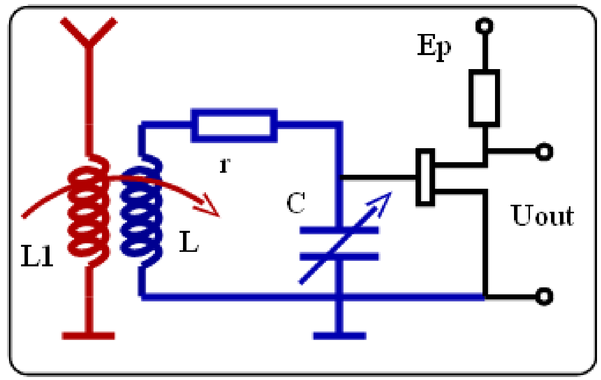
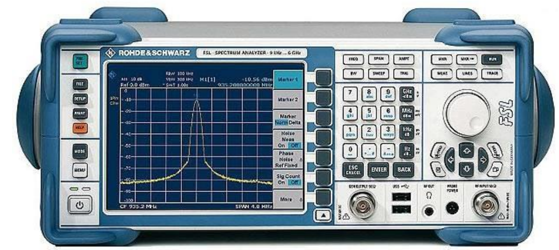
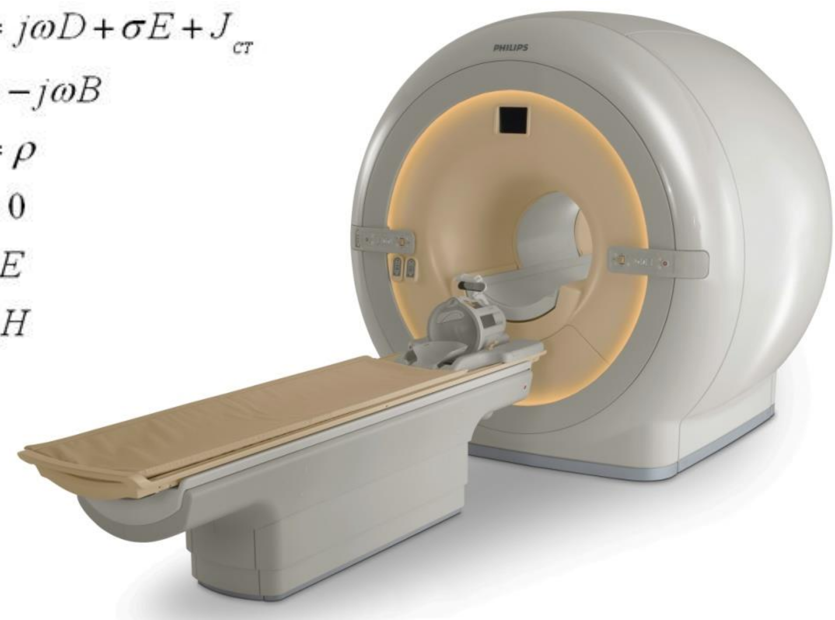
РАДИОФИЗИКА

Радиофизика**, radiare** (лат.) - излучать, испускать лучи.





$$rotH = j\omega D + \sigma E + J_{ст}$$
$$rotE = -j\omega B$$
$$divD = \rho$$
$$divB = 0$$
$$D = \varepsilon_a E$$
$$B = \mu_a H$$



Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по гармоническим функциям.

Набор базовых функций: $\cos\omega t, \sin\omega t\ (e^{i\omega t})$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по гармоническим функциям.

Набор базовых функций: $\cos\omega t, \sin\omega t \ (e^{i\omega t})$

Характеристика (некой) линейной системы: $K(\omega)$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по гармоническим функциям.

Набор базовых функций: $\cos\omega t, \sin\omega t \ (e^{i\omega t})$

Характеристика (некой) линейной системы: $K(\omega)$

Как ее найти? –

А. Экспериментально: Подать на вход *гармонический* сигнал!

$$U_{\text{вх}}(t) = U_0\cos\omega_0 t \Rightarrow U_{\text{вых}}(t) = |K(\omega_0)|U_0\cos(\omega_0 t + \arg(K(\omega_0)))$$

Или: $U_{\text{вх}}(t) = U_0 e^{i\omega_0 t} \Rightarrow U_{\text{вых}}(t) = U_0 K(\omega_0) e^{i\omega_0 t}$

…и так для всех ω_0

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по гармоническим функциям.

Набор базовых функций: $\cos\omega t, \sin\omega t\ (e^{i\omega t})$

Характеристика (некой) линейной системы: $K(\omega)$

Как ее найти? –

B. Теоретически: решить дифференциальное уравнение для системы с правой частью в виде $e^{i\omega t}$

$$K(\omega) = \frac{\text{решение}}{e^{i\omega t}}$$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по гармоническим функциям.

Знаем $K(\omega)$ для исследуемой системы: что с ним делать?

1). Находим **спектр** входного сигнала (= коэффициенты Фурье в разложении по синусам и косинусам)

$$S(\omega) \equiv \widetilde{U}_{\text{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) e^{-i\omega t} dt$$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по гармоническим функциям.

Знаем $K(\omega)$ для исследуемой системы: что с ним делать?

1). Находим **спектр** входного сигнала (= коэффициенты Фурье в разложении по синусам и косинусам)

$$S(\omega) \equiv \widetilde{U}_{\text{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) e^{-i\omega t} dt$$

2). Находим **спектр** выходного сигнала

$$\widetilde{U}_{\text{вых}}(\omega) = \widetilde{U}_{\text{вх}}(\omega)\, K(\omega)$$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по гармоническим функциям.

Знаем $K(\omega)$ для исследуемой системы: что с ним делать?

