

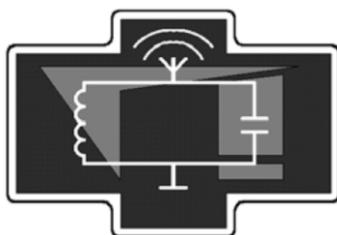
**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

Физический факультет

Практикум кафедры физики колебаний

Методическая разработка к задаче

**ЯВЛЕНИЕ ЗАХВАТЫВАНИЯ
И РЕЗОНАНС ВТОРОГО РОДА**



А. А. Белов, Т. Б. Косых

Москва, 2015

УДК 534:621

Печатается по решению кафедры физики колебаний
физического факультета МГУ

Белов А. А., Косых Т. Б.

ЯВЛЕНИЕ ЗАХВАТЫВАНИЯ И РЕЗОНАНС ВТОРОГО РОДА.

Методическая разработка к одноименной задаче «Практикума колебаний»
кафедры физики колебаний. — М., изд. физического факультета МГУ,
2015, 12 с.

Методическая разработка предназначена для студентов 3-4 курсов
бакалавриата и 1 курса магистратуры физического факультета МГУ,
выполняющих задачи в «Практикуме колебаний». В разработке
рассмотрено явление синхронизации автоколебаний внешней
гармонической силой. Описаны методики измерений при выполнении
упражнений.

Объем 0,75 п.л.

Тираж 30 экз.

Заказ №

Отпечатано в отделе оперативной печати физического факультета МГУ
им. М.В. Ломоносова

1. ВВЕДЕНИЕ

В линейной системе, находящейся под воздействием внешней периодической силы, всегда устанавливается колебание с частотой p внешнего воздействия.

Если на некоторую нелинейную автоколебательную систему оказывается дополнительное внешнее периодическое воздействие с частотой p , близкой к частоте колебаний автономной системы ω_0 , то в определенном интервале частоты внешней силы колебания системы синхронизируются по частоте с внешним воздействием. Этот эффект называют *синхронизацией автоколебаний внешней силой*, или *захватыванием* частоты автоколебаний. Такой синхронный режим существует лишь в определенной полосе расстройек $|p - \omega_0|$, называемой *полосой синхронизации*, или *областью захватывания*, причем полоса синхронизации тем шире, чем больше интенсивность воздействия.

В более общем случае *под синхронизацией понимают подстройку ритмов осциллирующих объектов за счет слабого взаимодействия между ними*. Синхронизация проявляется в радиотехнических и электронных устройствах, лазерах, в механических системах, в колебательных химических реакциях, в биологических объектах. Может реализоваться также *синхронизация на гармониках и субгармониках*, когда частоты воздействия и отклика кратны друг другу или, в самом общем случае, находятся в некотором рациональном отношении. Эти явления иногда называют *ультрагармоническим* или *субгармоническим захватыванием*, или *синхронизацией на обертонах и унтертонах*.

Процесс захватывания при достаточно больших расстройках между частотой внешнего воздействия p и собственной частотой ω_0 автоколебательной системы можно объяснить следующим образом.

Вне области захватывания колебание в контуре генератора (рис. 1) при действии внешней ЭДС состоит из вынужденного колебания с частотой p и автоколебания с частотой ω_0 , между которыми, как в линейной системе, происходят биения с периодом

$T = 2\pi/|p - \omega_0|$ (рис. 2). Наличие биений приводит к тому, что средняя за период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ крутизна характеристики транзистора периодически с частотой $|p - \omega_0|$ меняет свою величину.

Автоколебательная система обладает конечной инерционностью, определяемой временем τ установления малых отклонений от стационарной амплитуды автоколебаний в отсутствие действия внешней ЭДС. Если период биений T меньше времени релаксации системы τ , то есть $T = 2\pi/|p - \omega_0| < \tau$, то из-за инерционности системы происходит усреднение по времени «средней крутизны» (рис. 2). В результате устанавливается некое стационарное значение средней крутизны, тем меньшее, чем больше амплитуда вынужденных колебаний. Величина этой стационарной средней крутизны определяет амплитуду автоколебаний, существующих вместе с вынужденными колебаниями частоты p .

