Преобразование Фурье

Пусть *f(t)* – **периодическая** интегрируемая функция с периодом $T = 2\pi/\omega_0$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right),$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt, \qquad a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt.$$

Можно иначе: $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n),$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad tg\,\phi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

Непрерывное преобразование Фурье (интеграл Фурье)

$$f(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{C}_n e^{in\omega_0 t} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \qquad\qquad \Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\lim_{T\to\infty} f(t) \quad = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T\tilde{C}_n e^{in\omega_0 t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{in\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$f(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$F(\omega) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt.$$

Свойства рядов и интегралов Фурье:

$$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \quad \Leftrightarrow \quad F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega),$$

$$\alpha f(t) \Leftrightarrow \quad \alpha F(\omega), \qquad \alpha \ - const$$

$$\frac{df(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad i\omega \times F(\omega),$$

$$\int f(t)\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

Свойства рядов и интегралов Фурье:

$$f(\beta t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\beta} F\left(\frac{\omega}{\beta}\right), \qquad \beta \;\; - const$$

$$f(t-\tau) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega)e^{-i\omega\tau}, \qquad \tau \;\; - const$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \,\frac{d\omega}{2\pi},$$

$$f(t) = g(t)\cos(\omega_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{G(\omega-\omega_0)}{2} + \frac{G(\omega+\omega_0)}{2}$$

Докажем: $$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow i\omega \times F(\omega),$$

$$\partial_t f(t) = \partial_t \int F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \int [i\omega F(\omega)]\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Докажем: $$f(\beta t) \Leftrightarrow F_\beta(\omega) = \frac{1}{\beta}\, F\left(\frac{\omega}{\beta}\right),$$

$$\beta \ - const$$

$$F_\beta(\omega) = \int f(\beta t)\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \int f(\beta t)\, e^{-i(\omega/\beta)\,\beta t}\, \frac{d(\beta t)}{\beta} = \frac{1}{\beta}\, F\left(\frac{\omega}{\beta}\right),$$

Докажем: $f(t-\tau) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega)e^{-i\omega\tau}, \qquad \tau \ - const$

$$F_\tau(\omega) \quad = \quad \int f(t-\tau)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int f(y)\, e^{-i\omega y}\, e^{-i\omega\tau} dy =$$

$$F(\omega)\, e^{-i\omega\tau}$$

Докажем:

$$f(t) = g(t)\cos(\omega_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{G(\omega-\omega_0)}{2} + \frac{G(\omega+\omega_0)}{2}$$

$$f(t) = g(t)\cos(\omega_0 t) \;\; F(\omega) = 2\int g(t)\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)e^{-i\omega t} dt(\omega)$$

$$= \int g(t)\left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right)dt$$

$$= \frac{G(\omega-\omega_0)}{2} + \frac{G(\omega+\omega_0)}{2}$$

Докажем: $W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \frac{d\omega}{2\pi}$

(равенство Парсеваля)

$$W \quad = \quad \int\int\int_{-\infty}^{\infty} F\,(\omega)\, e^{i\omega t}\, F^*(\omega')\, e^{-i\omega' t}\, \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2}\, dt =$$

$$= \quad \int\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, F^*(\omega')\, 2\pi\, \delta(\omega - \omega')\, \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2} =$$

$$= \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, \frac{d\omega}{2\pi}.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi\, \delta(\alpha).$$

- Интегральное определение дельта-функции

Можно и по-другому:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$W \quad = \quad \int\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,F(\omega)\,e^{i\omega t}\,\frac{d\omega}{2\pi}\,dt$$

Учтем: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = F^*(\omega),$

$$W \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,F^*(\omega)\,\frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,\frac{d\omega}{2\pi}.}$$

Метод комплексных амплитуд

Пусть в цепи действуют источники (напряжения или тока) на одной частоте $e_n = E_n \cos(\omega t + \phi_{En}), i_n = I_n \cos(\omega t + \phi_{In})$. Тогда *установившиеся* токи и напряжения будут иметь ту же частоту, но разные амплитуды и фазы.

Напоминание из ТФКП:

$$Z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{i\varphi},$$

$$\varphi = \mathrm{a}rg(Z) = \mathrm{a}rctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ - Теорема Эйлера

Метод комплексных амплитуд

Представим напряжение в виде:

$\tilde{A} \quad = \quad |A|e^{i\phi}$ - комплексная амплитуда

$$U(t) \ = |A|\cos(\omega t + \phi) = \Re\left(|A|e^{i(\omega t+\phi)}\right) = \Re\left(|A|e^{i\phi}\ e^{i\omega t}\right) = \Re\left(\tilde{A}e^{i\omega t}\right)$$

Что бы найти отклик линейной системы на гармонический сигнал, достаточно найти, как изменяется его комплексная амплитуда!

Будем считать: $\tilde{A} \equiv |A| e^{i\phi}$

Используем принцип суперпозиции:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad f(t) = \Re\left(\tilde{A} e^{i\omega t}\right),$$

$$\frac{df(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad \frac{df(t)}{dt} = \Re\left(i\omega \tilde{A} e^{i\omega t}\right)$$

$$\int f(t)\,dt = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad \int f(t)\,dt = \Re\left(\frac{\tilde{A}}{i\omega} e^{i\omega t}\right)$$

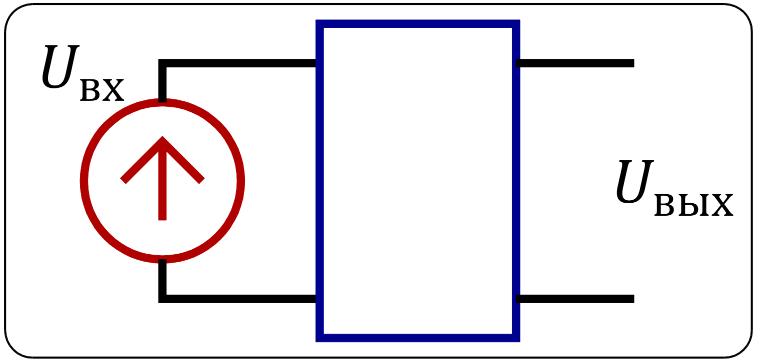
Любой сложный сигнал можно разложить по гармоническим (в спектр) ,найти изменение комплексной амплитуды каждой спектральной компоненты, а затем просуммировать:

$$U_{\text{вх}}(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}_{\text{вх}}(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$U_{\text{вых}}(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}_{\text{вых}}(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Характеристики линейных цепей



Примем, что генератор напряжения $U_{вх}$ имеет **нулевое** внутреннее сопротивление.
Нас интересует связь между $U_{вх}$ и $U_{вых}$.

Разложение по гармоническим составляющим

Представим: $$U_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}_{\text{вх}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}_{\text{вых}}(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

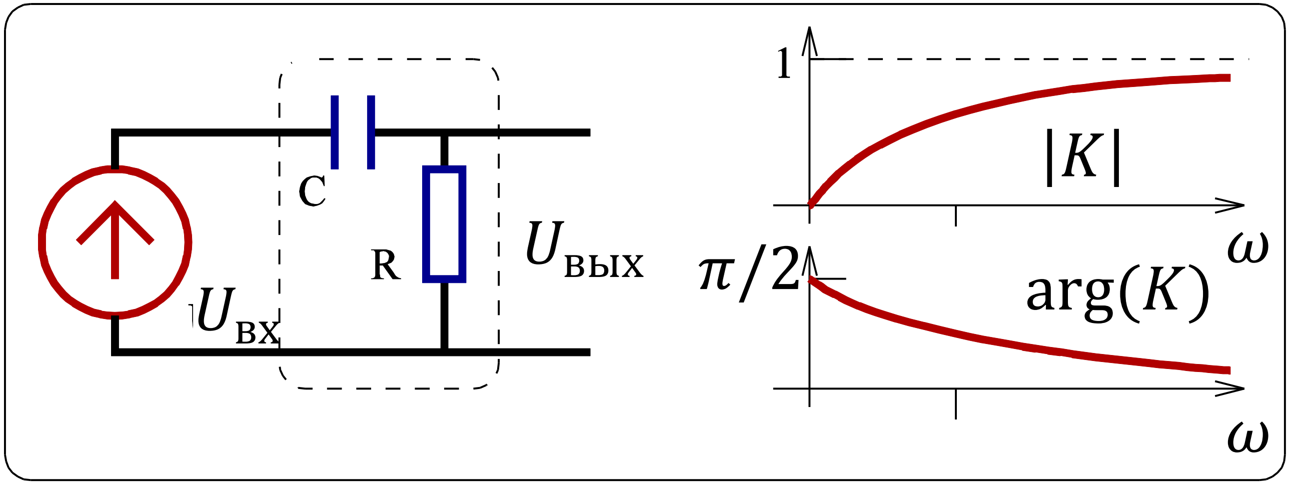
Коэффициент передачи: $$K(\omega) = \frac{\widetilde{U}_{\text{вых}}(\omega)}{\widetilde{U}_{\text{вх}}(\omega)}$$

- комплексная величина

$|K(\omega)|$ - **АЧХ** (амплитудно-частотная характеристика),

a$rgK(\omega)$ - **ФЧХ** (фазово-частотная характеристика).

