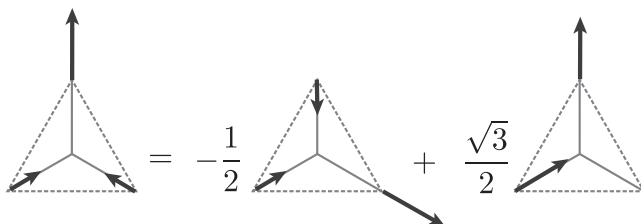


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А.С. Сергеев

# Теория представлений в физике колебаний



Москва  
2020

*Рекомендовано к изданию Ученым советом Физического факультета  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова*

Рецензенты:

д.ф.-м.н., проф. С.С. Кротов (МГУ им. М.В. Ломоносова)  
к.ф.-м.н. К.В. Антипин (МГУ им. М.В. Ломоносова)

**А.С. Сергеев. Теория представлений в физике колебаний:** учебное пособие / А.С. Сергеев — М.: Издательский отдел Физического факультета МГУ, 2020 — 61 с.: ил.

В учебном пособии изложены основы теории линейных представлений конечных групп. Рассмотрены примеры применения теоретико-групповых методов в задачах о колебаниях симметричных систем и простейших моделях квантовой механики. Пособие содержит большое количество оригинальных упражнений, последовательное выполнение которых обеспечит успешное овладение материалом. Рекомендовано для студентов, аспирантов и начинающих научных сотрудников.

Отпечатано в отделе оперативной печати Физического факультета МГУ.

Версия от 18 октября 2020 г.

© А.С. Сергеев, 2020.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Множества, функции, группы</b>	<b>6</b>
2.1	Множества и функции . . . . .	6
2.2	Множества со структурой . . . . .	7
2.3	Группы перестановок . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Отображения между множествами со структурой</b>	<b>10</b>
3.1	Общий принцип . . . . .	10
3.2	Линейные преобразования . . . . .	11
3.3	Гомоморфизмы групп . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Действия групп</b>	<b>15</b>
4.1	Действия на геометрических фигурах . . . . .	15
4.2	Действие как гомоморфизм . . . . .	16
4.3	Орбиты и инвариантные подмножества . . . . .	17
4.4	Классы сопряженных элементов . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Представления групп</b>	<b>19</b>
5.1	Действие на векторных пространствах . . . . .	19
5.2	Прямые суммы пространств и представлений . . . . .	20
5.3	Представления группы $S_3$ . . . . .	21
5.4	Неприводимые представления и физика . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Лемма Шура</b>	<b>24</b>
6.1	Ядро и образ гомоморфизма . . . . .	24
6.2	Эквивалентность неприводимых представлений . . . . .	25
6.3	Соотношения ортогональности . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Характеры представлений</b>	<b>29</b>
7.1	Определение и свойства . . . . .	29
7.2	Ортогональность характеров . . . . .	30
7.3	Свойства неприводимых представлений . . . . .	31
7.4	Таблицы характеров . . . . .	32
<b>8</b>	<b>Проекционные операторы</b>	<b>37</b>
8.1	Определение и примеры . . . . .	37
8.2	Доказательство формулы для $P_i$ . . . . .	38
8.3	Представления высокой размерности . . . . .	38

<b>9</b>	<b>Представления на пространствах функций</b>	<b>41</b>
9.1	Скалярные функции . . . . .	41
9.2	▷ Практикум: представление группы $S_3$ . . . . .	42
9.3	Векторные функции. Пространство смещений . . . . .	43
<b>10</b>	<b>Колебания симметричных систем</b>	<b>45</b>
10.1	Оператор ускорения и нормальные моды . . . . .	45
10.2	Следствия симметрии . . . . .	47
10.3	Эквивалентные неприводимые представления . . . . .	51
10.4	Задачи . . . . .	54
<b>11</b>	<b>Теория групп в квантовой механике</b>	<b>55</b>
11.1	Уравнение Шредингера и симметрии . . . . .	55
11.2	Группа $SO(2)$ и сферические гармоники . . . . .	56
11.3	Группа $\mathbb{Z}_N$ и волны Блоха в кристалле . . . . .	59

# 1 Введение

Симметрия играет важную роль во многих явлениях природы, и нередко составляет основу их физического описания. Например, в физике высоких энергий уравнения должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца, что существенно влияет на классификацию элементарных частиц. Если перейти из вакуума в кристалл, симметрия задачи понизится: пространство перестанет быть однородным и изотропным. Свойства электронов в кристалле во многом определяются симметрией периодического потенциала, создаваемого кристаллической решеткой. Так, симметрия задает кратность вырождения уровней энергии в особых точках импульсного пространства. Подобным образом симметрия проявляется уже и в простейших классических задачах, таких как описание колебательных систем со многими степенями свободы. Известно, что у пары одинаковых маятников, связанных пружиной, есть две собственные моды: симметричная (колебания в противофазе) и антисимметричная (синфазные колебания). Однако обобщение таких “соображений симметрии” на случай трех одинаковых грузов, связанных пружинами, не говоря о более сложных физических задачах, требует математического аппарата теории групп и теории представлений.

В каждом из приведенных выше примеров симметрия участвует дважды: во-первых, как набор преобразований, относительно которых инварианта физическая система, то есть ее уравнения движения; во-вторых, как ограничения на возможные состояния системы, или решения уравнений. Набор таких преобразований системы называют группой симметрии, а действие группы на пространстве состояний — ее представлением. Если известна группа симметрии системы, методы теории представлений позволяют существенно упростить поиск решений и дают их классификацию по типам симметрии.

Цель данного пособия — познакомить читателей с основами теории групп и теории представлений, а также показать, как они применяются в физических задачах. Изложение теории ведется в математическом стиле. С одной стороны, это позволяет показать внутреннюю логику теории, а с другой — подготовить заинтересованного читателя к восприятию математической литературы. В качестве физических примеров рассматриваются колебательные системы со многими степенями свободы и простейшие задачи квантовой механики. В рассказе о физических приложениях значительное внимание уделяется тому, как именно понятия и методы теории представлений стыкуются с алгоритмом решения физической задачи. Изучение этого материала позволит читателю увидеть подобную схему в

применении теории групп к другим физическим ситуациям.

Освоение курса не требует предварительных знаний теории групп, но предполагается, что читатель прошел курс линейной алгебры (и знаком с векторными пространствами, линейными отображениями и их матрицами). Желательно знакомство с теорией колебаний систем со многими степенями свободы и знание основ квантовой механики. **Полужирным** шрифтом в тексте выделены первые упоминания понятий, сопровождаемые их определениями. Треугольником  $\triangleright$  обозначены упражнения. Выполнение упражнений является важнейшей частью изучения материала.

При подготовке пособия использовались следующие учебники:

- S. Sternberg, *Group theory and physics*. Cambridge University Press, 1994.
- J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag New York, 1977.

Приведем также список пособий по нескольким учебным курсам, посвященным применению теории групп в физике:

- А.А. Белов, *Теория групп в физике колебаний*. Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2008.
- Е.А. Кузнецов, Д.А. Шапиро, *Методы математической физики. Часть II. Представления групп и их применение в физике. Функции Грина*. Новосибирск, 2014.
- Н.А. Поклонский, *Точечные группы симметрии*. БГУ, Минск, 2003.

## 2 Множества, функции, группы

### 2.1 Множества и функции

**Множество**  $M$  можно описать как совокупность различных объектов  $\{m_i\}$ , называемых **элементами множества**,  $m_i \in M$ .

Множество из двух элементов  $\mathbf{2}$  выглядит так:

$$\mathbf{2} = \{1, 2\} = \{\bullet, \circ\}.$$

Не имеет значения, как обозначены элементы множества; важно, что они различны.

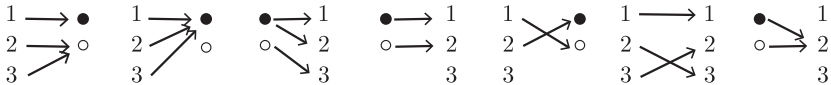
Определим множество положительных чисел

$$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$$

подобная запись читается как “множество действительных чисел  $a$ , таких, что  $a > 0$ ”.

**Отображением**, или **функцией**  $f$  из множества  $M$  в множество  $N$  называют правило, ставящее в соответствие каждому элементу  $m \in M$  некоторый элемент  $n \in N$ .

2.1▷ Какие из наборов стрелок задают функции между множествами  $\mathbf{2}$  и  $\mathbf{3}$ ?



Функции записывают так:

$$f : M \rightarrow N$$

$$m \mapsto f(m).$$

Вторая строка говорит о том, в какой элемент  $f(m) \in N$  переходит элемент  $m \in M$  под действием функции  $f$ . Например, функция косинус является отображением действительной оси на отрезок  $[-1; 1]$ :

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$$

$$x \mapsto \cos(x).$$

Если заданы функции  $f : M \rightarrow N$  и  $g : N \rightarrow L$ , можно определить их **композицию**:

$$g \circ f : M \rightarrow L$$

$$m \mapsto g(f(m)).$$

2.2 ▷ Найдите композицию каких-либо двух функций из рисунка выше.

Рассмотрим множество  $\text{End}(M)$  всех отображений множества  $M$  в себя:

$$\text{End}(M) = \{f : M \rightarrow M\}.$$

Одним из элементов  $\text{End}(M)$  является **тождественное отображение**  $\text{id}_M$ :

$$\begin{aligned} \text{id}_M : M &\rightarrow M \\ t &\mapsto t. \end{aligned}$$

2.3 ▷ Найдите композиции  $f \circ \text{id}_M$  и  $\text{id}_N \circ f$  некоторой функции  $f : M \rightarrow N$  с тождественными отображениями.

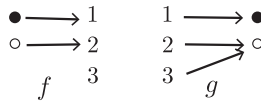
2.4 ▷ Найдите  $\text{End}(\mathbf{2})$ , то есть все отображения множества из двух элементов в себя.

Пусть  $f : M \rightarrow N$  — некоторая функция. Если существует такая функция  $g : N \rightarrow M$ , что выполнены условия

$$g \circ f = \text{id}_M \quad f \circ g = \text{id}_N,$$

то ее называют **обратной** к  $f$  и обозначают  $g = f^{-1}$ . В этом случае функция  $f$  является **обратимой** и задает взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств  $M$  и  $N$ .

2.5 ▷ Пусть  $M = \mathbf{2}$ ,  $N = \mathbf{3}$ , а функции  $f$  и  $g$  заданы следующим образом:



Выполнены ли условия из определения обратной функции?

2.6 ▷ У каких из элементов  $\text{End}(\mathbf{2})$  есть обратные функции?

2.7 ▷ Пусть  $f : M \rightarrow N$  и  $g : N \rightarrow K$  — обратимые функции. Найдите обратную функцию к их композиции:  $(g \circ f)^{-1}$ .

## 2.2 Множества со структурой

Нас будут интересовать множества с дополнительной структурой. Роль такой структуры будут играть операции на множестве, подчиняющиеся некоторым правилам. Простейший пример операции — сложение, заданное на множестве действительных чисел.



Обозначим  $M \times N$  множество упорядоченных пар  $(m, n)$ , где  $m \in M$  и  $n \in N$ . Тогда операции на  $M$  можно записать как отображения:

$$\begin{aligned} \bullet : M \times M &\rightarrow M \\ (m_1, m_2) &\mapsto m_1 \bullet m_2. \end{aligned}$$

2.8 ▷ Запишите в этой форме операцию сложения действительных чисел.

Знакомый пример множества со структурой — векторное пространство. Напомним, что множество  $V$  называют **векторным пространством** над полем  $\mathbb{R}$ , если на  $V$  заданы операции сложения элементов  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  и операция умножения элемента  $\mathbf{v} \in V$  на число  $\alpha \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющие аксиомам векторного пространства.

Ключевое понятие этого курса, группа, также является множеством с дополнительной структурой. **Группа**  $(G, \bullet)$  — множество  $G$ , снабженное операцией  $\bullet : G \times G \rightarrow G$ , обладающей следующими свойствами:

1. Существует *нейтральный* элемент  $e$ , такой что:  $e \bullet g = g \bullet e = g$  для всех  $g \in G$ .
2. Для любого элемента группы  $g \in G$  существует *обратный* элемент  $g^{-1} \in G$ , такой, что  $g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e$ .
3. Операция  $\bullet$  *ассоциативна*, то есть  $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ .

Таким образом, для того, чтобы узнать, является ли  $(G, \bullet)$  группой, необходимо проверить следующее:

1. Входит ли в  $G$  нейтральный элемент?
2. Не выводит ли операция  $\bullet$  за пределы множества  $G$ ?
3. У каждого ли элемента  $G$  есть обратный ему элемент  $G$ ?
4. Является ли операция  $\bullet$  ассоциативной?

2.9 ▷ На множестве  $\text{End}(\mathbf{2})$  задана операция  $\circ$ , композиция отображений. Является ли  $\text{End}(\mathbf{2})$  группой относительно этой операции?

2.10 ▷ Для набора множеств  $\{M\}$  и двух операций  $\bullet \in \{+, \cdot\}$  (сложение и умножение чисел) найдите все пары  $(M, \bullet)$ , являющиеся группами. Множества: действительные числа  $\mathbb{R}$ , действительные числа без точки ноль  $\mathbb{R}^\times$ , положительные числа  $\mathbb{R}_+$ , неотрицательные числа  $\mathbb{R}_+^0$ , целые числа  $\mathbb{Z}$ , целые числа без точки ноль  $\mathbb{Z}^\times$ , пара чисел  $\{1, -1\}$ .

Подмножество  $H \subset G$  называют **подгруппой** группы  $G$ , если оно является группой (относительно той же операции).

2.11 ▷ Среди групп, найденных в предыдущем задании, найдите три пары “группа — ее подгруппа”.

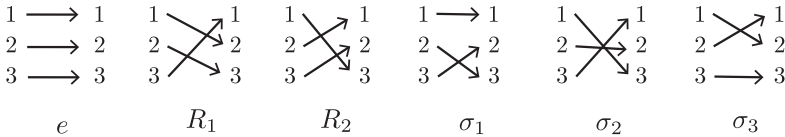
### 2.3 Группы перестановок

Важный пример группы — **группа перестановок**  $S_M$ , состоящая из всех перестановок множества  $M$ . **Перестановкой** называют обратимое отображение множества в себя. Групповой операцией в  $S_M$  является композиция таких отображений. Также  $S_M$  называют **симметрической группой** множества  $M$ .

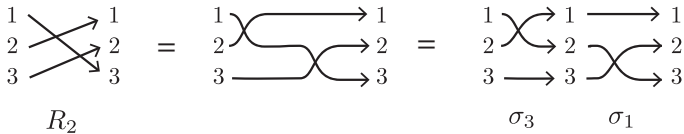
2.12 ▷ Проверьте, что  $(S_M, \circ)$  действительно является группой.

2.13 ▷ Опишите группу  $S_2$  перестановок множества  $\mathbf{2}$ .

