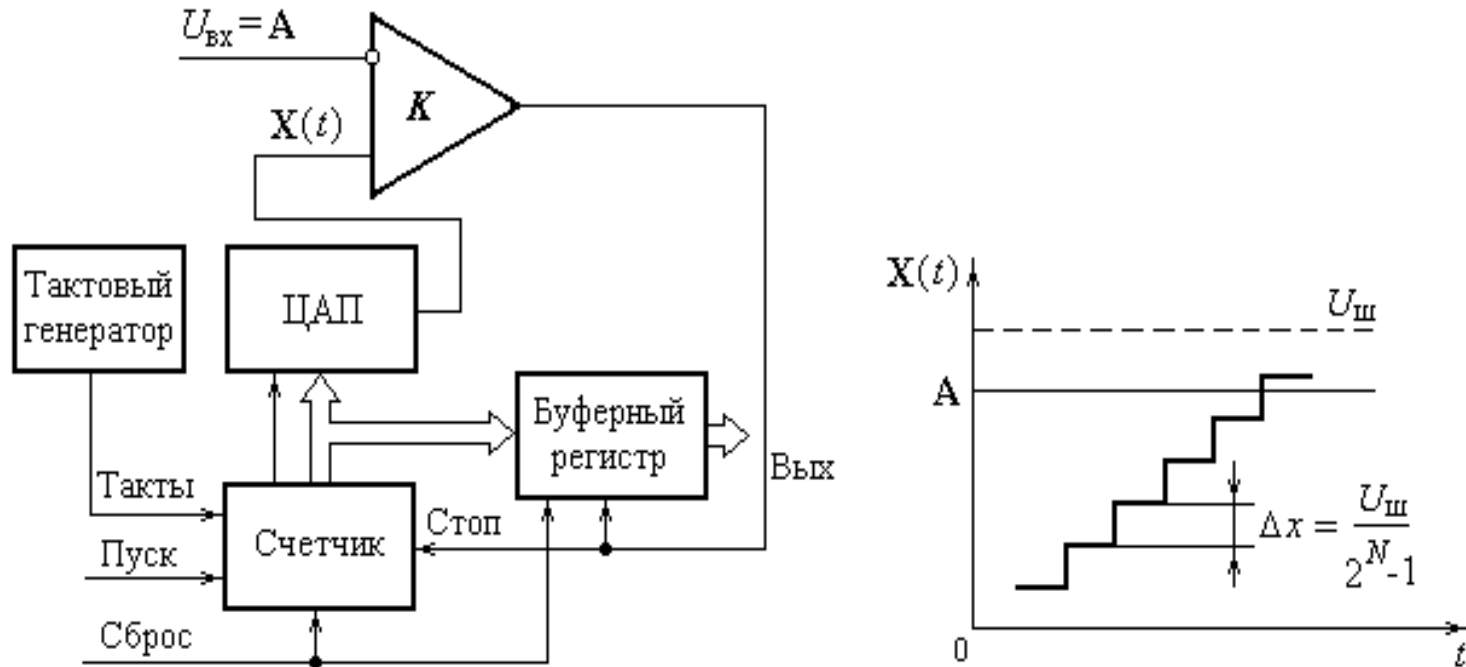


Используются ОУ в режиме компараторов напряжения. На один из двух входов каждого компаратора подается свое опорное напряжение, формируемое резистивной матрицей. Разность между опорными напряжениями двух соседних компараторов равна

$$\frac{U_{\text{оп}}}{2^{N-1}}$$



## АЦП последовательного счета



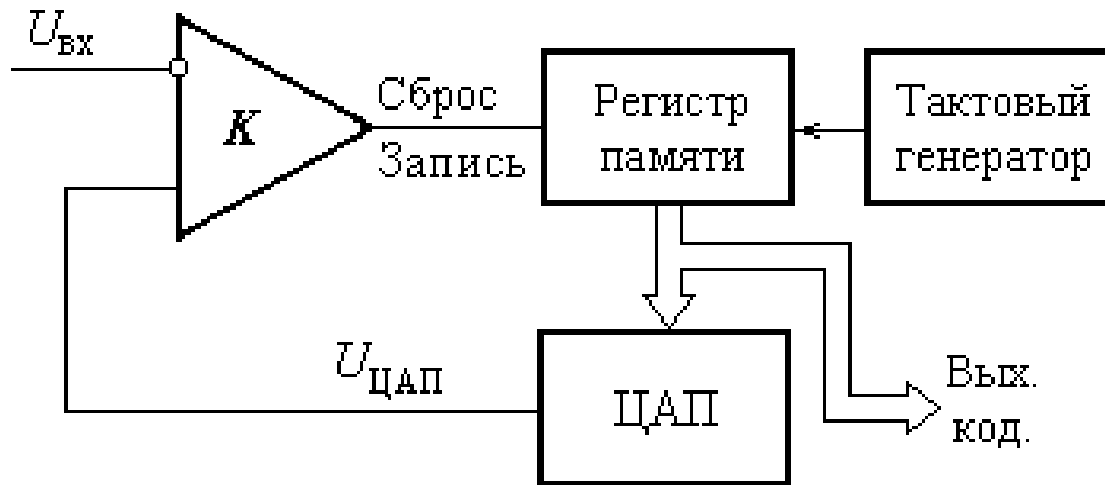
Импульсы тактового генератора счетчик преобразует в параллельный двоичный код, ЦАП преобразует его в напряжение, компаратор вырабатывает сигнал Стоп, когда оно станет равно входному сигналу. Максимальное время преобразования:

$$t = 2^{N-1} t_{\text{такт}}$$

Недостаток - низкое быстродействие.



# АЦП последовательного приближения



Старший разряд ЦАП устанавливается в единицу. Если  $U_{\text{ВХ}} > U_{\text{ЦАП}}$ , то компаратор «подтверждает» это состояние. Затем единица устанавливается в следующем за старшим разряде. Если окажется, что  $U_{\text{ВХ}} < U_{\text{ЦАП}}$ , последняя установленная в ЦАП единица заменяется на ноль. Так повторяется до младшего разряда. Таким образом, после  $N$  тактов сравнения  $U_{\text{ВХ}}$  и  $U_{\text{ЦАП}}$ , в регистре памяти сформируется  $N$ -разрядный двоичный код.

Время преобразования:  $t = Nt_{\text{ТАКТ}}$

# Основные параметры АЦП



**Статические** – аналогичны ЦАП:

- **Разрядность** – число двоичных разрядов входного кода ( $N$ )
- **Диапазон входной величины** – интервал значений входного напряжения
$$U_{min} \div U_{max}$$
- **Абсолютная погрешность преобразования  $\Delta d$**  - максимальное отклонение выходного напряжения в конечной точке реальной характеристики преобразования от идеальной.
- **Интегральная нелинейность преобразования АЦП** –  $d_{int}$  определяет максимальное отклонение реальной характеристики от идеальной



# Основные параметры АЦП

## Динамические:

- **Максимальная частота преобразования** – частота дискретизации входного сигнала;
- **Апертурное время** – время, в течение которого сохраняется неопределенность между значением выборки и временем, к которому оно относится;
- **Апертурная неопределенность** – случайное изменение апертурного времени в конкретной точке характеристики преобразования;
- **Время кодирования** – время, в течение которого осуществляется непосредственное преобразование установившегося значения входного сигнала (время от начала импульса запуска до появления выходного кода).