Пример: RC цепочка



$$K(\omega) = \frac{IR}{I\left(R+\frac{1}{i\omega C}\right)} = \frac{i\omega RC}{1+i\omega RC}$$

$$|K(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}},$$

$$\arg K(\omega) = \frac{\pi}{2} - arctg(\omega RC)$$

Разложение по гармоническим составляющим

1 Шаг: находим спектр входного сигнала:

$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) e^{i\omega t} dt$$

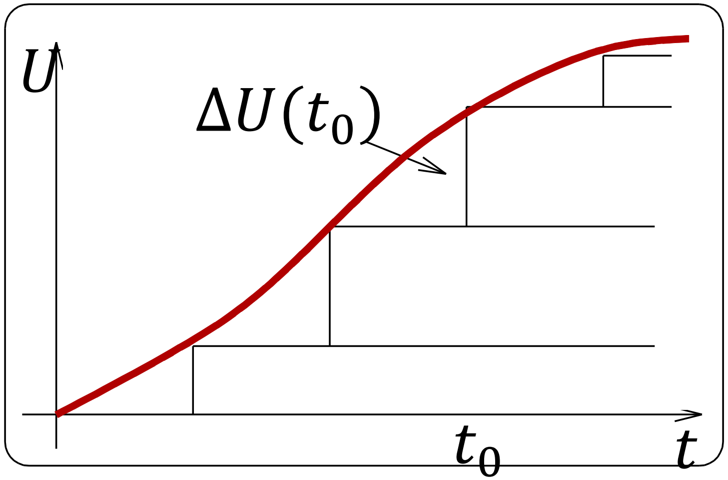
2 Шаг: зная коэффициент передачи, находим спектр сигнала на выходе:

$$\widetilde{U}_{\text{вых}}(\omega) = \widetilde{U}_{\text{вх}}(\omega)\, K(\omega)$$

3 Шаг: находим выходной сигнал:

$$U_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}_{\text{вых}}(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}$$

Разложение по ступенчатым функциям

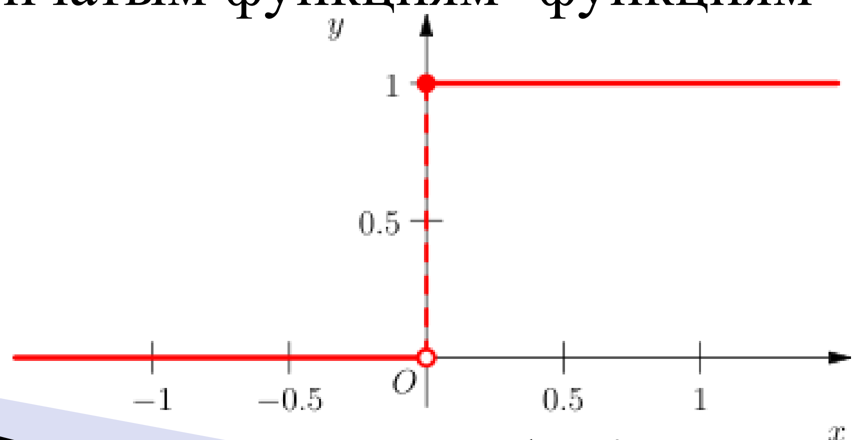


$$\Delta U(t_0) = U'(t)\,dt \times H(t - t_0)$$

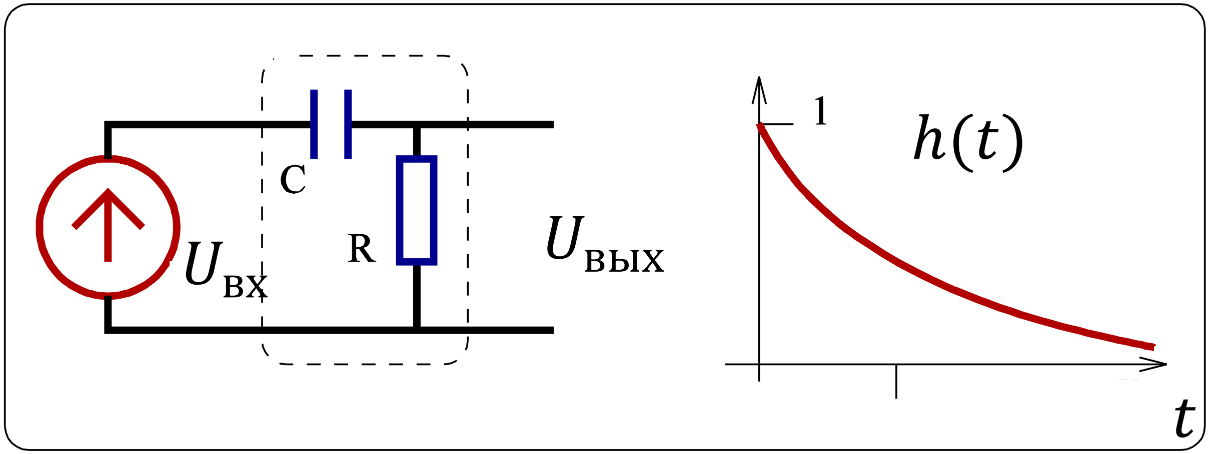
$$\widetilde{U}_{\text{вх}}(t) = \partial_t U_{\text{вх}}(t)$$

$$U_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{t} \widetilde{U}_{\text{вх}}(\tau)\, H(t-\tau)\, d\tau,$$

Производная от сигнала, взятая в разные моменты времени, играет роль коэффициентов Фурье при разложении по ступенчатым функциям -функциям Хевисайда:



Пример: опять RC - цепочка



$$U_{вх}(t) \quad = RI(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{I(t)}{C}\,dt = R\,\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

$$Q(t) \quad = \int_{-\infty}^{t} \frac{U_{вх}(\tau)}{R}\, e^{-(t-\tau)/RC}\, d\tau$$

$$Q(t) \quad = CU_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) H(t)$$

$$U_{вх}(\tau) = U_0 H(\tau) \rightarrow$$

$$U_{вых} \quad = RI(t) = R\,\frac{dQ(t)}{dt} = U_0\, e^{-t/RC}\, H(t)$$

Разложение по δ-функциям

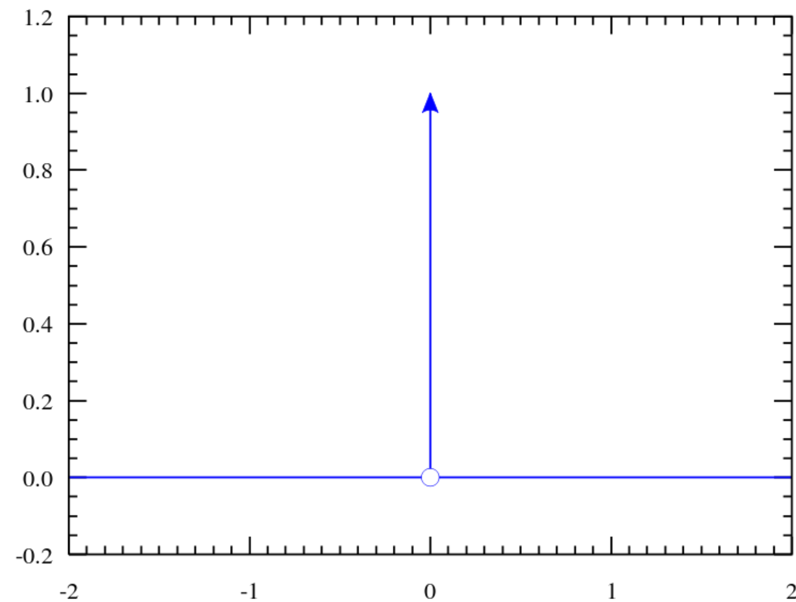
$$U_{\text{вх}}(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{t} \breve{U}_{\text{вх}}(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau, \qquad \boxed{\breve{U}_{\text{вх}}(\tau) = U_{\text{вх}}(\tau)}$$

$$U_{\text{вых}}(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{t} \breve{U}_{\text{вх}}(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Импульсная характеристика $g(t)$ --- отклик на δ-функцию