По мере уменьшения расстройки $|p - \omega_0|$ амплитуда вынужденных колебаний нарастает, а величина стационарной средней крутизны уменьшается. Следовательно, уменьшается амплитуда автоколебаний. Вынужденные колебания как бы подавляют автоколебания в системе (асинхронно гасят автоколебания). При некоторой конечной расстройке $|p - \omega_0|_{захв}$ амплитуда автоколебаний падает до нуля, и в системе остаются только колебания частоты p , т. е. наступает захватывание. Переход к синхронному режиму при этих условиях происходит, очевидно, путем уменьшения глубины биений ΔU до нуля (рис. 3). Форма биений при этом такая, как на рис. 2. Когда амплитуда внешней силы достаточно велика, захватывание наблюдается при больших расстройках $|p - \omega_0|$.

При действии на автоколебательную систему внешней ЭДС малой амплитуды также имеет место явление захватывания, но установление синхронного режима происходит иначе. Захватывание при малых внешних ЭДС наступает при очень малых расстройках $|p - \omega_0|$, таких, что период биений между вынужденными колебаниями частоты внешней силы и автоколебаниями больше τ . В этом случае автоколебательная система малоинерционна по

отношению к периоду биений $T = 2\pi/|p - \omega_0|$, и средняя крутизна оказывается не постоянной, а медленно меняющейся во времени.

Изменение средней крутизны вызывает изменение амплитуды автоколебаний. В результате такого самосогласованного воздействия на амплитуду автоколебаний форма биений искажается: изменение амплитуды результирующего колебания со временем перестает быть синусоидальным. Кроме того, это воздействие, эквивалентное введению в контур генератора положительного и отрицательного сопротивления в соответствующие части периода биений, замедляет изменение амплитуды результирующего колебания. В итоге частота биений при приближении частоты p к частоте свободных автоколебаний ω_0 убывает не по линейному закону, а быстрее (сплошная кривая на рис. 4). Частота автоколебаний при этом «притягивается» к частоте внешней силы. Это явление называется частичным увлечением частоты. При некоторой конечной расстройке $|p - \omega_0|_{захв}$ частота биений обращается в нуль — наступает захватывание.

Семейство графиков $\Omega(p)$ при различных амплитудах внешнего воздействия E_0 , представленное на рис. 5, дает область, в которой частота возбуждаемых автоколебаний равна частоте внешней силы p . Эта область, представленная на рис. 6 серым цветом, называется областью синхронизации (или областью захватывания).

Форма биений результирующего колебания вблизи границы полосы захватывания, приближающаяся к форме пилообразного колебания, свидетельствует о том, что спектр колебаний включает в себя целый ряд частот $p \pm n\Omega$ (где Ω — частота биений, n — целые числа), а не две гармонические составляющие — вынужденное колебание частотой p и автоколебание с частотой ω_0 , как в случае больших внешних ЭДС. При приближении частоты внешней силы к границе полосы захватывания весь спектр сливается в одну линию, так как $\Omega \rightarrow 0$.

Захваченный генератор ведет себя как некоторый контур с регулируемой полосой пропускания, равной полосе захватывания. Это свойство захваченного генератора можно использовать для эффективной фильтрации сигналов.

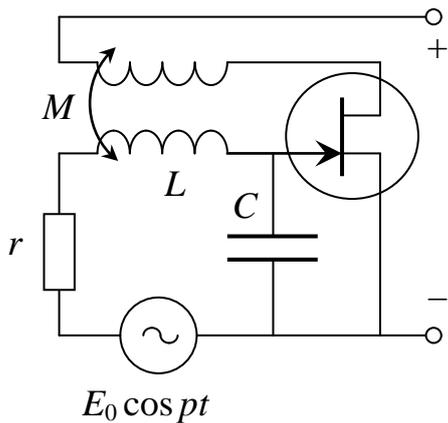


Рис. 1. Схема установки.