1). Находим **спектр** входного сигнала (= коэффициенты Фурье в разложении по синусам и косинусам)

$$S(\omega) \equiv \tilde{U}_{\text{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) e^{-i\omega t} dt$$

2). Находим **спектр** выходного сигнала

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(\omega) = \tilde{U}_{\text{вх}}(\omega)\, K(\omega)$$

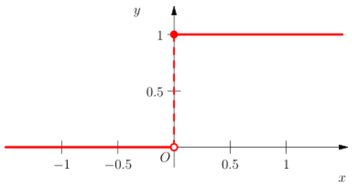
3). Находим выходной сигнал:

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_{\text{вых}}(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}$$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по ступенчатым функциям (Хевисайда).

Набор базовых функций: $H(t - t_0)$

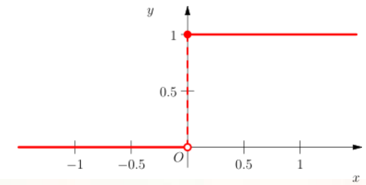


$H(t - 0)$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по ступенчатым функциям (Хевисайда).

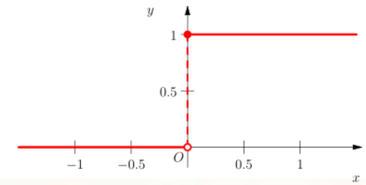
Набор базовых функций: $H(t-t_0)$



Характеристика (некой) линейной системы: $h(t)$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по ступенчатым функциям (Хевисайда).



Набор базовых функций: $H(t - t_0)$

Характеристика (некой) линейной системы: $h(t)$

Как ее найти? –

А. Экспериментально: Подать на вход *ступенчатый* сигнал!

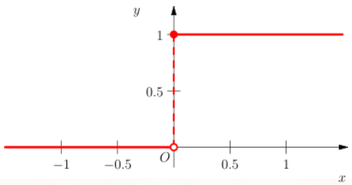
$$U_{\text{вх}}(t) = U_0 H(t - t_z)$$

$$U_{\text{вых}}(t) = U_0 h(t - t_z)$$

…и так для всех t_z

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по ступенчатым функциям (Хевисайда).



Набор базовых функций: $H(t-t_0)$

Характеристика (некой) линейной системы: $h(t)$

Как ее найти? –

В. Теоретически: решить дифференциальное уравнение для системы с правой частью в виде $H(t-t_0)$

$$h(t) = \frac{\text{решение}}{H(t-t_0)}$$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по ступенчатым функциям (Хевисайда).

Знаем $h(t)$ для исследуемой системы: что с ним делать?

1). Находим коэффициенты Фурье
в разложении по функциям Хевисайда

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) H(\tau - t)\, dt$$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по ступенчатым функциям (Хевисайда).

Знаем $h(t)$ для исследуемой системы: что с ним делать?

1). Находим коэффициенты Фурье
в разложении по функциям Хевисайда)

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) H(\tau - t)\, dt$$

..ВАУ, да ведь

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(\tau) = 0, \tau < t$$

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(\tau) = \frac{\partial U_{\text{вх}}(t)}{\partial t}, \tau \geq t$$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по ступенчатым функциям (Хевисайда).

Знаем $h(t)$ для исследуемой системы: что с ним делать?

1). Находим коэффициенты Фурье
в разложении по функциям Хевисайда)

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) H(\tau - t)\, dt$$ ..ВАУ, да ведь

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(\tau) = 0, \tau < t$$

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(\tau) = \frac{\partial U_{\text{вх}}(t)}{\partial t}, \tau \geq t$$

2,3). Находим выходной сигнал:

$$U_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{t} \widetilde{U}_{\text{вх}}(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau,$$

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по дельта-функциям (Дирака).

Пояснение:

1. Прохождение сигналов через линейные цепи: используем разложение по дельта-функциям (Дирака).

- Смотрим предыдущие слайды, прошлую лекцию, делаем *сами*

Связь функций: $K(\omega)$, $h(t)$, $g(t)$

$$K(\omega) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt,$$

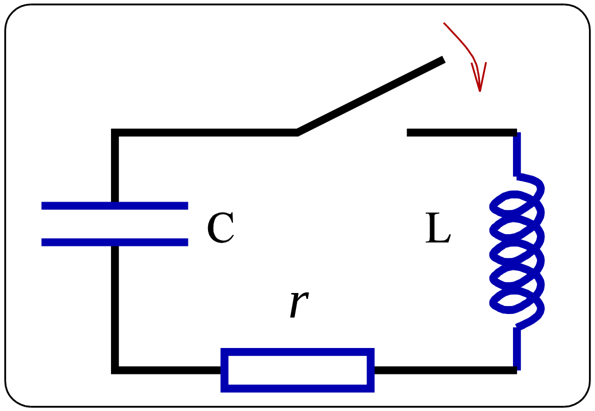
$$g(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\,e^{i\omega t}\,\frac{d\omega}{2\pi},$$

$$h(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{i\omega + \boldsymbol{\varepsilon}}\,e^{i\omega t}\,\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon \to 0},$$

$$g(t) \quad = \quad \frac{dh(t)}{dt}.$$

Внешнее воздействие на линейную систему

Последовательный контур. Свободные колебания



$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{rI}_{U_r} + \underbrace{\int_{-\infty}^{t}\frac{I(\tau)}{C}\,d\tau}_{U_C} = 0,$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

$$2\delta = \frac{r}{L},\quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},\quad q = Ae^{i\omega t},$$

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2\delta\, i\omega\, Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\omega^2 - 2\delta\, i\omega - \omega_0^2 = 0,$$

$$\omega_{1,2} = i\delta \pm \widetilde{\omega}_0, \qquad \widetilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Решение однородного уравнения
ищем в виде:

$$q(t) \quad = A_1 e^{-\delta t + i\widetilde{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\widetilde{\omega}_0 t}$$

$$q(t) \quad = A_1 e^{-\delta t + i\widetilde{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\widetilde{\omega}_0 t},$$

$$\dot{q}(t) \quad = A_1(-\delta + i\widetilde{\omega}_0)\, e^{-\delta t + i\widetilde{\omega}_0 t} + A_2(-\delta - i\widetilde{\omega}_0) e^{-\delta t - i\widetilde{\omega}_0 t}$$