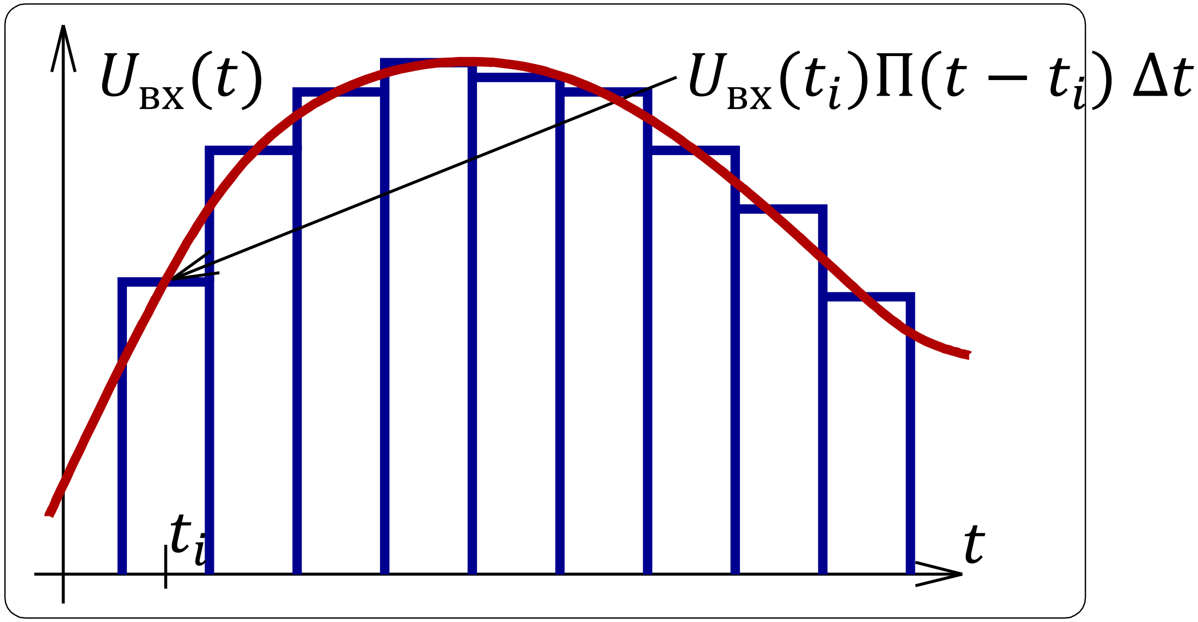
Связь g и h:

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau), \qquad \Rightarrow \qquad g(\tau) = \frac{dh(\tau)}{d\tau}$$



Коэффициенты Фурье $\breve{U}_{\text{вх}}$ при разложении по δ-функциям:

$$\breve{U}_{\text{вх}}(t) = U_{\text{вх}}(t)$$



$$U_{\text{вх}} \cong \sum_i U_{\text{вх}}(t_i)\Pi(t - t_i)\,\Delta t \Rightarrow \int_{\infty}^{t} U_{\text{вх}}(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Представления δ-функции

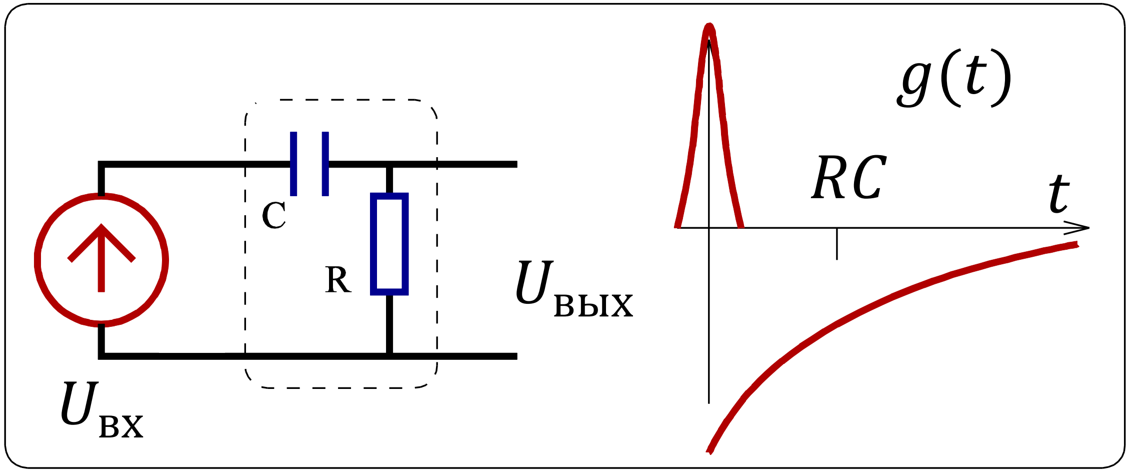
$$\Pi_\Delta(t) \quad = \begin{cases} 1/\Delta & \text{если } |t| \le \Delta/2, \\ 0 & \text{если } |t| > \Delta/2 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_\Delta(t)\,dt = 1$$

$$D(t,\alpha) \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\,\alpha^2}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(t,\alpha)\,dt = 1,$$

$$\delta(t) \quad = \lim_{\Delta\to 0} \Pi_\Delta(t) = \lim_{\alpha\to 0} D(t,\alpha)$$

Пример: и снова RC



Подставим: $U_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{U_{\text{вх}}(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau \quad ,$$

$$U_{\text{вых}}(t) \equiv R\,\frac{dQ(t)}{dt} = U_{\text{вх}}(t) - \int_{-\infty}^{t} U_{\text{вх}}(\tau)\, e^{-(t-\tau)/RC} \frac{d\tau}{RC},$$

$$g(t) = \delta(t) - \frac{H(t)}{RC}\, e^{-t/RC}.$$

Связь функций: $K(\omega), \quad h(t), \quad g(t)$

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t}\, dt,$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{i\omega + \boldsymbol{\varepsilon}}\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \to \mathbf{0},$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

$$K(\omega) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t}\, dt$$ - выведем

$$U_{\text{вх}}(t) \quad = \quad \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi},$$ т. е. $U_{\text{вх}}(\omega) = 1$

$$U_{\text{вых}}(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = g(t).$$

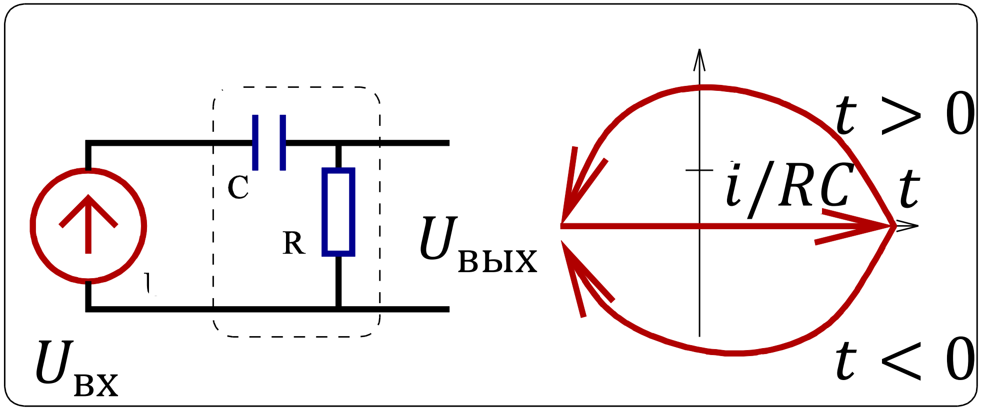
$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{i\omega + \boldsymbol{\varepsilon}}\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \to \mathbf{0},$$ - выведем

$$U_{\text{вх}} = H(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-\varepsilon t}, \qquad t > 0,$$

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(i\omega+\varepsilon)\tau}\, d\tau = \frac{1}{i\omega + \varepsilon} = U_{\text{вх}}(\omega),$$

$$U_{\text{вых}} = \int \frac{K(\omega)}{i\omega + \varepsilon}\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi} = h(t)$$

Пример: RC (а что же еще?) – найдем $h(t)$



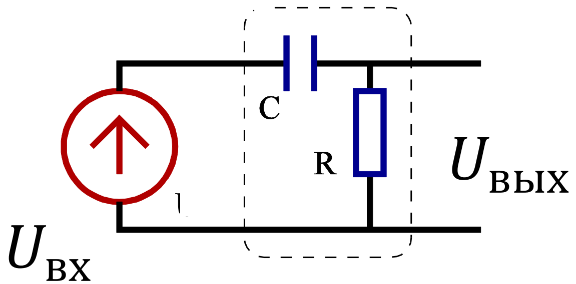
$$K(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC},$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega + \varepsilon} \frac{i\omega RC}{(1 + i\omega RC)} \frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{RC\, e^{i\omega t}}{(1 + i\omega RC)} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i(\omega - i/RC)} \frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= 2\pi i \text{ Выч}(\omega = i/RC) = H(t)\, e^{-t/RC}.$$