На рисунке изображены элементы группы  $S_3$  и обозначения для них, которые понадобятся нам в дальнейшем:



**Транспозицией** называют перестановку, при которой два элемента “меняются местами”, а остальные остаются на месте. Элементы  $\sigma_i$  группы  $S_3$  являются транспозициями. Любая перестановка может быть представлена как композиция транспозиций. Рассмотрим перестановку  $R_2 \in S_3$ :



Из картинки следует, что  $R_2 = \sigma_1 \circ \sigma_3$ . Обратите внимание на обратный порядок отображений в композиции: сначала на точку действует  $\sigma_3$ , а затем  $\sigma_1$ . Например,  $(\sigma_1 \circ \sigma_3)(1) = \sigma_1(\sigma_3(1)) = \sigma_1(2) = 3$ .

**Четностью перестановки** называют четность числа транспозиций, образующих данную перестановку.

2.14 ▷ Какова четность перестановок, входящих в группу  $S_3$ ?

### 3 Отображения между множествами со структурой

#### 3.1 Общий принцип

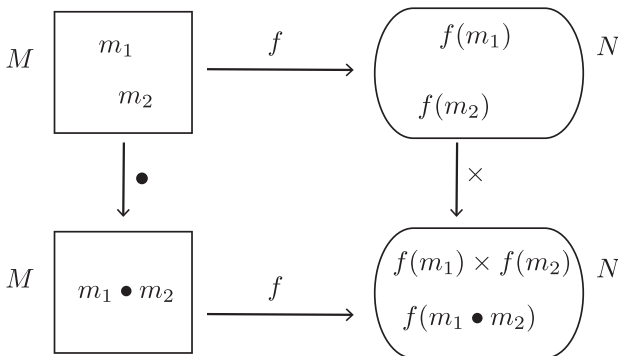
В предыдущем разделе мы познакомились с двумя типами дополнительных структур на множествах — структурой векторного пространства и структурой группы. Существует важный принцип:

Введение на множествах дополнительной структуры выделяет класс отображений между ними, сохраняющих эту структуру.

Рассмотрим структуру, заданную бинарной операцией. Пусть на множестве  $M$  задана операция  $\bullet$ , а на множестве  $N$  — операция  $\times$ . Тогда говорят, что отображение  $f : M \rightarrow N$  сохраняет структуру, если для всех пар  $m_1, m_2 \in M$  справедливо

$$f(m_1 \bullet m_2) = f(m_1) \times f(m_2).$$

Это уравнение можно наглядно представить в виде **коммутативной диаграммы**:



В левом верхнем углу выбраны два элемента множества  $M$ . Если уравнение выполняется, то результат вычислений (движения по стрелкам) не зависит от выбора пути.

## 3.2 Линейные преобразования

Пусть  $(V, +, \cdot)$  и  $(W, +, \cdot)$  — действительные векторные пространства. На них заданы операции сложения векторов и умножения вектора на число  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Отображение  $a : V \rightarrow W$  называется **линейным**, если оно сохраняет структуру векторного пространства:

$$a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = a(\mathbf{v}_1) + a(\mathbf{v}_2) \quad a(\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot a(\mathbf{v})$$

для всех  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in V$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Линейные отображения пространства  $V$  в себя называют **линейными преобразованиями**.

### 3.2.1 Немного линейной алгебры

Напомним некоторые сведения о линейных преобразованиях, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Как только в векторном пространстве  $V$  выбран базис  $\{\mathbf{e}_i\}$ , любой вектор  $\mathbf{v} \in V$  можно однозначно представить как столбец компонент  $v_i$ :

$$\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{e}_i v_i.$$

Действие линейного преобразования  $a : V \rightarrow V$  на векторы описывается умножением матрицы на столбцы:

$$a\mathbf{v} = a \sum_j \mathbf{e}_j v_j = \sum_j (a\mathbf{e}_j) v_j = \sum_{ij} \mathbf{e}_i (a\mathbf{e}_j)_i v_j \equiv \sum_{ij} \mathbf{e}_i A_{ij} v_j$$

Матрицу  $A$  называют матрицей линейного преобразования  $a$  относительно базиса  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Ее столбцами являются компоненты преобразованных базисных векторов:

$$A = \begin{pmatrix} (a\mathbf{e}_1)_1 & (a\mathbf{e}_2)_1 \\ (a\mathbf{e}_1)_2 & (a\mathbf{e}_2)_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для однозначного задания линейного преобразования достаточно знать, как оно действует на базисные векторы.

3.1▷ Найдите матрицу поворота против часовой стрелки на угол  $\frac{2\pi}{3}$  в ортонормированном базисе.

Найдем матрицу, соответствующую композиции линейных преобразований:

$$(b \circ a)\mathbf{v} = \sum_{ij} (b\mathbf{e}_i) A_{ij} v_j = \sum_{ijk} \mathbf{e}_k B_{ki} A_{ij} v_j = \sum_{jk} \mathbf{e}_k \left( \sum_i B_{ki} A_{ij} \right) v_j.$$

В последнем выражении в скобках происходит умножение по правилу “строка на столбец”. Таким образом, матрица композиции преобразований равна произведению матриц этих преобразований.

### 3.2.2 Группы линейных преобразований

Действительные числа можно превратить в группу двумя способами: в качестве групповой операции может выступать сложение или умножение (во втором случае нужно выколоть точку ноль).

Рассмотрим множество  $\text{Hom}(V, V)$  всех линейных преобразований  $V$ :

$$\text{Hom}(V, V) = \{a : V \rightarrow V\}.$$

3.2▷ Задайте на  $\text{Hom}(V, V)$  операцию сложения и превратите это множество в группу.

С другой стороны, в качестве операции можно выбрать композицию линейных преобразований. В этом случае необходимо исключить из множества  $\text{Hom}(V, V)$  все вырожденные, то есть необратимые, линейные преобразования.

3.3▷ Приведите примеры вырожденных и невырожденных линейных преобразований плоскости.

Множество невырожденных линейных преобразований пространства  $V$  с композицией в качестве операции образуют **общую линейную группу**  $GL(V)$  пространства  $V$ .

3.4▷ Пусть  $V$  — действительное одномерное пространство. Убедитесь, что группа  $GL(V)$  совпадает с  $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ .

### 3.3 Гомоморфизмы групп

Применим теперь общий принцип к отображениям между группами. **Гомоморфизм групп** — отображение  $\varphi$  из группы  $(G, \bullet)$  в группу  $(H, \circ)$ , сохраняющее групповую структуру:

$$\varphi(g_1 \bullet g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$$

для всех  $g_1, g_2 \in G$ .

Важными свойствами гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow H$  являются сохранение нейтральных и обратных элементов группы:

$$\varphi(e_G) = e_H \quad \varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}.$$

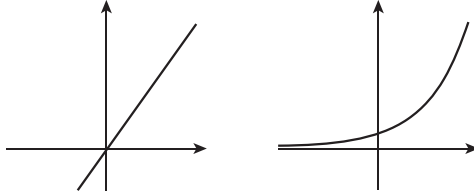
Докажем первое свойство. По определению нейтрального элемента,  $\varphi(g) = \varphi(e_G \bullet g)$ . Тогда, по определению гомоморфизма,

$$\varphi(g) = \varphi(e_G) \circ \varphi(g).$$

Остается умножить обе части равенства справа на  $[\varphi(g)]^{-1} \in H$ .

3.5 ▷ Докажите второе свойство гомоморфизма.

Примерами гомоморфизмов групп являются следующие элементарные функции:



3.6 ▷ Между какими группами действуют эти отображения? Как запишется определяющее свойство гомоморфизма в каждом случае?

У любой пары групп существует **тривиальный гомоморфизм**:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : G &\rightarrow H \\ g &\mapsto e_H. \end{aligned}$$

3.7 ▷ Проверьте, что  $\varphi_1$  — гомоморфизм.

3.8 ▷ Найдите все группы  $M$  из задания 2.10, для которых отображение  $\varphi : M \rightarrow M$ , заданное как  $\varphi(x) = |x|$ , является гомоморфизмом.

Обозначим  $\mathbb{Z}_2$  группу  $(\{1, -1\}, \cdot)$ . Найдём гомоморфизм

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

По определению функции,  $\varphi$  ставит в соответствие каждому целому числу некоторый элемент группы  $\mathbb{Z}_2$ . Это значит, что множество целых чисел разбивается на два подмножества, одно из которых  $\varphi$  отправит в элемент 1, а второе — в элемент  $-1$ .

3.9 ▷ Какие это подмножества? Закончите построение гомоморфизма.

Теперь построим гомоморфизм  $\psi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ . Каждому элементу  $\mathbb{Z}_2$  нужно сопоставить некоторое действительное число.

3.10 ▷ Чему равны  $\psi(1)$  и  $\psi(-1)$ ?

Если гомоморфизм является взаимно-однозначным отображением, то он называется **изоморфизмом**. Группы, между которыми существует изоморфизм, называют **изоморфными** и обозначают  $G \simeq H$ .

3.11 ▷ Группа перестановок двух точек  $S_2$  изоморфна одной из групп, упоминавшихся в этом разделе. Найдите ее.

3.12 ▷ Придумайте гомоморфизм  $S_2 \rightarrow GL(V)$ , где  $V$  — двумерное векторное пространство.

## 4 Действия групп

Рассмотрим множество  $M$  и его группу перестановок  $S_M$ . Для любого элемента  $g \in S_M$  и любой точки  $m \in M$  известно, в какую точку она перейдет под действием элемента группы. Обобщением этой ситуации является понятие действия некоторой группы  $G$  на множестве  $M$ : каждому элементу  $G$  ставится в соответствие отображение  $M$  в себя. При этом необходимо потребовать, чтобы отображения множества были согласованы с умножением в группе.

**Действием** группы  $(G, \bullet)$  на множестве  $M$  называют отображение

$$\begin{aligned} G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto g \cdot m, \end{aligned}$$

такое, что выполнены условия

$$g \cdot (h \cdot m) = (g \bullet h) \cdot m \quad e \cdot m = m,$$

где  $h \in G$ , а  $e$  — нейтральный элемент.

Простейшее действие оставляет на месте все точки множества. Это **тривиальное действие**:  $g \cdot m = m$  для всех  $g \in G$  и  $m \in M$ .

### 4.1 Действия на геометрических фигурах

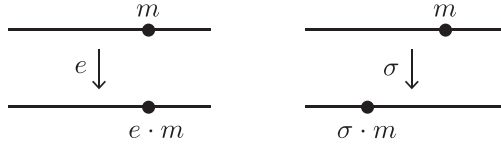
В отличие от множества точек, геометрическая фигура обладает дополнительной структурой — формой и размером, то есть информацией о взаимном расположении точек. Мы будем рассматривать только те преобразования плоскости, которые сохраняют эту структуру.

4.1▷ Какие преобразования плоскости сохраняют форму и размер геометрической фигуры?

Если преобразование плоскости переводит фигуру в себя, оно называется **преобразованием симметрии**, или просто **симметрией** фигуры. По аналогии с группой перестановок, все симметрии фигуры  $F$  образуют ее **группу симметрии**  $S_F$ . Мы не будем различать элементы  $S_F$ , отличающиеся лишь действием на точки плоскости, не принадлежащие фигуре.

Зададим действие группы перестановок  $S_2 = \{e, \sigma\}$  на отрезке следующим образом: элемент  $e$  оставляет отрезок на месте, а элемент  $\sigma$  переворачивает его. Можно сказать, что действие определено как набор преобразований отрезка, заданных перестановками его концов. Действие элементов группы на точку  $m$  выглядит так:





Похожим способом можно определить действие группы  $S_3$  на правильном треугольнике.

4.2▷ Каким геометрическим преобразованиям треугольника соответствуют перестановки его вершин?

В этих примерах действие группы на фигуре естественным образом задает взаимно-однозначное соответствие между элементами группы и преобразованиями плоскости, входящими в группу симметрии фигуры. При этом умножение элементов группы по построению согласовано с композициями преобразований. Другими словами, имеет место изоморфизм  $G \simeq S_F$ : группа  $S_2$  изоморфна группе симметрии отрезка  $C_2$ , а группа  $S_3$  — группе симметрии правильного треугольника  $D_3$ .

В общем случае, действие группы  $G$  на фигуре  $F$  эквивалентно некоторому гомоморфизму  $c : G \rightarrow S_F$ .

4.3▷ Задайте действие группы  $S_2$  на треугольнике.

4.4▷ Задайте действие группы  $S_3$  на отрезке. *Подсказка:* рассмотрите трехмерную фигуру, образованную треугольником и перпендикулярным ему отрезком.

## 4.2 Действие как гомоморфизм

Убедимся, что действие группы  $G$  на множестве  $M$  соответствует гомоморфизму в симметрическую группу  $S_M$ . Для этого нам понадобится новое обозначение  $c_g(m) \equiv g \cdot m$ . Действие группы можно описать так: каждому элементу  $g \in G$  ставится в соответствие функция  $c_g$ , переводящая элемент  $m \in M$  в  $c_g(m) \in M$ :

$$\begin{array}{ll} c : G \rightarrow \text{End}(M) & c_g : M \rightarrow M \\ g \mapsto c_g & m \mapsto c_g(m) \end{array}$$

В новых обозначениях последовательное действие на  $m$  элементами  $h$  и  $g$  становится композицией функций, и условия в определении действия принимают вид:

$$c_g \circ c_h = c_{g \bullet h} \quad c_e = \text{id}_M.$$

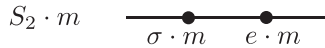
4.5 ▷ Закончите рассуждение. Покажите, что функция  $c_g$  — обратимая, и  $c : G \rightarrow S_M$  является гомоморфизмом из группы  $G$  в группу перестановок множества  $M$ .

### 4.3 Орбиты и инвариантные подмножества

**Орбитой** точки  $m$  под действием группы  $G$  называют множество

$$G \cdot m = \{g \cdot m \mid g \in G\}.$$

Пример орбиты для действия  $S_2$  на отрезке приведен на рисунке:



4.6 ▷ Все ли орбиты действия  $S_2$  на отрезке состоят из двух точек? Сколько точек может входить в орбиту действия группы  $S_3$  на треугольнике?

Подмножество  $Y \subset M$  называется **инвариантным подмножеством**, если оно переходит в себя под действием группы:  $G \cdot Y = Y$ , где

$$G \cdot Y = \{g \cdot y \mid g \in G, y \in Y\}.$$

Обратите внимание, что “ $Y$  переходит в себя” не означает, что под действием  $G$  все точки  $y \in Y$  остаются на месте.

4.7 ▷ Пусть  $G \cdot m$  и  $G \cdot n$  — орбиты некоторых точек  $m, n \in M$ . Покажите, что либо эти множества не пересекаются, либо совпадают.

4.8 ▷ Является ли орбита  $G \cdot m$  инвариантным подмножеством? Всякое ли инвариантное подмножество является орбитой?

### 4.4 Классы сопряженных элементов

В качестве множества, на котором действует группа, может выступать сама группа. Важным примером такого действия является **сопряжение**:

$$\begin{aligned} c_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

4.9 ▷ Проверьте, что сопряжение является действием.

Отметим, что теперь групповой структурой обладает и то множество, на котором действует группа. Интересно посмотреть, сохраняет ли действие эту структуру:

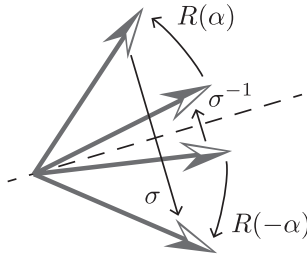
4.10 ▷ Является ли  $c_g : G \rightarrow G$  гомоморфизмом?

