

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Физический факультет



**В. И. Балакший, А. А. Белов,
Т. Б. Косых, Ю. И. Кузнецов**

**ФИЗИКА
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**



Москва

2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория колебаний находит разнообразные и обширные применения. Практически в любой области науки и техники перед инженерами и учеными возникают практические задачи, тесно связанные с проблемами теории колебаний и методами исследования колебательных явлений. И, хотя в каждом конкретном случае эти задачи имеют свою специфику, все они решаются на основе общих принципов и подходов, составляющих содержание теории колебаний. В связи с этим у лиц, изучающих или использующих теорию колебаний в своей деятельности, наибольшее затруднение вызывает применение общих положений теории к решению конкретных задач.

В литературе, посвященной теории колебаний, имеется мало книг, ставящих своей целью научить читателя методам решения задач. Между тем нужда в таких руководствах остро ощущается как студентами в процессе обучения, так и специалистами в их практической деятельности.

Авторы настоящего пособия, опираясь на многолетний опыт преподавания теории колебаний на физическом факультете МГУ, поставили своей целью создание такого руководства по решению задач, которое дополняло бы курс теории колебаний, читаемый студентам 3—4 курсов отделения радиофизики, помогая им активно, творчески усваивать основные положения теории, демонстрируя их в действии.

Ввиду этого в пособии основное внимание уделено решению конкретных задач, специально подобранных так, чтобы иллюстрировать основные разделы теоретического курса.

Поэтому в каждом разделе пособия излагаются лишь краткие сведения из теории, после чего приведено подробное решение типичных задач. Затем приводится ряд задач для самостоятельного решения. Эти задачи снабжены ответами.

В данном пособии рассматриваются колебания в линейных и нелинейных системах с одной степенью свободы.

Пособие составлено в соответствии с принципом разделения науки о колебаниях на разделы по виду действующих на систему сил. В соответствии с этим принципом в пособии исследуются собственные или свободные колебания, вынужденные колебания, колебания в системах с переменными параметрами и автоколебания.

1. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Строго говоря, ни одна реальная система не удовлетворяет требованиям линейности. Несмотря на это анализ колебательных процессов в линейных системах чрезвычайно важен для практики, так как наряду с огромным количеством разнообразных систем, которые с достаточной для практики точностью могут рассматриваться как линейные, встречается немало случаев, когда заведомо нелинейные системы допускают линеаризацию. В частности такое положение имеет место, когда в процессе движения обобщённые координаты испытывают достаточно малые отклонения от своего равновесного или установившегося значения.

1.1. Нахождение частоты свободных колебаний системы с одной степенью свободы

Положение системы с одной степенью свободы полностью определяется заданием одной координаты x . В положении равновесия системы сила F_x , действующая на систему в направлении координаты x , должна быть равна нулю. Поэтому условие равновесия имеет вид

$$F_x = 0.$$

Если сила F_x потенциальна и потенциальная энергия системы равна V то условие равновесия можно записать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (1.1)$$

Для того чтобы равновесие системы было устойчивым, достаточно, чтобы потенциальная энергия системы в положении равновесия имела минимум. Поэтому для систем с одной степенью свободы условие устойчивости положения равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} > 0. \quad (1.2)$$

Уравнение движения системы можно получить различными способами. В случае механических систем можно составить уравнение движения, используя законы Ньютона, в случае электрических систем — правила Кирхгофа и выражения, связывающие напряжения и токи для каждого элемента схемы. В общем случае можно составить уравнение движения, используя уравнения Лагранжа второго рода или уравнения Гамильтона.