Пример: (все тот же) - найдем $g(t)$



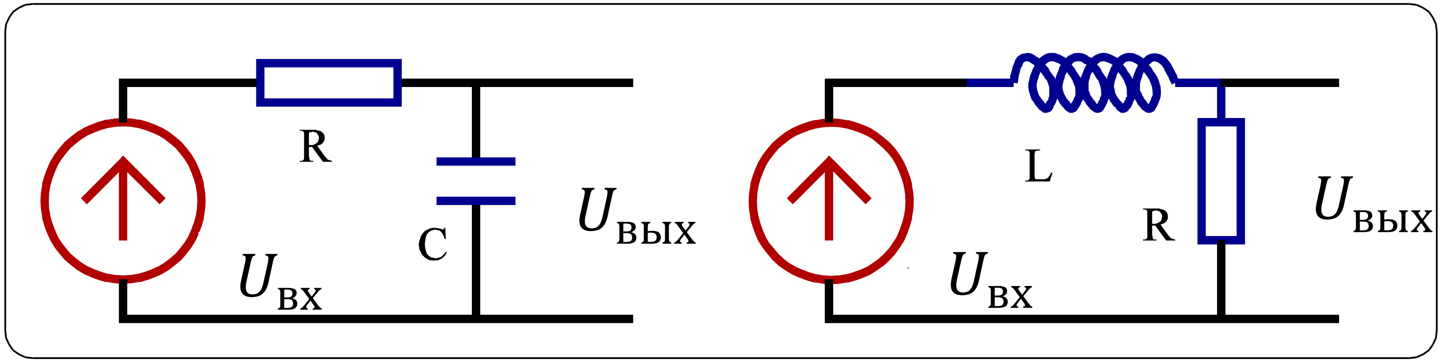
$$K(\omega) = \frac{i\omega RC}{1+i\omega RC} = 1 - \frac{1}{1+i\omega RC},$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{1}{1+i\omega RC}\right)e^{i\omega t}\,\frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \delta(t) - \frac{H(t)}{RC}\,e^{-t/RC},$$

Или: $$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{H(t)}{RC}\,e^{-t/RC}.$$

Другие примеры:



$$K_{RC}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}, \qquad K_{LR}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega L/R},$$

$$K(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau^*}, \qquad \tau^* = RC = \frac{L}{R},$$

τ^* --- время релаксации (постоянная времени) цепочки

Переходная и импульсная характеристики

$$h(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega+\varepsilon)(1+i\omega\tau^*)}\,\frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\frac{1}{i(\omega-i\varepsilon)} - \frac{1}{i(\omega-i/\tau^*)}\right)\frac{d\omega}{2\pi} =$$

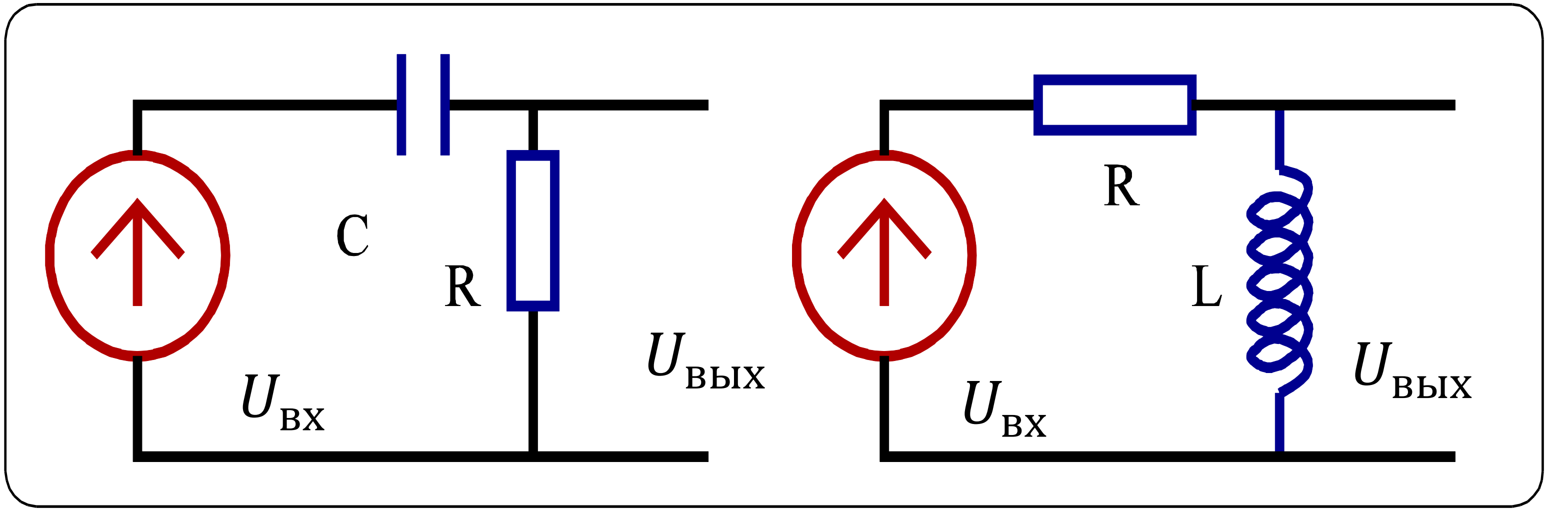
$$= \quad H(t)\left(1-e^{-t/\tau^*}\right),$$

$$g(t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1+i\omega\tau^*}\,\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{H(t)}{\tau^*}\;e^{-t/\tau^*},$$

$$g(t) \quad = \quad \frac{dh(t)}{dt} =$$

$$= \underbrace{\frac{dH(t)}{dt}}_{\delta(t)}\underbrace{\left(1-e^{-t/\tau^*}\right)}_{=0\ \text{при}\ t=0} + \frac{H(t)}{\tau^*}\;e^{-t/\tau^*}.$$

Дифференцирующие цепочки



$$K(\omega) = \frac{i\omega\tau^*}{1 + i\omega\tau^*}, \qquad \tau^* = RC = \frac{L}{R},$$