4.11 ▷ (Для любителей абстракции) Проверьте, что  $c : g \mapsto c_g$  является гомоморфизмом из группы  $G$  в группу изоморфизмов из группы  $G$  в себя.

Действуя на себе сопряжением, группа разбивается на орбиты. Они называются **классами сопряженных элементов**.

4.12 ▷ Найдите классы сопряженных элементов в группе  $S_2$ .

Чтобы найти классы в группе  $S_3$ , не выписывая всю таблицу умножения, воспользуемся ее реализацией как группы симметрии правильного треугольника. Сопряженность двух элементов симметрии нетрудно установить из геометрических соображений. Рассмотрим повороты плоскости  $R(\alpha)$  и отражения  $\sigma$  относительно прямых:



Из рисунка следует, что  $R(-\alpha) = \sigma R(\alpha) \sigma^{-1}$ , то есть повороты на некоторый угол по и против часовой стрелки сопряжены отражением. Аналогично можно показать, что если ось симметрии  $\sigma_1$  переходит в ось  $\sigma_2$  при повороте  $R(\alpha)$ , они сопряжены:  $\sigma_2 = R(\alpha) \sigma_1 R(-\alpha)$ .

4.13 ▷ Нарисуйте картинку, соответствующую второй формуле.

4.14 ▷ Найдите классы сопряженных элементов в группе  $S_3$ .

4.15 ▷ Найдите классы сопряженных элементов в группе симметрии квадрата  $D_4$ .

## 5 Представления групп

Пусть на множестве  $M$  задано действие группы  $G$ . В результате действия элемента  $g \in G$ , точка  $m \in M$  переходит в точку  $g \cdot m \in M$ , то есть каждый элемент  $g$  задает отображение  $c_g : M \rightarrow M$ .

Допустим теперь, что в качестве множества  $M$  выступает векторное пространство  $V$ . Естественно потребовать, чтобы действие группы сохраняло линейную структуру:

$$g \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = g \cdot \mathbf{v} + g \cdot \mathbf{w} \quad g \cdot (\alpha \mathbf{v}) = \alpha(g \cdot \mathbf{v}),$$

где  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ , а  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Другими словами, каждому элементу  $g \in G$  соответствует некоторое линейное преобразование  $r(g) : V \rightarrow V$ . Линейные действия групп на векторных пространствах называют представлениями групп. Они лежат в основе многих приложений теории групп к физическим задачам.

### 5.1 Действие на векторных пространствах

**Представлением**  $r$  группы  $G$  на векторном пространстве  $V$  называют набор линейных преобразований этого пространства  $\{r(g) \mid g \in G\}$  таких, что выполнены условия:

$$r(g)r(h) = r(gh) \quad r(e) = \text{id}_V.$$

Иногда представление обозначают как пару  $(r, V)$ . **Размерностью** представления называют размерность пространства, на котором оно действует.

5.1▷ Опишите представление группы  $G$  на векторном пространстве  $V$  как некоторый гомоморфизм.

Начнем с представлений на одномерном векторном пространстве  $V$ . Для всех групп определено **тривиальное представление**  $r_1$ , оставляющее на месте все векторы  $\mathbf{v} \in V$ :

$$r_1(g) = \text{id}_V$$

для всех  $g \in G$ .

У групп перестановок задано одномерное **знаковое представление**  $r_s$ :

$$\begin{aligned} r_s(g)\mathbf{v} &= \mathbf{v}, & \text{если } g \text{ — четная перестановка} \\ r_s(g)\mathbf{v} &= -\mathbf{v}, & \text{если нечетная.} \end{aligned}$$

5.2▷ Постройте знаковое представление группы  $S_3$ .

## 5.2 Прямые суммы пространств и представлений

Попробуем теперь придумать двумерное представление группы  $S_2 = \{e, \sigma\}$  на плоскости  $V$ . По определению представления,  $r(e) = \text{id}_V$ .

5.3▷ Чему равно  $[r(\sigma)]^2$ ? Приведите пример такого преобразования плоскости. Сравните с заданием 3.12.

Нам нужен систематический способ конструировать представления высокой размерности из представлений низкой размерности. Напомним, что **подпространством** векторного пространства  $V$  называют подмножество  $U \subset V$ , являющееся векторным пространством. Если внутри  $V$  выбраны два подпространства  $U_1$  и  $U_2$ , таких, что

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V \quad \text{и} \quad U_1 \cap U_2 = \mathbf{0},$$

пространство  $V$  называют их **прямой суммой** и обозначают

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

Любой вектор  $\mathbf{v} \in V$  можно единственным образом представить как сумму компонент

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{u}_i \in U_i$ .

Пусть в подпространствах  $U_i$  заданы линейные преобразования  $a_i$ . По линейности, они однозначно задают преобразование  $a$  пространства  $V$

$$a\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\mathbf{u}_1 \\ a_2\mathbf{u}_2 \end{pmatrix},$$

которое мы также будем называть прямой суммой преобразований и обозначать  $a = a_1 \oplus a_2$ .

5.4▷ Представьте отражение относительно прямой на плоскости как прямую сумму линейных преобразований. Можно ли подобным образом разложить поворот плоскости?

Если на подпространствах  $U_i$  заданы представления  $r_i$  группы  $G$ , то на пространстве  $V$  можно определить **прямую сумму представлений**  $r = r_1 \oplus r_2$ , заданную линейными преобразованиями вида

$$r(g) = r_1(g) \oplus r_2(g) \quad \text{для всех } g \in G.$$

Например, пусть  $U_x$  и  $U_y$  — координатные оси на плоскости  $V$ . Зададим представление  $(r, V)$  группы  $S_2$  как прямую сумму тривиального  $(r_1, U_x)$  и знакового  $(r_s, U_y)$  представлений.

5.5 ▷ Как действует на плоскости преобразование  $[r_1 \oplus r_s](\sigma)$ ?

Таким образом, из представлений низкой размерности легко можно сконструировать представление на пространстве высокой размерности. Намного более интересно решение обратной задачи: возможно ли разложить данное представление  $(r, V)$  на прямую сумму представлений? И если возможно, то как это сделать? На эти вопросы отвечает теория представлений.

Подпространство  $V_1 \subset V$  называют **инвариантным подпространством** представления  $(r, V)$ , если под действием линейных преобразований  $r(g)$  оно переходит в себя, то есть  $r(g)\mathbf{v}_1 \in V_1$  для любого  $\mathbf{v}_1 \in V_1$  и для всех  $g \in G$  (сравните с определением инвариантного подмножества в разделе 4.3).

5.6 ▷ Представление  $r$  группы  $S_2 = \{e, \sigma\}$  на плоскости задано так:  $r(\sigma)$  действует как отражение плоскости относительно прямой. Найдите инвариантные подпространства.

5.7 ▷ Другое представление  $S_2$  получится, если  $r(\sigma) = R(\pi)$ , поворот плоскости на  $180^\circ$ . Сколько у этого представления инвариантных подпространств?

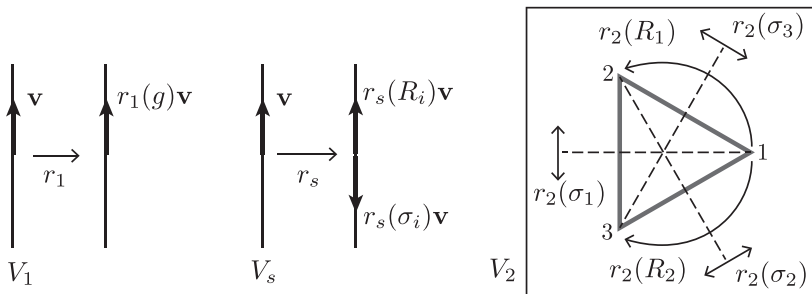
Представление  $(r, V)$  называют **неприводимым**, если  $V$  не содержит инвариантных подпространств, кроме тривиальных —  $\{0\}$  и  $V$ . Одномерные тривиальное и знаковое представления автоматически являются неприводимыми, так как на прямой нет нетривиальных подпространств.

5.8 ▷ Какие неприводимые представления группы  $S_2$  действуют на инвариантных подпространствах в последних двух упражнениях?

Теория представлений утверждает, что любое представление конечной группы можно разложить на прямую сумму ее неприводимых представлений.

### 5.3 Представления группы $S_3$

Как и у любой группы перестановок, у группы  $S_3$  заданы тривиальное представление  $r_1$  и знаковое представление  $r_s$ . Кроме того, можно рассмотреть действие  $S_3$  на правильном треугольнике как набор линейных преобразований плоскости. Так задается ее **двумерное** неприводимое представление  $r_2$ . Действия этих представлений на соответствующих векторных пространствах приведены на рисунке:



Попробуем теперь сконструировать трехмерное представление группы  $S_3$ . Пусть  $r_2$  действует на горизонтальной плоскости  $V_{xy}$ , а  $r_1$  — на вертикальной оси  $V_z$ . Мы получили трехмерное представление  $r = r_2 \oplus r_1$  на пространстве  $V = V_{xy} \oplus V_z$ .

5.9 ▷ Для каждого  $g \in S_3$  отображение  $r(g)$  является линейным преобразованием трехмерного пространства  $V$ . Какие это преобразования?

5.10 ▷ Что изменится, если  $r = r_2 \oplus r_s$ ? Сравните с заданием 4.4.

Одномерные представления заданы на своих пространствах однозначно. В случае двумерного представления ситуация иная: разные способы вложить треугольник в плоскость и разные способы нумерации вершин задают различные наборы линейных преобразований. С другой стороны, эти представления — одинаковые “по сути”. В этом случае говорят об эквивалентных представлениях. Представления  $(r, V)$  и  $(r', W)$  называются **эквивалентными**  $r \sim r'$ , если существует невырожденное линейное отображение  $\tau : V \rightarrow W$ , такое, что

$$r'(g)\tau = \tau r(g) \quad \forall g \in G.$$

5.11 ▷ Запишите это условие в виде коммутативной диаграммы.

5.12 ▷ Пусть на пространстве  $V$  заданы двумерные представления  $r_2$  и  $r'_2$  группы  $S_3$ , отличающиеся способом вложения правильного треугольника в плоскость. Найдите отображение  $\tau$ .

Линейные отображения, удовлетворяющие условию выше (но не обязательно обратимые) называют  **$G$ -морфизмами**. Примером такого отображения служит  $\tau = 0$ . Можно сказать, что представления группы  $G$  задают на векторных пространствах  $V$  и  $W$  дополнительную структуру, а  $G$ -морфизмы ее сохраняют.

## 5.4 Неприводимые представления и физика

В этом разделе мы познакомились с двумя неприводимыми представлениями группы  $S_2$ :

$$\begin{array}{ll} r_1 \text{ тривиальное:} & r_1(g) = 1 \\ r_s \text{ знаковое:} & r_s(\sigma) = -1 \end{array}$$

и с тремя неприводимыми представлениями группы  $S_3$ :

$$\begin{array}{ll} r_1 \text{ тривиальное:} & r_1(g) = 1 \\ r_s \text{ знаковое:} & r_s(\sigma_i) = -1, \quad r_s(R_i) = 1 \\ r_2 \text{ двумерное:} & \text{преобразования треугольника} \end{array}$$

Мы докажем, что этим списком исчерпываются *все* неприводимые представления групп  $S_2$  и  $S_3$ . Они являются элементарными строительными блоками, из которых можно построить любое представление  $(r, V)$  группы:

$$r = \bigoplus_i r_i^{\oplus m_i} \quad V = \bigoplus_i V_i^{\oplus m_i}.$$

Здесь  $m_i$  — кратность, с которой неприводимое представление  $r_i$  входит в  $r$  (например,  $r_s \oplus r_s = r_s^{\oplus 2}$ ). Информацию о кратности  $m_i$  и расположении инвариантных подпространств  $V_i$  внутри  $V$  для всех  $r_i$  мы будем называть **структурой представления**.

Решение физической задачи часто сводится к поиску собственных векторов и собственных значений некоторого оператора. Если система обладает симметрией, то каждый собственный вектор лежит в подпространстве  $V_i$ , на котором действует неприводимое представление группы симметрии. Поэтому знание структуры представления позволяет сильно упростить задачу, частично или полностью заменяя диагонализацию оператора на поиск подпространств  $V_i$ . Теория групп дает простые и эффективные алгоритмы для нахождения структуры представления, с которым мы познакомимся позже. А пока попробуем сделать это “методом пристального взгляда”:

5.13 ▷ Пусть группа  $S_2$  действует на плоскости как группа перестановок базисных векторов  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  (каждая перестановка задает линейное преобразование). Найдите инвариантные подпространства и действующие в них неприводимые представления.

5.14 ▷ То же для действия группы  $S_3$  как группы перестановок векторов ортонормированного базиса  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  в трехмерном пространстве.



## 6 Лемма Шура

Лемма Шура является одним из центральных результатов теории представлений. Она позволяет получить методы разложения некоторого представления на неприводимые. Согласно лемме Шура, всякий ненулевой  $G$ -морфизм между пространствами неприводимых представлений группы  $G$  является изоморфизмом. Несмотря на абстрактность, это утверждение имеет непосредственные физические следствия. Так, наличие  $n$ -мерного неприводимого представления в пространстве решений механической задачи приводит к  $n$ -кратному вырождению собственных частот (и вырождению уровней энергии в квантовых системах).

### 6.1 Ядро и образ гомоморфизма

Пусть  $f : M \rightarrow N$  — некоторая функция. Множество

$$f^{-1}(n) = \{m \in M \mid f(m) = n\} \subset M$$

называют **полным прообразом** элемента  $m$ . **Образом** множества  $M$  называется

$$f(M) = \{n \in N \mid f^{-1}(n) \neq \emptyset\} \subset N.$$

Рассмотрим линейное отображение  $a : V \rightarrow W$ . Важную информацию об отображении  $a$  несут подпространства, называемые **ядром** и **образом** отображения:

$$\ker a = a^{-1}(\mathbf{0}_W) \subset V \qquad \operatorname{im} a = a(V) \subset W.$$

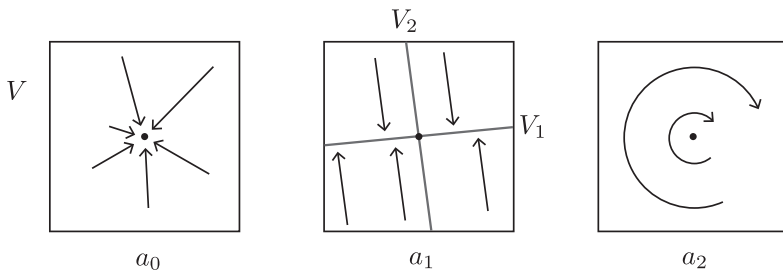
Убедимся, что ядро  $\ker a$  является подпространством пространства  $V$ . Для этого достаточно проверить, что операции сложения векторов и умножения на число не выводят за пределы  $\ker a$ . Пусть  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \ker a$ , то есть  $a\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}_W$ . Тогда  $a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}_W$ , и сумма также лежит в ядре. Для умножения на число получим:  $a(\alpha \cdot \mathbf{v}_1) = \alpha \cdot (a\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}_W$ , поэтому  $\alpha \cdot \mathbf{v}_1 \in \ker a$ .