# Примеры микросхем АЦП



Модель	Функция	Разрядность (бит)	Время преобразования (МКС)	Интерфейс	Напряжение питания (В)
MAX1011	Малопотребляющая АЦП с 90М выборок/с	6	0,003	mP/8	5 и 3,3
ADC 0820	Быстрый КМОП АЦП с УВХ	8	1,4	mP/8	5
MAX104	Сверхбыстродействующий АЦП, 1P выборок/с с УВХ	8	0,001	PECL/8	±5
MAX108	Сверхбыстродействующий АЦП, 1,5Г выборок/с с УВХ	8	0,00067	PECL/8	±5
MAX1180	2-канальный 10-бит маломощн. АЦП с внутрен. ИОН, 105М выборок/с	10	–	mP/10	2,7...3,6
MAX173	КМОП АЦП с внутрен. ИОН	10	5	mP/12	+5 и – (12...15)



# Z-преобразование

Пусть  $\{x_k\} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  – числовая последовательность, конечная или бесконечная, содержащая отсчеты некоторого сигнала. Тогда функция комплексной переменной  $z$ :

$$X(z) = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^{-k}$$

если она существует, называется  $z$ -преобразованием  $\{x_k\}$ .

Примеры:

$$\{x_k\} = (1, 0, 0, \dots) : X(z) = 1.$$

$$\{x_k\} = (1, 1, 1, 0, 0, 0 \dots) : X(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$



# Z-преобразование

Если  $\{x_k\} = (1, 1, 1 \dots)$  – ряд единичных отсчетов, то ряд

$$X(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots$$

- это сумма геометрической прогрессии и сходится при любых  $z$  в кольце  $|z| > 1$ . Получаем:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}$$

На границе области аналитичности при  $z = 1$  эта функция имеет единственный простой полюс.





## Z-преобразование дискретных и непрерывных функций.

Если  $\{x_k\} = (1, a, a^2 \dots)$  – где  $a$  – вещественное, то

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}$$

Сходится в кольце  $|z| > a$ .

Если отсчеты  $\{x_k\}$  есть значения непрерывной функции  $u(t)$  в точках  $t = k\Delta$ , то (т. Котельникова) любому сигналу  $u(t)$  можно сопоставить его z-преобразование:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k\Delta)z^{-k}$$



# Z-преобразование дискретных и непрерывных функций.

Пример: если

$$u(t) = \cos(\omega t)$$

то

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\omega k \Delta) z^{-k} = \frac{z}{z - \cos(\omega \Delta)}$$



## Обратное Z-преобразование

Пусть  $X(z)$  — функция комплексной переменной  $z$ , аналитическая в кольцевой области  $|z| > R_0$ .

**Замечательное** свойство z-преобразования:

$X(z)$  полностью определяет **бесконечную** совокупность отсчетов  
 $(x_0, x_1, x_2, \dots)$

Умножим обе части равенства  $X(z) = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots$   
на  $z^{m-1}$  :

$$z^{m-1}X(z) = x_0z^{m-1} + x_1z^{m-2} + \dots + x_mz^{-1}$$

Вычислим интегралы от обеих частей полученного равенства, взяв в качестве контура интегрирования произвольную замкнутую кривую, лежащую целиком в области аналитичности и охватывающую все полюсы функции  $X(z)$



## Обратное Z-преобразование

$$z^{m-1}X(z) = x_0z^{m-1} + x_1z^{m-2} + \dots + x_mz^{-1}$$

По теореме Коши:

$$\oint z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{если } n = -1 \\ 0 & \text{если } n \neq -1 \end{cases}$$

Очевидно, интегралы от всех слагаемых правой части обратятся в нуль, за исключением слагаемого с номером  $m$ , поэтому

$$x_m = \frac{1}{2\pi i} \oint z^{m-1}X(z) dz$$

- обратное Z-преобразование.



## Важнейшие свойства Z-преобразования.

**1. Линейность.** Если  $\{x_k\}$  и  $\{y_k\}$  — дискретные сигналы, причем известны соответствующие z-преобразования  $X(z)$  и  $Y(z)$ , то сигналу  $\{u_k\} = \{\alpha x_k + \beta y_k\}$  будет соответствовать преобразование  $U(z) = \alpha X(z) + \beta Y(z)$ .

Доказательство – подстановкой.

**2. z-преобразование смещенного сигнала.** Пусть  $\{y_k\}$  получается из  $\{x_k\}$  путем сдвига на одну позицию в сторону запаздывания, т.е. когда  $y_k = x_{k-1}$ .

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-1} z^{-k} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = z^{-1} X(z)$$

$z^{-1}$  - оператор единичной задержки в z-области.



## Связь с преобразованием Фурье.

Пусть 
$$x(t) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta(t - k\Delta)$$

- последовательность  $\delta$  – импульсов ( $t \geq 0$ ).

Если положить  $z = \exp(i\omega\Delta)$ , то

$$S(i\omega) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} x_k \exp(-i\omega k\Delta)$$

Будет ее и Фурье-образом, и z-преобразованием.



## z-преобразование свертки.

Пусть 
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- свертка непрерывных сигналов  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$

Для дискретных сигналов вводим по аналогии:

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_{m-k}$$

Вычислим z-преобразование дискретной свертки:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} z^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} y_{m-k} z^{-(m-k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} = X(z)Y(z) \end{aligned}$$



# Цифровые фильтры.

**Линейные** стационарные цифровые фильтры:

- могут иметь разнообразные формы АЧХ и ФЧХ
- легко реализуются на ЭВМ программными методами
- Параметры стабильны, не требуется настройка



теория цифровых фильтров (= линейных цифровых систем) переносит на случай дискретных сигналов все основные положения теории **линейных** систем, преобразующих непрерывные сигналы.



# Цифровые фильтры.



Линейный цифровой фильтр преобразует последовательность числовых отсчетов входного сигнала в последовательность отсчетов **ВЫХОДНОГО** сигнала:

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \rightarrow (y_0, y_1, y_2, \dots)$$

Коротко:  $\{x_k\} \rightarrow \{y_k\}$ .