Уравнение свободных колебаний систем с одной степенью свободы в общем случае можно записать в виде

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (1.3)$$

Реальные колебательные системы любой физической природы в той или иной степени нелинейны и для их описания получаются нелинейные дифференциальные уравнения. Однако если колебания достаточно малы, то нелинейное уравнение можно линеаризовать. Член $f(x, \dot{x})$ в уравнении (1.3) описывает силу трения и возвращающую силу. Будем считать, что в положении равновесия системы координата x и функция $f(x, \dot{x})$ равны нулю. Разложим функцию $f(x, \dot{x})$ в ряд Тейлора в окрестности точки с координатами $x = 0$, $\dot{x} = 0$. Получим

$$f(x, \dot{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(0, 0)\dot{x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}(0, 0)\dot{x}^2 \dots$$

Ограничимся такой малой окрестностью положения равновесия, в которой члены разложения, содержащие производную функции $f(x, \dot{x})$ второго и более высокого порядка, малы по сравнению с членами, содержащими первую производную. Тогда малые члены можно отбросить и принять

$$f(x, \dot{x}) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(0, 0)\dot{x}. \quad (1.4)$$

Если координата и скорость системы в любой момент времени удовлетворяют сформулированным выше условиям, то колебания назы-

ваются малыми. Заменяя в уравнении (1.3) функцию $f(x, \dot{x})$ выражением (1.4) и используя обозначения

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \omega_0^2, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(0, 0) = 2\delta,$$

получим линеаризованное уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.5)$$

Коэффициент 2δ в этом уравнении характеризует изменение амплитуды собственных колебаний со временем. Если коэффициент $2\delta = 0$, то уравнение (1.5) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой ω_0 .

Задача 1.1

По гладкому жёсткому неподвижному стержню может без трения двигаться муфта, имеющая массу m (рис.1.1). Муфта с помощью пружины, имеющей жёсткость k , соединена с неподвижной точкой N . Пружина в недеформированном состоянии имеет длину l . При перемещениях муфты происходит деформация пружины. При этом изменяется расстояние между её витками но пружина в целом остаётся прямолинейной, то есть центры её витков всегда находятся на одной линии. Точка N располагается на расстоянии H от стержня. Пренебрегая размерами муфты найти частоты малых колебаний относительно возможных положений равновесия.

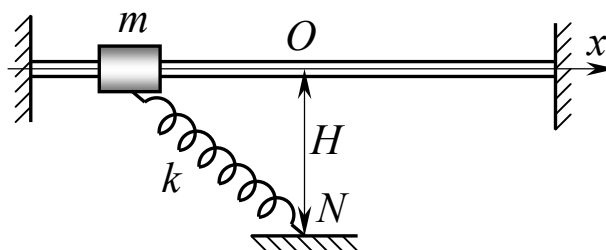


Рис. 1.1

Решение

Совместим ось Ox системы координат со стержнем. Поместим начало координат в точке O , находящейся на минимальном расстоянии от неподвижной точки N . В качестве обобщённой координаты выберем координату x муфты. Длина пружины может быть больше, меньше или равна H .

Рассмотрим случай $l \leq H$. Потенциальная энергия V пружины равна

$$V = \frac{k \left(\sqrt{H^2 + x^2} - l \right)^2}{2}. \quad (1.6)$$

Отсюда, используя (1.1), найдём координату x_0 единственного положения равновесия

$$x_0 = 0$$

и направленную вдоль стержня составляющую силы F_x , с которой пружина действует на муфту:

$$F_x = \frac{kx \left(\sqrt{H^2 + x^2} - l \right)}{\sqrt{H^2 + x^2}}. \quad (1.7)$$

Используя второй закон Ньютона и выражение (1.7), получим уравнение движения

$$m\ddot{x} + k \frac{x \left(\sqrt{H^2 + x^2} - l \right)}{\sqrt{H^2 + x^2}} = 0. \quad (1.8)$$

Линеаризуя это уравнение, будем иметь

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l}{H} \right) x = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой ω_0 , определяемой равенством

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l}{H}\right)}.$$

Рассмотрим теперь случай $l > H$. Используя соотношения (1.1) и (1.6), получим уравнение для определения положений равновесия:

$$x \left(\sqrt{H^2 + x^2} - l \right) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня:

$$x_1 = 0; \quad x_{2,3} = \pm a,$$

где $a = \sqrt{l^2 - H^2}$. Используя (1.2), найдём, что положение равновесия в точке x_1 неустойчиво, а в точках $x_{2,3}$ — устойчиво.