Пусть заданы начальные условия:

$$q(0) \quad = CU_0, \quad \Rightarrow \; A_1 + A_2 = CU_0,$$

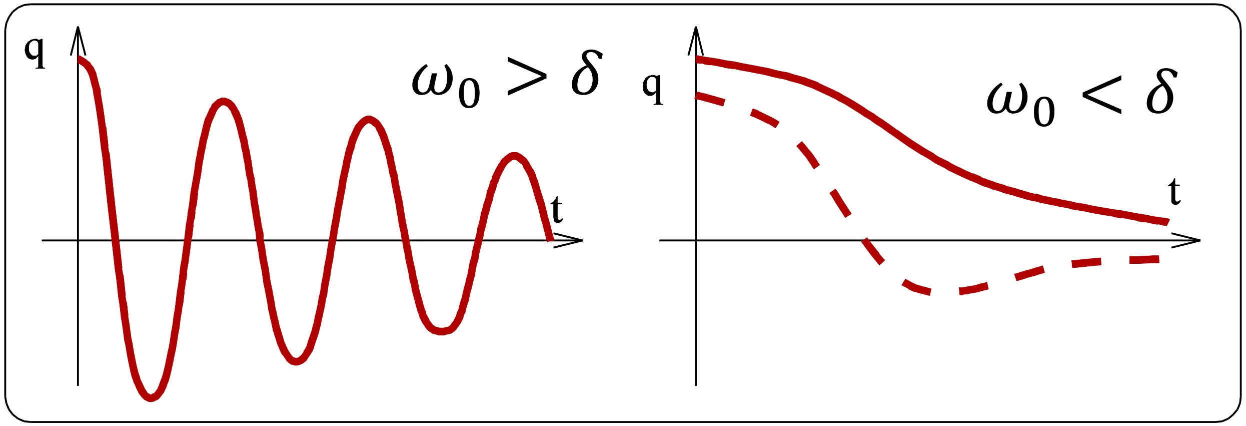
$$\dot{q}(0) \quad = 0 \; \Rightarrow \; A_1 - A_2 = \frac{\delta\, CU_0}{i\widetilde{\omega}_0}.$$

$$q(t) \quad = CU_0 e^{-\delta t}\left(cos\widetilde{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\widetilde{\omega}_0}\, sin\widetilde{\omega}_0 t\right)$$

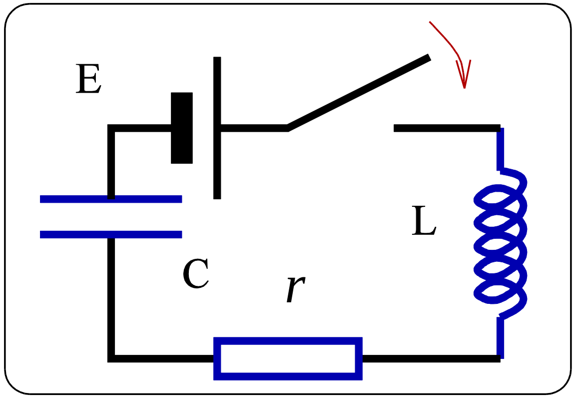
Имеем два случая

$$q(t) \quad = CU_0 e^{-\delta t}\left(cos\widetilde{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\widetilde{\omega}_0}\, sin\widetilde{\omega}_0 t\right), \quad \delta < \omega_0,$$

$$q(t) \quad = \frac{CU_0 e^{-\delta t}}{|\widetilde{\omega}_0|}\left((|\widetilde{\omega}_0| - \delta)e^{-|\widetilde{\omega}_0| t} + (|\widetilde{\omega}_0| + \delta)e^{|\widetilde{\omega}_0| t}\right), \quad \delta > \omega_0$$



Последовательный контур. Переходная характеристика



При $t = 0$ включаем постоянную э.д.с. E (ступенька):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L},$$

$$q(0) = 0, \quad \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Пусть $\omega_0 \gg \delta$, E - постоянна.

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t} + CE,$$

$$q(0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 = -CE,$$

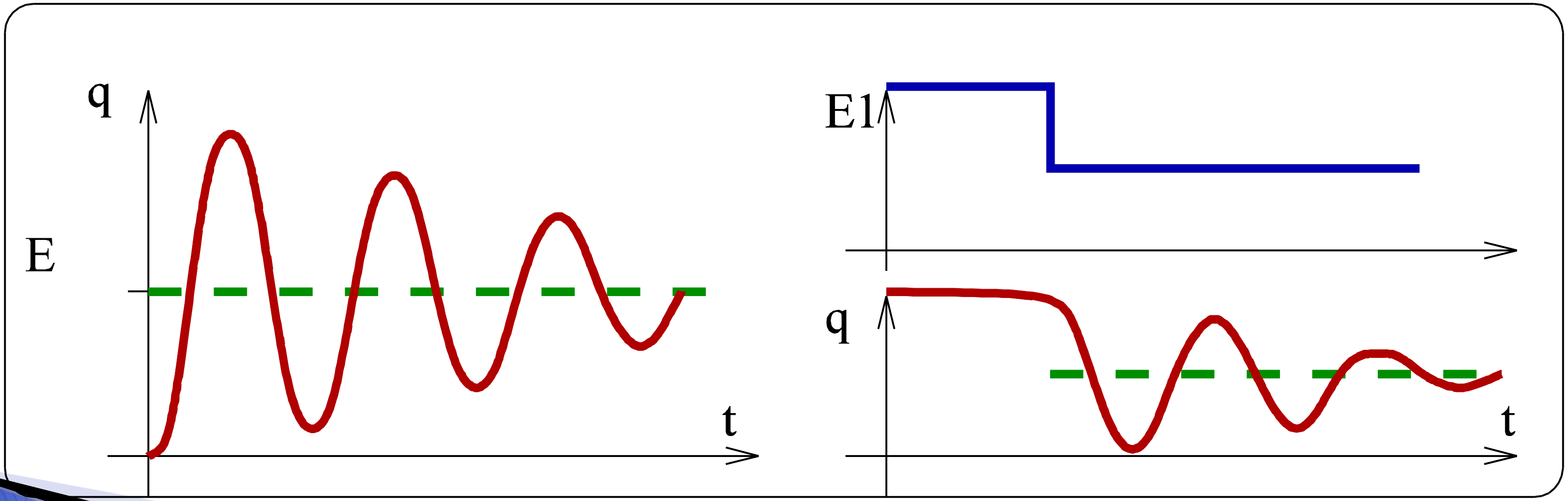
$$\dot{q}(0) = 0 \Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{\delta\, CE}{i\bar{\omega}_0}$$