Линейность означает, что если:

$$\{x_k^{(1)}\} \rightarrow \{y_k^{(1)}\}, \dots, \{x_k^{(N)}\} \rightarrow \{y_k^{(N)}\} \quad \text{то}$$

$$\alpha_1 \{x_k^{(1)}\} + \dots + \alpha_N \{x_k^{(N)}\} \rightarrow \{\alpha_1 y_k^{(1)} + \dots + \alpha_N y_k^{(N)}\}$$



## Цифровые фильтры.

На входе фильтра сигнал имеет вид последовательности импульсов. Вспоминаем импульсные характеристики аналоговых линейных цепей:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Свертка сигнала и импульсной характеристики линейной цепи  $h(t)$ . Обобщим на случай дискретных сигналов:  $\{h_k\}$  - отклик на единичный импульс:

$$(1, 0, 0, 0 \dots) \rightarrow (h_0, h_1, h_2, h_3 \dots)$$

У линейного фильтра при смещении входного единичного импульса отклик смещается не меняясь:

$$(0, 1, 0, 0 \dots) \rightarrow (0, h_0, h_1, h_2, \dots)$$
$$(0, 0, 1, 0, \dots) \rightarrow (0, 0, h_0, h_1, \dots)$$



## Цифровые фильтры.

Используя  $\{h_k\}$  представим  $m$  – тый отсчет:

$$y_m = x_0 h_m + x_1 h_{m-1} + \dots + x_m h_0 = \sum_{k=0}^m x_k h_{m-k}$$

- выходная последовательность есть дискретная свертка входного сигнала и импульсной характеристики фильтра. Для физически реализуемых фильтров коэффициенты  $h$  при  $m - k < 0$  обращаются в 0 (причинность). Можно записать:

$$y_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k h_{m-k}$$



# Цифровые фильтры.

Вспоминаем теорему о свертке:

$$f_m = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{m-k} \quad \longrightarrow \quad F(z) = X(z)Y(z)$$

Значит, для **В**ЫХОДНОГО сигнала фильтра:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

**Системной** функцией стационарного линейного ЦФ называется:

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$$



## Дискретные гармонические последовательности.

- Получаются при дискретизации гармонических сигналов:

$$\{x_k\} = \{A \exp[i(\omega k \Delta + \varphi)]\}$$

Для них:

$$\operatorname{Re}\{x_k\} = \{A \cos[(\omega k \Delta + \varphi)]\}$$

Заметим, что представление неоднозначно.  $\{x_k\}$  не меняется при замене  $\omega \rightarrow \omega + 2\pi n/\Delta$ .

Пусть такая *бесконечная* последовательность подается на вход ЦФ.

Тогда отсчеты на его выходе:

$$y_m = \sum_{k=-\infty}^m x_k h_{m-k} = A e^{i\varphi} \sum_{k=-\infty}^m e^{i\omega k \Delta} h_{m-k}$$



# Дискретные гармонические последовательности.

Преобразуем:

$$y_m = Ae^{i\varphi} \sum_{k=-\infty}^m e^{i\omega k\Delta} h_{m-k} = Ae^{i(\omega m\Delta + \varphi)} \sum_{k=-\infty}^m e^{i\omega(k-m)\Delta} h_{m-k}$$

заменяем:  $n = m - k$  :

$$y_m = Ae^{i(\omega m\Delta + \varphi)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega n\Delta} h_n$$

- дискретная гармоническая последовательность!

$$K(i\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega n\Delta} h_n$$

-частотный коэффициент передачи



# Трансверсальные цифровые фильтры

Алгоритм:

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m}$$

$a_0, a_1, a_2 \dots$  - коэффициенты,  $m$  – порядок фильтра.

Применим  $z$  – преобразование к обоим частям:

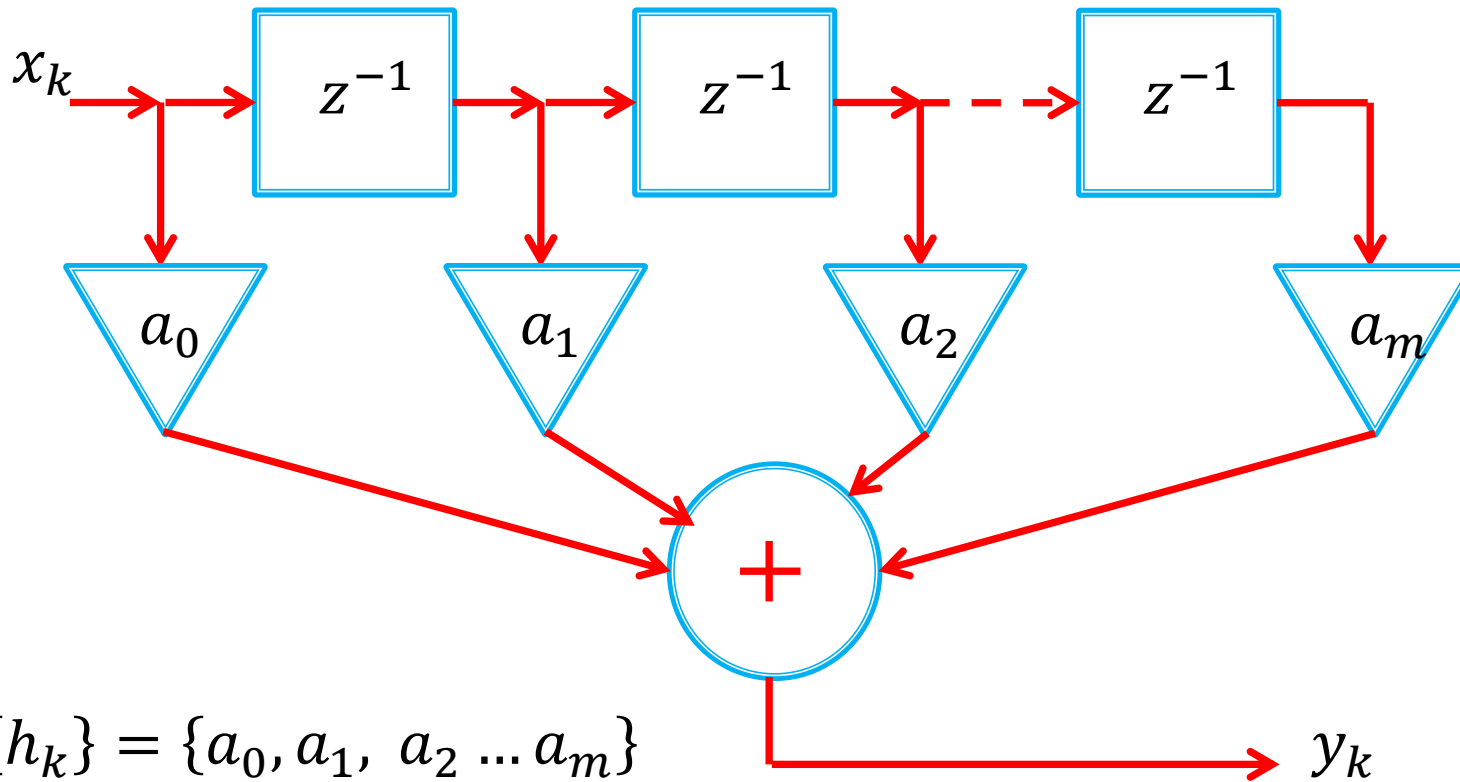
$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m z^{-m}) X(z)$$

Системная функция:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{z^m}$$

имеет  $m$  - кратный полюс при  $z = 0$  и  $m$  нулей.