Сила, действующая на муфту вдоль стержня, и уравнение движения муфты при малых смещениях от устойчивых положений равновесия системы по-прежнему могут быть представлены выражениями (1.7) и (1.8), в которых, однако, теперь следует положить

$$x = x_i + q,$$

где $i = 2, 3$, а q — малое смещение муфты относительно устойчивого положения равновесия. Теперь для линеаризации уравнения движения разложим второй член уравнения (1.8) в ряд Тейлора по малому смещению q и ограничимся в этом разложении линейным членом. В результате получим

$$m\ddot{q} + k \left(1 - \frac{H^2}{l^2}\right) q = 0.$$

Отсюда для частоты малых колебаний находим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{H^2}{l^2}\right)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.2. На внутренней поверхности тонкостенного цилиндра, имеющего массу M и радиус R , прикреплено небольшое тело с массой m (рис. 1.2). Цилиндр может без трения и проскальзывания

катиться по горизонтальной плоскости. Пренебрегая размерами тела с массой m , найти частоту малых колебаний цилиндра относительно положения равновесия.

Задача 1.3. Маятник состоит из жесткого невесомого стержня, неподвижно прикрепленного к боковой поверхности сплошного цилиндра (рис. 1.3). Масса цилиндра M , его радиус R , длина стержня l . На конце стержня имеется небольшой грузик с массой m . Цилиндр может без трения и проскальзывания катиться по горизонтальной плоскости. Найти частоту малых колебаний относительно положения равновесия.

Задача 1.4. Колебательная система состоит из математического маятника, имеющего длину l и массу m , и пружины с жёсткостью k , которая одним концом прикреплена к грузику маятника, а другим — к неподвижной опоре (рис. 1.4). В положении равновесия нить маятника отклонена на угол α_0 от вертикали, а пружина горизонтальна. Найти частоту малых колебаний системы.

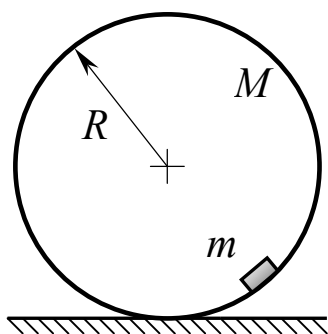


Рис. 1.2

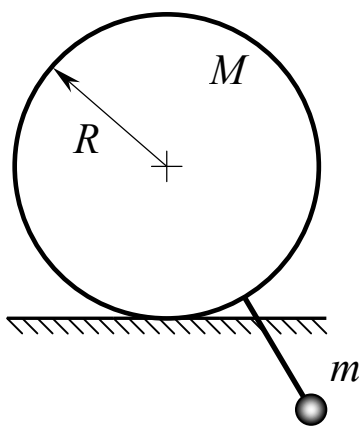


Рис. 1.3

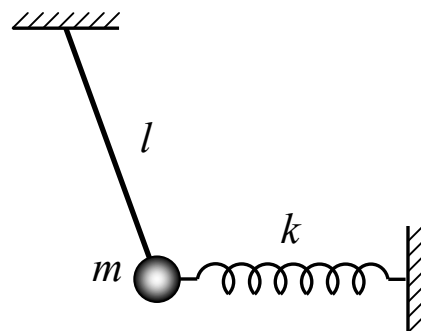


Рис. 1.4

Задача 1.5. Жесткий невесомый стержень длиной l может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. На другом конце стержня закреплен грузик пренебрежимо малых размеров, имеющий массу m . Плоская спиральная пружина, расположенная в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси вращения стержня, прикреплена одним концом к стержню в точке A на расстоянии a от оси вращения, а другим — к неподвижной опоре (рис. 1.5). Когда пружина не деформирована,

стержень находится в вертикальном положении с грузиком, расположенным выше оси вращения. Если стержень отклоняется от вертикали на угол φ , пружина стремится вернуть его обратно с силой, направленной перпендикулярно стержню и пропорциональной длине дуги, пройденной точкой A . Найти частоты малых колебаний относительно возможных положений равновесия, пренебрегая трением и размерами грузика с массой m .