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t} + CE$$

$$q(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 + A_2 = -CE, \qquad \dot{q}(0) = 0 \;\Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{\delta\, CE}{i\bar{\omega}_0},$$

$$q(t) = CE - CEe^{-\delta t}\left(\cos\bar{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\bar{\omega}_0}\sin\bar{\omega}_0 t\right), \qquad \bar{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \delta^2,$$

$$h(t) \equiv \frac{q(t)}{CE} = 1 - e^{-\delta t}\left(\cos\bar{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\bar{\omega}_0}\sin\bar{\omega}_0 t\right)$$

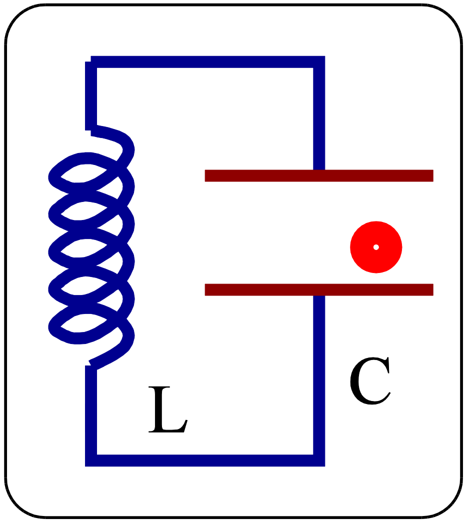


Задачи для «любознательных»

1 ``Электрон'' Дано: $L,\ C,\ d,\ m,\ e$

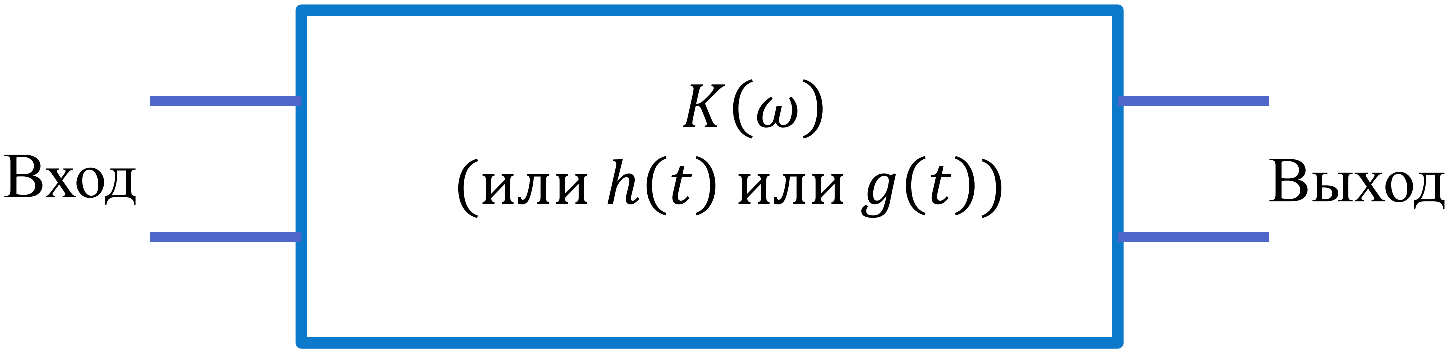
1). Найти, чему равен сдвиг собственной частоты контура, если в емкость ``вложен'' свободный электрон.

2). То же самое, если электрон "на пружинке" (частота его свободных колебаний равна ω_e).



**2 ``Резонансная кривая''** С какой максимальной скоростью $\frac{d\omega_g}{dt}$ можно менять частоту генератора $\omega_g$, чтобы ``прописать'' (измерить) резонансную кривую резонатора с заданной точностью, например, с относительной ошибкой $\varepsilon = 0.03$. Параметры резонатора считать известными.