# Трансверсальные цифровые фильтры



Импульсная характеристика трансверсального фильтра содержит конечное число членов: **Finite Impulse Response filter (FIR)**.





# Трансверсальные цифровые фильтры

**Импульсная характеристика:**  $\{h_k\} = \{a_0, a_1, a_2 \dots a_m\}$

Доказательство: каждое слагаемое функции  $H(z)$  дает вклад, равный соответствующему коэффициенту  $a_m$ , смещенному на  $n$  позиций в сторону запаздывания. Подадим на вход единичный импульс  $(1, 0, 0, \dots)$ , получим:  $(a_0, a_1, a_2 \dots)$ .

**Частотная характеристика:** сделаем замену:  $z = \exp(i\omega\Delta)$

частотный коэффициент передачи:

$$K(i\omega) = a_0 + a_1 e^{-i\omega\Delta} + a_2 e^{-i2\omega\Delta} \dots a_m e^{-im\omega\Delta}$$

При заданном шаге дискретизации  $\Delta$  можно реализовать самые разнообразные формы АЧХ, подбирая должным образом весовые коэффициенты  $a_n$ .



# Трансверсальные цифровые фильтры

Пример: фильтр 2 порядка. Пусть  $y_i = \frac{1}{3}(x_i + x_{i-1} + x_{i-2})$

Системная функция:  $H(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2})$

частотный коэффициент передачи:

$$K(i\omega) = \frac{1}{3}(1 + e^{-i\omega\Delta} + e^{-i2\omega\Delta}) =$$
$$\frac{1}{3}[(1 + \cos(\omega\Delta) + \cos(2\omega\Delta)) - i(1 + \sin(\omega\Delta) + \sin(2\omega\Delta))]$$

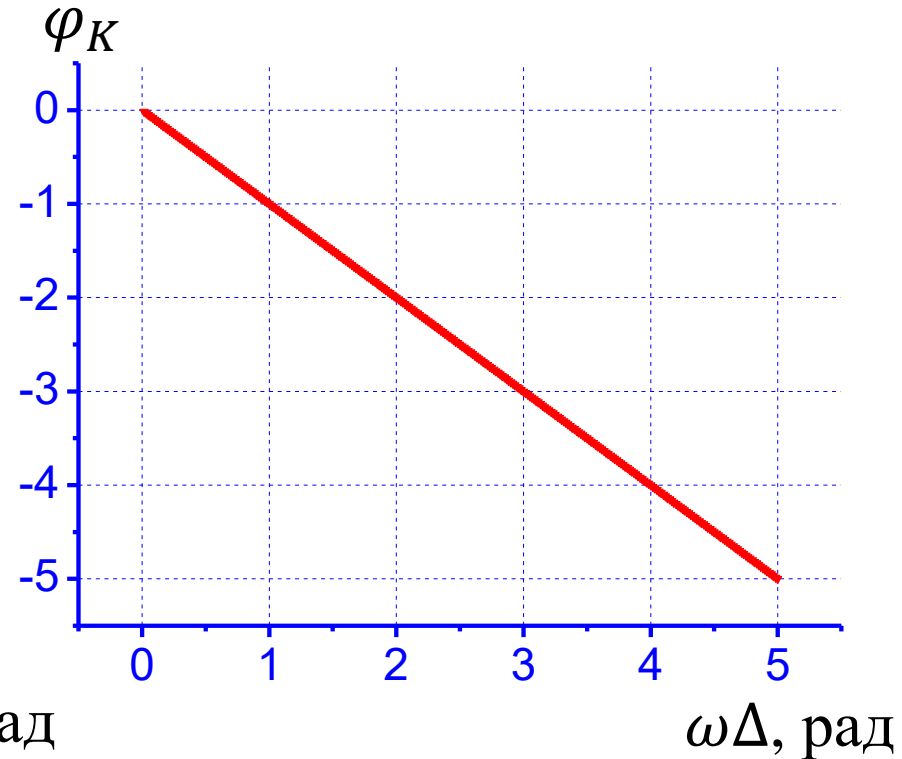
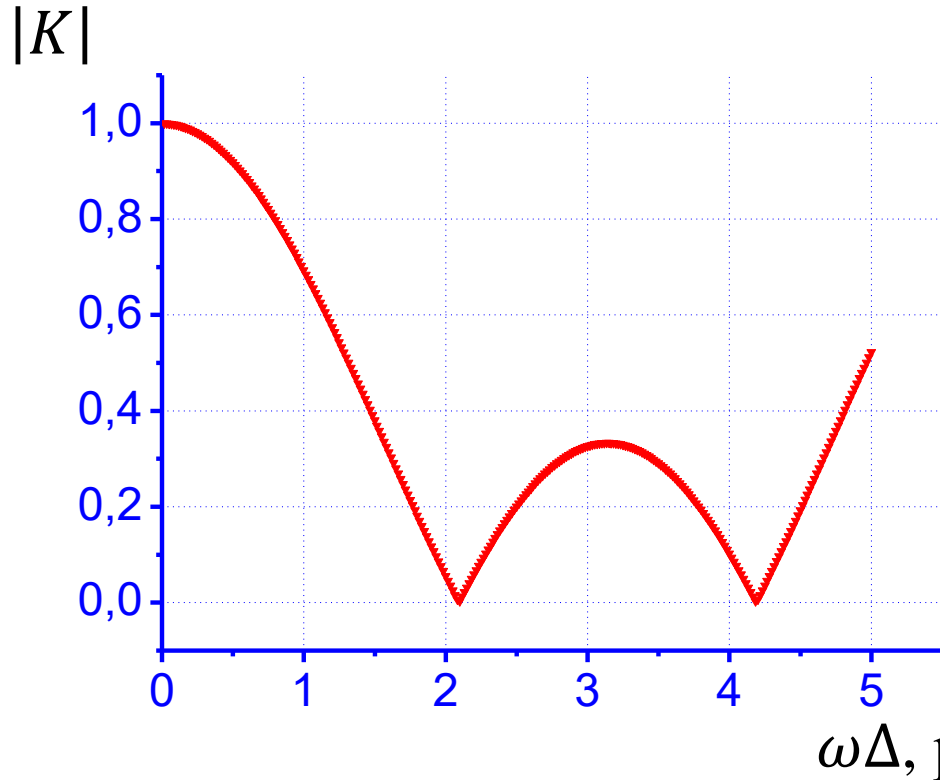
$$|K(i\omega)| = \frac{1}{3}\sqrt{3 + 4\cos\omega\Delta + 2\cos 2\omega\Delta}$$

$$\varphi_K(\omega) = -\omega\Delta$$



# Трансверсальный фильтр

2 порядка  $y_i = \frac{1}{3}(x_i + x_{i-1} + x_{i-2})$



При  $\omega\Delta < 2$  может играть роль ФНЧ.

Выше: при  $\omega\Delta > \pi$  теорема Котельникова не выполняется!

Нужна предварительная фильтрация (*antialiasing*).