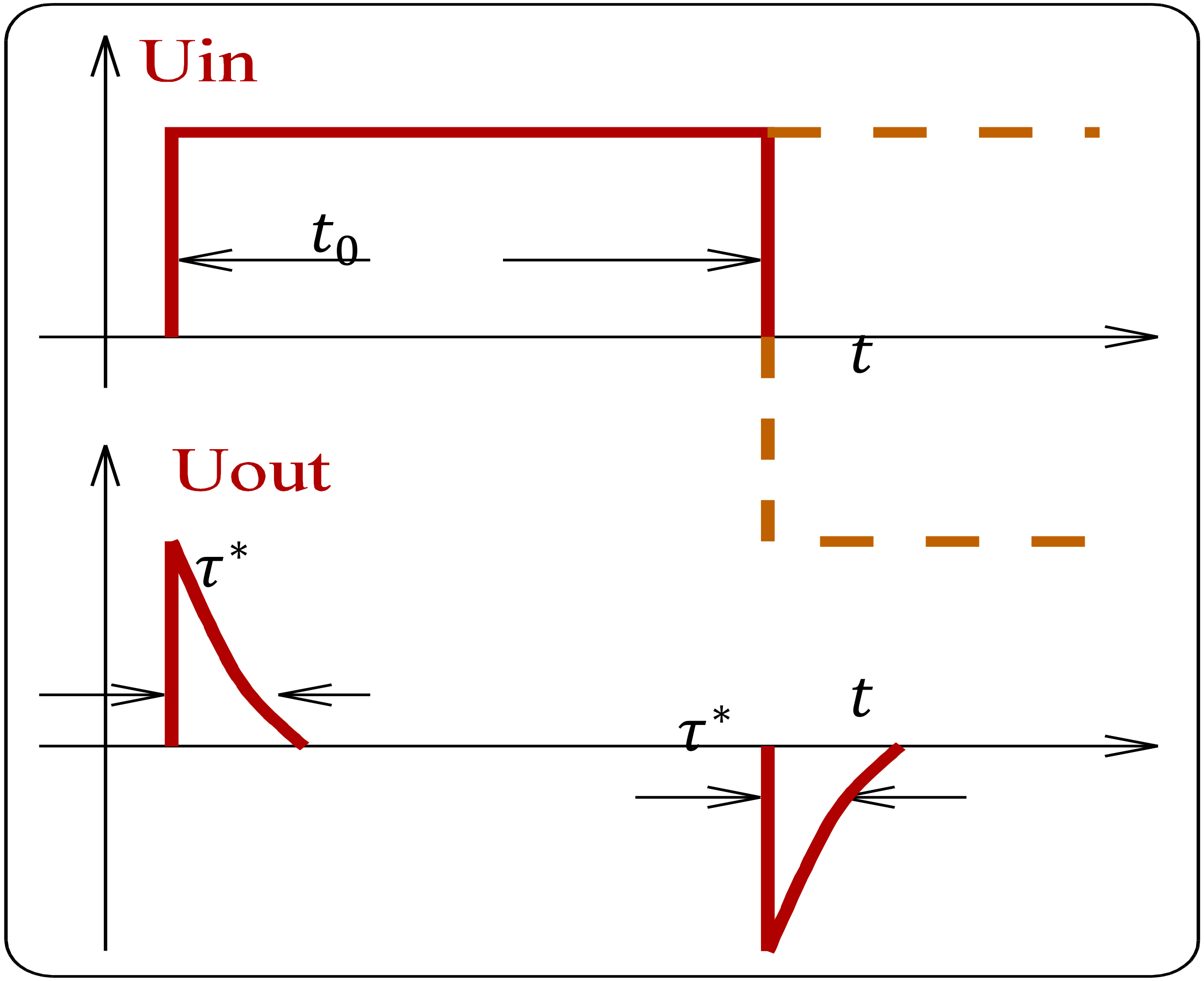
$$h(t) = H(t)\, e^{-t/\tau^*},$$

$$g(t) = \delta(t) - H(t)\, e^{-t/\tau^*}.$$

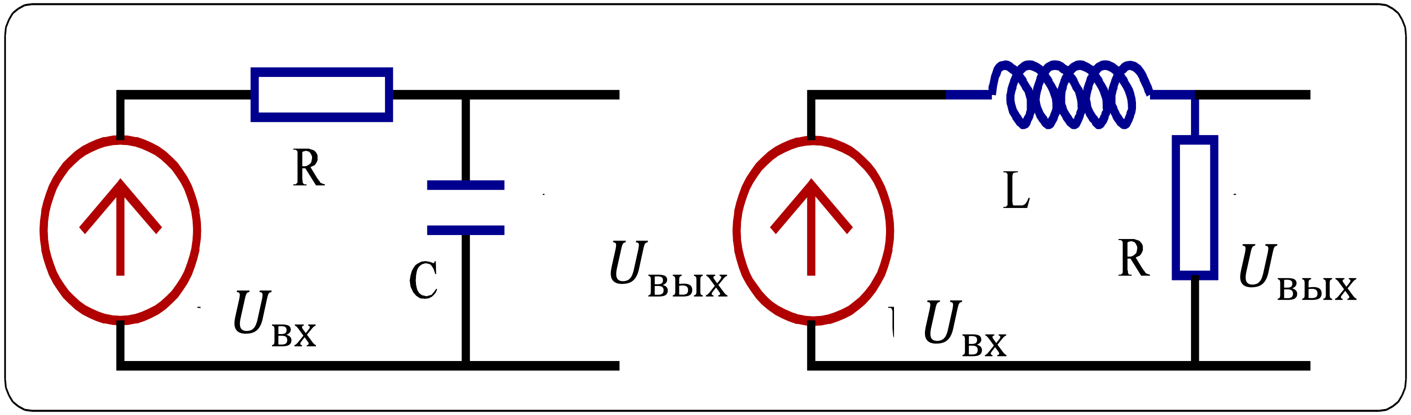
Условие дифференцирования:

$$\boxed{\omega\tau^* \ll 1, \qquad t_{\text{хар}} \gg \tau^*}$$

Пример: дифференцирование прямоугольного импульса:



Интегрирующая цепочка



$$K(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau^*}, \qquad \tau^* = RC = \frac{L}{R},$$

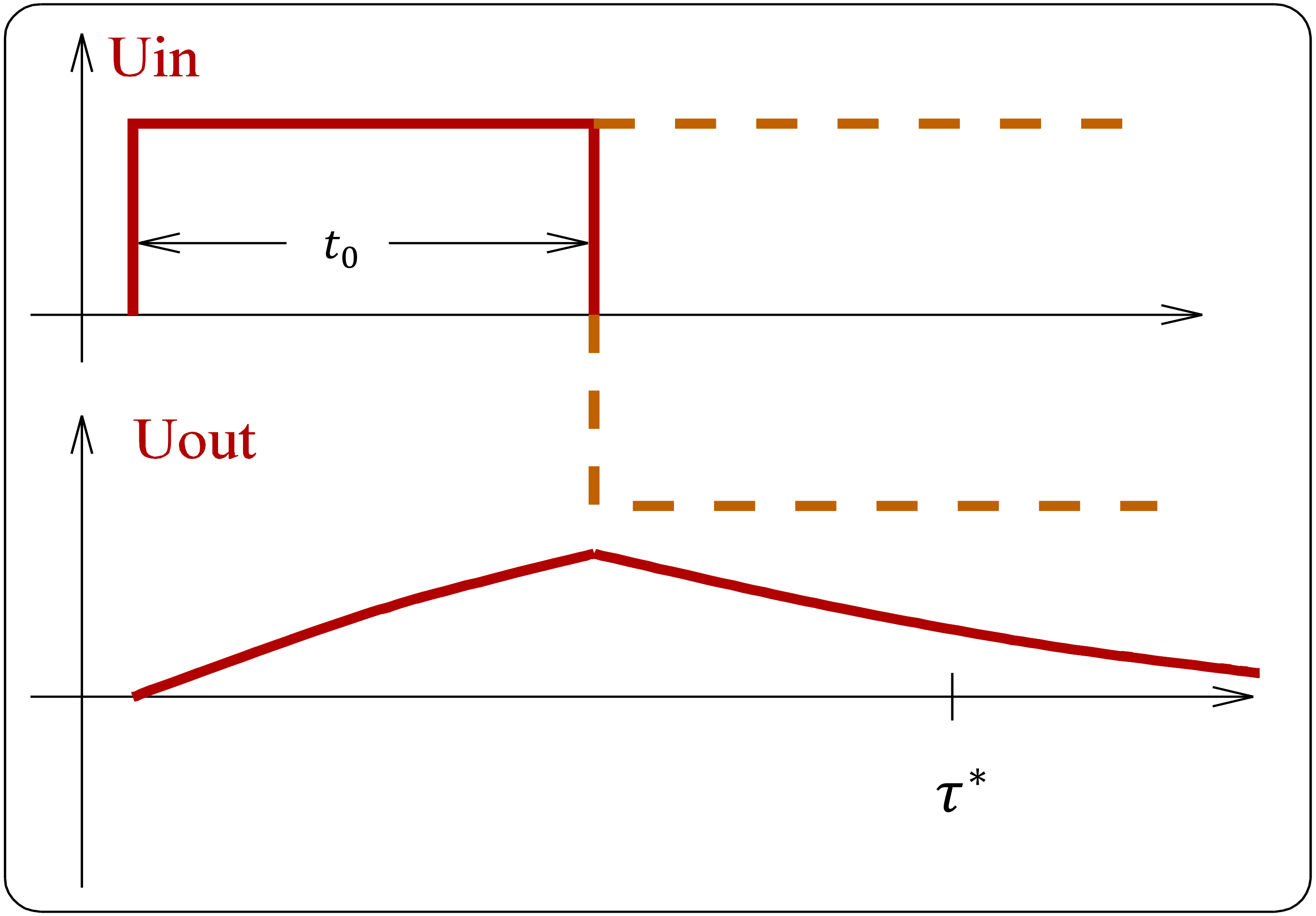
$$h(t) = H(t)\left(1 - e^{-t/\tau^*}\right),$$

$$g(t) = \frac{H(t)}{\tau^*}\, e^{-t/\tau^*}.$$

Условие интегрирования:

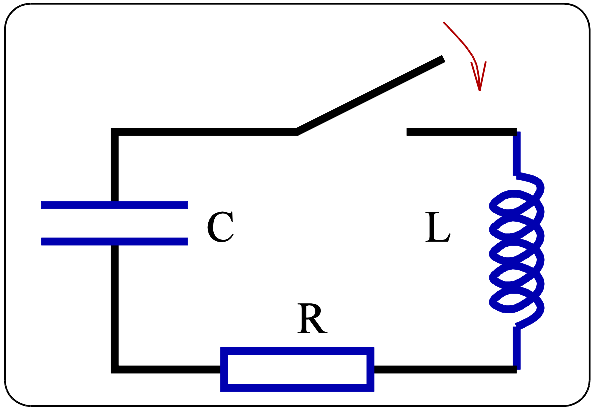
$$\boxed{\omega\tau^* \gg 1 \qquad t_{хар} \ll \tau^*}$$

Пример: интегрирование прямоугольного импульса



Внешнее воздействие на линейную систему

Последовательный контур. Свободные колебания



$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{rI}_{U_r} + \underbrace{\int_{-\infty}^{t} \frac{I(\tau)}{C}\, d\tau}_{U_C} = 0,$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

$$2\delta = \frac{r}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad q = Ae^{i\omega t},$$

$$(-\omega^2 + 2\delta\, i\omega + \omega_0^2)Ae^{i\omega t} = 0,$$

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2\delta\, i\omega\, Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\omega^2 - 2\delta\, i\omega - \omega_0^2 = 0,$$

$$\omega_{1,2} = i\delta \pm \bar{\omega}_0, \qquad \bar{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Решение однородного уравнения ищем в виде:

$$q(t) \quad = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t}$$

$$q(t) \quad = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t},$$

$$\dot{q}(t) \quad = A_1(-\delta + i\bar{\omega}_0)\, e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2(-\delta - i\bar{\omega}_0) e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t}$$