6.1▷ Проверьте, что образ  $\operatorname{im} a$  является подпространством пространства  $W$ .

Существует связь между размерностями ядра, образа и исходного пространства:

$$\dim \ker a + \dim \operatorname{im} a = \dim V.$$

Чтобы проиллюстрировать это соотношение, рассмотрим три линейных преобразования плоскости: нулевое преобразование  $a_0$ , проекцию  $a_1$  на прямую  $V_1$  вдоль прямой  $V_2$  и поворот  $a_2$ .



6.2▷ Найдите ядро и образ каждого преобразования. Убедитесь, что  $\ker a_2 \subset \ker a_1 \subset \ker a_0$ .

Похожим способом определяют **ядро** и **образ** гомоморфизма групп  $\varphi : G \rightarrow H$ :

$$\ker \varphi = \varphi^{-1}(e_H) \subset G \quad \text{im } \varphi = \varphi(G) \subset H.$$

6.3▷ Покажите, что  $\ker \varphi$  и  $\text{im } \varphi$  являются подгруппами групп  $G$  и  $H$ , соответственно.

6.4▷ Найдите три гомоморфизма  $\varphi_i : S_3 \rightarrow S_3$ , таких, что  $\ker \varphi_2 \subset \ker \varphi_1 \subset \ker \varphi_0$ .

## 6.2 Эквивалентность неприводимых представлений

6.5▷ Повторите определения инвариантного подпространства, неприводимого представления и  $G$ -морфизма.

**Лемма 6.1** (Лемма Шура). Пусть  $(r_1, V)$  и  $(r_2, W)$  — неприводимые представления группы  $G$ , а линейное отображение  $\tau : V \rightarrow W$  является  $G$ -морфизмом. Тогда либо  $\tau = 0$ , либо  $\tau$  — изоморфизм.

*Доказательство.* Как нетрудно проверить, ядро и образ отображения  $\tau$  являются инвариантными подпространствами. Поскольку представления неприводимые, возможны два случая:

1.  $\ker \tau = V, \quad \text{im } \tau = \mathbf{0}_W \quad \Rightarrow \quad \tau = 0.$
2.  $\ker \tau = \mathbf{0}_V, \quad \text{im } \tau = W \quad \Rightarrow \quad \tau$  — изоморфизм.

□

6.6 ▷ Покажите, что ядро и образ  $\tau$  являются инвариантными подпространствами.

Если изоморфизм существует, то представления являются эквивалентными:  $r_1 \sim r_2$ . В противном случае  $r_1 \not\sim r_2$ .

**Лемма 6.2** (Следствие леммы Шура). *Если  $(r_1, V) \sim (r_2, W)$ , то ненулевой  $G$ -морфизм  $\tau : V \rightarrow W$  единственен с точностью до умножения на число. В частности, если  $r_1 = r_2$  и  $V = W$ , он пропорционален тождественному преобразованию  $\text{id}_V$ .*

*Доказательство.* Пусть  $a : V \rightarrow W$  — другой невырожденный  $G$ -морфизм. Рассмотрим оператор  $\tau^{-1}a$ . Пусть  $\mathbf{v}$  — его собственный вектор с собственным значением  $\lambda$ . Тогда

$$\tau^{-1}a\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad (a - \lambda\tau)\mathbf{v} = \mathbf{0}_W.$$

Оператор в круглых скобках является  $G$ -морфизмом и имеет нетривиальное ядро. Следовательно, по лемме Шура он равен нулю, и  $a = \lambda\tau$ .

Пусть теперь представления совпадают, то есть  $r_1 = r_2$  и  $V = W$ . Очевидно, что тождественное преобразование  $\tau = \text{id}_V$  является  $G$ -морфизмом. Следовательно, любой  $G$ -морфизм  $a : V \rightarrow V$  имеет вид  $a = \lambda \text{id}_V$ .  $\square$

6.7 ▷ Почему оператор в круглых скобках равен нулю?

При доказательстве следствия мы воспользовались тем, что у некоторого линейного преобразования есть собственный вектор. Для действительных векторных пространств это не обязательно так (рассмотрите поворот плоскости). С другой стороны, собственные векторы всегда есть у преобразований **комплексного векторного пространства**, в котором числовые множители  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Чтобы пользоваться следствием леммы Шура, далее мы будем считать все векторные пространства (скаляры, компоненты векторов, матричные элементы) комплексными.

Более того, оказывается, что линейные преобразования, входящие в представление, всегда можно сделать унитарными путем подбора скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . В дальнейшем мы будем предполагать унитарность операторов представлений  $r(g)$  и их матриц:

$$\langle r(g)\mathbf{v}, r(g)\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \quad R(g)^{-1} = \overline{R(g)^T}.$$

Здесь  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  — векторы в пространстве представления,  $R(g)$  — матрица оператора представления,  $T$  означает транспонирование, а черта над символом — комплексное сопряжение.

### 6.3 Соотношения ортогональности

С помощью леммы Шура мы докажем соотношения ортогональности для элементов матриц неприводимых представлений. Эти соотношения, в свою очередь, лежат в основе методов разложения некоторого представления на неприводимые компоненты.

Напомним, что пространство всех линейных отображений  $\text{Hom}(V, W)$  можно рассматривать как группу по сложению. На этом множестве несложно также определить умножение на число, и задать таким образом структуру векторного пространства.

Пусть снова  $(r_1, V)$  и  $(r_2, W)$  — неприводимые представления группы  $G$ . Зададим ее представление  $r_H$  на векторном пространстве  $H = \text{Hom}(V, W)$  следующим образом:

$$r_H(g)s_0 = r_2(g)s_0r_1(g)^{-1},$$

где  $g \in G$ , а  $s_0 \in H$  — некоторое линейное преобразование.

6.8 ▷ Проверьте, что  $r_H$  удовлетворяет определению представления.

Определим следующее линейное преобразование:

$$s = \frac{1}{|G|} \sum_g r_H(g)s_0,$$

где  $|G|$  — число элементов группы, или ее **порядок**. Независимо от выбора  $s_0$ , преобразование  $s$  является  $G$ -морфизмом. Чтобы это доказать, достаточно подействовать оператором представления  $r_H(h)$ , где  $h \in G$ , на отображение  $s$ .

6.9 ▷ Найдите, чему равно  $r_H(h)s$ . Для этого вам пригодится новая переменная суммирования  $k = hg$ . Покажите, что суммирование по  $k$  эквивалентно суммированию по  $g$ . Убедитесь, что  $s$  является  $G$ -морфизмом.

Пусть в пространствах  $V$  и  $W$  выбраны базисы. Обозначим  $R^1, R^2, S^0$  и  $S$  матрицы операторов представлений и линейных отображений. Применим к отображению  $s$  лемму Шура для двух случаев:

1. Представления не эквивалентны:  $r_1 \not\approx r_2$ . В этом случае  $s = 0$ . Для элементов матриц получим:

$$0 = S_{\alpha\mu} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (r_2(g)s_0r_1(g)^{-1})_{\alpha\mu} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\beta\gamma} R_{\alpha\beta}^2(g) S_{\beta\gamma}^0 [R^1(g)^{-1}]_{\gamma\mu}$$

2. Представления совпадают:  $r_2 = r_1$ ,  $W = V$ . Тогда  $s = \lambda \text{id}_V$ .

6.10 ▷ Покажите, что  $\lambda = \frac{1}{n} \text{tr } s_0$ , где  $n = \dim V$ . Для этого нужно взять след от обеих частей последнего равенства.

Получим:

$$\left( \frac{\text{tr } s_0}{n} \text{id}_V \right)_{\alpha\mu} = \frac{1}{n} \left( \sum_{\beta} S_{\beta\beta}^0 \right) \delta_{\alpha\mu} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G \\ \beta\gamma}} R_{\alpha\beta}^1(g) S_{\beta\gamma}^0 [R^1(g)^{-1}]_{\gamma\mu}$$

Поскольку уравнения выполняются для любого линейного отображения  $s_0$ , они принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\beta\gamma} R_{\alpha\beta}^2(g) [R^1(g)^{-1}]_{\gamma\mu} &= 0 \\ \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\beta\gamma} R_{\alpha\beta}^1(g) [R^1(g)^{-1}]_{\gamma\mu} &= \frac{1}{n} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma} \end{aligned}$$

Так как матрицы представлений — унитарные, для их элементов справедливо

$$[R^{-1}]_{\gamma\mu} = \overline{R}_{\mu\gamma}.$$

Заметим, что матричные элементы  $R_{\alpha\beta}^i(g)$  задают отображение

$$R_{\alpha\beta}^i : G \rightarrow \mathbb{C},$$

то есть являются **функциями на группе**. Функции можно складывать друг с другом и умножать на числа. Несложно проверить, что функции на группе образуют векторное пространство  $\mathcal{F}(G)$ . Определим в этом пространстве скалярное произведение:

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}.$$

Теперь соотношения ортогональности можно записать в компактной форме:

$$(R_{\alpha\beta}^i, R_{\mu\gamma}^j) = \frac{1}{n_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}.$$

## 7 Характеры представлений

Пусть представление  $(r, V)$  содержит в себе два неприводимых представления,  $r = r_1 \oplus r_2$ . Тогда, если все базисные векторы лежат в инвариантных подпространствах, матрицы операторов представления будут блочно-диагональными:

$$R(g) = \begin{pmatrix} R^1(g) & 0 \\ 0 & R^2(g) \end{pmatrix}.$$

Такой базис называют **согласованным** с разбиением  $V$  на инвариантные подпространства  $V_1 \oplus V_2$ . Как правило, базис, используемый в формулировке физической задачи, не является согласованным. Это значит, что все элементы матриц представления могут быть отличны от нуля. Но оказывается, что даже в этом случае по виду матриц можно определить структуру представления. Для этого достаточно найти сумму диагональных элементов каждой матрицы.

### 7.1 Определение и свойства

**Характером**  $\chi_r$  представления  $r$  называют функцию на группе, равную следу отображения  $r(g)$ :

$$\chi_r(g) = \text{tr } r(g) \equiv \sum_i R_{ii}(g).$$

Напомним, что след матрицы не зависит от выбора базиса, поэтому можно говорить о следе отображения.

Перечислим некоторые свойства характеров:

1. Характер прямой суммы представлений:  $\chi_{r_1 \oplus r_2} = \chi_{r_1} + \chi_{r_2}$
2. Характер сопряженного элемента:  $\chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$
3. Характер единичного элемента:  $\chi(e) = \dim V$
4. Характер обратного элемента:  $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

7.1▷ Докажите свойства характеров. Для свойства 1 запишите матрицы в согласованном базисе. Для свойства 2 воспользуйтесь тем, что  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . Для свойства 4 перейдите в базис, в котором матрица  $R(g)$  диагональна.

## 7.2 Ортогональность характеров

### 7.2.1 Соотношения ортогональности

С помощью соотношений ортогональности для матричных элементов найдем скалярное произведение характеров неприводимых представлений:

$$\begin{aligned}r_1 \approx r_2 : \quad (\chi_1, \chi_2) &= \sum_{\alpha\beta} (R_{\alpha\alpha}^1(g), R_{\beta\beta}^2(g)) = 0 \\r_1 = r_2 : \quad (\chi_1, \chi_1) &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha\beta} (R_{\alpha\alpha}^1(g), R_{\beta\beta}^1(g)) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}^2 = 1\end{aligned}$$

Мы получили, что характеры неэквивалентных неприводимых представлений ортогональны (как векторы в пространстве функций на группе). Норма характера неприводимого представления  $\|\chi\|^2 = 1$ . Таким образом, характеры неприводимых представлений образуют ортонормированный набор функций:

$$(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}.$$

### 7.2.2 Структура представления

Пусть некоторое представление задано как прямая сумма неприводимых представлений:

$$r = \bigoplus_i r_i^{\oplus m_i}.$$

Обозначим  $\chi$  характер представления  $r$ . Поскольку характер прямой суммы представлений равен сумме характеров,

$$\chi = \sum_i m_i \chi_i.$$

Найдем скалярное произведение  $\chi$  с характером  $i$ -го неприводимого представления:

$$(\chi_i, \chi) = m_i.$$

Итак, чтобы найти кратность  $m_i$ , с которой неприводимое представление  $r_i$  входит в состав  $r$ , достаточно вычислить скалярное произведение их характеров.

В качестве примера рассмотрим характеры неприводимых представлений группы  $S_2$ , тривиального  $\chi_1$  и знакового  $\chi_s$ . Поскольку представления одномерные, они задаются матрицами  $1 \times 1$ , и след равен самим

матрицам. Пусть представление  $r$  группы  $S_2$  на двумерном пространстве  $V$  задано следующими матрицами:

$$R(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\sigma) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

7.2▷ Определите кратности  $m_1$  и  $m_s$ , вычислив скалярные произведения характера представления  $r$  с характерами  $\chi_1$  и  $\chi_s$ .

### 7.3 Свойства неприводимых представлений

С помощью теории характеров мы получим полезные свойства неприводимых представлений. Это позволит доказать, что у групп  $S_2$  и  $S_3$  нет неприводимых представлений, отличных от рассмотренных ранее.

#### 7.3.1 Критерий неприводимости

7.3▷ Покажите, что скалярное произведение характера некоторого представления  $r$  с собой равно

$$(\chi_r, \chi_r) = \sum_i m_i^2,$$

где  $m_i$  — кратности, с которыми в  $r$  входят неприводимые представления.

Такая сумма может быть равна единице только в том случае, если содержит ровно одно отличное от нуля слагаемое, равное единице. Мы получили критерий того, является ли некоторое представление неприводимым:

$$(\chi_r, \chi_r) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{представление } r \text{ является неприводимым.}$$

#### 7.3.2 Размерности неприводимых представлений

Найдем структуру **регулярного представления**  $r_G$  группы  $G$ , заданного следующим образом. Пусть  $V$  — абстрактное векторное пространство размерности  $|G|$ . Проиндексирем базисные векторы элементами группы:  $\{\mathbf{e}_g, g \in G\}$ . Зададим представление как действие элементов группы на базисные векторы:

$$r_G(g)\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_{gh}.$$

7.4▷ Проверьте, что  $r_G$  является представлением.



Наша задача — найти характер  $\chi_G$  регулярного представления. Заметим, что элементы матриц представления равны 0 или 1. Диагональный элемент матрицы  $R_G(g)$  равен 1, если

$$1 = [R_G(g)]_{hh} = (r_G(g)\mathbf{e}_h)_h \Leftrightarrow r_G(g)\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_h.$$

7.5▷ Закончите рассуждение. Покажите, что характер  $\chi_G(g)$  равен нулю на всех элементах группы, кроме единичного, для которого

$$\chi_G(e) = \dim V = |G|.$$

Найдем, сколько раз каждое неприводимое представление  $r_i$  содержится в регулярном представлении:

$$(\chi_i, \chi_G) = \frac{1}{|G|} \chi_i(e) \overline{\chi_G(e)} = \dim V_i \equiv n_i.$$

Итак, неприводимое представление  $r_i$  содержится в регулярном с кратностью, равной его размерности. Отсюда следует, что сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна порядку группы:

$$\sum_i n_i^2 = |G|,$$

что является существенным ограничением на размерности неприводимых представлений и их количество. Отметим без доказательства, что число неприводимых представлений группы равно числу классов сопряженных элементов.