## Рекурсивные цифровые фильтры.

Используются предыдущие значения не только входного, но и **В**ЫХОДНОГО сигнала:

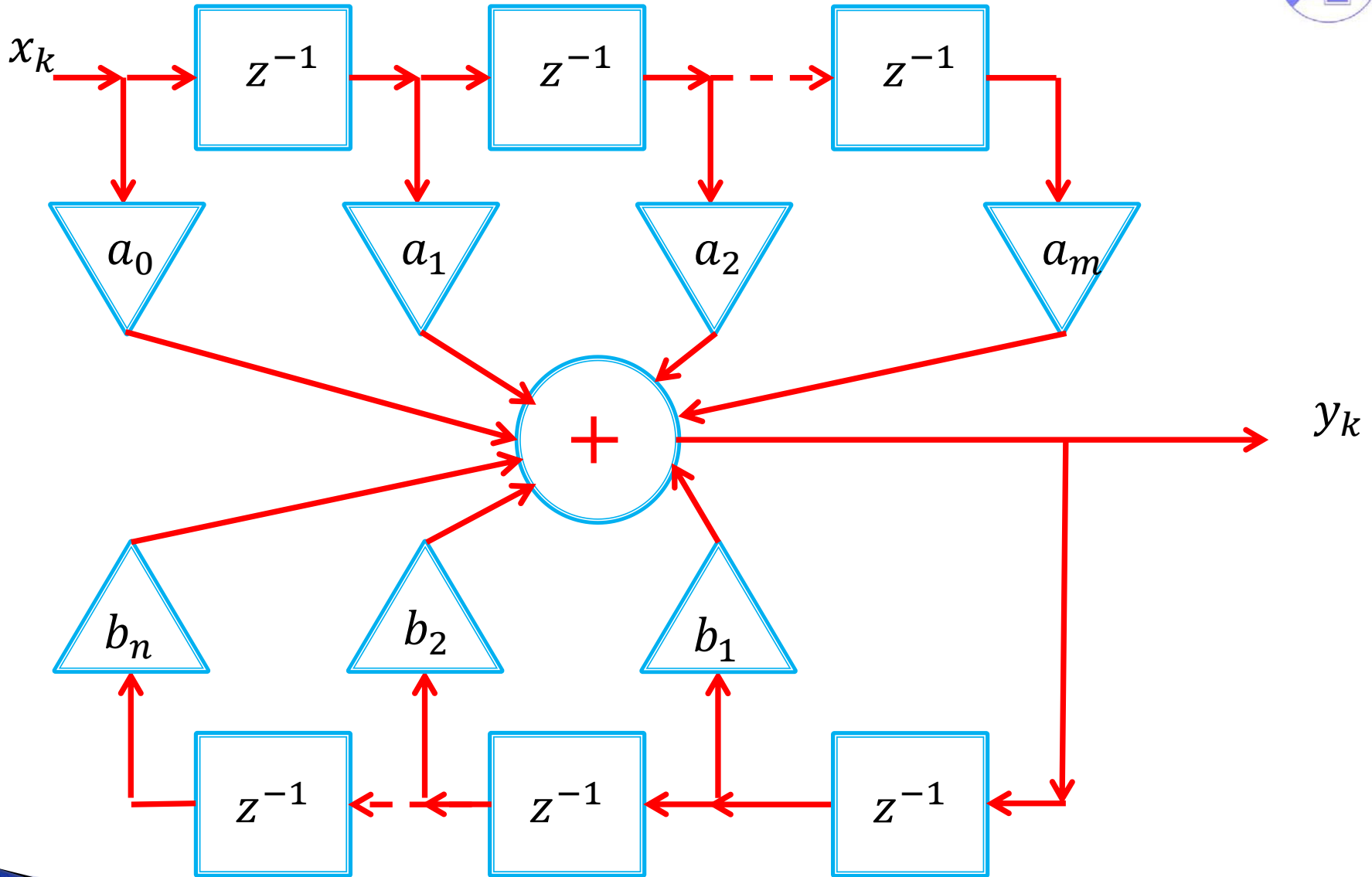
$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \dots + a_m x_{i-m} + b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + \dots + b_m y_{i-m}$$

Если  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$  – получаем трансверсальный (нерекурсивный) фильтр.

**Системная функция рекурсивного ЦФ.** Перенесем члены с  $b_n$  в левую часть, применим  $z$  – преобразование:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{n-1} + \dots + a_m z^{n-m}}{z^n - b_1 z^{n-1} - \dots - b_n}$$

