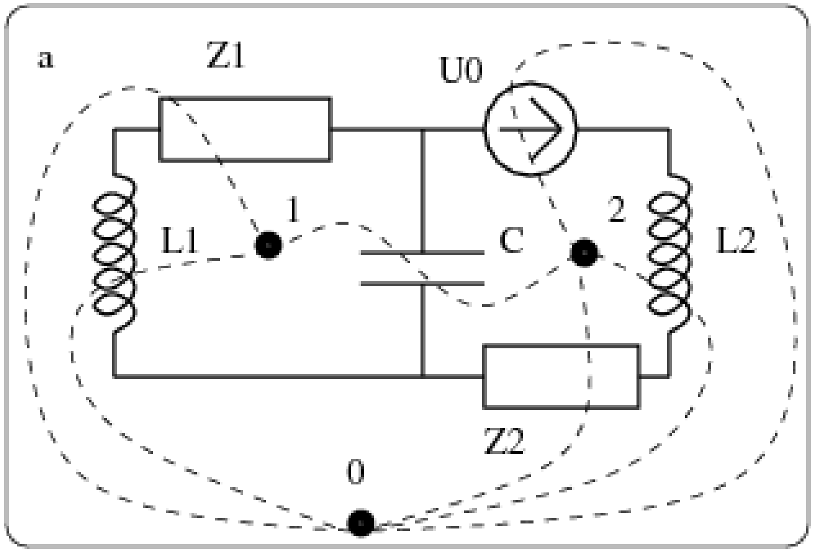
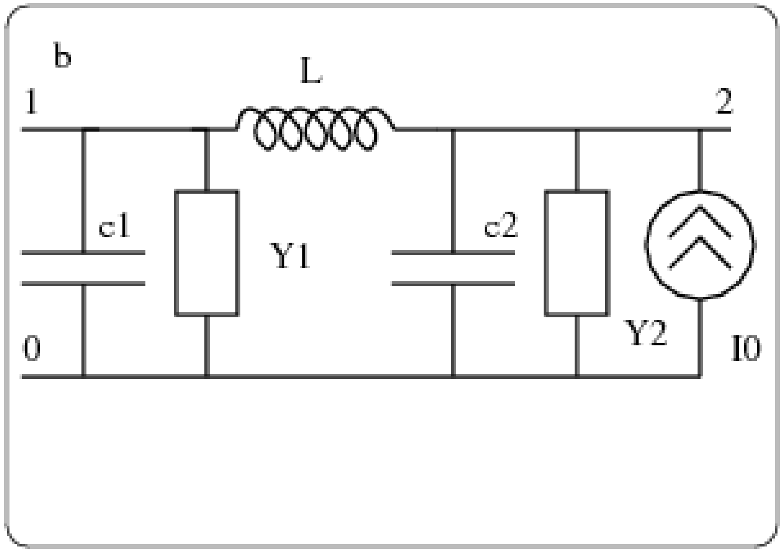
# Принцип дуальности – правило составления дуальной схемы

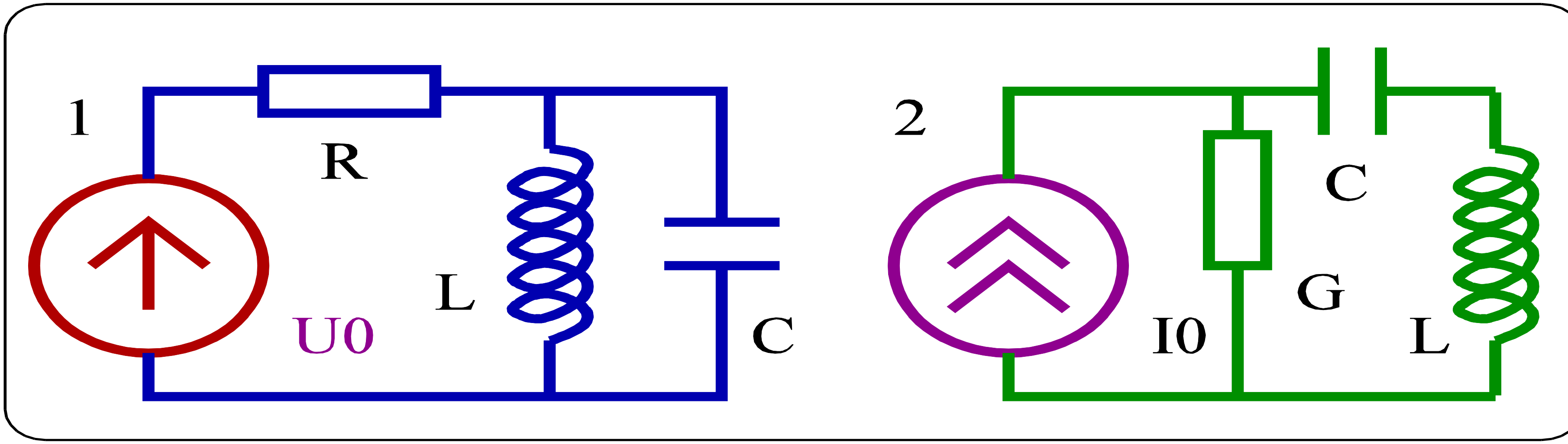



$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{Z_1}, \qquad \bar{Y}_2 = \frac{1}{Z_2},$$

$$i\omega\bar{L} = \frac{1}{i\omega C}, \qquad \frac{1}{i\omega\bar{C}_1} = i\omega L_1, \qquad \frac{1}{i\omega\bar{C}_2} = i\omega L_2$$