7.6▷ Докажите последнюю формулу, вычислив  $(\chi_G, \chi_G)$  двумя способами.

## 7.4 Таблицы характеров

### 7.4.1 Группа $S_3$

Найдем характер двумерного неприводимого представления  $r_2$  группы  $S_3$ . Напомним, что оно содержит повороты на угол  $\frac{2\pi}{3}$  и отражения относительно высот правильного треугольника.

7.7▷ Запишите матрицу поворота на угол  $\alpha$  и найдите ее след.

7.8▷ Чему равен след любого отражения плоскости? (Найдите удобный базис.)

В группе  $S_3$  есть три класса сопряженных элементов, мы обозначим их  $[e]$ ,  $[R]$  и  $[\sigma]$ . Поскольку характер не меняется при сопряжении, функции  $\chi(g)$  постоянны на классах сопряженных элементов. Таким образом, вся информация о характерах неприводимых представлений группы может быть представлена в виде следующей **таблицы характеров**:

$6S_3$	$[e]$	$2[R]$	$3[\sigma]$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_s$	1	1	-1
$\chi_2$	2	-1	0

Число у названия группы равно ее порядку, а числа у классов — количеству элементов в них. С помощью таблицы несложно проверить свойства неприводимых представлений, рассмотренные выше.

7.9 ▷ Проверьте, что эти представления являются неприводимыми.

7.10 ▷ Докажите, что у группы  $S_3$  нет других неприводимых представлений.

### 7.4.2 Группа $S_2$

Пусть  $r$  — некоторое представление группы  $G$ , а  $H$  — ее подгруппа. Из  $r$  легко получить представление группы  $H$ : достаточно оставить в наборе преобразований  $r = \{r(g), g \in G\}$  только те, которые соответствуют элементам подгруппы. Такое представление называют **ограничением** представления  $r$  группы  $G$  на подгруппу  $H$  и обозначают

$$r \downarrow H = \{r(g), g \in H\}.$$

Например, рассмотрим группу  $S_2 = \{e, \sigma\}$  как подгруппу в  $S_3$ :

$$S_2 = \{e, \sigma_1\} \subset S_3.$$

Ограничением двумерного представления  $(r_2, V)$  на подгруппу  $S_2$  будет набор из двух преобразований плоскости:

$$r_2 \downarrow S_2 = \{\text{id}_V, r_2(\sigma_1)\}.$$

Проведем подобную процедуру для всех неприводимых представлений группы  $S_3$ . Оставляя в ее таблице характеров только записи, относящиеся к элементам группы  $S_2$ , получим:

$2S_2$	$[e]$	$[\sigma]$
$\chi_1$	1	1
$\chi_s$	1	-1
$\chi_2 \downarrow S_2$	2	0

Поскольку  $2 = 1^2 + 1^2$ , у группы  $S_2$  есть только два неприводимых представления, и оба они одномерные. Двумерное представление  $\chi_2 \downarrow S_2$  является приводимым, так как  $\frac{1}{2}(2^2 + 0^2) \neq 1$ .

7.11 ▷ Представьте третью строку таблицы как линейную комбинацию первых двух. Найдите, какие неприводимые представления содержатся в  $\chi_2 \downarrow S_2$ .

### 7.4.3 Группа $\mathbb{Z}_3$

Выберем теперь в  $S_3$  другую подгруппу — набор всех поворотов треугольника, образующих **циклическую группу третьего порядка**

$$\mathbb{Z}_3 = \{e, R_1, R_2\}.$$

В ней нет отражений, и повороты не являются сопряженными элементами. Ограничивая представления группы  $S_3$ , получим таблицу:

$3\mathbb{Z}_3$	$[e]$	$[R_1]$	$[R_2]$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_2 \downarrow \mathbb{Z}_3$	2	-1	-1

7.12 ▷ Сколько у группы  $\mathbb{Z}_3$  неприводимых представлений и какова их размерность? Является ли  $\chi_2 \downarrow \mathbb{Z}_3$  неприводимым?

На первый взгляд, такой ответ противоречит здравому смыслу: у поворотов плоскости нет инвариантных подпространств, и представление  $\chi_2 \downarrow \mathbb{Z}_3$  должно быть неприводимым. Дело в том, что здесь проявились отличия между действительными и комплексными представлениями. Напомним, что теория характеров построена для комплексных векторных пространств.

Рассмотрим матрицу поворота на угол  $\alpha$

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

как матрицу преобразования комплексного двумерного пространства  $V$  (если выбран базис, то  $V \simeq \mathbb{C}^2$ ).

7.13 ▷ Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы  $R(\alpha)$ .

Так как собственные векторы не зависят от  $\alpha$ , они задают инвариантные подпространства для всех поворотов. В этих подпространствах действуют одномерные представления группы  $\mathbb{Z}_3$ , заданные собственными значениями. Таким образом, таблица характеров неприводимых представлений имеет вид:

$3\mathbb{Z}_3$	$[e]$	$[R_1]$	$[R_2]$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_+$	1	$e^{i\alpha}$	$e^{-i\alpha}$
$\chi_-$	1	$e^{-i\alpha}$	$e^{i\alpha}$

Здесь  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ . Теперь противоречий с теорией характеров нет.

7.14 ▷ С помощью таблицы характеров найдите, какие неприводимые представления входят в  $\chi_2 \downarrow \mathbb{Z}_3$ .

### 7.4.4 Группа симметрии ромба $V_4$

Найдем таблицу характеров неприводимых представлений группы симметрии ромба  $V_4$ , также известной как группа Кляйна четвертого порядка. В группу, помимо единичного элемента, входят два отражения относительно диагоналей ромба и их композиция — инверсия, или поворот на  $\pi$ .

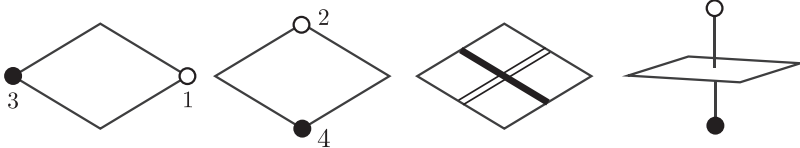
7.15 ▷ Найдите классы сопряженных элементов в этой группе.

Единственный способ представить порядок группы как сумму квадратов размерностей неприводимых представлений имеет вид

$$4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2.$$

7.16 ▷ Почему формула  $4 = 2^2$  не подходит?

Чтобы найти представления, рассмотрим действие группы на элементах ромба. Для этого нам нужно найти такие точки (или множества точек), которые переходят друг в друга под действием всех преобразований симметрии ромба. Например, группа меняет местами точки 1 и 3, то есть каждому элементу  $V_4$  можно сопоставить перестановку из  $S_2$ . По построению, таблицы умножения групп будут согласованы, и мы получаем гомоморфизм  $\varphi_{13} : V_4 \rightarrow S_2$ .



Напомним, что представление группы на пространстве  $V$  можно рассматривать как гомоморфизм  $G \rightarrow GL(V)$  в группу невырожденных линейных преобразований  $V$ . Пусть  $(r_s, V)$  — знаковое представление группы  $S_2$ . Рассмотрим композицию:

$$V_4 \xrightarrow{\varphi_{13}} S_2 \xrightarrow{r_s} GL(V).$$

Поскольку композиция гомоморфизмов также является гомоморфизмом,  $r_{13} = r_s \circ \varphi_{13}$  задает одномерное представление группы  $V_4$ .

Также в качестве множества, на котором действует группа, можно рассмотреть пару точек 2 и 4 и пару отрезков, соединяющих центры сторон. Действие на отрезках эквивалентно действию на концах перпендикуляра к ромбу, заданному поворотами конструкции на правом рисунке. Получаем следующую таблицу характеров:

$4V_4$	$[e]$	$[\sigma_1]$	$[\sigma_2]$	$[R]$
$\chi_1$	1	1	1	1
$\chi_{13}$	1	-1	1	-1
$\chi_{24}$	1	1	-1	-1
$\chi_{\perp}$	1	-1	-1	1

7.17 ▷ Найдите подобным способом таблицу характеров неприводимых представлений группы симметрии квадрата  $D_4$ .

## 8 Проекционные операторы

Напомним, что структура представления  $(r, V)$  определяется кратностью  $m_i$ , с которой неприводимые представления  $r_i$  входят в  $r$ , а также разбиением  $V$  на их инвариантные подпространства:

$$V = \bigoplus_i V_i^{\oplus m_i}.$$

Характеры позволяют найти  $m_i$ , но ничего не говорят о расположении подпространств  $V_i \subset V$ . Эту информацию можно получить с помощью проекционных операторов.

### 8.1 Определение и примеры

Начнем с простого примера. Пусть на плоскости действует представление группы  $S_2$ :

$$r(\sigma)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \quad r(\sigma)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1.$$

8.1▷ Запишите матрицы представления и определите, какие неприводимые представления в нем содержатся.

Попробуем теперь найти инвариантные подпространства. Поскольку  $r(\sigma)$  меняет векторы местами, имеет смысл составить их симметричную и антисимметричную комбинации.

8.2▷ Примените  $r(\sigma)$  к сумме и разности базисных векторов.

Итак,  $r = r_1 \oplus r_s$ , и мы нашли, как инвариантные подпространства  $V_1$  и  $V_s$  вложены в пространство представления  $V$ .

В более сложных случаях для этого можно воспользоваться **проекционными операторами**. Пусть  $(r, V)$  — представление группы  $G$ . Определим следующий оператор на  $V$ :

$$P_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \overline{\chi_i(g)} r(g),$$

где  $\chi_i$  — характер неприводимого представления  $r_i$ , а  $n_i$  — его размерность. Мы покажем, что для любого  $\mathbf{v} \in V$  результат действия  $P_i\mathbf{v}$  будет лежать в подпространстве неприводимого представления  $V_i$ .

8.3▷ Найдите проекцию  $P_s\mathbf{e}_1$  на подпространство знакового представления в примере выше.

8.4▷ Рассмотрите двумерное представление группы  $\mathbb{Z}_3$ , заданное как набор поворотов плоскости. Найдите проекцию  $P_+\mathbf{e}_1$  на подпространство представления  $\chi_+$ .

## 8.2 Доказательство формулы для $P_i$

Чтобы доказать, что  $P_i$  действительно проецирует на  $V_i$ , нам понадобится следующий результат. Пусть  $(r_i, V_i)$  — неприводимое представление, а  $f$  — функция на группе, постоянная на классах сопряженных элементов (или **классовая функция**). Определим оператор  $r_i^f$ , действующий на  $V_i$ :

$$r_i^f = \frac{n_i}{|G|} \sum_g f(g) r_i(g).$$

Тогда

$$r_i^f = (f, \overline{\chi_i}) \text{id}_{V_i}.$$

8.5 ▷ Покажите, что  $r_i^f$  является  $G$ -морфизмом. Для этого вычислите произведение  $r_i(h) r_i^f r_i(h)^{-1}$ . Перейдите к новой переменной  $k = hgh^{-1}$  и воспользуйтесь тем, что  $f$  — классовая функция.

8.6 ▷ По следствию леммы Шура,  $r_i^f = \lambda \text{id}_{V_i}$ . Найдите значение  $\lambda$ , взяв след от последнего равенства.

Теперь рассмотрим оператор  $P_i$ , действующий в пространстве  $V$  представления  $r$  общего вида:

$$P_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \overline{\chi_i(g)} \left( \bigoplus_j r_j^{\oplus m_j} \right) (g).$$

Меняя местами суммирование по группе и прямую сумму представлений, получим в каждом подпространстве оператор вида  $r_j^f$ , где  $f = \overline{\chi_i}$ . Таким образом,

$$P_i = \bigoplus_j ((\overline{\chi_i}, \overline{\chi_j}) \text{id}_{V_i})^{\oplus m_j} = \bigoplus_j (\delta_{ij} \text{id}_{V_i})^{\oplus m_j}.$$

Итак, оператор  $P_i$  действует как тождественное преобразование на пространствах  $V_i$  и обращает в ноль все векторы других пространств  $V_j, j \neq i$ .

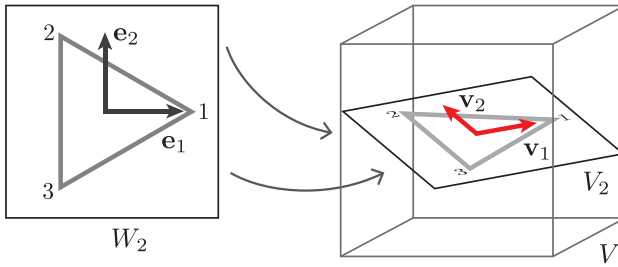
Заметим, что  $P_i$  является проекцией на пространство  $V_i^{\oplus m_i}$ , образованное всеми подпространствами, в которых действуют  $r_i$ . Дальнейшее разбиение на  $V_i$  не может быть задано однозначно. Например, вспомните представление  $r = r_s \oplus r_s$  группы  $S_2$  на плоскости: любая прямая, проходящая через начало координат, является инвариантным подпространством  $V_s$ .

## 8.3 Представления высокой размерности

Пусть в состав представления  $(r, V)$  группы  $S_3$  входит двумерное представление  $r_2$ , образованное симметриями правильного треугольника. Проекционный оператор  $P_2$  позволит определить, как плоскость  $V_2$  вложена

в  $V$ . Но для решения физических задач этого не всегда достаточно: необходимо также найти, как именно внутри плоскости  $V_2$  расположен правильный треугольник.

Для этого рассмотрим некоторую стандартную копию  $(r_2, W_2)$  двумерного представления. Выберем в пространстве  $W_2$  базис  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ . Мы знаем, как базисные векторы расположены относительно треугольника, и можем найти матрицы линейных преобразований  $r_2(g)$  в этом базисе. Оказывается, с помощью этой информации в пространстве  $V$  можно найти пару векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ , которые будут лежать в подпространстве  $V_2 \subset V$ , причем они будут расположены относительно треугольника так же, как и векторы  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  внутри стандартной копии.



Рассмотрим эту ситуацию в общем виде. Пусть  $(r_i, W_i)$  — стандартная копия неприводимого представления  $r_i$  с размерностью  $n_i > 1$ . Пусть в пространстве  $W_i$  задан базис  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ , и  $R^i(g)$  являются матрицами операторов  $r_i(g)$  в этом базисе:

$$r_i(g)\mathbf{e}_\alpha = \sum_{\beta} \mathbf{e}_\beta R_{\beta\alpha}^i(g).$$

Наша задача — найти внутри любого представления  $(r, V)$ , содержащего  $(r_i, V_i)$ , набор векторов  $\{\mathbf{v}_\alpha\}$ , которые преобразуются под действием  $r$  так же, как векторы  $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ .

Определим на пространстве  $W_i$  следующий оператор:

$$P_{\alpha\beta}^i = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \overline{R_{\alpha\beta}^i(g)} r_i(g).$$

Посмотрим, как он действует на базисные векторы:

$$P_{\alpha\beta}^i \mathbf{e}_\gamma = \delta_{\beta\gamma} \mathbf{e}_\alpha.$$



8.7▷ Получите эту формулу с помощью соотношений ортогональности для матричных элементов.