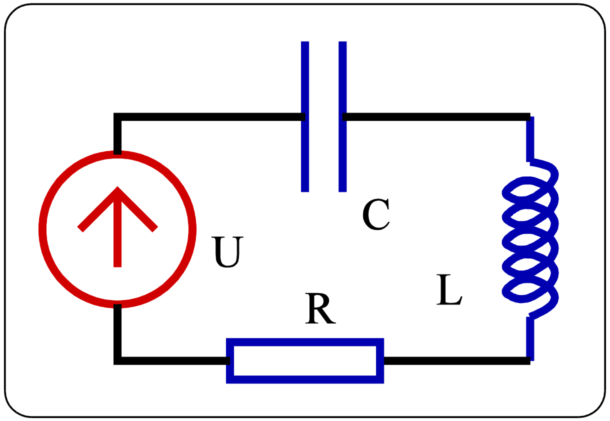
Пассивные линейные четырехполюсники



Кирпичики:

RC, LC звенья, RLC – резонансные цепочки

Последовательный контур.
Вынужденные колебания

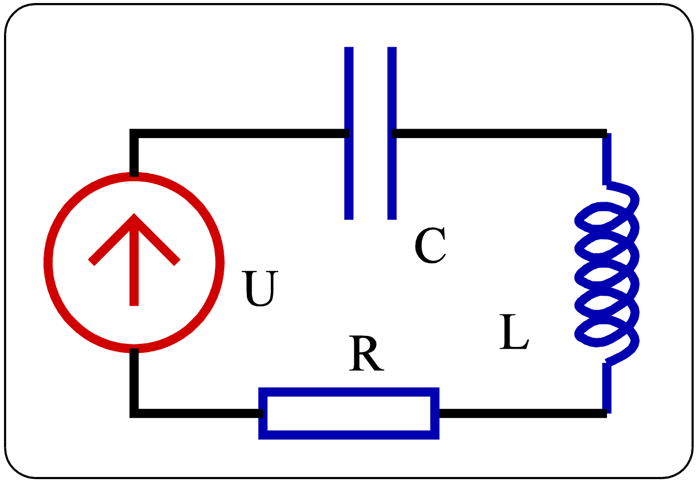


Установившийся режим: t ≫ 1/δ

$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{RI}_{U_R} + \underbrace{\int_{-\infty}^{t}\frac{I(\tau)}{C}\,d\tau}_{U_C} = U_g(t)$$

$$U_g(t) = U_g e^{i\omega t}$$

Реактивное сопротивление (импеданс):



$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \qquad Z_L = i\omega L,$$

Комплексные амплитуды:

$$U_g = U_C + U_R + U_C, \qquad U_g = IZ,$$

$$Z(\omega) = \left(\frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L\right) = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right)$$

Характеристики колебательного контура (резонатора)

$$Z(\omega) \quad = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right) = \rho\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right),$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta}, \qquad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}$$

ρ -- характеристическое сопротивление,
Q -- добротность, ξ – расстройка .

Напряжения и токи в колебательном контуре

$$I(\omega) \quad = \frac{U_g(\omega)}{\rho\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right)}, \qquad U_R = RI, \qquad U_L = i\omega L\, I, \qquad U_C = \frac{I}{i\omega C}$$

$$|I(\omega)| \quad = \frac{U_g}{\rho\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \qquad \varphi_I = \mathrm{a}rg(I(\omega)) = \mathrm{a}rctg(-Q\,\xi),$$

$$|U_R(\omega)| \quad = \frac{R\,U_g}{\rho\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \qquad \varphi_{U_R} = \varphi_I,$$

Напряжения и токи в колебательном контуре

$$|U_R(\omega)| = \frac{R\,U_g}{\rho\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+\xi^2}}, \qquad \varphi_{U_R} = \varphi_I,$$

$$|U_L(\omega)| = \frac{\omega L\,U_g}{\rho\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+\xi^2}} = \frac{\omega\,U_g}{\omega_0\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+\xi^2}}, \qquad \varphi_{U_L} = \varphi_I + \frac{\pi}{2},$$

$$|U_C(\omega)| = \frac{U_g}{\rho\omega C\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+\xi^2}} = \frac{\omega_0\,U_g}{\omega\sqrt{\dfrac{1}{Q^2}+\xi^2}}, \qquad \varphi_{U_C} = \varphi_I - \frac{\pi}{2},$$

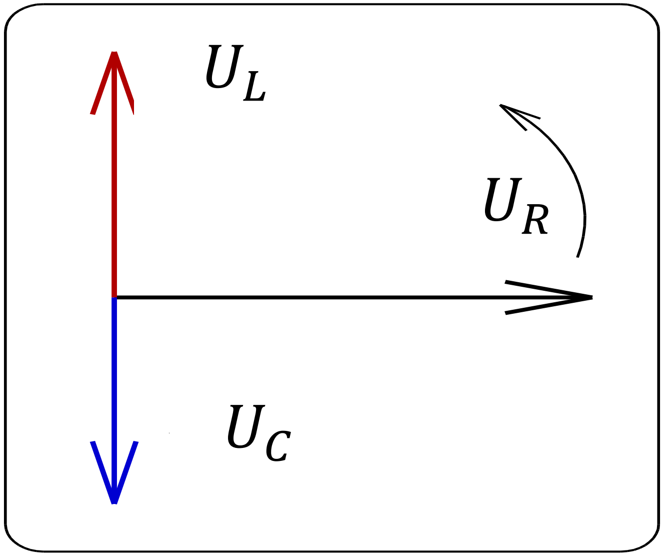
Последовательный контур. Резонанс:

$$\xi = 0, \qquad \omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad I(\omega)_{max} = \frac{U_g}{R},$$

$$\boxed{\begin{aligned} U_L &= i\omega_0 L \frac{U_g}{R} e^{i\omega t} = \frac{i}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\, U_g e^{i\omega t} = iQ\, U_g e^{i\omega t}, \\ U_C &= \frac{1}{i\omega_0 C}\frac{U_g}{R} e^{i\omega t} = -\frac{i}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\, U_g e^{i\omega t} = -iQ\, U_g e^{i\omega t}. \end{aligned}}$$