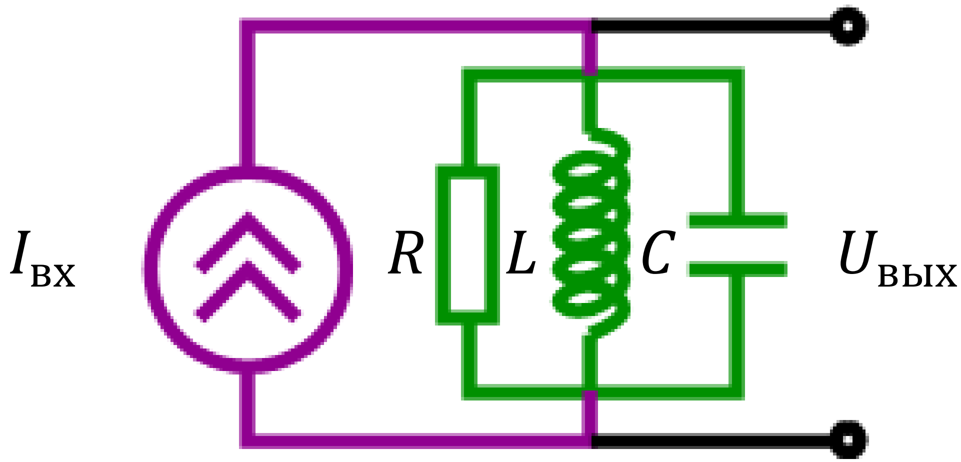
# Приинцип дуальности. Пример




$$1: \qquad I_R = \frac{U_0}{R + Z_1}; \quad Z_1 = \frac{i\omega C}{1 - \omega^2 LC},$$

$$2: \qquad U_G = \frac{I_0}{G + 1/Z_2}; \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

# Параллельный контур

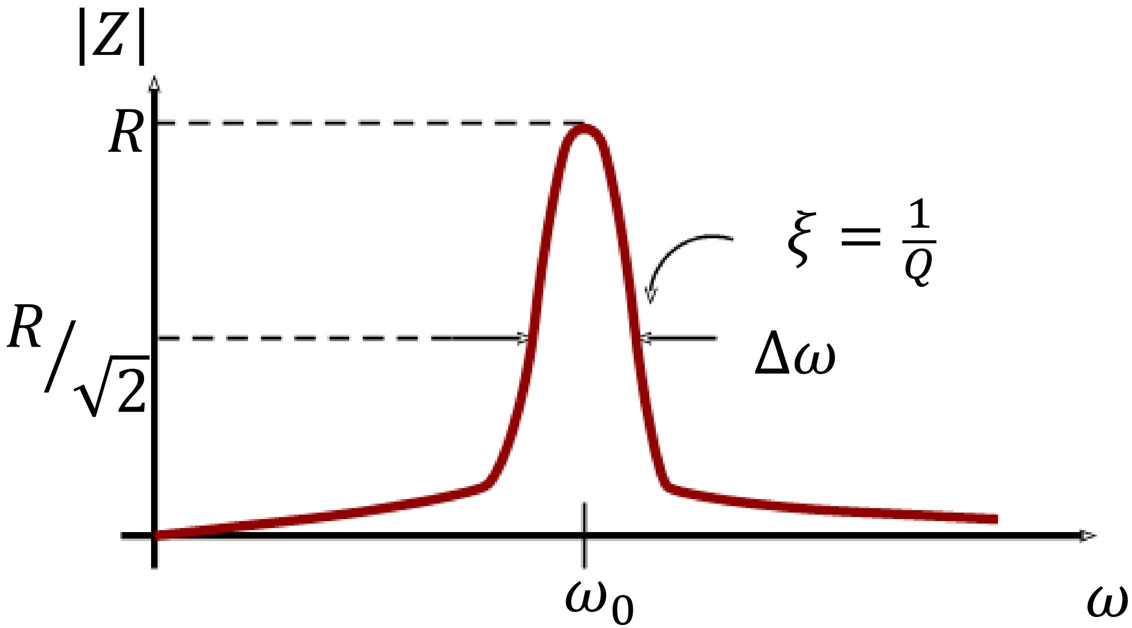



$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{Q} + i\xi\right),$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad Q = \frac{R}{\rho}, \qquad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$Z(\omega) = \frac{\rho\, Q}{1 + iQ\xi}$$

# Параллельный контур.
# Резонансная кривая




$$U_{\text{вых}}(\omega) \quad = \quad I_0 Z(\omega) = \frac{\rho\, Q}{1 + iQ\xi} \cdot I_0, \qquad I = I_o\, e^{i\omega t}$$

$$I_R \quad = \quad \frac{\rho}{R}\, \frac{Q\, I_0}{1 + iQ\xi}, \qquad I_L = \frac{-i\omega_0}{\omega}\, \frac{Q\, I_0}{1 + iQ\xi},$$

$$I_C \quad = \quad \frac{i\omega}{\omega_0}\, \frac{Q\, I_0}{1 + iQ\xi}.$$

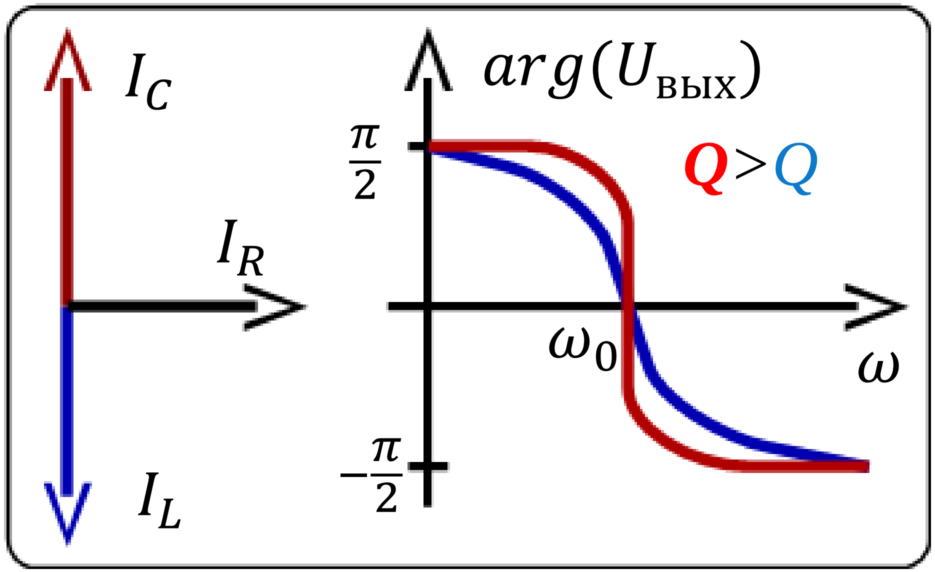
**Уровень** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (напряжение или токи $I_L,\ I_C,\ I_R$) $\Rightarrow\ \ \xi Q = 1$