Таким образом, оператор  $P_{\alpha\beta}^i$  переводит вектор  $\mathbf{e}_\beta$  в вектор  $\mathbf{e}_\alpha$  и равно нулю на всех остальных базисных векторах. В частности, оператор  $P_{\alpha\alpha}^i$  проецирует любой вектор в  $W_i$  на подпространство, заданное базисным вектором  $\mathbf{e}_\alpha$ . Отметим, что мы определили оператор  $P_{\alpha\beta}^i$  с помощью матричных элементов представления внутри стандартной копии  $W_i$ . Затем мы рассмотрели действие  $P_{\alpha\beta}^i$  на базисные векторы в этом же пространстве.

Похожим образом можно задать оператор на пространстве  $(r, V)$ :

$$P_{\alpha\beta}^i = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \overline{R_{\alpha\beta}^i(g)} r(g).$$

Как и раньше,  $P_{\alpha\beta}^i$  является суммой линейных преобразований с числовыми коэффициентами. В качестве множителей по-прежнему выступают элементы матриц представления в стандартной копии. Но линейные преобразования теперь берутся из представления  $r$  на пространстве  $V$ .

Пусть  $\mathbf{v} \in V$  — такой вектор, что проекция  $P_{\alpha\alpha}^i \mathbf{v}$  отлична от нуля. Посмотрим, как на нее действует оператор  $r(h)$  для некоторого элемента  $h \in G$ :

$$r(h)(P_{\alpha\alpha}^i \mathbf{v}) = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \overline{R_{\alpha\alpha}^i(g)} r(hg)$$

8.8▷ Перейдите к новой переменной суммирования  $k = hg$  и представьте элемент  $R_{\alpha\alpha}^i(h^{-1}k)$  как результат умножения матриц.

Окончательно получаем:

$$r(h)(P_{\alpha\alpha}^i \mathbf{v}) = \sum_\beta (P_{\beta\alpha}^i \mathbf{v}) R_{\beta\alpha}^i(h).$$

Таким образом, мы нашли набор векторов в пространстве представления  $r$

$$\{P_{11}^i \mathbf{v}, P_{21}^i \mathbf{v}, \dots\} \in V_i \subset V,$$

которые преобразуются под действием группы, как базисные векторы в стандартной копии

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\} \in W_i.$$

## 9 Представления на пространствах функций

Многие физические системы можно описать с помощью линейных уравнений, или линейных операторов на некотором пространстве. Элементы этого пространства соответствуют состояниям системы. Например, моды механической колебательной системы живут в пространстве смещений, а состояния квантовой системы — в гильбертовом пространстве волновых функций. Если система обладает симметрией, то на векторном пространстве ее состояний действует представление группы симметрии.

В этом разделе мы познакомимся с математическим прототипом такой ситуации. Мы увидим, как действие группы на множестве порождает представление группы на векторном пространстве функций, заданных на этом множестве.

### 9.1 Скалярные функции

Пусть группа  $G$  действует на множестве  $M$ . Напомним, что все функции на  $M$  образуют векторное пространство  $\mathcal{F}(M)$ :

$$\{f : M \rightarrow \mathbb{C}\} = \mathcal{F}(M).$$

Зададим **представление  $G$  на пространстве функций** следующим образом:

$$[r_M(g)f](m) = f(g^{-1} \cdot m).$$

Выражение в квадратных скобках — функция, полученная из  $f$  в результате действия  $r_M(g)$ .

9.1▷ Проверьте, что  $r_M$  является представлением. Найдите, чему равно значение  $[r_M(h)\psi](m)$ , где  $\psi = [r_M(g)f]$ .

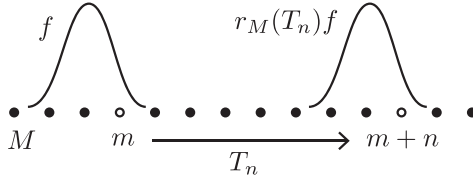
Например, пусть  $M$  является множеством целых чисел. Определим на  $M$  действие группы  $G = (\mathbb{Z}, +)$  как набор трансляций. Элемент  $T_n \in G$  действует на точку  $m \in M$  так:

$$T_n \cdot m = m + n.$$

Теперь посмотрим, как группа действует на функцию  $f$ :

$$[r_M(T_n)f](m) = f((T_n)^{-1} \cdot m) = f(T_{-n} \cdot m) = f(m - n).$$

Таким образом, под действием элемента группы, сдвигающего точки направо, функция смещается в ту же сторону.



Как и любой вектор, функцию  $f$  можно записать в виде линейной комбинации **базисных функций**  $e_m$ :

$$f = \sum_m e_m f(m).$$

Функция  $e_m$  равна единице на элементе  $m$  и равна нулю на всех остальных элементах множества  $M$ , то есть  $e_m(n) = \delta_{mn}$ .

Из разложения по базису видно, что значение функции  $f(m)$  в некоторой точке имеет смысл компоненты вектора  $f$ . Следовательно, определение  $r_M(g)$  выше говорит о преобразовании компонент векторов. Посмотрим теперь, как оператор  $r_M(g)$  действует на базисные векторы:

$$r_M(g)e_m = e_{g \cdot m}.$$

9.2▷ Докажите эту формулу. Какой вид имеют матрицы представления  $r_M$  в базисе  $\{e\}$ ?

9.3▷ Убедитесь, что значение характера  $\chi_M(g)$  представления  $r_M$  равно числу неподвижных точек, для которых  $g \cdot m = m$ .

9.4▷ Регулярное представление  $r_G$  группы можно интерпретировать как представление в пространстве функций  $\mathcal{F}(G)$ . Каким действием оно порождается?

## 9.2 ▷ Практикум: представление группы $S_3$

Группа  $S_3$  действует на множестве из трех точек  $M = \{1, 2, 3\}$  перестановками. Обозначим  $\{e_1, e_2, e_3\}$  базис в пространстве функций на  $M$ . Цель этого задания — найти структуру представления  $(r_M, \mathcal{F}(M))$  с помощью характеров и проекционных операторов. Воспользуйтесь обозначениями для элементов группы из раздела 2.3.

### 9.2.1 Неприводимые представления

1. Найдите характер представления  $r_M$ .
2. С помощью таблицы характеров определите, какие неприводимые представления группы  $S_3$  содержатся в  $r_M$ .

### 9.2.2 Инвариантные подпространства

1. Найдите одномерное инвариантное подпространство с помощью проекционного оператора. Выберите в нем некоторый вектор.
2. Запишите матрицы двумерного неприводимого представления  $(r_2, W_2)$  группы  $S_3$ . Выберите базисные векторы, как показано на рисунке в разделе 8.3.
3. Действуя на вектор  $e_1 \in \mathcal{F}(M)$  проекционными операторами, найдите два вектора, которые преобразуются, как базисные векторы  $\{e_1, e_2\}$  неприводимого представления:

$$\{P_{11}^2 e_1, P_{21}^2 e_1\}.$$

4. Нормируйте три полученных вектора  $\{b, b_1, b_2\}$  на единицу. Убедитесь, что они ортогональны.

### 9.2.3 Переход в хороший базис

1. Составьте матрицу  $B$  перехода из базиса  $\{e\}$  в базис  $\{b\}$ . Для этого запишите рядом три столбца компонент векторов  $\{b\}$ .
2. Запишите обратную матрицу  $B^{-1}$ . Поскольку  $B$  ортогональная, для этого достаточно ее транспонировать.
3. Найдите матрицу какого-либо оператора представления  $r_M$  в новом базисе, например,  $r_M(\sigma_2)$ :

$$B^{-1}R_M(\sigma_2)B,$$

где  $R_M(\sigma_2)$  — матрица оператора в базисе  $\{e\}$ .

## 9.3 Векторные функции. Пространство смещений

Выше мы рассмотрели скалярные функции, которые сопоставляют каждой точке множества  $M$  число. В теории колебаний естественным образом возникают **векторные функции**, принимающие значения в векторном пространстве.

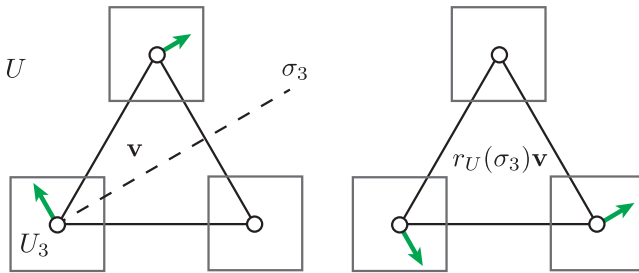
Рассмотрим систему из трех грузов, лежащих в одной плоскости и соединенных одинаковыми пружинами. Группа симметрии правильного треугольника  $D_3$  действует на множестве грузов перестановками. Нас интересует представление группы, которое возникает в **пространстве смещений** грузов из положения равновесия. Обозначим это пространство  $U$ .

Смещение каждого груза задается двумерным вектором, причем смещения разных грузов не зависят друг от друга. Таким образом, пространство смещений можно представить как прямую сумму:

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3,$$

где  $U_i$  — пространство смещений  $i$ -го груза. Вектор  $\mathbf{v} \in U$  описывает отклонение всей системы из положения равновесия и содержит три векторные компоненты  $\mathbf{v}_i \in U_i$ . Размерность пространства смещений  $\dim U = 6$ .

Действие группы симметрии на элемент  $U$  определяется из физических соображений: отклоним грузы из положения равновесия на вектор  $\mathbf{v} \in U$  и применим к системе преобразование симметрии  $g \in D_3$ . В результате получится новое смещение  $r_U(g)\mathbf{v}$ :



Отметим, что оператор  $r_U$  можно представить как набор линейных отображений между векторными пространствами смещений отдельных грузов  $U_i$ . Характер  $\chi(g)$  будет определяться суммой следов отображений  $U_i \rightarrow U_i$  для грузов, остающихся на месте под действием  $g$ .

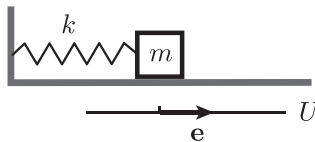
9.5▷ Не выписывая матрицы, найдите характер представления  $(r_U, U)$  для системы, изображенной на рисунке.

## 10 Колебания симметричных систем

Если физическая задача обладает симметрией, теория групп позволяет упростить поиск решений и классифицировать их по типу симметрии. В некоторых случаях задача может быть полностью решена методами теории групп (прямое решение исходных уравнений, как правило, намного сложнее). В этом разделе мы увидим, как теория характеров, проекционные операторы и лемма Шура применяются в контексте колебательных систем со многими степенями свободы.

### 10.1 Оператор ускорения и нормальные моды

Вспомним, как решается задача о колебаниях груза массы  $m$  на пружине жесткости  $k$  (трение учитывать не будем).



Смещения груза из положения равновесия зададим с помощью вектора  $\mathbf{x}$ , лежащего в одномерном векторном пространстве  $U$  с базисом  $\mathbf{e}$ . Если колебания малые, по закону Гука сила будет пропорциональна смещению с обратным знаком:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}.$$

По закону Ньютона,  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$ . Отсюда получаем **уравнение колебаний**:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{m}\mathbf{x},$$

то есть ускорение груза направлено против его смещения. Решением является гармоническая функция  $\mathbf{x} = \mathbf{e} \cos(\omega t)$ . Действительно, в этом случае

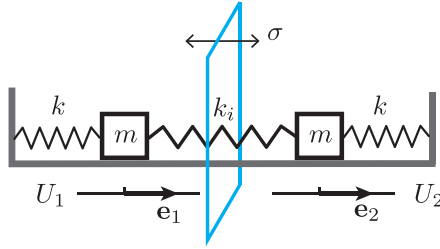
$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{e} = -\omega^2 \mathbf{x}.$$

Таким образом, частота колебаний равна  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , а общее решение имеет вид:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{e} \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $C$  — амплитуда, а  $\varphi$  — фаза колебаний.

Теперь рассмотрим более интересную систему с двумя степенями свободы, состоящую из двух грузов, связанных пружинами друг с другом и со стенками. В этом случае пространство смещений  $U = U_1 \oplus U_2$  двумерное, то есть для описания состояния системы нужно задать два вектора. Введем в пространстве смещений каждого груза базисный вектор, как показано на рисунке.



Запишем уравнения движения грузов:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k_i(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k_i(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Эту систему уравнений удобно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k + k_i & -k_i \\ -k_i & k + k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицы массы  $M$  и жесткости  $K$ :

$$M\ddot{\mathbf{x}} = -K\mathbf{x}.$$

Наконец, обозначим  $a = -M^{-1}K$  **оператор ускорения**:

$$\ddot{\mathbf{x}} = a\mathbf{x},$$

действующий на пространстве смещений  $U$ . Этот оператор переводит вектор смещения грузов в вектор ускорения, соответствующий их конфигурации. Поскольку оператор  $a$  может менять направление вектора, эволюция системы задается сложной траекторией в пространстве смещений  $U$ .

Попробуем найти решение по аналогии с одномерной задачей: пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{q} \cos(\omega t)$ , где  $\mathbf{q}$  — некоторый фиксированный вектор. Тогда:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad a\mathbf{q} = -\omega^2 \mathbf{q}.$$

Мы получили, что ускорение грузов пропорционально смещению с обратным знаком. Это значит, что система совершает гармонические колебания в одномерном подпространстве, заданном вектором  $\mathbf{q}$ . Кроме того, вектор  $\mathbf{q}$  является собственным вектором оператора ускорения  $a$  с собственным значением  $-\omega^2$ . Колебание, обладающее такими свойствами, называют **нормальной модой** системы, а частоту  $\omega$  — **нормальной частотой**. Любое колебание системы можно представить как линейную комбинацию нормальных колебаний:

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha} C_{\alpha} \mathbf{q}_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t + \varphi_{\alpha}).$$

Таким образом, задача о колебаниях системы со многими степенями свободы сводится к поиску собственных векторов и собственных значений оператора ускорения  $a$ .

## 10.2 Следствия симметрии

### 10.2.1 Симметрия связанных маятников

Будем называть **симметрией** колебательной системы преобразование, которое меняет местами грузы равной массы и пружины равной жесткости. Набор всех симметрий системы составляет ее **группу симметрии**. В нашем примере, симметриями системы является отражение в плоскости  $\sigma$  и тождественное преобразование. Группа симметрии  $C_2 = \{e, \sigma\}$  изоморфна группе перестановок двух точек  $S_2$ . Действие группы на множестве грузов задает ее представление  $r_U$  в пространстве смещений. Например,  $r_U(\sigma)\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$ .

10.1 ▷ Определите, какие неприводимые представления содержатся в  $r_U$ , и найдите инвариантные подпространства с помощью проекционных операторов.

### 10.2.2 Нормальные моды и лемма Шура

Рассмотрим эту ситуацию в чуть более общем виде. Пусть  $G$  является группой симметрии системы грузов, и ее представление  $r_U$  действует на пространстве смещений. Тогда оператор ускорения является  $G$ -морфизмом:

$$ar_U(g) = r_U(g)a \quad \forall g \in G.$$

Оператор ускорения зависит от значений масс и жесткости пружин, поэтому важно, чтобы операции симметрии переставляли одинаковые элементы.



10.2▷ Убедитесь, что если у двух грузов разные массы, это равенство нарушается.