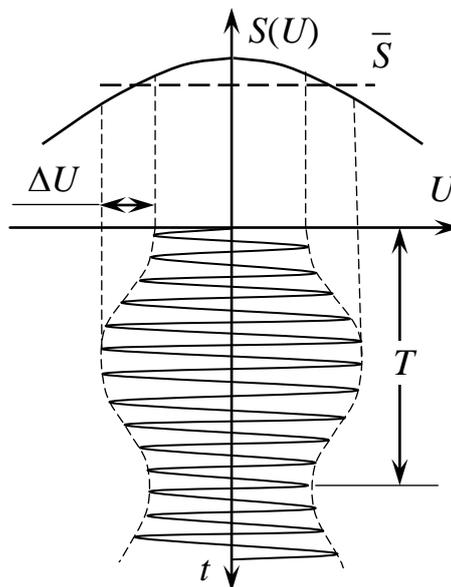


Рис. 2. Усреднение крутизны по периоду биений.

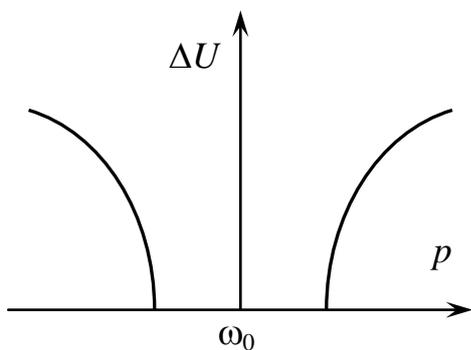


Рис.3. Зависимость глубины биений ΔU от расстройки.

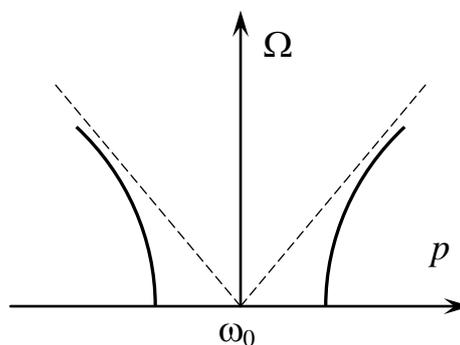


Рис. 4. Зависимость частоты биений Ω от расстройки.

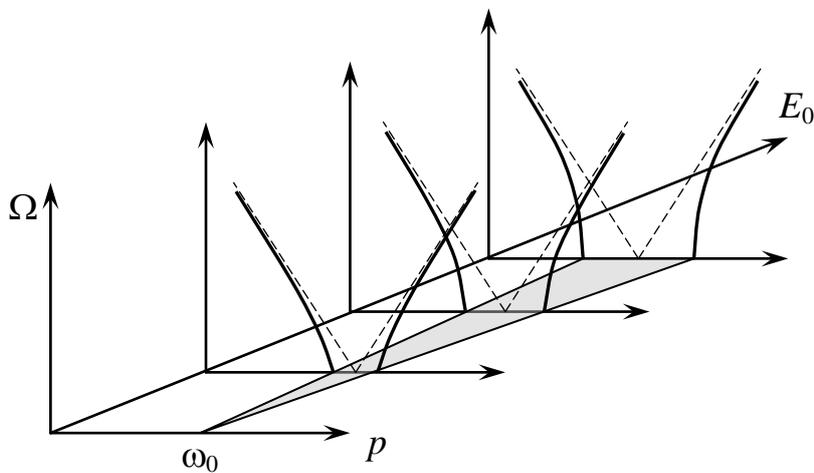


Рис.5. Семейство графиков $\Omega(p)$ при различных амплитудах внешнего воздействия E_0 .