При $Q \gg 1$: $\qquad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega, \quad \Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$

При $Q \ll 1$: $\qquad \omega_1 \approx Q\omega_0, \qquad \omega_2 \approx \frac{\omega_0}{Q}$

**Резонанс токов:**

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$
$$U_{вых}(\omega_0) = I_0 R,$$
$$I_L(\omega_0) = -iQI_0,$$
$$I_C(\omega_0) = iQI_0.$$



## Добротность *(еще раз)*

**Разные определения добротности $Q$:**

$$Q = \frac{\text{Запасенная энергия}}{2\pi \times (\text{Энергия потерь за период})},$$

$$Q = \frac{\omega_0 \tau^*}{2}, \qquad \tau^* \; - \text{время затухания}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \qquad \Delta\omega = \frac{2}{\tau^*} \; - \text{ширина полосы}$$

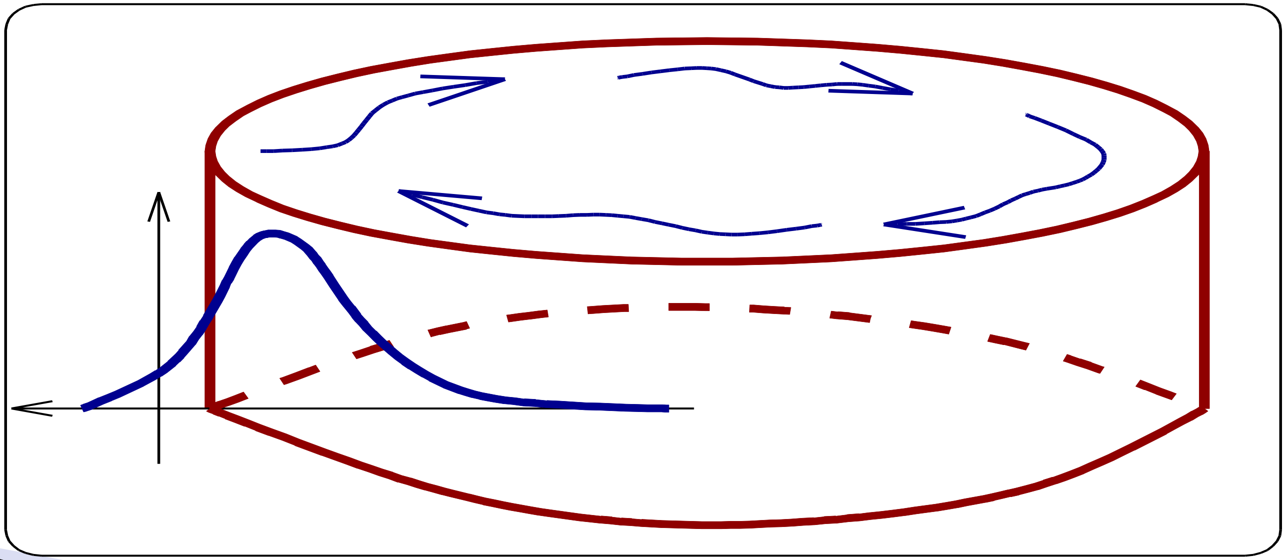
$$Q = \frac{\rho}{r} \;\; (\text{последовательный контур}), \qquad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{R}{\rho} \;\; (\text{параллельный контур})$$

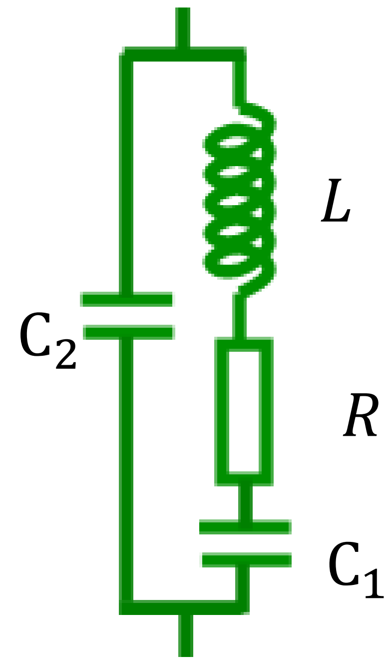
# Примеры:

| | | |
|---|---|---|
| Обычный $LC$ контур | $Q \approx 50 \dots 300$ | $f = 10^5 \dots 10^8$ Гц |
| Кварцевый резонатор | $Q \approx 10^4 \dots 10^5$ | $f = 10^3 \dots 10^7$ Гц |
| Металлический объемный СВЧ резонатор | $Q \approx 50 \dots 10^5$ | $f = 10^9 \dots 10^{12}$ Гц |
| криогенный СВЧ резонатор | $Q \approx 10^6 \dots 10^{10}$ | $f = 10^9 \dots 10^{12}$ Гц (сверхпроводники, сапфир) |
| Оптические микрорезонаторы | $Q \approx 10^{10}$ | (пл. кварц, $CaF_2$, $f \approx 10^{15}$ Гц) |
| Оптический резонатор Фабри-Перо | $Q \approx 10^{12}$ | ($L = 4$ км, $f \approx 10^{15}$ Гц) |
| | | |

Диэлектрические резонаторы на эффекте полного внутреннего отражения - в СВЧ диапазоне из сапфира, плавленого кварца и в оптике плавленого кварца или флюорита.
В сапфире продемонстрирован уровень фундаментальных потерь $Q \sim 1/T^5$.