Задача 1.6. Колебательная система состоит из жесткого невесомого стержня длиной l , на одном из концов которого закреплено тело пренебрежимо малых размеров, имеющее массу m (рис. 1.6). Стержень может без трения вращаться вокруг оси, которая проходит через второй конец стержня под углом 90° к стержню и составляет угол α с вертикалью. Найти частоту малых колебаний.

1.2. Свободные колебания при заданных начальных условиях

Задача 1.7

Катушка индуктивности колебательного контура LCR через выключатель Π подключена к батарее с ЭДС E и внутренним сопротивлением R_i (рис. 1.7). В момент времени $t = 0$ батарея отключается от колебательного контура. Найти закон изменения во времени тока в контуре и напряжения на конденсаторе.

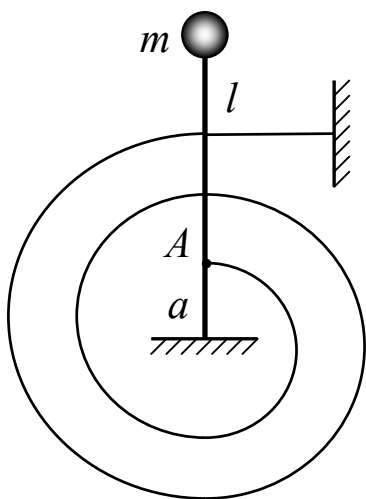


Рис. 1.5

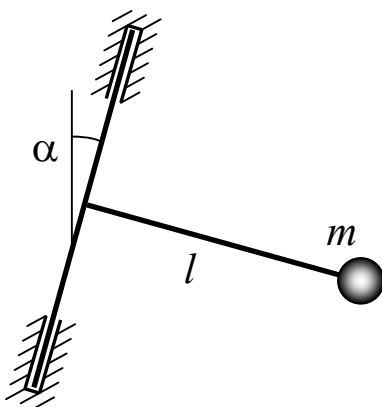


Рис. 1.6

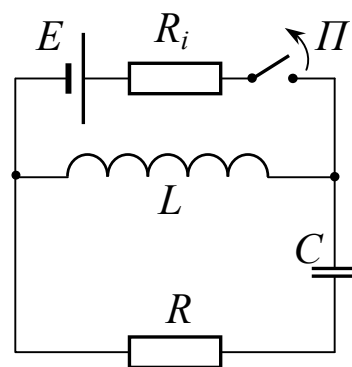


Рис. 1.7

Решение

После отключения батареи от контура в нём происходят свободные колебания. Используя правила Кирхгофа получим дифференциальное уравнение для колебаний заряда q на конденсаторе C :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (1.9)$$

где $2\delta = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$. Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$q = A \exp(\lambda t). \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.9), для λ получим:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.11)$$

Характер процессов в системе зависит от соотношения между δ и ω_0 . Рассмотрим сначала случай $\omega_0^2 > \delta^2$. Тогда выражение (1.11) можно представить в форме

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\omega, \quad (1.12)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. С учётом (1.12) решение уравнения (1.9) можно представить в виде

$$q = A_1 \exp(-\delta t + j\omega t) + A_2 \exp(-\delta t - j\omega t), \quad (1.13)$$

где A_1 и A_2 — постоянные величины, которые определяются начальными условиями. Введём вместо постоянных A_1 и A_2 две новые величины $|D|$ и Ψ с помощью соотношений

$$A_1 = |D| \exp(j\Psi); \quad A_2 = |D| \exp(-j\Psi).$$

Тогда решение (1.13) можно представить в виде

$$q = 2|D| \exp(-\delta t) \cos(\omega t + \Psi). \quad (1.14)$$

Отсюда для \dot{q} получим

$$\dot{q} = -2|D| \exp(-\delta t) (\delta \cos(\omega t + \Psi) + \omega \sin(\omega t + \Psi)). \quad (1.15)$$