# Рекурсивные цифровые фильтры.

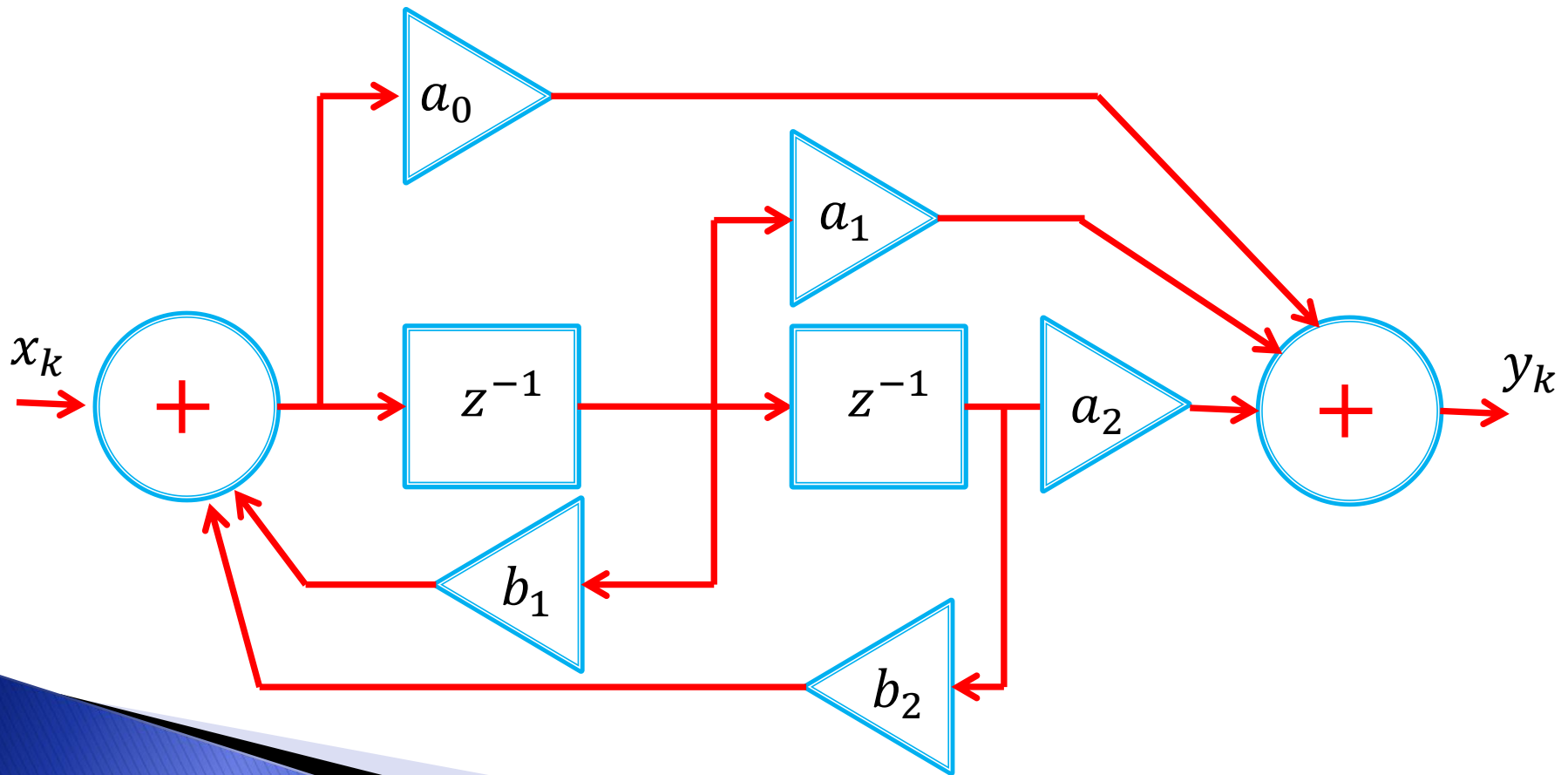


# Рекурсивные цифровые фильтры.



Недостаток - потребность в большом числе ячеек памяти, отдельно для рекурсивной и нерекурсивной частей. Применяют т.н. канонические схемы.

Пример: канонический рекурсивный фильтр 2 порядка:



# Рекурсивные цифровые фильтры.



В рекурсивном фильтре возможны свободные колебания – генерация ненулевой последовательности на выходе при нулевой входной.

Цифровой фильтр называется *устойчивым*, если возникающий в нем свободный процесс есть невозрастающая последовательность, т. е. значения  $|y_n|$  не превышают некоторого положительного числа  $M$  независимо от выбора начальных условий.

Рекурсивный фильтр устойчив, если все полюса системной функции  $H(z)$  по модулю не превосходят единицы.

Импульсная характеристика имеет вид неограниченно-протяженной последовательности: **I**ninite **I**mpulse **R**esponse filter (**IIR**).



## Сравнение цифровых фильтров.

Основным преимуществом рекурсивных фильтров является их эффективность (требуется гораздо меньше вычислительных ресурсов), особенно когда требуется задать сложную характеристику фильтра.

Рекурсивный фильтр можно сделать гораздо ближе к аналоговому прототипу.

Основным недостатком является ограниченная устойчивость. Кроме того, многие сигнальные процессоры содержат аппаратные средства, позволяющие реализовать трансверсальные фильтры почти так же эффективно, как рекурсивные.



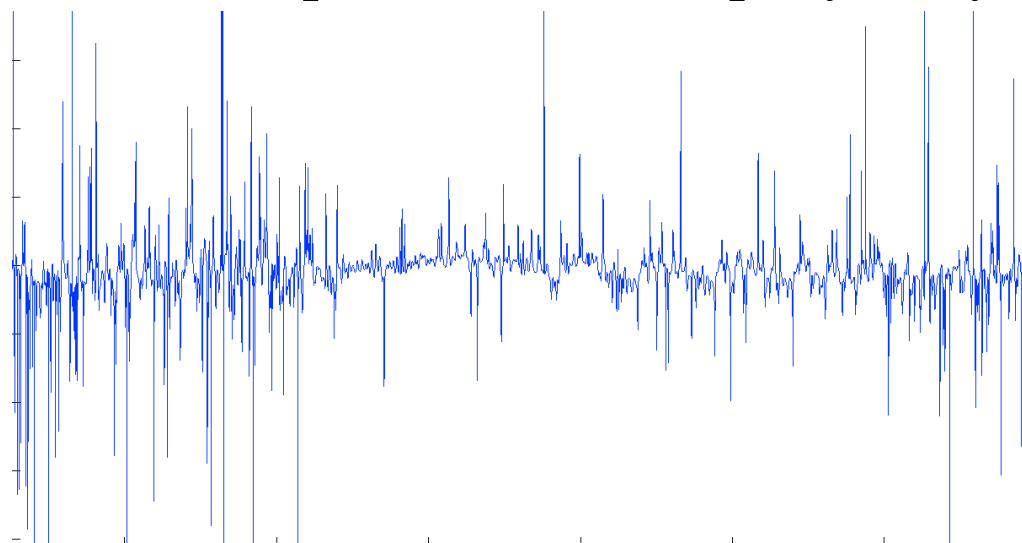
# Понятие об оптимальной фильтрации



Задачи оптимальной фильтрации:

- Измерение параметров стационарного сигнала известной формы на фоне шумов («задача радиосвязи»)
- Обнаружение сигнала известной формы, время прихода которого не определено («задача радиолокации»)
- Поиск сигналов, о форме которого имеются лишь предположения («задача радиоастрономии»)

Во всех случаях на входе системы, кроме сигнала, присутствует шум.



# Понятие об оптимальной фильтрации



Предположим, что нам необходимо установить факт присутствия сигнала, форма которого известна *a priori*.

Применим линейный фильтр  $h(t)$ . На выходе:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ВХ}}(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Зафиксируем  $t_0$  и будем искать  $h(t)$  дающую максимум  $|s_{\text{ВЫХ}}(t_0)|$

Неравенство Коши — Буняковского:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ВХ}}(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ВХ}}^2(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t_0 - \tau)d\tau}$$

“=” — если  $h(t_0 - \tau) = ks_{\text{ВХ}}(\tau)$ . После замены  $t = t_0 - \tau$  получаем:

$$h_{\text{СОГЛ}}(t) = ks_{\text{ВХ}}(t_0 - t).$$

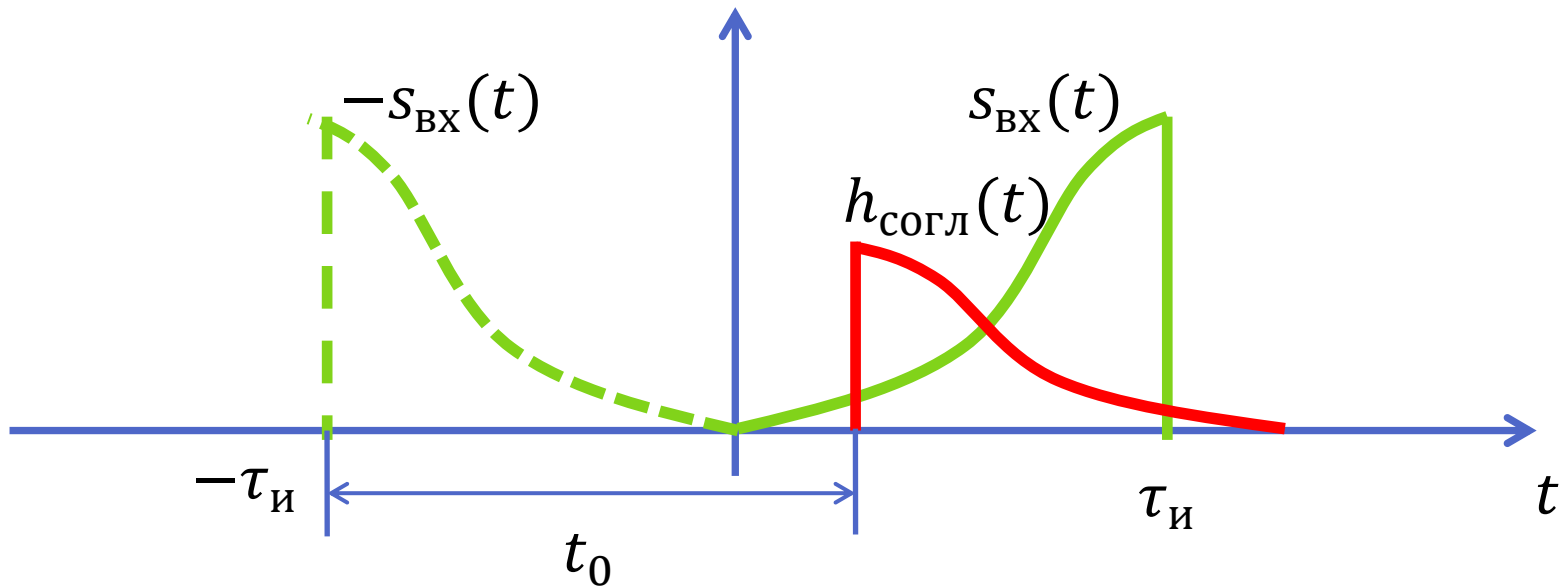
- согласованный фильтр

# Понятие об оптимальной фильтрации



$$h_{\text{согл}}(t) = k s_{\text{вх}}(t_0 - t).$$

импульсная характеристика согласованного фильтра - масштабная копия входного сигнала, зеркально отраженная во времени.



Физическая реализуемость:  $t_0 \geq \tau_{и}$

# Согласованный фильтр как коррелятор.



Пусть на входе  $u_{\text{ВХ}}(t) \neq s_{\text{ВХ}}(t)$ :

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau) h_{\text{СОГЛ}}(t - \tau) d\tau = \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau) s_{\text{ВХ}}[t_0 - (t - \tau)] d\tau = k \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau) s_{\text{ВХ}}[\tau - (t - t_0)] d\tau = \\ &= kB(t - t_0) \end{aligned}$$

корреляционная функция сигналов  $u_{\text{ВХ}}(t)$  и  $s_{\text{ВХ}}(t)$ .

В момент времени  $t_0$   $u_{\text{ВЫХ}}(t)$  - их скалярное произведение:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t_0) = k \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(\tau) s_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau$$



## Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра.

$$K_{\text{согл}}(i\omega) = k \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ВХ}}(t_0 - t) e^{-i\omega t} dt$$

Замена переменных:  $\xi = t_0 - t$

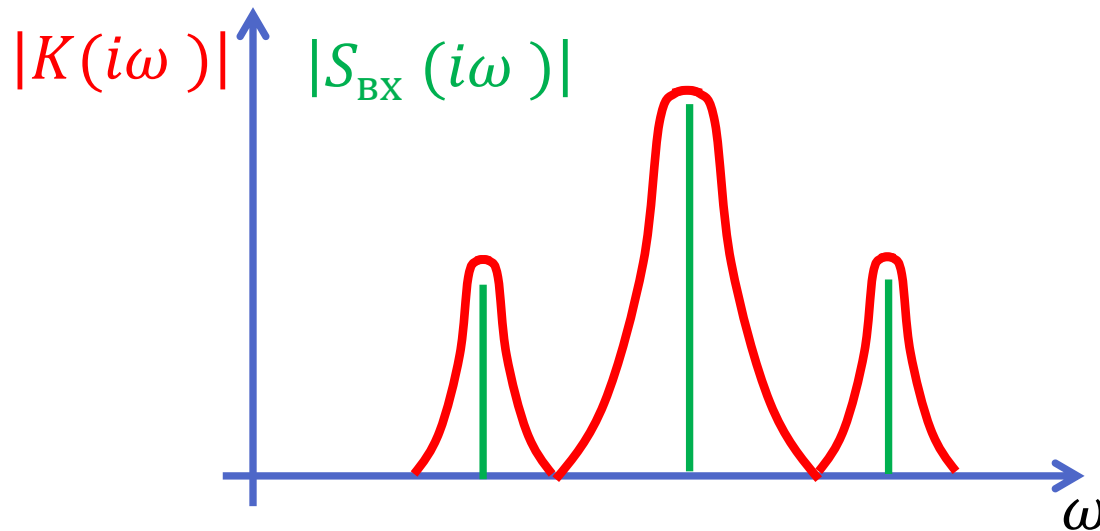
$$K_{\text{согл}}(i\omega) = k e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ВХ}}(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi$$

$$K_{\text{согл}}(i\omega) = k S_{\text{ВХ}}^*(i\omega) e^{-i\omega t_0}$$

# Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра.



Очевидно, модуль частотного коэффициента передачи должен быть пропорционален модулю спектральной плотности сигнала. Пример – гребенчатый фильтр:



Однако эффективность согласованного фильтра может быть **выше**: максимум отклика приходится на момент  $t_0$ , когда все компоненты спектра складываются **в фазе**.

# Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра.



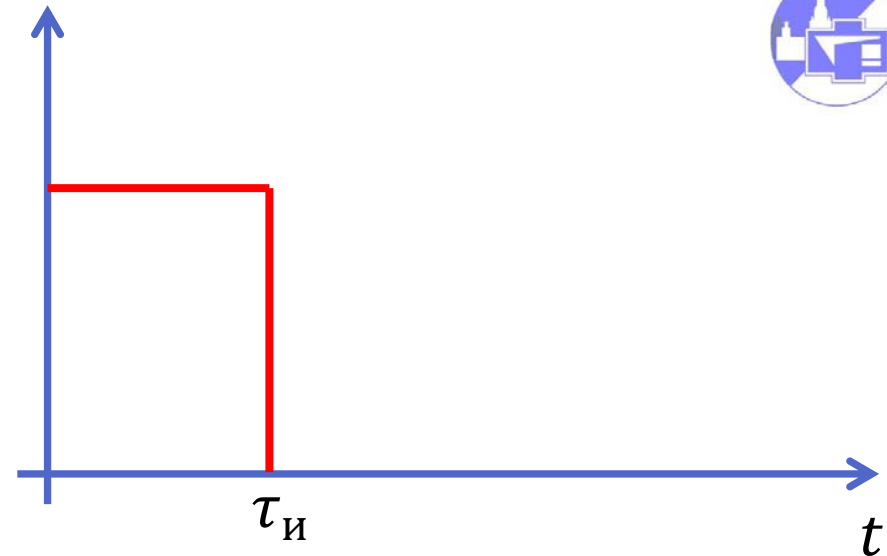
Если на входе линейного согласованного с сигналом  $s_{\text{ВХ}}(t)$  фильтра кроме сигнала действует белый шум с односторонней спектральной плотностью  $N$ , то отношение сигнал/шум на выходе фильтра в момент времени  $t_0$ :

$$Q \sim \frac{2W_{\text{ВХ}}}{N}$$

Замечательная особенность согласованного фильтра состоит в том, что возможность обнаружения сигнала оказывается зависящей от его энергии, а не от формы.