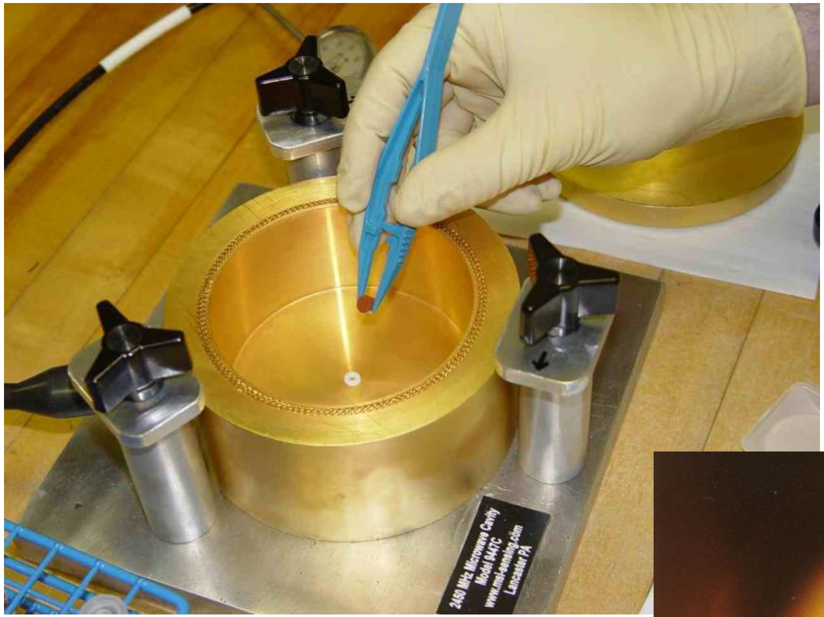


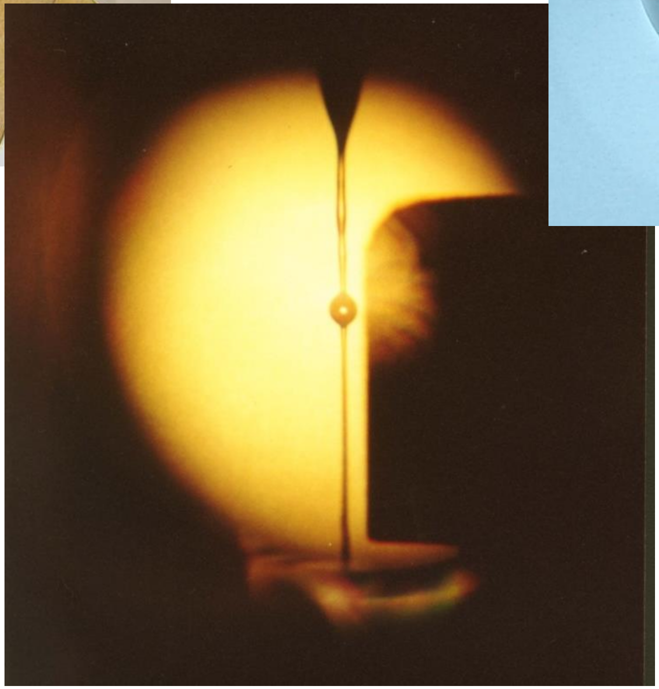
# Кварцевые резонаторы:
## Механический осциллятор связанный с электрической схемой через прямой и обратный пьезоэффект



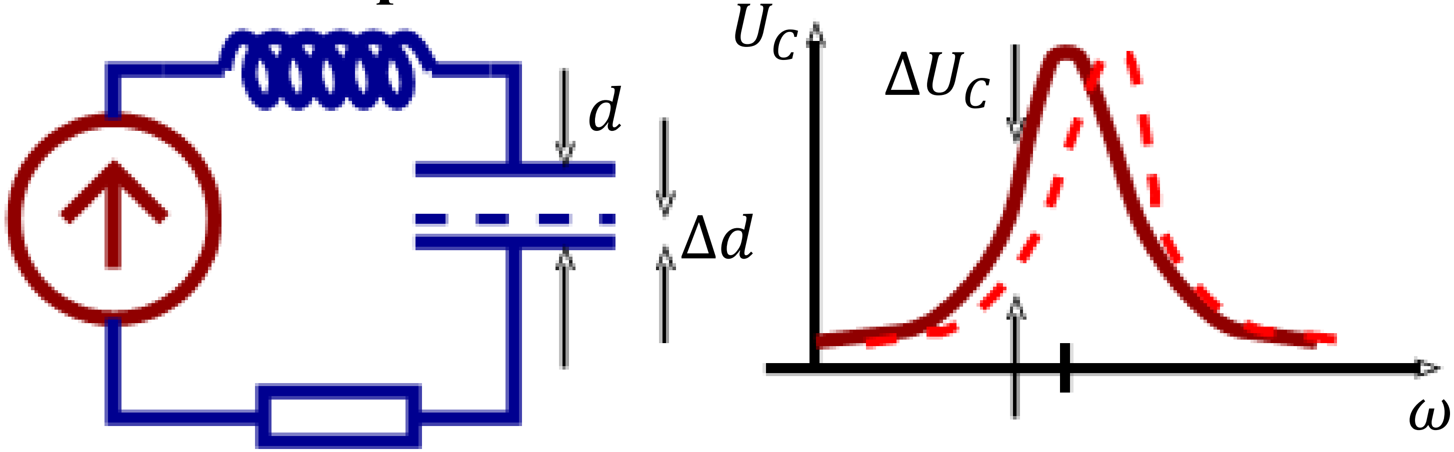

Эквивалентная схема

# Объемные резонаторы



# Емкостной датчик:
# Измерение малых смещений




$$\frac{\Delta U_C}{U_C} \cong \frac{Q}{2}\frac{\Delta d}{d}$$

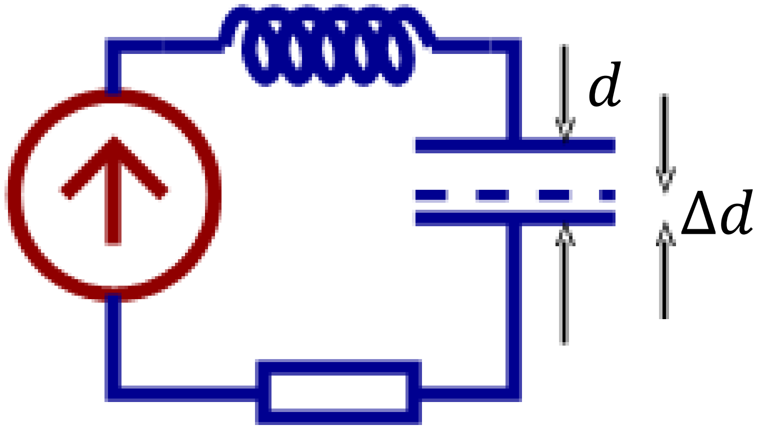
## Задача: Емкостной датчик

Пусть $\Delta d = d_0 \cos\Omega t$.