Пусть заданы начальные условия:

$$q(0) \quad = CU_0, \quad \Rightarrow \; A_1 + A_2 = CU_0,$$

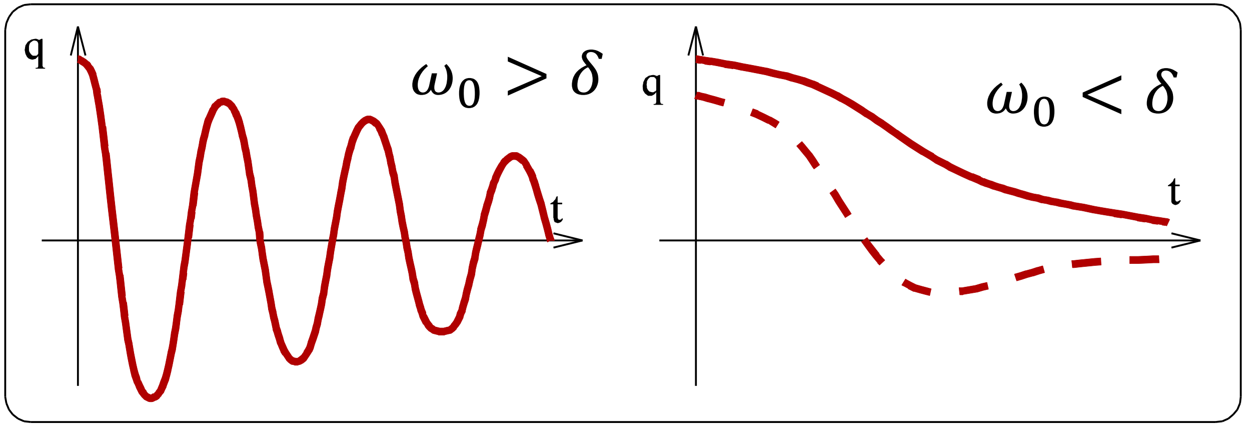
$$\dot{q}(0) \quad = 0 \; \Rightarrow \; A_1 - A_2 = \frac{\delta\, CU_0}{i\bar{\omega}_0}.$$

$$q(t) \quad = CU_0 e^{-\delta t}\left(cos\bar{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\bar{\omega}_0}\, sin\bar{\omega}_0 t\right)$$

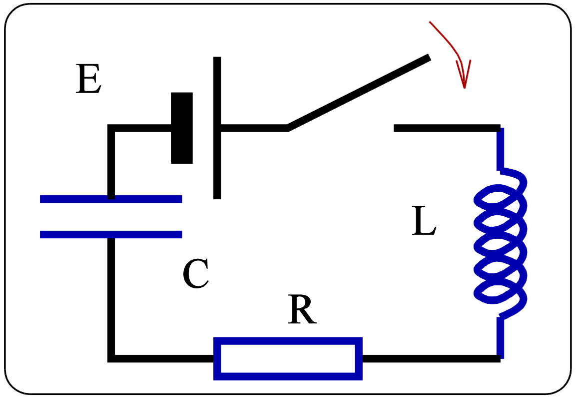
Имеем два случая

$$q(t) \quad = CU_0 e^{-\delta t}\left(cos\overline{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\widetilde{\omega}_0}\, sin\overline{\omega}_0 t\right), \quad \delta < \omega_0,$$

$$q(t) \quad = \frac{CU_0 e^{-\delta t}}{|\overline{\omega}_0|}\left((|\overline{\omega}_0| - \delta)e^{-|\overline{\omega}_0|t} + (|\overline{\omega}_0| + \delta)e^{|\overline{\omega}_0|t}\right), \quad \delta > \omega_0$$



Последовательный контур. Переходная характеристика



При $t = 0$ включаем постоянную э.д.с. E (ступенька):

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L},$$

$$q(0) = 0, \quad \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Пусть $\omega_0 \gg \delta$, E - постоянна.

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t} + CE,$$

$$q(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 + A_2 = -CE,$$

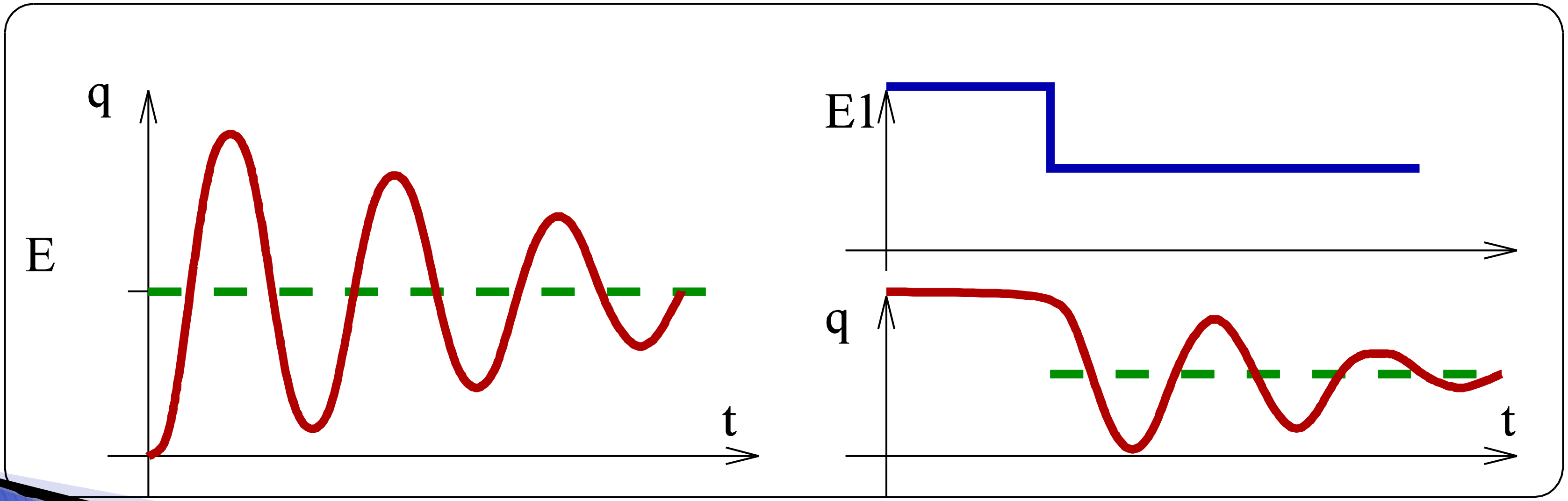
$$\dot{q}(0) = 0 \;\Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{\delta\, CE}{i\bar{\omega}_0}$$

$$q(t) \quad = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t} + CE$$

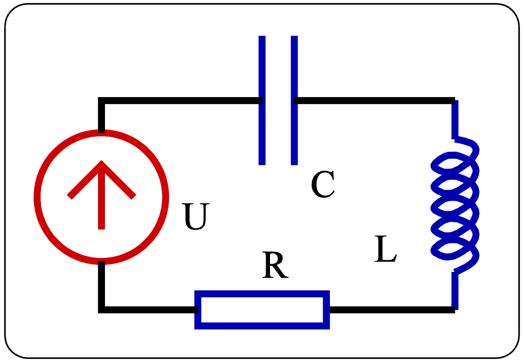
$$q(0) \quad = 0 \;\Rightarrow\; A_1 + A_2 = -CE, \qquad \dot{q}(0) = 0 \;\Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{\delta\, CE}{i\bar{\omega}_0},$$

$$q(t) \quad = CE - CEe^{-\delta t}\left(\cos\bar{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\bar{\omega}_0}\sin\bar{\omega}_0 t\right), \qquad \bar{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \delta^2,$$

$$h(t) \quad \equiv \frac{q(t)}{CE} = 1 - e^{-\delta t}\left(\cos\bar{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\bar{\omega}_0}\sin\bar{\omega}_0 t\right)$$



Последовательный контур.
Вынужденные колебания

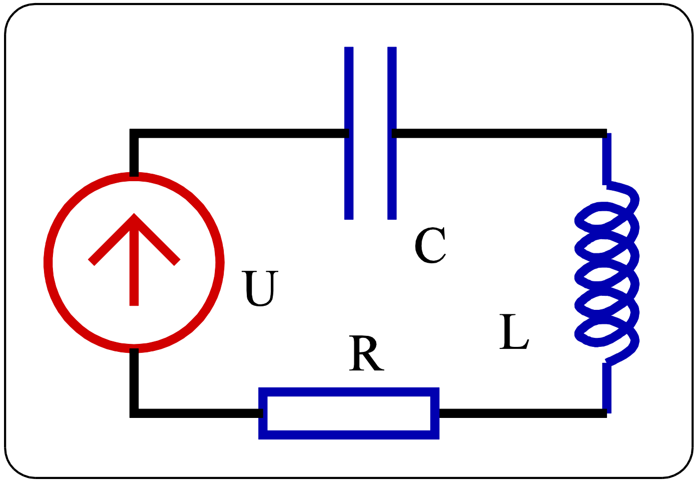


Установившийся режим: t ≫ $1/\delta$

$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{RI}_{U_R} + \underbrace{\int_{-\infty}^{t}\frac{I(\tau)}{C}\,d\tau}_{U_C} = U_g(t)$$

$$A\cos(\omega t + \phi) = \Re\left[Ae^{i\omega t}\right]$$

$$U_g(t) = U_g e^{i\omega t}, \qquad I_L = I_R = I_C = Ie^{i\omega t}.$$



$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{RI}_{U_R} + \underbrace{\int_{-\infty}^{t}\frac{I(\tau)}{C}\,d\tau}_{U_C} = U_g(t),$$

$$U_g(t) = U_g e^{i\omega t} \rightarrow$$

$$U_C \quad = \frac{1}{C}\int I_C dt = \frac{1}{i\omega C}\ I e^{i\omega t},$$

$$U_R \quad = R\, I e^{i\omega t},$$

$$U_L \quad = \frac{dI_L}{dt} = i\omega L\, I e^{i\omega t}.$$

Реактивное сопротивление (импеданс):