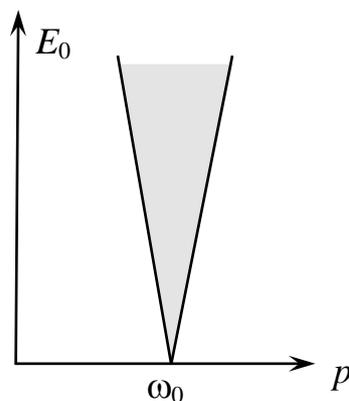


Рис. 6. Область синхронизации.

При действии на генератор амплитудно-модулированного сигнала захваченный генератор будет генерировать почти гармоническое колебание с очень незначительной глубиной модуляции, если полосу захватывания сделать малой, меньше частоты модуляции, если полосу захватывания сделать малой, меньше частоты модуляции воздействующего сигнала. Изменяя амплитуду внешнего сигнала, можно управлять величиной полосы захватывания и тем самым менять степень фильтрации входного сигнала. При малой частоте модуляции, когда спектр сигнала, воздействующего на генератор, укладывается внутри полосы захватывания, имеет место воспроизведение действующего сигнала почти без искажения.

Явление захватывания, или синхронизации, имеет место, когда частоты p и ω_0 не только близки, но и удовлетворяют условию $p \approx n\omega_0 / m$, где m и n — небольшие целые числа. Особенно легко это явление наблюдается при $p \approx n\omega_0$. В этом случае имеет место синхронизация на гармонике автоколебаний.

Синхронизацию на гармонике автоколебаний можно использовать для деления частоты. Однако деление частоты может быть осуществлено и несколько иным способом, с использованием явления **резонанса второго рода**.

При действии на потенциально автоколебательную систему (*недовозбужденный* генератор) внешней ЭДС с частотой $p \approx 2\omega_0$ в системе при определенных условиях, наряду с вынужденными колебаниями, имеющими частоту p внешней силы, могут возникнуть интенсивные колебания с частотой, точно в два раза ниже частоты внешней силы. В этом случае наступает *резонанс второго рода*.

Резонанс второго рода имеет ряд существенных отличий от обычного резонанса. Во-первых, возбуждение колебаний с частотой, в два раза меньше частоты внешнего воздействия, происходит в четко ограниченной области расстроек частоты внешней силы относительно удвоенной частоты системы (рис. 7); во-вторых, возбуждение происходит лишь в определенной области значений амплитуд ЭДС. Существует как минимальная амплитуда внешнего воздействия, соответствующая «порогу» возбуждения, так и максимальная, начиная с которой уже не удастся возбудить колебания частоты $p/2$. Типичная амплитудная характеристика при резонансе второго рода представлена на рис. 8.

2. ТЕОРИЯ

Ширина области захватывания.

Уравнение колебаний для напряжения в колебательном контуре автогенератора (рис. 1) при действии внешней ЭДС $E = E_0 \cos pt$ имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = M\omega_0^2 \dot{x} (S_0 - S_2 x^2) + E_0 \omega_0^2 \cos pt. \quad (1)$$

Здесь $\delta = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/LC$, зависимость тока транзистора от напряжения на затворе аппроксимирована кубическим многочленом:

$$i = i_0 + S_0 x - S_2 x^3 / 3.$$

Когда период биений $T = 2\pi/|p - \omega_0| < \tau$, движение в системе можно представить как сумму автоколебаний и вынужденных колебаний

$$x = A \cos \omega_0 t + B \cos(pt + \psi), \quad (2)$$

где A и B — амплитуды автоколебания и вынужденного колебания соответственно, ψ — сдвиг фаз между вынужденными колебаниями и внешней силой.