Каковы ограничения на $d_0$ и $\Omega$?

Как выбирается оптимальная частота генератора?

# Емкостной датчик:
# Измерение малых смещений




$$(\Delta d)_{min} \cong \frac{2d}{QU_C}(\Delta U_C)_{min}$$

Если $Q = 200$, $\frac{\Delta U_C}{U_C} = 1 \times 10^5$, $d = 1 \times 10^{-2}$ см, то
$\Delta d = 1 \times 10^{-9}$ см !

$$\Delta d \quad = \quad 1 \times 10^{-9}\ cm \times \frac{d}{1 \times 10^{-2}\ cm} \times \frac{\Delta U_C / U_C}{1 \times 10^{-5}} \times \frac{200}{Q}$$

# Достигнуто (физфак МГУ, 1979):

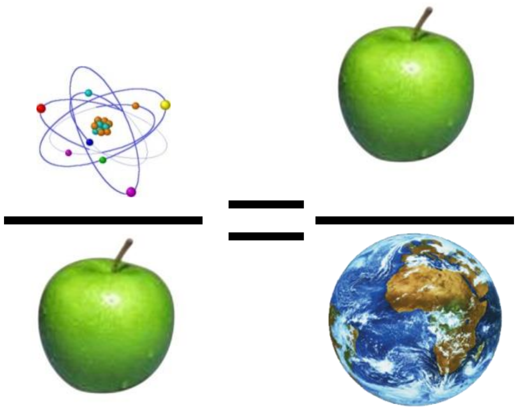
$$\boldsymbol{\Delta d = 6 \times 10^{-17}} \text{ см}$$

при $Q = 5 \times 10^4, \; d = 3 \times 10^{-4}$ см
$\Omega \approx 3$ кГц и времени измерения $\tau = 1$ сек.

## Достигнуто (физфак МГУ, 1979):

$$\boldsymbol{\Delta d = 6 \times 10^{-17}}\ \text{см}$$

при $Q = 5 \times 10^4,\ d = 3 \times 10^{-4}$ см
$\Omega \approx 3$ кГц и времени измерения $\tau = 1$ сек.



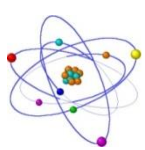
# Достигнуто (физфак МГУ, 1979):

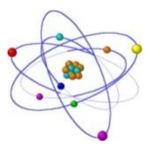
$$\boldsymbol{\Delta d = 6 \times 10^{-17}}\ \text{см}$$

при $Q = 5 \times 10^4,\ d = 3 \times 10^{-4}$ см

$\Omega \approx 3$ кГц и времени измерения $\tau = 1$ сек.

$\mathbf{6 \times 10^{-17}}$ см





## Пределы измерения малых смещений

**<u>Оптика:</u> резонатор Фабри-Перо**

$$\Delta d \approx \frac{\lambda}{F}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{W\tau}} \approx \frac{\lambda}{F}\frac{1}{\sqrt{N}},$$

где $F = \frac{\pi}{1-R}$ - резкость, $W$ -мощность, $N$ - число использованных фотонов, $R$ - коэффициент отражения зеркала.

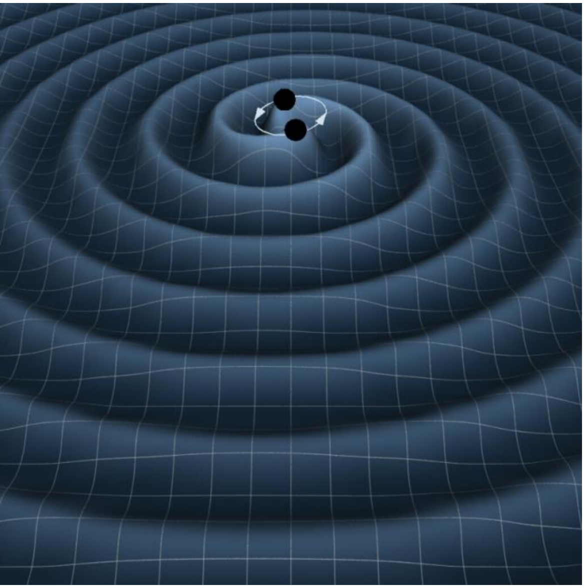
## Радиофизика:

$$\Delta d \quad \approx \frac{d}{Q}\sqrt{\frac{\kappa_B T}{W\tau}} \approx \frac{\lambda}{F} \times \frac{1}{\sqrt{N}} ,$$

Что меньше: $\dfrac{d}{Q}$ или $\dfrac{\lambda}{F}$ ?