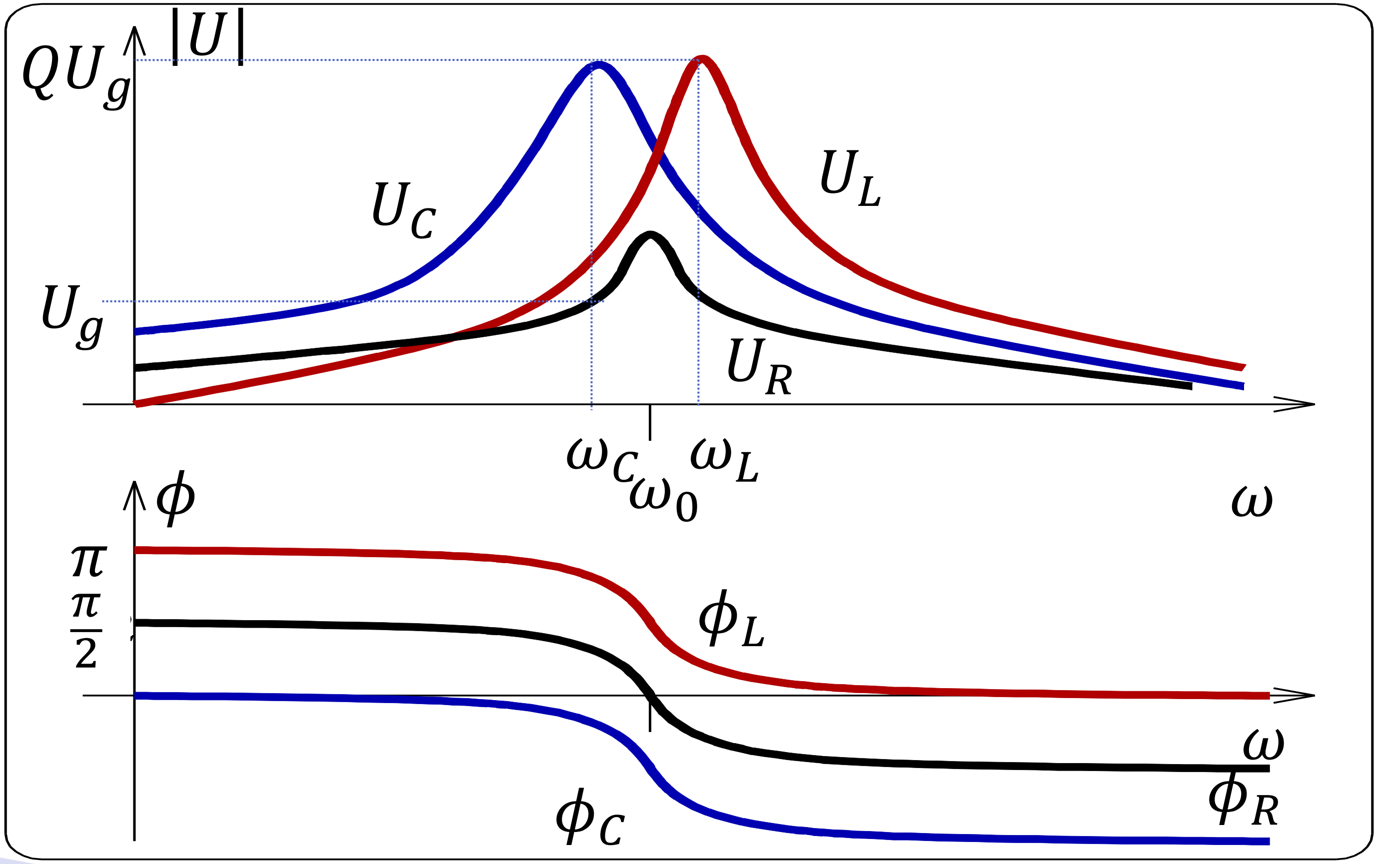
Резонанс напряжений: U_C и U_L в противофазе.

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{R}$$



Резонансные кривые

$$\omega_C = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}},\ \omega_L = \omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}}$$



Задача «Вынужденные колебания»

В последовательном колебательном контуре ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\delta = r/(2L)$, $\omega_0 \gg \delta$) в момент времени $t = 0$ включается генератор, напряжение $U_g(t)$ которого меняется по закону:

$$U_g(t) = \begin{cases} U_0 \cos(\omega_0 - \Delta)t & 0 \le t, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

Найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ и построить графики для случаев: а) $\Delta = 0$, б) $\Delta = \delta$, в) $\Delta = 5\delta$.

Физический смысл добротности:

Свободные колебания:

$$A = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t), \qquad Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 \tau^*}{2};$$

Потери энергии за период:

$$\Delta \equiv 2\pi \times \frac{W_{\text{запас}}}{W_{\text{потери за период}}} =$$

$$= 2\pi \times \frac{\left(\frac{LI^2}{2}\right)}{\left(\frac{RI^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right)} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R} = Q;$$

Ширина резонансной кривой:

$$I(\omega) = \frac{U_g}{R + i\rho\xi} = \frac{U_g}{R(1 + iQ\xi)},$$

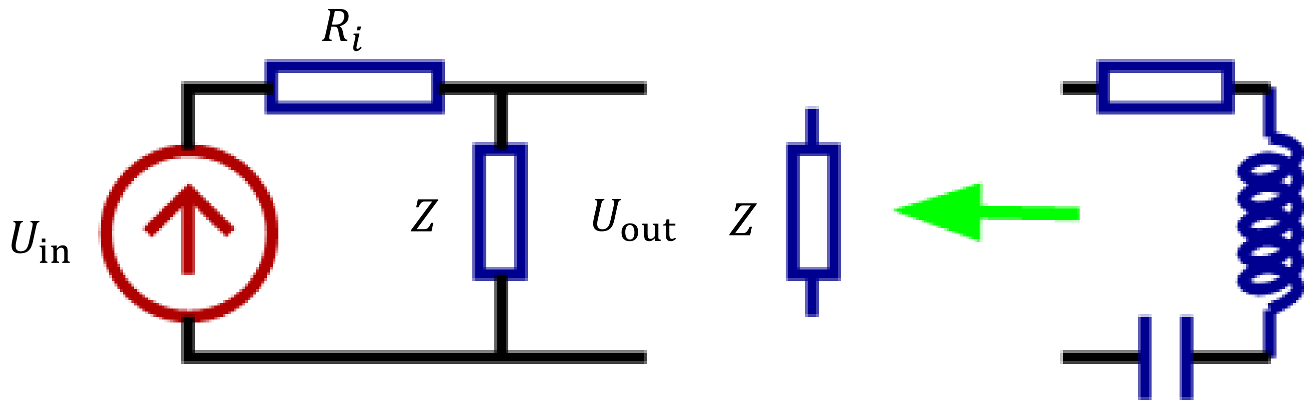
$$\left|I_{\sqrt{2}}(\omega)\right| = \frac{|I_{max}(\omega)|}{\sqrt{2}}, \Rightarrow \ \xi Q = 1, \qquad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