Подставляя (2) в (1), получим уравнение для амплитуды автоколебания A :

$$-2\delta(B) \equiv M\omega_0^2 (S_0 - S_2 B^2 / 2) - 2\delta = M\omega_0^2 S_2 A^2 / 4, \quad (3)$$

или

$$A^2 = A_0^2 - 2B^2,$$

где $A_0 = 2 \sqrt{\frac{M\omega_0^2 S_0 - 2\delta}{M\omega_0^2 S_2}}$ — амплитуда автоколебаний в отсутствие

внешней ЭДС. Из (3) видно, что наличие вынужденных колебаний с амплитудой B приводит к уменьшению амплитуды автоколебаний A .

Амплитуда вынужденных колебаний B при большой расстройке $|p - \omega_0|$ с достаточной точностью определяется из уравнения (1), в котором опущены диссипативные члены (затухание

оказывает существенное влияние на ход резонансной кривой лишь при малых расстройках $|p - \omega_0|$.

$$B \approx \frac{E_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - p^2} \approx \frac{E_0 \omega_0}{2|\omega_0 - p|}. \quad (4)$$

С помощью соотношений (3) и (4) можно вычислить ширину полосы захватывания $2|p - \omega_0|$. На границе области захватывания амплитуда A автоколебаний обращается в нуль:

$$B_{гран}^2 = \frac{A_0^2}{2}, \quad \frac{2|p - \omega_0|_{захв}}{\omega_0} = \sqrt{2} \frac{E_0}{A_0}. \quad (5)$$

В случае малых амплитуд внешнего воздействия решение уравнения (1) вблизи границы захватывания следует искать в виде

$$x = A \sin(pt + \varphi),$$

где A и φ — медленно меняющиеся по сравнению с периодом $T_0 = 2\pi/\omega_0$ функции. Тогда уравнение (1) с точностью до членов $(\delta/\omega_0)^2$ можно заменить уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\delta(A)A + \frac{E_0 \omega_0}{2} \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= p - \omega_0 - \frac{E_0 \omega_0}{2A} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (6) не могут быть решены в квадратурах в общем виде. Но в случае малых внешних ЭДС амплитуда автоколебания незначительно отличается от амплитуды A_0 свободных автоколебаний и $\dot{A} \approx 0$. Учитывая, что $\delta(A_0) = 0$, из (6) получаем:

$$a(t) = \frac{E_0 \omega_0}{2A_0 \left| \frac{d\delta}{dA} \right|_{A=A_0}} \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = p - \omega_0 - \frac{E_0 \omega_0}{2A_0} \sin \varphi. \quad (7)$$

Здесь $a(t) = A - A_0$ определяет форму биений вне области захватывания. Интегрируя второе уравнение (7), получаем, что $\cos \varphi$,

а следовательно, и форма биений $a(t)$ является периодической функцией времени с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(p - \omega_0)^2 - \left(\frac{E_0 \omega_0}{2A_0}\right)^2}}. \quad (8)$$

Из выражения (8) следует, что частота биений с уменьшением расстройки $|p - \omega_0|$ убывает не по линейному закону, а быстрее (рис. 4).

При

$$|p - \omega_0| = |p - \omega_0|_{\text{захв}} = \frac{E_0 \omega_0}{2A_0} \quad (9)$$

наступает захватывание.

На основании (5) и (9) можно утверждать, что для любых амплитуд внешнего воздействия полоса захватывания равна

$$\frac{2|p - \omega_0|_{\text{захв}}}{\omega_0} = k \frac{E_0}{A_0},$$

причем в случае малых амплитуд внешней ЭДС множитель $k = 1$ и в случае больших амплитуд — $k = \sqrt{2}$.

Резонанс второго рода

Резонанс второго рода описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = M\omega_0^2 \dot{x}(S_0 + S_1 x - S_2 x^2) + E_0 \omega_0^2 \cos 2pt. \quad (10)$$

При описании резонанса второго рода в многочлене, аппроксимирующем зависимость тока транзистора от напряжения на затворе

$$i = i_0 + S_0 x + \frac{S_1}{2} x^2 - \frac{S_2}{3} x^3,$$

необходимо учитывать квадратичный член.