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \qquad Z_L = i\omega L,$$

$$U(t) = U_C + U_R + U_C, \qquad U_g = IZ(\omega),$$

$$Z(\omega) = \left(\frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L\right) = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right) =$$

$$= \rho\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right).$$

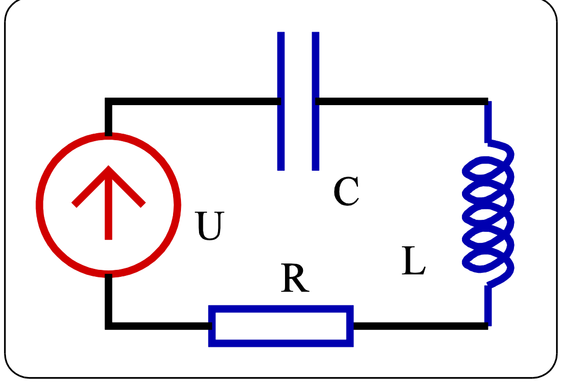
ρ - характеристическое сопротивление, Q - добротность, ξ - расстройка.

Характеристики колебательного контура (резонатора)

ρ -- характеристическое сопротивление,
Q -- добротность, ξ – расстройка .

$$Z(\omega) \quad = \sqrt{\frac{L}{C}}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right]\right) = \rho\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right),$$

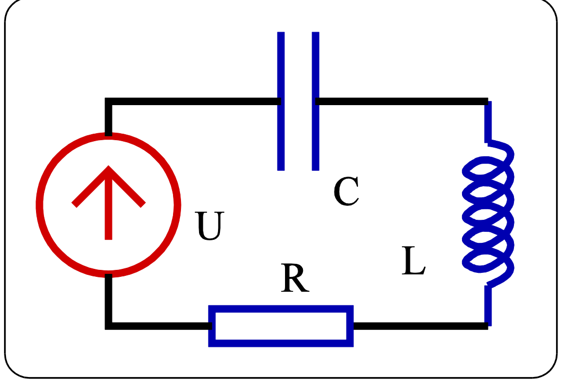
$$\boxed{\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta}, \qquad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}$$



$$I(\omega) = \frac{U_g}{\rho\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right)}, \qquad U_R = RI, \qquad U_L = i\omega L\, I, \qquad U_C = \frac{I}{i\omega C}$$

$$|I(\omega)| = \frac{U_g}{\rho\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \qquad \varphi_I = arg(I(\omega)) = arctg(-Q\,\xi),$$

$$|U_R(\omega)| = \frac{R\,U_g}{\rho\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \qquad \varphi_{U_R} = \varphi_I,$$



$$|U_L(\omega)| = \frac{\omega L\, U_g}{\rho\sqrt{\frac{1}{Q^2}+\xi^2}} = \frac{\omega\, U_g}{\omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2}+\xi^2}}, \qquad \varphi_{U_L} = \varphi_I + \frac{\pi}{2},$$

$$|U_C(\omega)| = \frac{U_g}{\rho\omega C\sqrt{\frac{1}{Q^2}+\xi^2}} = \frac{\omega_0\, U_g}{\omega\sqrt{\frac{1}{Q^2}+\xi^2}}, \qquad \varphi_{U_C} = \varphi_I - \frac{\pi}{2},$$

Последовательный контур. Резонанс:

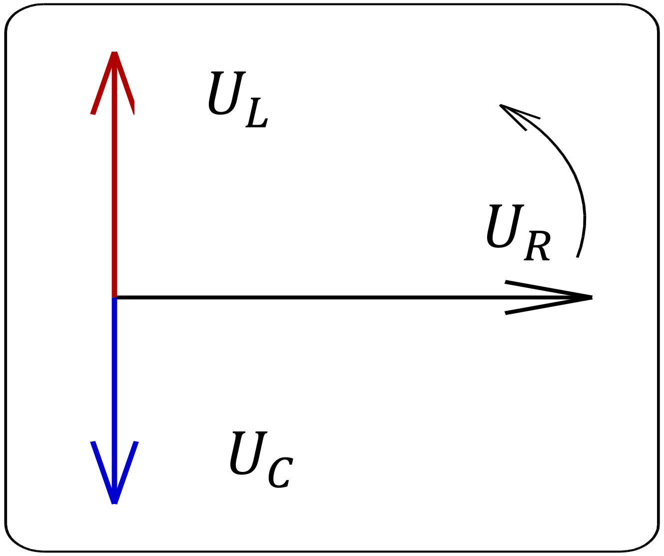
$$\xi = 0, \qquad \omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad I(\omega)_{max} = \frac{U_g}{r},$$

$$U_L = i\omega_0 L \frac{U_g}{r} = \frac{i}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\, U_g e^{i\omega t} = iQ\, U_g,$$

$$U_C = \frac{1}{i\omega_0 C}\frac{U_g}{r} = -\frac{i}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\, U_g e^{i\omega t} = -iQ\, U_g$$

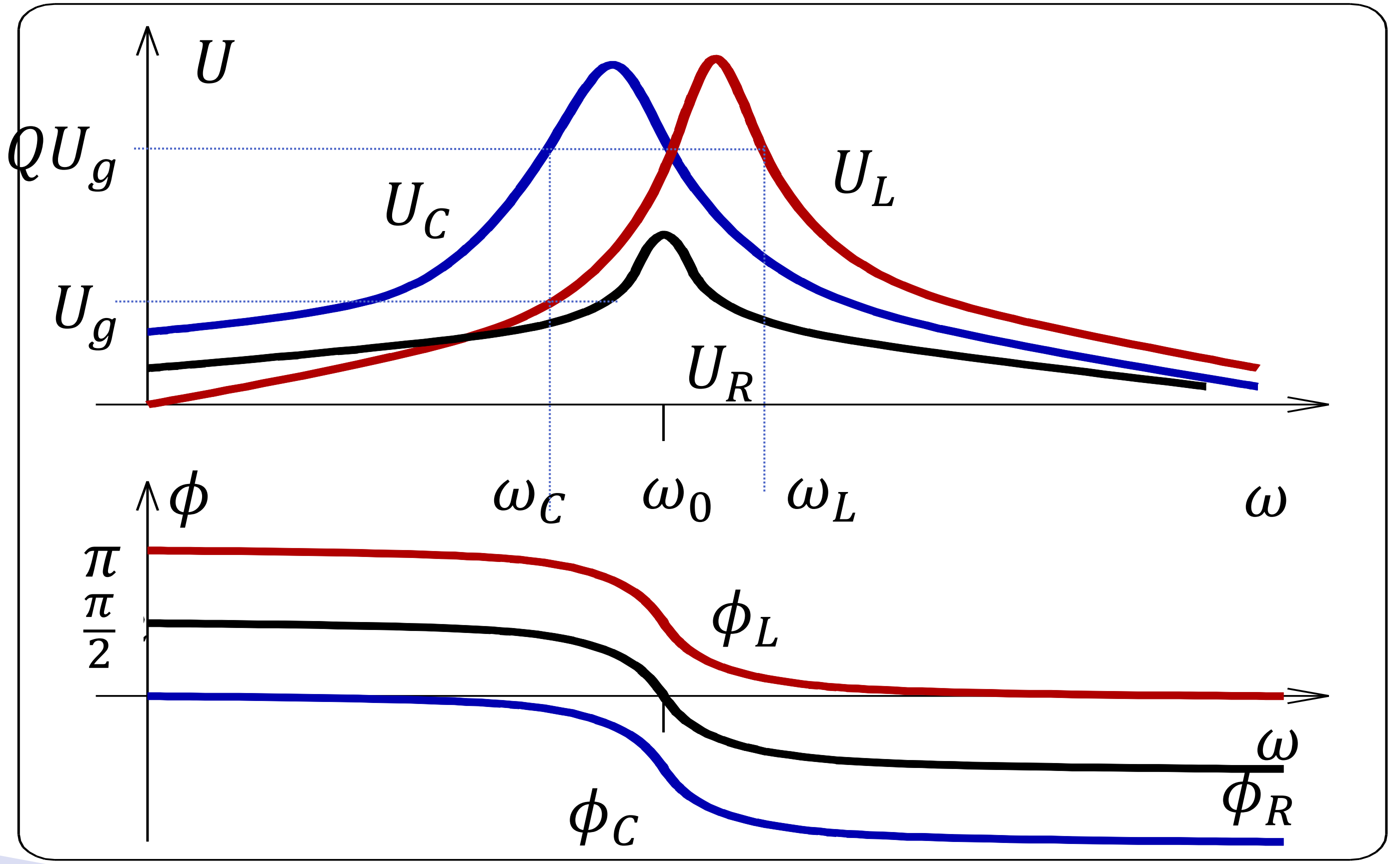
Резонанс напряжений: U_C и U_L в противофазе.