Пусть в пространстве смещений действуют два разных неприводимых представления группы симметрии:  $U = V_1 \oplus V_2$ . Тогда любой вектор  $\mathbf{v} \in U$  можно единственным образом разложить на компоненты, лежащие в этих подпространствах:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \sum_j \mathbf{v}_j$ . Разложим подобным образом результат действия оператора ускорения на вектор  $\mathbf{v}$ :

$$a\mathbf{v} = \sum_i (a\mathbf{v})_i = \sum_{ij} (a\mathbf{v}_j)_i \equiv \sum_{ij} a_{ij} \mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Предпоследнее равенство является определением операторов  $a_{ij} : V_j \rightarrow V_i$ , действующих между подпространствами неприводимых представлений. Эти операторы являются элементами “матрицы”, действующей на столбец векторов  $\mathbf{v}_i$ .

По определению подпространств  $V_i$ , оператор представления  $r_U(g)$  принимает вид:

$$\begin{pmatrix} r_1(g) & 0 \\ 0 & r_2(g) \end{pmatrix}.$$

Из условия коммутативности оператора ускорения и операторов представления следует, что

$$a_{ij} r_j = r_i a_{ij}.$$

Тогда, по лемме Шура,  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , поскольку неприводимые представления различны. По следствию леммы Шура,  $a_{ii}$  пропорциональны тождественным преобразованиям. Таким образом,

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 \text{id}_{V_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \text{id}_{V_2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, любой вектор  $\mathbf{v}_i \in V_i$  является собственным вектором оператора ускорения с собственным значением  $\lambda_i$ . Физически, вектор  $\mathbf{v}_i$  задает нормальную моду колебаний с частотой  $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$ .

Если размерность  $n_i = \dim V_i > 1$ , в пространстве  $V_i$  можно выбрать  $n_i$  линейно независимых мод колебаний с одной частотой. В этом случае говорят об  $n_i$ -кратном **симметричном вырождении** нормальных частот.

Полученный результат несложно обобщить на случай

$$V = \bigoplus_i V_i^{\oplus m_i}$$

при условии, что каждое неприводимое представление входит в разложение не больше одного раза:  $m_i = 0, 1$ . Тогда все нормальные моды системы можно найти с помощью проекционных операторов.

### 10.2.3 Нормальные моды связанных маятников

Вернемся к системе из двух связанных маятников. Выберем базисные векторы

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

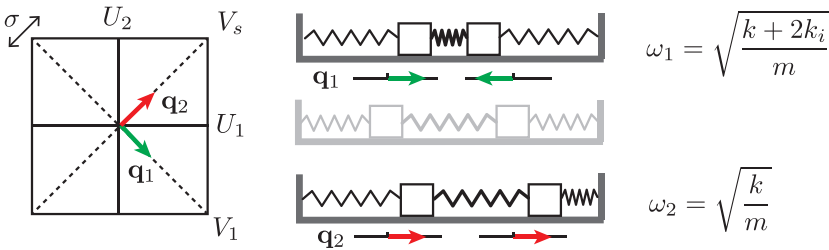
в подпространствах тривиального и знакового представления. Матрица перехода в базис  $\{\mathbf{q}\}$  имеет вид:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу оператора ускорения в новом базисе:

$$A = -\frac{1}{m} \begin{pmatrix} k + k_i & -k_i \\ -k_i & k + k_i \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}AB = -\frac{1}{m} \begin{pmatrix} k + 2k_i & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем формы и частоты нормальных колебаний:

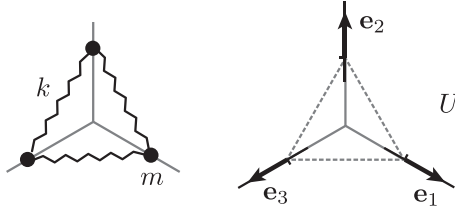


Мода  $\mathbf{q}_1$  принадлежит подпространству тривиального представления. Под действием отражения она переходит в себя. Вторая мода  $\mathbf{q}_2$  лежит в подпространстве знакового представления, и меняет знак при отражении. Грузы при этом смещаются в одну сторону, и центральная пружина остается расслабленной. Поэтому частота второй моды совпадает с частотой колебаний одного груза  $m$  на пружине жесткости  $k$ .

### 10.2.4 Три груза на стержнях

Рассмотрим задачу о колебаниях трех грузов, скользящих без трения по стержням и связанных пружинами. Вся система лежит в горизонтальной плоскости, и сила тяжести роли не играет. Симметрия системы описывается группой преобразований правильного треугольника  $D_3$ . Эта группа изоморфна группе перестановок трех точек  $S_3$ .

Введем базис в пространстве смещений  $U$ , как показано на рисунке:



При таком выборе базиса представление  $rU$  в пространстве смещений формально совпадает с представлением группы  $S_3$  в пространстве функций на множестве трех точек, изученном в разделе 9.2.

Оператор ускорения удобно искать с помощью уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0.$$

Здесь  $x_i$  — смещение одного из грузов, а **лагранжиан**  $\mathcal{L}$  определяется разностью кинетической и потенциальной энергии системы:

$$\mathcal{L} = T - U.$$

В нашем случае кинетическая энергия зависит только от скорости, а потенциальная — только от величины смещения, поэтому уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0.$$

Первое слагаемое дает произведение массы на ускорение груза, а второе — величину действующей на него силы. Изменение потенциальной энергии определяется удлинением пружин, соединенных с данным грузом.

10.3 ▷ Покажите, что в линейном приближении удлинение пружины равно  $x_i \cos \alpha$ , где  $x_i$  — смещение груза из положения равновесия, а  $\alpha$  — угол между пружиной и направлением смещения.

Потенциальная энергия системы имеет вид:

$$U = \frac{k}{2} \left( \frac{3}{4}(x_1 + x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 + x_3)^2 + \frac{3}{4}(x_3 + x_1)^2 \right).$$

Для матрицы оператора ускорения получаем:

$$A = -\frac{3k}{4m} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Представление  $r_U$  содержит два различных неприводимых представления, тривиальное и двумерное:  $U = V_1 \oplus V_2$ . Следовательно, векторы, лежащие в этих подпространствах, автоматически являются нормальными модами системы. Подействуем оператором ускорения на вектор  $\mathbf{v}_1 \in V_1$ :

$$Av_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3k}{m}v_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

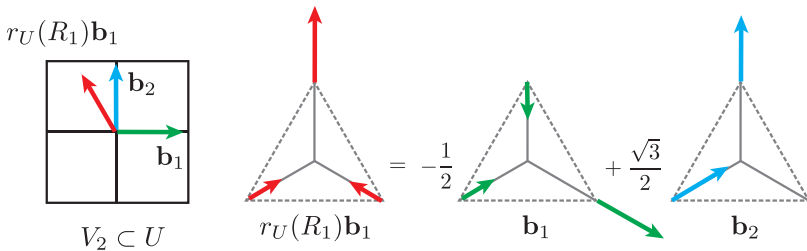
Похожим образом получим собственную частоту, соответствующую векторам из двумерного представления  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in V_2$ :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{4m}}.$$

Напомним, что векторы  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \in V_2$  были получены в результате действия проекционных операторов  $P_{\alpha\beta}$ . Они преобразуются, как базисные векторы в стандартной копии  $(r_2, W_2)$ . Например, под действием оператора  $r_U(R_1)$  вектор  $\mathbf{b}_1$  поворачивается на угол  $\frac{2\pi}{3}$ :

$$r_U(R_1)\mathbf{b}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{b}_2.$$

Интересно посмотреть, как это соотношение выглядит в пространстве смещений грузов:



### 10.3 Эквивалентные неприводимые представления

Рассмотрим случай, когда представление  $r_U$  на пространстве смещений содержит  $m_i > 1$  копий некоторого неприводимого представления  $r_i$ . Для определенности будем считать, что  $r = r_2 \oplus r_2$ , где  $r_2$  — двумерное представление группы  $S_3$ .

Для начала, нам нужно найти подпространства неприводимых представлений  $U = V_1 \oplus V_2$  (в обоих подпространствах действует  $r_2$ ). Это можно сделать с помощью проекционных операторов  $P_{\alpha\beta}$ . Пусть  $(r_2, W)$  — стандартная копия неприводимого представления  $r_2$ . Обозначим  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$  базис в пространстве  $W$ .

Действуя на некоторый вектор  $\mathbf{v}^1 \in U$  проекционными операторами, найдем два вектора, образующие базис неприводимого представления:

$$\{P_{xx}\mathbf{v}^1, P_{yx}\mathbf{v}^1\} \equiv \{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_y^1\}.$$

Обозначим  $V_1$  множество их линейных комбинаций. Выбирая другой вектор  $\mathbf{v}^2 \in U$ , найдем второе подпространство неприводимого представления:

$$\{\mathbf{v}_x^2, \mathbf{v}_y^2\} \in V_2.$$

Так мы получили разложение  $U = V_1 \oplus V_2$  на подпространства, в которых действуют представления  $r_2$ . Поскольку мы выбрали  $\mathbf{v}^1$  и  $\mathbf{v}^2$  произвольно, это разложение не единственно.

Отметим, что использование проекционных операторов позволяет построить  $G$ -морфизм между подпространствами  $V_1$  и  $V_2$ . Действительно, определим следующее отображение:

$$\begin{aligned} \tau_{21} : V_1 &\rightarrow V_2 \\ \mathbf{v}_\alpha^1 &\mapsto \mathbf{v}_\alpha^2, \end{aligned}$$

где  $\alpha = x, y$ . Похожим образом определяется отображение  $\tau_{12} : V_2 \rightarrow V_1$ .

10.4 ▷ Рассмотрите преобразования правильного треугольника в  $V_1$  и  $V_2$  и убедитесь, что  $\tau_{21}$  является  $G$ -морфизмом.

Теперь посмотрим на оператор ускорения с учетом разложения пространства смещений  $U = V_1 \oplus V_2$ . Как и раньше, представим  $a$  в виде матрицы операторов, действующих между подпространствами  $V_i$ . На диагонали по-прежнему будут расположены тождественные преобразования. Но недиагональные элементы уже могут быть отличны от нуля: лемма Шура требует лишь, чтобы это были обратимые  $G$ -морфизмы. К счастью, мы уже построили такие отображения,  $\tau_{12}$  и  $\tau_{21}$ . По следствию леммы Шура, любой обратимый  $G$ -морфизм получается из них путем умножения на скаляр. Итак, оператор ускорения принимает вид:

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \text{id}_{V_1} & \lambda_{12} \tau_{12} \\ \lambda_{21} \tau_{21} & \lambda_{22} \text{id}_{V_2} \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_{ij}$  — некоторые коэффициенты.

Найдем матрицу оператора  $a$  в базисе  $\{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_y^1, \mathbf{v}_x^2, \mathbf{v}_y^2\}$ . Для этого подействуем оператором на базисные векторы. Например, для  $\mathbf{v}_x^1$  находим

$$a\mathbf{v}_x^1 = a \begin{pmatrix} \mathbf{v}_x^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}\mathbf{v}_x^1 \\ \lambda_{21}\mathbf{v}_x^1 \end{pmatrix}.$$

Получаем следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & 0 & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & \lambda_{21} & 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}.$$

Зададим  $V_x$  как подпространство, образованное всеми векторами, преобразующимися, как  $\mathbf{e}_x \in W$ . Другими словами, это пространство линейных комбинаций векторов  $\{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_x^2\}$ . Аналогично определим пространство  $V_y$ . Из вида матрицы  $A$  следует, что оператор ускорения действует в пространствах  $V_x$  и  $V_y$  независимо. Поскольку действие одинаковое, нам необходимо диагонализировать всего одну матрицу размерности  $2 \times 2$ . В общем случае, если кратность некоторого представления  $r_i$  равна  $m_i$ , решение физической задачи потребует диагонализации матрицы  $m_i \times m_i$ .

Таким образом, мы получили следующий алгоритм для нахождения нормальных мод в случае  $r = r_2 \oplus r_2$ .

1. Найдите с помощью проекционных операторов векторы

$$\{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_y^1, \mathbf{v}_x^2, \mathbf{v}_y^2\}$$

2. Подействуйте на пару векторов в пространстве  $V_x$  оператором ускорения:

$$\left. \begin{aligned} a\mathbf{v}_x^1 &= \lambda_{11}\mathbf{v}_x^1 + \lambda_{21}\mathbf{v}_x^2 \\ a\mathbf{v}_x^2 &= \lambda_{12}\mathbf{v}_x^1 + \lambda_{22}\mathbf{v}_x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}.$$

3. Найдите собственные значения и компоненты собственных векторов  $\{\mathbf{q}_x, \mathbf{b}_x\}$  этой матрицы в базисе  $\{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_x^2\}$ :

$$\mathbf{q}_x = (\gamma_x^1, \gamma_x^2)^T, \quad \mathbf{b}_x = (\beta_x^1, \beta_x^2)^T.$$

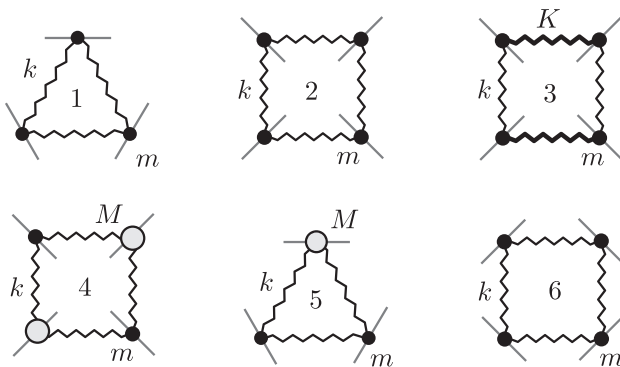
Те же компоненты будут у собственных векторов оператора ускорения в пространстве  $V_y$ . Окончательно получаем четыре нормальные моды колебаний:

$$\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y.$$

10.5 ▷ Сколько в этой ситуации получится различных собственных частот?

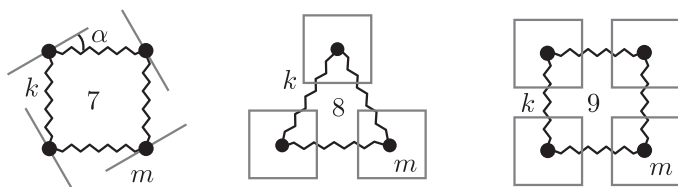
## 10.4 Задачи

Колебательные системы состоят из связанных пружинами грузов, скользящих без трения по стержням.



10.6 ▷ Определите группы симметрии этих систем. Найдите разложение представления в пространстве смещений на неприводимые компоненты и предскажите кратности вырождения собственных частот.

10.7 ▷ Среди систем 1 – 6 выберите любые две системы, переход между которыми при изменении параметров сопровождается понижением симметрии. Найдите формы и частоты нормальных мод колебаний. Объясните поведение частот при изменении симметрии.



10.8 ▷ Найдите формы и частоты нормальных колебаний для систем 2, 6 и 7. Постройте графики зависимости  $\omega(\alpha)$  в диапазоне  $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ . *Указание.* Представления циклической группы будут построены в разделе 11.3.1. Если собственные векторы получаются комплексными, вспомните, что линейная комбинация собственных векторов с одним собственным значением также является собственным вектором.

10.9 ▷ Найдите формы и частоты нормальных колебаний для системы 8 или 9, в которых грузы могут двигаться по плоскости. Наиболее удобный базис состоит из ортонормированных векторов, переходящих друг в друга под действием операторов представления.