Так как условие самовозбуждения не выполнено, то

$$2\delta_0 = 2\delta - M\omega_0^2 S_0 > 0.$$

Амплитуда B вынужденных колебаний с частотой $2p$ внешней силы с достаточной точностью определяется выражением

$$B \approx \frac{E_0 \omega_0^2}{|\omega_0^2 - 4p^2|}. \quad (11)$$

Предположим, что помимо вынужденных колебаний в системе возникли и колебания с частотой, точно в два раза ниже частоты внешней ЭДС. Тогда

$$x = A \sin(pt + \varphi) + B \cos 2pt = a \sin pt - b \cos pt + B \cos 2pt. \quad (12)$$

Подставляя (12) в уравнение (10), получаем для определения стационарной амплитуды колебаний частоты p :

$$\begin{aligned} a \left[2\delta_0 + M\omega_0^2 \left(\frac{BS_1}{2} + \frac{B^2 S_2}{2} + A^2 S_2 \right) \right] + \frac{p^2 - \omega_0^2}{p} b = 0, \\ -a \frac{p^2 - \omega_0^2}{p} + b \left[2\delta_0 + M\omega_0^2 \left(-\frac{BS_1}{2} + \frac{B^2 S_2}{2} + A^2 S_2 \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая детерминант системы нулю, находим амплитуду колебаний с частотой p :

$$A^2 = \frac{\sqrt{\left(\frac{M\omega_0^2 S_1 B}{2} \right)^2 - \left(\frac{p^2 - \omega_0^2}{p} \right)^2} - 2\delta_0 - \frac{B^2 M\omega_0^2 S_2}{2}}{M\omega_0^2 S_2}. \quad (13)$$

Из (13) следует, во-первых, что резонанс второго рода возможен только при наличии квадратичного члена в характеристике тока транзистора ($S_1 \neq 0$); во-вторых, амплитуда B вынужденных колебаний, с одной стороны, в качестве множителя при S_1 , содействует возбуждению колебаний с половинной частотой, а, с другой стороны, в качестве множителя при S_2 гасит их. При этом стимулирующее влияние пропорционально первой степени B , а гасящее — квадрату амплитуды вынужденных колебаний B^2 . Поэтому

резонанс второго рода возникает лишь в ограниченной как сверху, так и снизу области значений амплитуд внешней ЭДС.

С помощью (11) и (13) нетрудно рассчитать величину области расстроек $|p - \omega_0|$, внутри которой имеет место возбуждение колебаний половинной частоты, и зависимость этой полосы возбуждения от амплитуды внешней ЭДС.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Функциональная схема экспериментальной установки показана на рис. 9. Основным узлом является генератор почти гармонических колебаний с индуктивной обратной связью, собранный на полевом транзисторе. Меняя величину обратной связи M , можно переводить генератор из потенциально автоколебательного режима в режим генерации. Потенциально автоколебательный режим работы генератора используется при снятии резонансных кривых и при наблюдении резонанса второго рода. Величину связи M при изучении резонанса второго рода следует устанавливать лишь немного меньше M_0 , соответствующей порогу самовозбуждения генератора.

Часть напряжения с колебательного контура генератора через делитель напряжения, образованный резисторами R_1, R_2 , подается на выходные клеммы. Делитель напряжения позволяет ослабить влияние измерительных приборов, подключаемых к выходным клеммам, на процессы в генераторе.

Источником внешнего воздействия на исследуемую автоколебательную систему является генератор стандартных сигналов типа SFG-2110. Сигнал с генератора через делитель (1:10) подается в колебательный контур автоколебательной системы на малое сопротивление r , включенное в контур последовательно. Для согласования генератора стандартных сигналов с малым сопротивлением служит усилитель внешнего воздействия. Сигнал с другого плеча делителя (1:1) подается на один из каналов цифрового осциллографа DS-1022С. Амплитуда сигнала с внешнего генератора измеряется с помощью осциллографа. На вход исследуемого генератора сигнал поступает через делитель!