При $Q \gg 1$:

$$\xi_\Delta \simeq \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \qquad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \Delta\omega \cong \frac{\omega_0}{Q},$$

При Q ≪ 1: $\omega_1 \simeq Q\omega_0, \qquad \omega_2 \simeq \dfrac{\omega_0}{Q}$

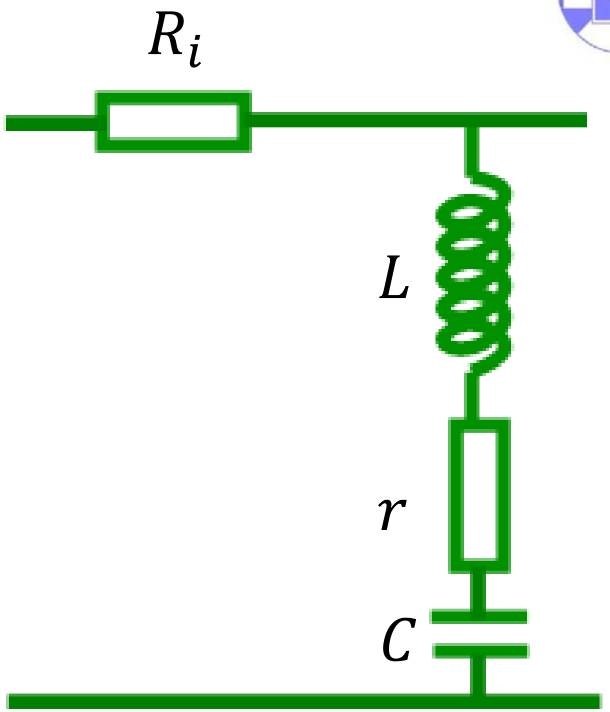
Резонансные явления в линейных цепях



$$K(\omega) \quad = \quad \frac{U_{\text{out}}(\omega)}{U_{\text{in}}(\omega)} = \frac{Z}{R_i + Z},$$

$$R_i \quad \gg \quad Z(\omega), \qquad \Rightarrow \quad K(\omega) \to 0,$$
$$R_i \quad \ll \quad Z(\omega), \qquad \Rightarrow \quad K(\omega) \to 1$$

Пример: фильтр-пробка.

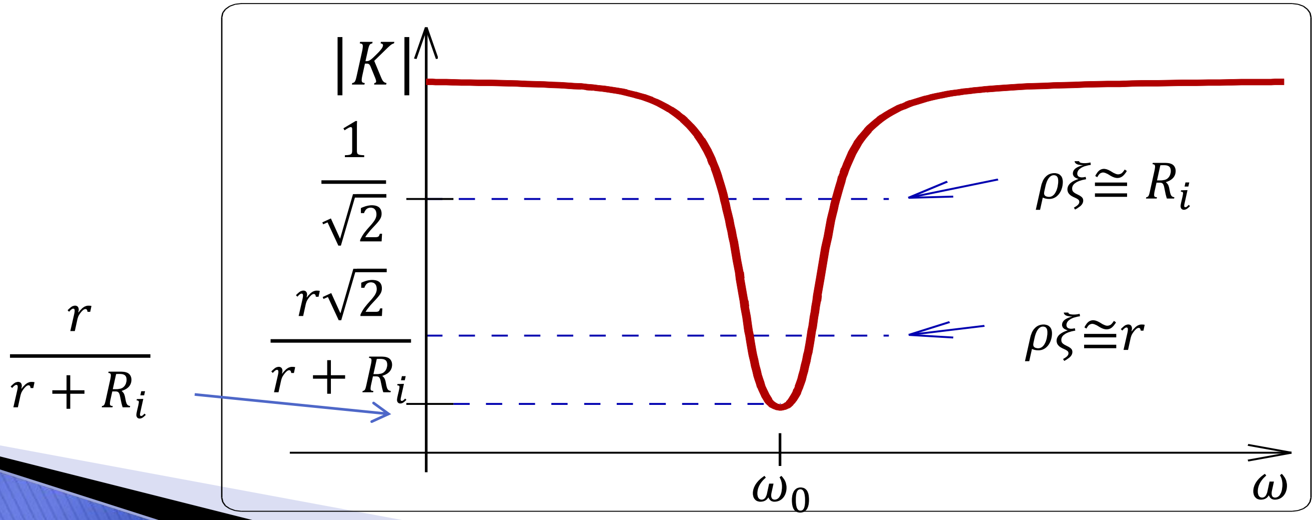


Пусть $\rho \gg R_i \gg r$:

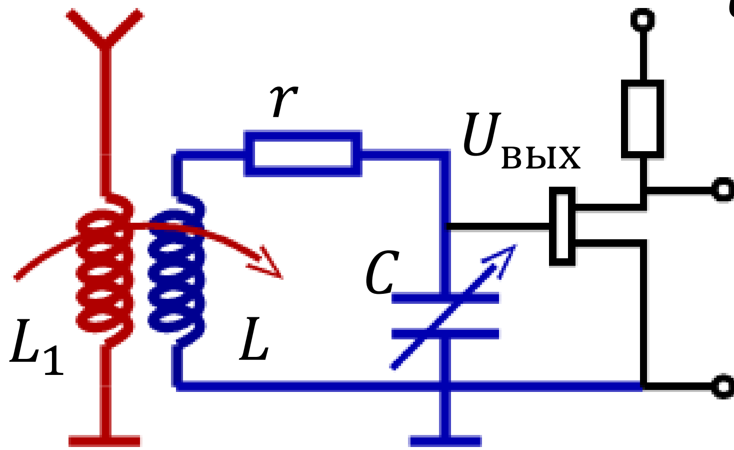
$$K(\omega) = \frac{Z}{Z+R_i} = \frac{r+i\rho\xi}{R_i+r+i\rho\xi},$$

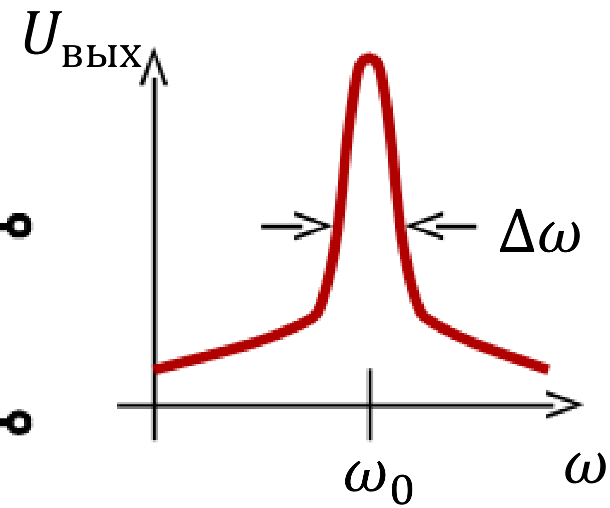
$$Z = r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = r + i\rho\xi$$

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{\rho}{R_i} = \frac{1}{Q_{\text{нагр}}}, \qquad Q_{\text{нагр}} \gg 1$$



Пример: полосовой фильтр



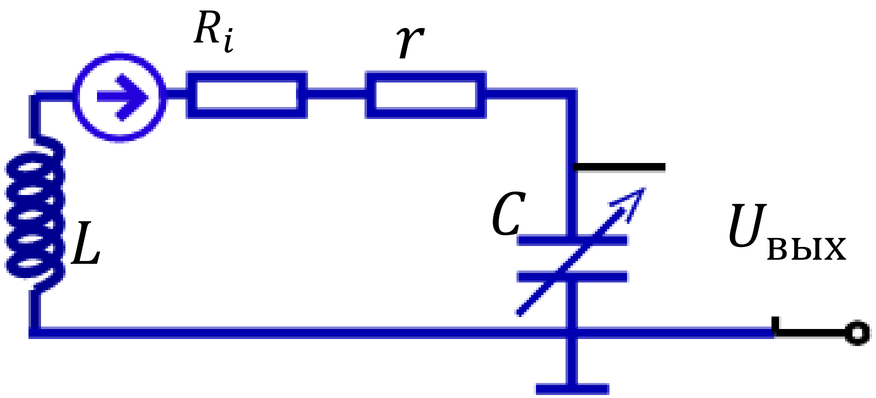


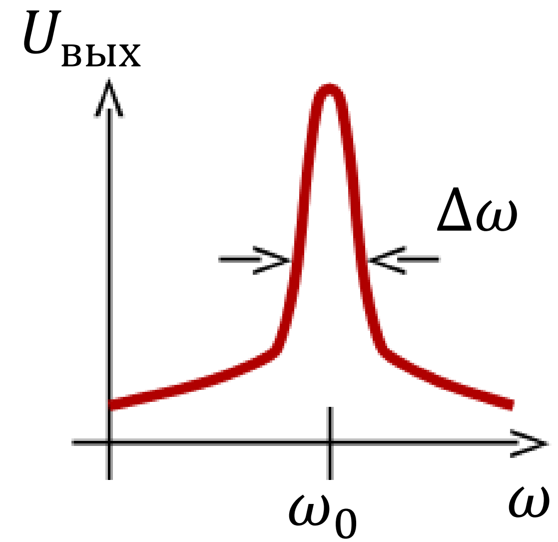
R_i — Сопротивление, вносимое антенной и транзистором

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{1/i\omega C}{Z + R_i} =$$

$$= \frac{1}{i\omega C(R_i + r + i\rho\xi)} = \frac{\rho\omega_0}{i\omega(R_i + r + i\rho\xi)},$$

Пример: полосовой фильтр





$$K(\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{1/i\omega C}{Z + R_i} =$$

$$= \frac{1}{i\omega C(R_i + r + i\rho\xi)} = \frac{\rho\omega_0}{i\omega(R_i + r + i\rho\xi)},$$

$$K(\omega) = \frac{\rho\omega_0}{i\omega(R_i + r + i\rho\xi)} = \frac{Q_{\text{нагр}}\,\omega_0}{i\omega(1 + iQ_{\text{нагр}}\,\xi)},$$

$$Q_{\text{нагр}} = \frac{\rho}{(R_i + r)}$$

Резонанс: $|K(\omega_0)| = Q_{\text{нагр}},\qquad Q_{\text{нагр}} = \dfrac{\rho}{(R_i + r)} \gg 1$

Вдали от резонанса: $\omega \ll \omega_0,\quad \omega \gg \omega_0$

$$|K(\omega)| \simeq \frac{\omega_0}{\omega|\xi|} = \frac{1}{\left|\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right|} < 1,$$

Ширина полосы фильтра:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{R_i + r}{\rho} = \frac{1}{Q_{\text{нагр}}},\quad Q_{\text{нагр}} \gg 1$$