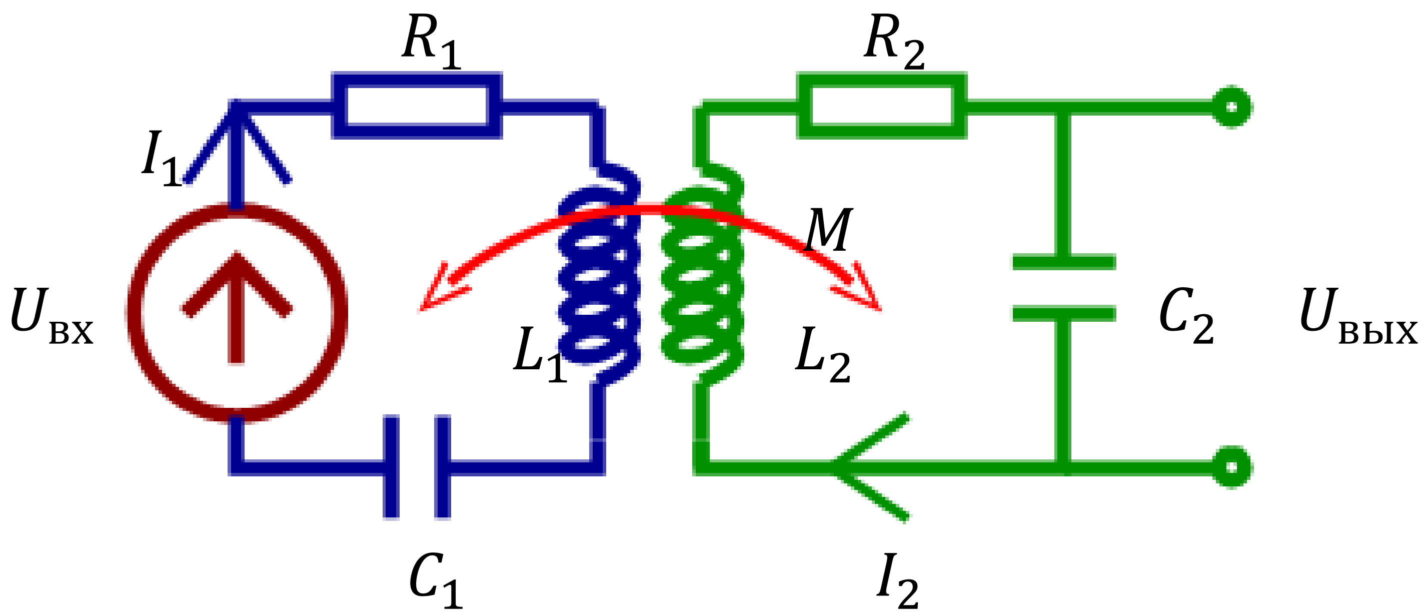
В оптике $\dfrac{\lambda}{F} \approx \dfrac{10^{-4}\text{см}}{10^{6}} \approx 10^{-10}$ см.

# **Для регистрации гравитационных волн** нужно



$$\Delta d \approx \mathbf{10^{-19}}\ \text{см за } \tau \approx 10^{-3}\ \text{сек.}$$

# Связанные контуры




$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + \int \frac{I_1}{C_1}\, dt + M \frac{dI_2}{dt} = U_{вх}(t),$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + \int \frac{I_2}{C_2}\, dt + M \frac{dI_1}{dt} = 0.$$

**Гармоническое воздействие:** $\boldsymbol{U_{\text{вх}}(t) = U_0 e^{i\omega t}}$.

Рассматриваем **установившийся** процесс. Заменяем

$$\frac{dI_1}{dt} \quad \to \quad i\omega, \qquad \int dt \to 1/i\omega.$$

Тогда

$$I_1\left(i\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{i\omega C_1}\right) + i\omega M\, I_2 \quad = \quad U_0,$$

$$I_2\left(i\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{i\omega C_2}\right) + i\omega M\, I_1 \quad = \quad 0,$$

$$L_1\omega_{01}\, I_1\left(\frac{R_1}{L_1\omega_{01}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_{01}} - \frac{\omega_{01}}{\omega}\right]\right) + i\omega M\, I_2 \quad = \quad U_0,$$

$$L_2\omega_{02}\, I_2\left(\frac{R_2}{L\omega_{02}} + i\left[\frac{\omega}{\omega_{02}} - \frac{\omega_{02}}{\omega}\right]\right) + i\omega M\, I_1 \quad = \quad 0$$

# Рассмотрим для простоты случай

$$L_1 = L_2 = L, \qquad C_1 = C_2 = C, \qquad R_1 = R_2 = R.$$

Обозначим $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$, $\delta = \frac{R}{\omega_0 L}$, $\boldsymbol{\kappa} = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{L}}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega_0}}$.

Тогда: $$(\delta + i\xi)I_1 + i\kappa I_2 = \frac{U_0}{\omega_0 L}, \qquad (1)$$

$$i\kappa I_1 + (\delta + i\xi)I_2 = 0, \qquad (2)$$

Комбинируем:

$$(1) \times i\kappa - (2) \times (\delta + i\xi) \quad \Rightarrow \quad 0 - (\kappa^2 + (\delta + i\xi)^2)I_2 = \frac{i\kappa U_0}{\omega_0 L},$$

$$U_{\text{вых}}(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{i\omega C} = -\frac{U_0\,\kappa\,\frac{\omega_0}{\omega}}{\kappa^2 + (\delta + i\xi)^2}$$

## Результат:

$$U_{\text{вых}}(\omega) \quad = \quad \frac{I_2(\omega)}{i\omega C} = -\frac{U_0\,\kappa\,\frac{\omega_0}{\omega}}{\kappa^2+(\delta+i\xi)^2}$$

$$K(\omega) \quad = \quad \frac{-\kappa\,\omega_0}{\omega(\kappa^2+\delta^2-\xi^2+2i\delta\xi)} = \frac{-M/L}{(\kappa^2+\delta^2-\xi^2+2i\delta\xi)}$$

Пусть: $Q \equiv 1/\delta \gg 1,\ \xi \ll 1,\quad k \approx$const

Квадрат модуля знаменателя:

$$N \quad = (\kappa^2+\delta^2-\xi^2)^2+4\delta^2\xi^2,$$

$$\partial_\xi N \quad = 2\xi(-2\kappa^2-2\delta^2+2\xi^2+4\delta^2) = 0,$$

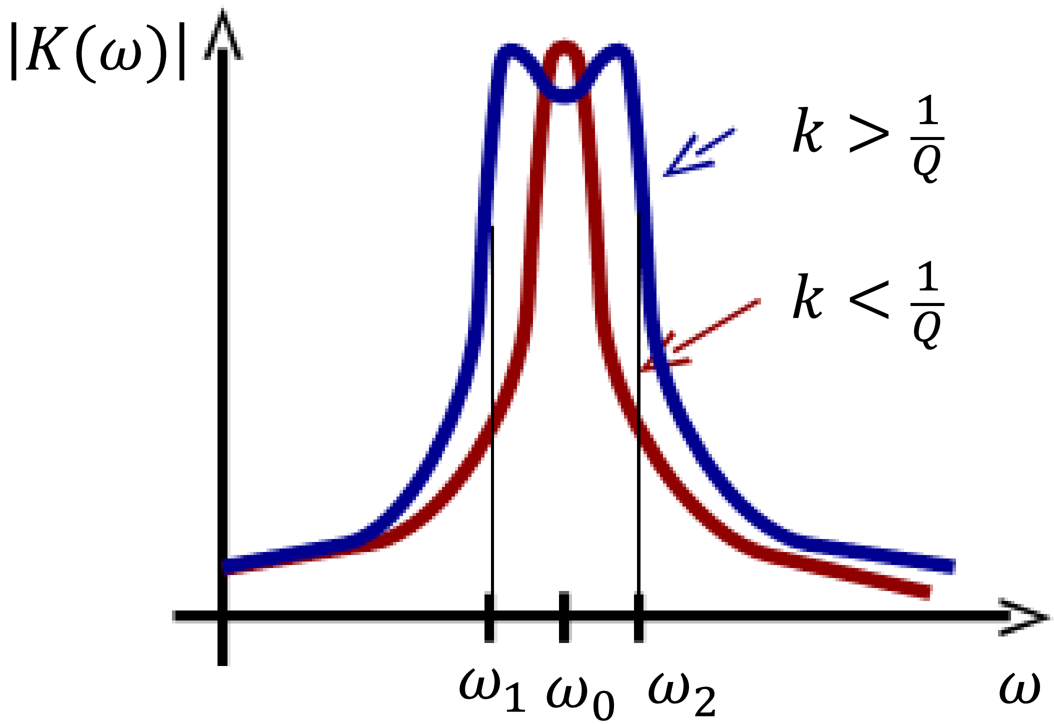
$$\xi_1 \quad = 0,\quad \xi_{2,3}^2 = \kappa^2-\delta^2,\quad \delta = \frac{1}{Q}.$$

$$K(\omega) \quad = \frac{-\kappa\,\omega_0}{\omega\sqrt{(\kappa^2+\delta^2-\xi^2)^2+4\delta^2\xi^2}},$$

$$\xi_1 \quad = 0, \qquad \xi_{2,3}^2 = \kappa^2 - \delta^2, \qquad \delta = \frac{1}{Q}.$$

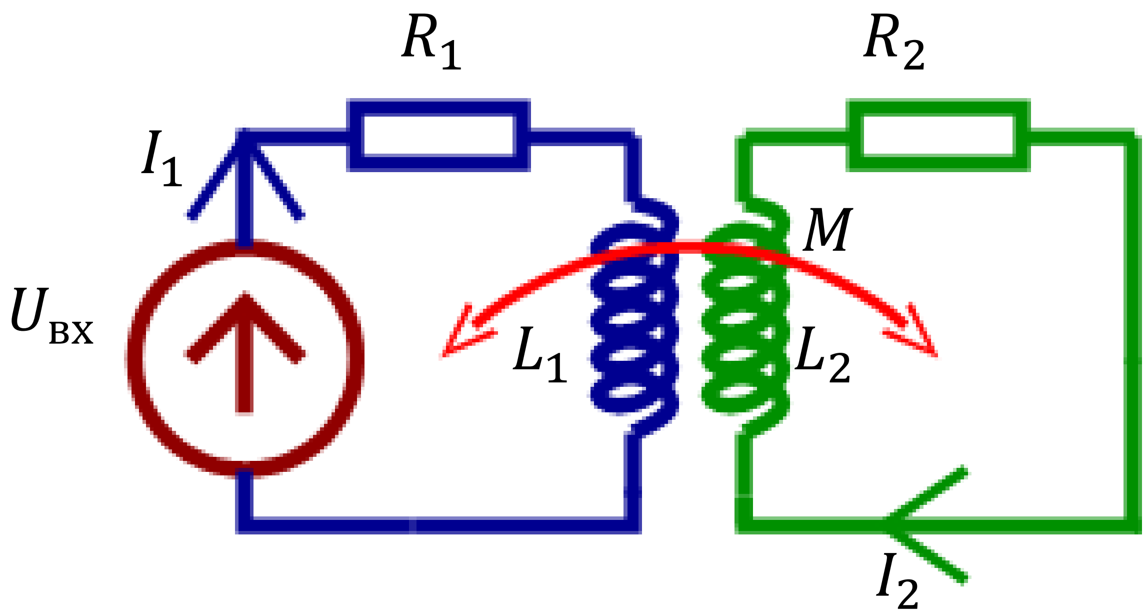
**Коэффициент передачи $\boldsymbol{K(\omega)}$:**
при $\kappa < \delta$ - один экстремум,
при $\kappa > \delta$ - три экстремума.

# Связанные резонаторы.
# Резонансная кривая




Комбинация нескольких контуров дает полосовой фильтр. Ширина полосы и крутизна фронтов зависит от числа и параметров использованных контуров.

# Трансформатор




$$U_{вх} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} (R_1 + i\omega L_1)I_1 - i\omega M I_2 &= U_0, \\ -i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2)I_2 &= 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(R_1 + i\omega L_1)I_1 - i\omega M I_2 &= U_0, & (1)\\
-i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2)I_2 &= 0. & (2)
\end{aligned}
$$

**Условия идеальной трансформации:**

$$
\begin{aligned}
M^2 &\cong L_1 L_2, & (3)\\
R_1 \ll \omega L_1, &\quad R_2 \ll \omega L_2. & (4)
\end{aligned}
$$

Тогда(из 2): $\frac{I_2}{I_1} = \frac{i\omega M}{R_2 + i\omega L_2} \cong \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{n},$

$$\frac{U_{L2}}{U_{L1}} = \frac{I_2\ i\omega L_2}{I_1\ i\omega L_1} \cong n, \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

$n$ - коэффициент трансформации.