Сигнал с гнезда «Выход» на передней панели исследуемого генератора подается на второй канал осциллографа. Установление

синхронного режима (захватывание) регистрируется по исчезновению биений при приближении частоты внешнего воздействия к частоте автоколебаний. По форме биений вблизи границы области захватывания определяется величина внешнего воздействия, соответствующая «большой» и «малой» амплитуде внешней ЭДС. Измерение амплитуды и частоты синхронизированного колебания осуществляется с помощью осциллографа.

Процесс захватывания можно наблюдать по фигурам Лиссажу при подаче на вход Y осциллографа напряжения с выходных клемм установки, а на вход X — сигнала от внешнего ГСС. При отсутствии захватывания фигура Лиссажу имеет размытые контуры. При наступлении захватывания фигура Лиссажу становится четкой.

При наблюдении захватывания амплитудно-модулированным сигналом внешний генератор переводится в режим внутренней амплитудной модуляции с частотой модуляции 400 Гц. Полоса частот захватывания изменяется путем изменения амплитуды сигнала внешнего генератора.

4. УПРАЖНЕНИЯ

1. Установить обратную связь M ниже порога генерации M_0 . Подать на генератор внешний гармонический сигнал с частотой $f \approx 150$ кГц. Снять три резонансные кривые недовозбужденного генератора: две — при различных значениях коэффициента связи M_1 и M_2 и одинаковой величине сигнала с генератора U_1 , третью — при одной из выбранных связей, но при увеличенном внешнем воздействии U_2 . Все три кривые построить на одном графике в отнормированном масштабе, откладывая по оси ординат амплитуду колебаний, нормированную на ее максимальное значение для данной резонансной кривой. Объяснить различие в ширине резонансных кривых. Рекомендуемые значения параметров для упражнения 1: 1) $M = 0$, $A = 2$ мВ; 2) $M = 200$, $A = 2$ мВ; 3) $M = 0$, $A = 20$ мВ;
2. Увеличивая M , установить режим генерации. Подать внешний сигнал с частотой, близкой к частоте генерации и, перестраивая его частоту, найти границы области захватывания. Качественно проследить, как изменяется картина биений в процессе перехода к

режиму захватывания при больших и малых амплитудах внешнего воздействия.

3. Перед выполнением упражнения 3 отключить от входа внешний генератор и, изменяя коэффициент связи, установить значение амплитуды сигнала исследуемого генератора примерно 150 мВ. Подключить внешний генератор и *снять зависимость граничных частот полосы захватывания от амплитуды внешнего воздействия*. Рекомендуемый диапазон амплитуды входного сигнала: 1 мВ – 100 мВ.
4. *Снять зависимость амплитуды колебаний в области захватывания от частоты при малом и большом внешнем воздействии*.
5. Наблюдать с помощью фигур Лиссажу процесс захватывания при воздействии на генератор сигнала удвоенной частоты.
6. Подать на генератор амплитудно-модулированный сигнал с внешнего генератора. Для этого использовать режим внутренней амплитудной модуляции генератора, имеющего фиксированную частоту модуляции. Наблюдать с помощью осциллографа картину синхронизированных колебаний при воздействии на генератор амплитудно-модулированного сигнала. Соотношение между полосой частот захватывания и частотой модуляции варьировать путем изменения амплитуды сигнала внешнего генератора.
7. Установить величину обратной связи немного ниже порога генерации M_0 . Перевести тумблер на передней панели установки в положение «Резонанс второго рода». При этом колебания на частоте p будут отфильтрованы фильтром низких частот, и будут наблюдаться только колебания на частоте $p/2$. Подать внешний сигнал с амплитудой $U \sim 0,1$ В на частоте, близкой к удвоенной частоте генератора $2\omega_0$. Перестраивая частоту генератора p вблизи $2\omega_0$, наблюдать явление резонанса второго рода — возникновение колебаний на частоте $p/2 \approx \omega_0$. *Снять зависимости амплитуды колебаний основной гармоники:*
 - а) от частоты внешнего воздействия p ;
 - б) от амплитуды внешнего воздействия E (в середине полосы возбуждения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М.: ГТТИ, 1952.
2. Мигулин В. В. и др. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988.
3. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление.— изд-во Техносфера, 2003.— 496 с. (серия «Мир физики и техники»).