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{r}$$



Резонансные кривые

$$\omega_C = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}},\ \omega_L = \omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}}$$



Задачи для «любознательных»
«Вынужденные колебания»

В последовательном колебательном контуре ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\delta = r/(2L)$, $\omega_0 \gg \delta$) в момент времени $t = 0$ включается генератор, напряжение $U_g(t)$ которого меняется по закону:

$$U_g(t) = \begin{cases} U_0 \cos(\omega_0 - \Delta)t & 0 \le t, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

Найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ и построить графики для случаев: а) $\Delta = 0$, б) $\Delta = \delta$, в) $\Delta = 5\delta$.

Физический смысл добротности:

Свободные колебания:

$$A = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t), \qquad Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 \tau^*}{2};$$

Потери энергии за период:

$$\Delta \equiv 2\pi \times \frac{W_{\text{запас}}}{W_{\text{потери за период}}} =$$

$$= 2\pi \times \frac{\left(\dfrac{LI^2}{2}\right)}{\left(\dfrac{RI^2}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R} = Q;$$

Физический смысл добротности:

Ширина резонансной кривой:

$$I = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{R + i\rho\xi} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{R(1 + iQ\xi)},$$

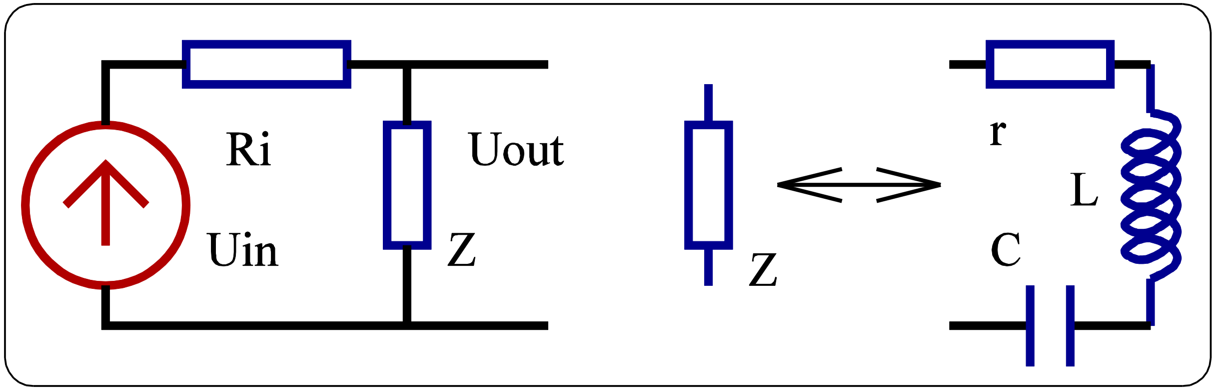
$$I_{\sqrt{2}}(\omega) = \frac{I_{max}(\omega)}{\sqrt{2}}, \Rightarrow \ \xi Q = 1, \qquad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

При $Q \gg 1$:

$$\xi \simeq \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \qquad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \Delta\omega \frac{\omega_0}{Q},$$

При Q ≪ 1: $\omega_1 \simeq Q\omega_0, \qquad \omega_2 \simeq \dfrac{\omega_0}{Q}$

Резонансные явления в линейных цепях

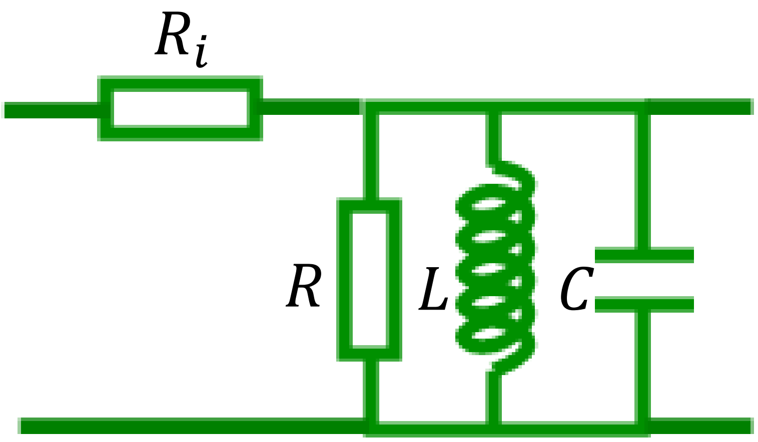


$$K(\omega) = \frac{U_{\text{out}}(\omega)}{U_{\text{in}}(\omega)} = \frac{Z}{R_i + Z},$$

$$R_i \gg Z(\omega), \quad \Rightarrow \quad K(\omega) \to 0,$$

$$R_i \ll Z(\omega), \quad \Rightarrow \quad K(\omega) \to 1$$

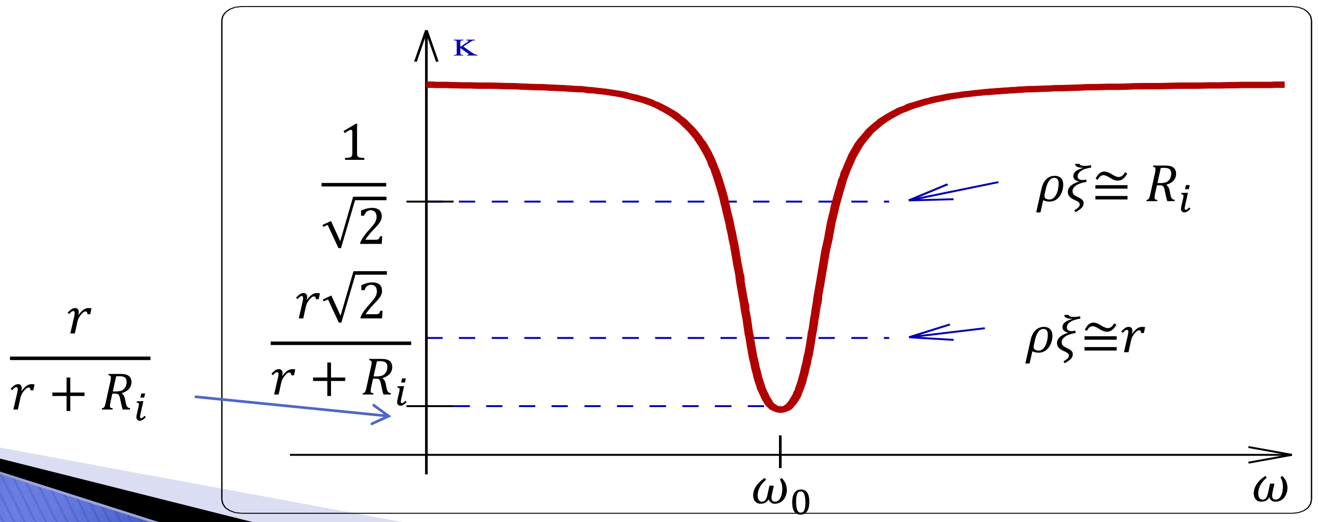
Пример: фильтр-пробка. Пусть $\rho \gg R_i \gg \mathrm{r}$:



$$K(\omega) = \frac{Z}{Z + R_i} = \frac{r + i\rho\xi}{R_i + r + i\rho\xi},$$

$$Z = r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = r + i\rho\xi$$

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{\rho}{R_i} = \frac{1}{Q_{\text{нагр}}}, \qquad Q_{\text{нагр}} \gg 1$$

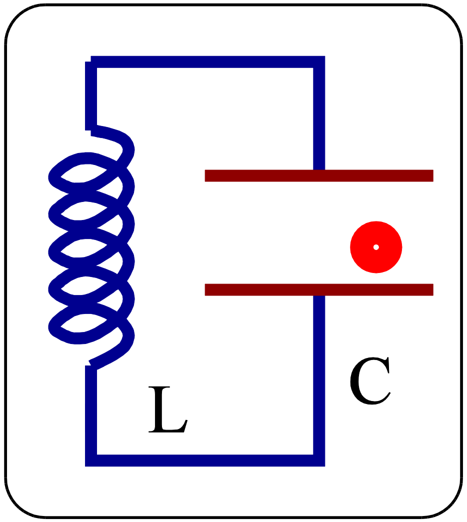


Задачи для «любознательных»

1 **«Электрон»** Дано: $L,\ C,\ d,\ m,\ e$

1). Найти, чему равен сдвиг собственной частоты контура, если в емкость ``вложен" свободный электрон.

2). То же самое, если электрон "на пружинке" (частота его свободных колебаний равна ω_e).



2 **«Резонансная кривая»** С какой максимальной скоростью $\frac{d\omega_g}{dt}$ можно менять частоту генератора ω_g, чтобы ``прописать" (измерить) резонансную кривую резонатора с заданной точностью, например, с относительной ошибкой $\varepsilon = 0.03$. Параметры резонатора считать известными.