$$(R_1 + i\omega L_1)I_1 - i\omega M I_2 \quad = \quad U_0, \qquad (1)$$
$$-i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2)I_2 \quad = \quad 0. \qquad (2)$$

$$M^2 \cong L_1 L_2, \qquad (3)$$
$$R_1 \quad \ll \quad \omega L_1, \quad R_2 \ll \omega L_2. \qquad (4)$$

Решаем систему (1, 2), учитывая (3, 4):

$$D \quad = \quad (R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + M^2\omega^2 =$$
$$= \quad \omega^2(M^2 - L_1 L_2) + i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1) + R_1 R_2 \cong$$
$$\cong i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1),$$
$$\Delta_2 \quad = \quad iM\omega\, U_0, \quad \Delta_1 = U_0(R_2 + i\omega L_2) \cong iL_2\omega\, U_0$$

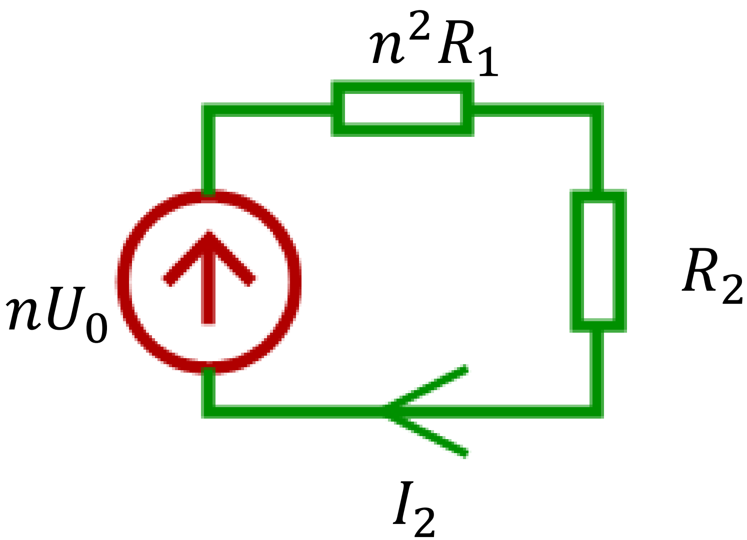
$$I_2 = \frac{\Delta_2}{D} \cong \frac{MU_0}{L_1 R_2 + L_2 R_1} = \frac{\frac{MU_0}{L_1}}{\frac{R_1 L_2}{L_1} + R_2} = \frac{\mathbf{nU_0}}{\mathbf{R_2 + n^2 R_1}}, \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

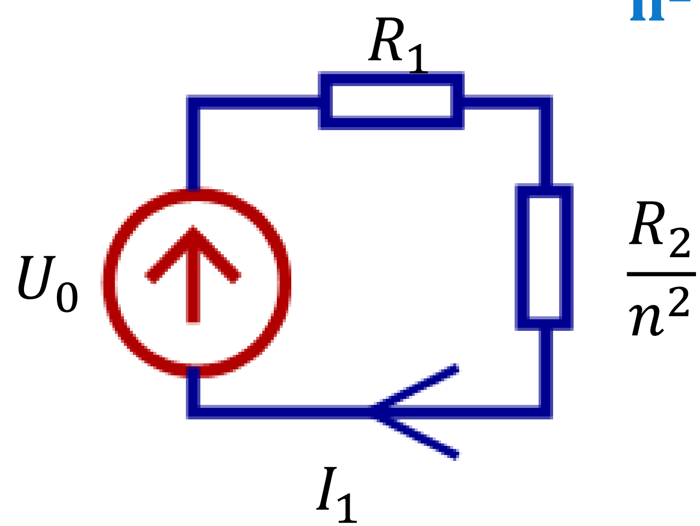
$$I_1 = \frac{\Delta_1}{D} \cong \frac{L_2 U_0}{L_1 R_2 + L_2 R_1} = \frac{\mathbf{U_0}}{\frac{\mathbf{R_2}}{\mathbf{n^2}} + \mathbf{R_1}}$$

# Эквивалентные схемы

$$I_2 \cong \frac{MU_0}{L_1R_2+L_2R_1} = \frac{\mathbf{nU_0}}{\mathbf{R_2+n^2R_1}}, \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$I_1 \cong \frac{L_2U_0}{L_1R_2+L_2R_1} = \frac{\mathbf{U_0}}{\frac{\mathbf{R_2}}{\mathbf{n^2}} + \mathbf{R_1}}$$

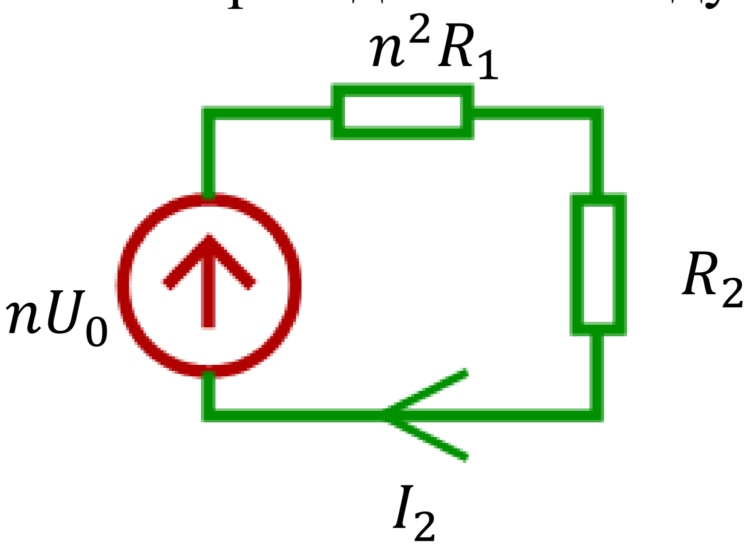


# Мощность на сопротивлении $R_2$

$$P_2 = \frac{I_2^2 R_2}{2} \cong \frac{(nU_0)^2 R_2}{2(n^2R_1 + R_2)^2}$$

- «приведена к выходу»




$$P_2 = \frac{U_0^2 \times \frac{R_2}{n^2}}{2\left(R_1 + \frac{R_2}{n^2}\right)^2}$$

- «приведена ко входу»