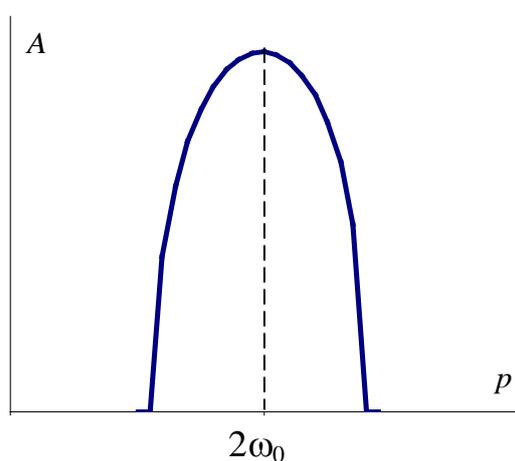


Рис. 7. Зависимость амплитуды от частоты внешнего воздействия при резонансе второго рода

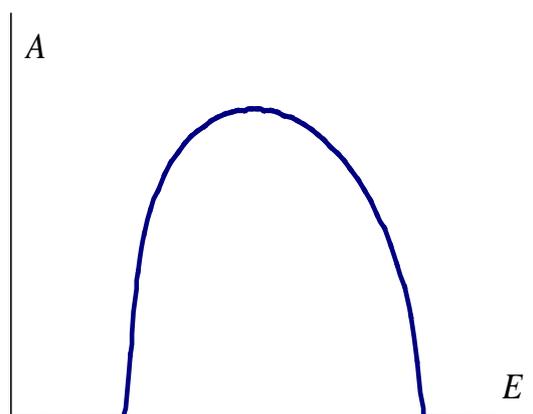


Рис. 8. Зависимость амплитуды колебаний от амплитуды внешней ЭДС при резонансе второго рода.

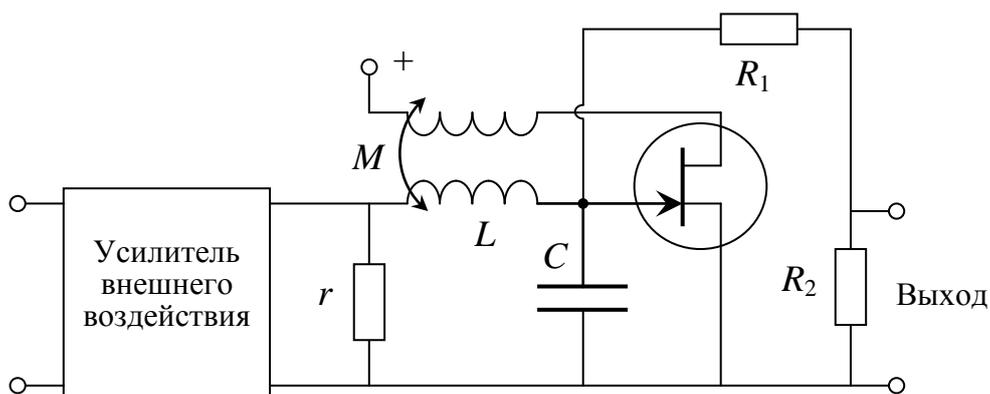


Рис. 9. Блок-схема экспериментальной установки