## Пример: Согласованный фильтр для прямоугольного импульса.



Спектр сигнала:

$$S_{\text{ВХ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ВХ}}(t) e^{-i\omega t} dt = U_0 \int_0^{\tau_{\text{и}}} e^{-i\omega t} dt = \frac{U_0}{i\omega} (1 - e^{-i\omega\tau_{\text{и}}})$$

Тогда коэффициент передачи согласованного фильтра,  
отклик которого максимален в момент окончания импульса:

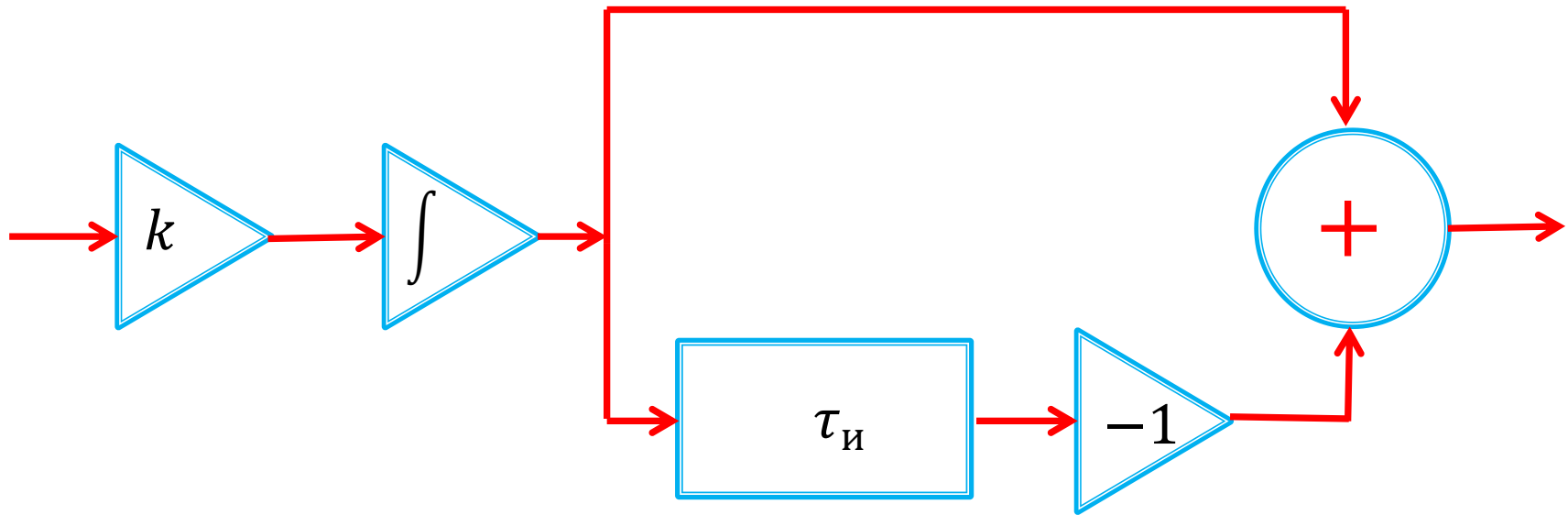
$$K_{\text{согл}}(i\omega) = k \frac{1 - e^{i\omega\tau_{\text{и}}}}{-i\omega} e^{-i\omega\tau_{\text{и}}} = \frac{k}{i\omega} (1 - e^{i\omega\tau_{\text{и}}})$$



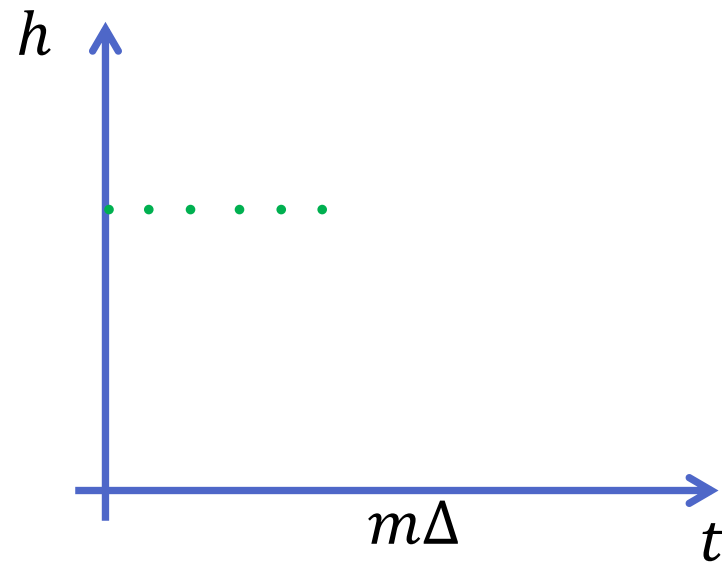
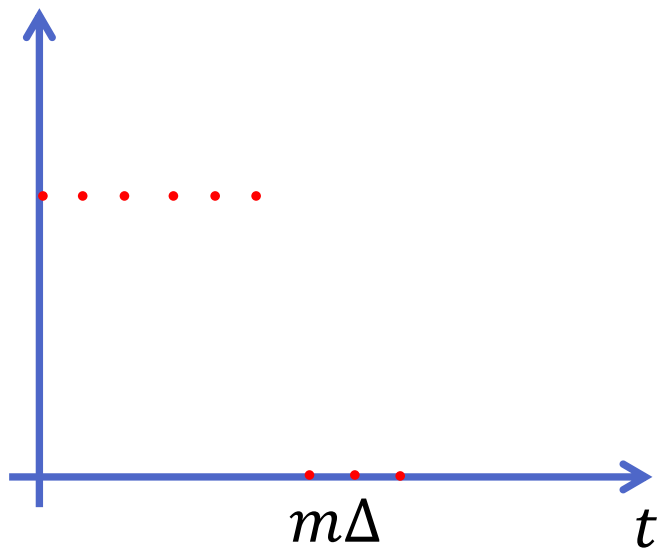


$$K_{\text{согл}}(i\omega) = \frac{k}{i\omega} (1 - e^{i\omega\tau_{\text{и}}})$$

Простой аналоговой цепью не получится. Составим из блоков:



А если оцифровать и сделать трансверсальный фильтр?



$$y_i = kx_i + kx_{i-1} + kx_{i-2} + \dots + kx_{i-m}$$

- Выглядит значительно проще!