# 11 Теория групп в квантовой механике

Несмотря на кардинальные отличия квантовой физики от классической, их математическое описание может быть схожим. Задача о колебаниях механической системы со многими степенями свободы сводится к диагонализации оператора ускорения, действующего в пространстве смещений. Похожая ситуация возникает и в квантовой механике. Состояниям системы соответствуют векторы в пространстве комплексных функций. Согласно уравнению Шредингера, эволюция состояния определяется гамильтонианом системы, и для решения задачи необходимо найти его собственные векторы.

Как и в случае механических систем, теория представлений позволяет упростить решение квантовой задачи, обладающей симметрией. Так, собственные состояния гамильтониана частицы в сферически-симметричном потенциале определяются неприводимыми представлениями группы вращений, а состояния электрона в периодическом потенциале — представлениями группы трансляций.

## 11.1 Уравнение Шредингера и симметрии

Рассмотрим квантовую частицу на плоскости  $M$ . Ее состояние задается **волновой функцией** — квадратично интегрируемой функцией

$$\psi : M \rightarrow \mathbb{C}.$$

Все такие функции образуют векторное пространство  $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(M)$ , называемое **гильбертовым пространством состояний**. Напомним, что значение функции в некоторой точке  $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$  имеет смысл компоненты вектора. Чтобы работать с самим вектором, а не его компонентами, в квантовой механике используется бра-кет формализм Дирака. Вектор, соответствующий функции  $\psi(\mathbf{x})$ , обозначают  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ .

Эволюция состояния во времени определяется уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle,$$

где **гамильтониан**  $\hat{H}$  — линейный оператор на пространстве  $\mathcal{H}$ , а  $\hbar$  — постоянная Планка. Найдем решение уравнения Шредингера по аналогии с решением задачи о колебаниях связанных маятников, рассмотренной в разделе 10.1. Заметим, что

$$|\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}|\psi\rangle,$$



то есть оператор  $-\frac{i}{\hbar}\hat{H}$  можно назвать “оператором скорости изменения состояния” в том же смысле, в котором  $a$  является оператором ускорения в механической задаче. Будем искать решение в виде гармонической функции

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_n t}|n\rangle,$$

где  $|n\rangle$  — некоторый фиксированный вектор. Получаем:

$$|\dot{\psi}\rangle = -i\omega_n|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{H}|n\rangle = \hbar\omega_n|n\rangle,$$

то есть вектор  $|n\rangle$  является собственным вектором гамильтониана с собственным значением  $\hbar\omega_n \equiv \epsilon_n$  (имеющем смысл энергии состояния). Как и в механической задаче, эволюция каждого собственного вектора будет гармонической, и общее решение примет вид

$$|\psi\rangle = \sum_n e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)}|n\rangle,$$

где  $\{|n\rangle\}$  — набор собственных векторов гамильтониана, а  $\varphi_n$  — некоторые фазы.

Если квантовая система обладает симметрией, результаты теории групп приводят к тем же следствиям, что и для механических систем. На пространстве состояний  $\mathcal{H}$  действует представление группы симметрии  $G$ . Поскольку гамильтониан коммутирует с операторами представления, его собственные векторы преобразуются по неприводимым представлениям группы. По лемме Шура, разложение пространства  $\mathcal{H}$  на подпространства неприводимых представлений приводит к занулению некоторых матричных элементов. Наконец, размерность пространств неприводимых представлений определяет кратность вырождения уровней энергии.

## 11.2 Группа $SO(2)$ и сферические гармоники

В задаче об атоме водорода необходимо решить уравнение Шредингера в сферически-симметричном потенциале. Симметрия задачи описывается группой поворотов сферы  $SO(3)$ . Собственные функции гамильтониана принимают вид **сферических гармоник**, умноженных на некоторые радиальные функции. В этом разделе мы рассмотрим похожую, но более простую, ситуацию с точки зрения теории групп.

Рассмотрим группу  $SO(2)$ , элементами которой являются повороты окружности  $g_\alpha$  на угол  $\alpha$ . Композиция двух поворотов дает поворот на суммарный угол:

$$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta},$$

причем порядок сомножителей не важен. Поскольку поворот окружности на  $2\pi$  эквивалентен тождественному преобразованию, параметр  $\alpha$  определен с точностью до  $2\pi$ , то есть  $g_{\alpha+2\pi} = g_{\alpha}$ .

Отметим, что выбор некоторой точки  $p$  на окружности  $S^1$  позволяет отождествить элементы группы  $SO(2)$  с точками окружности: отображение

$$\begin{aligned} c : SO(2) &\rightarrow S^1 \\ g_{\alpha} &\mapsto g_{\alpha} \cdot p \end{aligned}$$

является взаимно-однозначным. В этом смысле группа  $SO(2)$  представляет собой окружность. Она содержит бесконечно много элементов. Для того, чтобы задать элемент группы, достаточно одного действительного параметра. Более сложные группы такого типа требуют несколько параметров для задания элемента, и могут быть отождествлены с многомерными поверхностями (дифференцируемыми многообразиями). Такие группы называют **группами Ли**. С теорией представлений групп Ли тесно связана классификация элементарных частиц в физике высоких энергий.

Попробуем найти представления группы  $SO(2)$ . Вложим окружность, на которой действует группа, в плоскость  $V_1$  и продолжим по линейности действие на всю плоскость. Мы получили представление  $(r_1, V_1)$ , которое называют **стандартным**. В ортонормированном базисе матрицы стандартного представления имеют вид

$$R_1(g_{\alpha}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

11.1 ▷ Найдите формулы для косинуса и синуса разности, вычислив матрицу  $R_1(g_{\alpha}g_{-\beta})$ .

Чтобы найти другие представления, рассмотрим пространство функций на окружности  $\mathcal{F}(S^1)$ . Введем на окружности координату  $\varphi$ . Действие группы имеет вид:

$$g_{\alpha} \cdot \varphi = \varphi + \alpha.$$

Тогда представление  $r_S$  в пространстве  $\mathcal{F}(S^1)$  действует на функцию  $f$  следующим образом:

$$[r_S(g_{\alpha})f](\varphi) = f(g_{\alpha}^{-1} \cdot \varphi) = f(\varphi - \alpha).$$

Посмотрим, как  $r_S(g_{\alpha})$  действует на гармонические функции  $\cos(\varphi)$  и  $\sin(\varphi)$ , заданные на окружности. Для упрощения записи, позаимствуем

из квантовой механики бра-кет обозначения, которые позволяют убрать аргумент  $\varphi$  из обеих частей равенства:

$$\begin{aligned} r_S(g_\alpha)|\cos\rangle &= \cos\alpha|\cos\rangle + \sin\alpha|\sin\rangle \\ r_S(g_\alpha)|\sin\rangle &= -\sin\alpha|\cos\rangle + \cos\alpha|\sin\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, действие оператора  $r_S(g_\alpha)$  на пару векторов  $\{|\cos\rangle, |\sin\rangle\}$  задается матрицей  $R_1(\alpha)$ . Другими словами, мы нашли внутри пространства  $\mathcal{F}(S^1)$  подпространство  $V_1$  стандартного представления  $r_1$ .

Пусть  $n \in \mathbb{Z}$ . Обозначим  $|\cos_n\rangle$  функцию, равную  $\cos(n\varphi)$  в точке  $\varphi$ , и аналогично определим  $|\sin_n\rangle$ . Векторы  $\{|\cos_n\rangle, |\sin_n\rangle\}$  задают подпространство представления, которое мы обозначим  $(r_n, V_n)$ . Как и в случае  $n = 1$ , рассмотренном выше, это представление содержится внутри  $(r_S, \mathcal{F}(S^1))$ .

11.2 ▷ Найдите матрицу оператора  $r_n(g_\alpha)$ .

11.3 ▷ Опишите пространство  $V_0$  в терминах теории групп.

В квантовой механике пространство состояний  $\mathcal{H}$  является комплексным. Напомним, что повороты двумерного комплексного пространства содержат инвариантные подпространства (раздел 7.4.3). Следовательно, найденные представления не являются неприводимыми. Ситуацию можно исправить, рассмотрев в качестве гармонической функции комплексную экспоненту:

$$w_n(\varphi) = e^{in\varphi}.$$

Действие оператора представления на соответствующий вектор  $|w_n\rangle$  является умножением на число:

$$r_S(g_\alpha)|w_n\rangle = e^{-in\alpha}|w_n\rangle.$$

Таким образом, каждый вектор  $|w_n\rangle$  задает одномерное инвариантное подпространство  $W_n \subset \mathcal{F}(S^1)$ . В подпространстве  $W_n$  действует неприводимое представление  $r_n$  группы  $SO(2)$ , заданное как  $r_n(g_\alpha) = e^{-in\alpha}$ . Оказывается, набор представлений  $\{r_n\}$  исчерпывает список всех неприводимых представлений группы  $SO(2)$ .

Теперь представим, что на плоскости  $M$  задан радиально симметричный потенциал с центром в начале координат. Группа  $SO(2)$  является группой симметрии такой системы, и гамильтониан коммутирует с ее представлением  $r_M$  в пространстве  $\mathcal{H}$ . Векторы  $\{|w_n\rangle\}$  задают инвариантные подпространства неприводимых представлений. Для упрощения задачи нужно перейти в базис, образованный векторами вида  $|w_n\rangle|\chi\rangle$ , где вектор  $|\chi\rangle$  соответствует функции  $\chi(r)$ , не зависящей от угловой координаты.

Похожая ситуация возникает при решении задачи о движении частицы в сферически-симметричном потенциале в трехмерном пространстве. В терминах теории групп, сферические гармоники — это функции, задающие базис неприводимых представлений группы  $SO(3)$  в пространстве функций на сфере.

## 11.3 Группа $\mathbb{Z}_N$ и волны Блоха в кристалле

### 11.3.1 Представления циклической группы

Рассмотрим  $\mathbb{Z}_N$ , **циклическую группу порядка  $N$** . Она может быть реализована как группа поворотов правильного  $N$ -угольника на плоскости. Обозначим  $g_n$  поворот плоскости на угол  $n\frac{2\pi}{N}$ , где  $n$  — целое число. Умножение в группе имеет вид

$$g_n g_m = g_{n+m}.$$

Из этого следует, что любой элемент  $g_m$  группы можно представить как

$$g_m = g_1^m,$$

если принять, что нулевая степень соответствует нейтральному элементу  $e = g_0$ . При  $m = N$  получаем поворот на угол  $2\pi$ , то есть тождественное преобразование:

$$g_1^N = e.$$

Найдем неприводимые представления группы  $\mathbb{Z}_N$ . Из последнего равенства следует, что для представления  $(r, V)$  справедливо

$$r(g_1^N) = \text{id}_V.$$

Пусть пространство  $V$  — одномерное. Тогда

$$r(g_1^N) = [r(g_1)]^N = 1 \quad \Rightarrow \quad r(g_1) = \sqrt[N]{1}.$$

Таким образом, мы получаем  $N$  одномерных неприводимых представлений, заданных набором комплексных корней из единицы. Обозначим аргументы корней  $\{-k\}$ . Тогда

$$r_k(g_1) = e^{-ik}.$$

Для произвольного элемента группы, оператор представления  $r_k$  совпадает с характером и равен

$$r_k(g_n) = \chi_k(g_n) = e^{-ikn}.$$

Итак, мы получили  $N$  одномерных неприводимых представлений группы  $\mathbb{Z}_N$ .

11.4 ▷ Покажите, что у группы  $\mathbb{Z}_N$  нет других неприводимых представлений.

### 11.3.2 Приближение сильной связи

Рассмотрим модель одномерного кристалла в виде цепочки атомов. Будем считать, что атомные орбитали почти не перекрываются. При этом гамильтониан будет содержать лишь элементы, описывающие переходы между близкими орбиталями. Собственные состояния гамильтониана можно искать в виде линейных комбинаций атомных орбиталей. Этот подход называют **приближением сильной связи** (сильной предполагается связь между электроном и ядром атома).

Пусть кристалл состоит из  $N$  ячеек единичной длины, каждая из которых содержит по одному атому с одной орбиталью. Обозначим  $m$  координату атома, а  $|m\rangle$  — соответствующую орбиталь. Будем считать, что орбитали образуют ортонормированный базис в пространстве состояний  $\mathcal{H}$ :

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}.$$

Волновая функция в этом базисе принимает вид

$$|\psi\rangle = \sum_m \psi_m |m\rangle.$$

Запишем гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H} = \sum_m u|m\rangle\langle m| + t|m\rangle\langle m+1| + \bar{t}|m+1\rangle\langle m|,$$

где  $u \in \mathbb{R}$  — потенциальная энергия орбитали, а  $t \in \mathbb{C}$  — амплитуда перехода между соседними орбиталями. Наша задача — найти уровни энергии в таком кристалле. Для этого необходимо диагонализировать гамильтониан.

Заметим, что локально кристалл обладает трансляционной симметрией: гамильтониан инвариантен относительно сдвига на одну ячейку. Однако на краях кристалла инвариантность нарушается. Чтобы ее восстановить, вводят **периодические граничные условия**, отождествляя ячейки  $0 \leftrightarrow N$ . При этом группой симметрии эффективно становится циклическая группа  $\mathbb{Z}_N$ .

Группа действует на множестве атомов  $M$  сдвигами:

$$g_n \cdot m = m + n.$$

Это действие порождает представление  $r_M$  в пространстве функций:

$$[r_M(g_n)\psi]_m = \psi_{g_n^{-1} \cdot m} = \psi_{m-n}.$$

Напомним, что это представление также можно записать с помощью базисных векторов:

$$r_M(g_n)|m\rangle = |m+n\rangle.$$

Заметим, что гамильтониан является  $G$ -морфизмом:

$$r_M(g_n)\hat{H} = \hat{H}r_M(g_n).$$

Следовательно, для поиска собственных векторов будет полезно разложить пространство  $\mathcal{H}$  на прямую сумму подпространств неприводимых представлений.

11.5 ▷ Проверьте последнее равенство, подействовав обеими частями на состояние  $|\psi\rangle$ .

### 11.3.3 Структура представления и собственные векторы

Найдем структуру представления  $(r_M, \mathcal{H})$ . Характер  $\chi_M$  определяется числом неподвижных точек действия  $\mathbb{Z}_N$  на кристалле  $M$ .

11.6 ▷ Найдите характер  $\chi_M$  и кратности неприводимых представлений, входящих в  $r_M$ .

Найдем инвариантное подпространство неприводимого представления  $r_k$ . Для этого подействуем соответствующим проекционным оператором на состояние  $|0\rangle$ :

$$P_k|0\rangle = \frac{1}{N} \sum_n \overline{\chi_k(g_n)} r_M(g_n)|0\rangle = \frac{1}{N} \sum_n e^{ikn} |n\rangle.$$

Нормируем полученный вектор на единицу:

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m e^{ikm} |m\rangle.$$

Такие состояния называют **волнами Блоха**. Они образуют базис в импульсном пространстве, связанный с базисом орбиталей преобразованием Фурье. Параметр  $k$  играет роль квазиимпульса электрона в кристалле.

11.7 ▷ Подействуйте гамильтонианом на вектор  $|k\rangle$  и найдите соответствующее собственное значение.

Поскольку неприводимые представления входят в разложение с кратностью не больше единицы, все собственные векторы гамильтониана можно найти методами теории групп.