Определим начальные условия. В момент времени $t = 0$ ток через катушку индуктивности равен E/R_i , тогда как заряд конденсатора был равен нулю. Следовательно, начальные условия имеют вид

$$q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = E/R_i. \quad (1.16)$$

Используя (1.14), (1.15), (1.16), определим константы $|D|$ и Ψ :

$$|D| = \frac{E}{2\omega R_i}, \quad \Psi = \frac{3\pi}{2}. \quad (1.17)$$

Используя эти соотношения, выражение (1.14) для заряда q можно представить в виде

$$q = \frac{E}{\omega R_i} \exp(-\delta t) \sin \omega t. \quad (1.18)$$

Отсюда для напряжения U_C на конденсаторе получаем

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{E}{\omega R_i C} \exp(-\delta t) \sin \omega t$$

Дифференцируя выражение (1.18) по времени, получим выражение для тока в контуре, которое можно представить в виде

$$\dot{q} = \frac{E\omega_0}{\omega R_i} \exp(-\delta t) \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.19)$$

где $\varphi = \text{arctg}(\delta/\omega)$. Если имеет место сильное неравенство: $\omega \gg \delta$, то $\varphi \approx 0$, $\omega \approx \omega_0$, и выражение (1.19) для тока в контуре можно представить приближённым соотношением

$$\dot{q} \approx (E/R_i) \exp(-\delta t) \cos \omega_0 t.$$

В случае, если имеет место неравенство

$$\delta^2 > \omega_0^2,$$

то, используя (1.13) и (1.16), для констант A_1 и A_2 получим

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{2R_i \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}. \quad (1.2.12)$$

Подставляя эти соотношения в (1.2.5), будем иметь

$$q(t) = \frac{E \exp(-\delta t)}{R_i \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right),$$

$$\dot{q}(t) = \frac{E}{R_i} \exp(-\delta t) \left[\operatorname{ch}\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) \right].$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.8. Математический маятник имеет длину l и находится в покое. В момент времени $t=0$ грузику маятника с помощью толчка сообщают скорость v_0 . Найти закон изменения во времени угла отклонения маятника от вертикали, считая, что при колебаниях маятника на его грузик действует сила вязкого трения $F_{\text{тр}} = h\dot{x}$, где \dot{x} — скорость грузика. Колебания маятника считать малыми.

Задача 1.9. На гладкой горизонтальной поверхности лежат два параллелепипеда, соединённые пружиной с жесткостью k (рис. 1.8). Массы параллелепипедов равны m_1 и m_2 . С помощью некоторого внешнего устройства параллелепипеды сдвинуты навстречу друг другу, так что вследствие деформации пружины её длина уменьшилась на x_0 по сравнению с длиной недеформированной пружины. В момент времени $t=0$ внешнее устройство мгновенно освобождает параллелепипеды, и вся система начинает колебаться. Найти закон движения параллелепипедов в предположении, что силы трения отсутствуют.

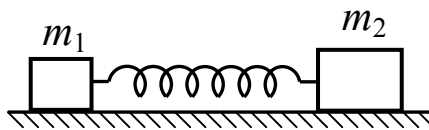


Рис. 1.8

1.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Применительно к линейным системам справедлив принцип суперпозиции. Общее решение дифференциального уравнения линейной колебательной системы может быть представлено как сумма общего решения однородного уравнения (собственных колебаний) и частного решения неоднородного уравнения (вынужденных колебаний). Реальные колебательные системы диссипативны. Поэтому собственные колебания затухают. В реальных диссипативных системах, не содержащих источников энергии, стационарными могут быть только вынужденные колебания. Справедливость принципа суперпозиции в случае линейных систем позволяет находить стационарные движения при произвольной форме периодических внешних воздействий, используя представление этих воздействий в виде суммы элементарных сигналов и отыскивая стационарное движение как сумму движений, вызываемых в системе каждой элементарной составляющей внешнего воздействия в отдельности.

В частности, в качестве элементарных сигналов часто используются гармонические функции времени. В этом случае представление произвольного периодического воздействия в виде суммы гармонических функций осуществляется с помощью преобразования Фурье. При таком подходе исследование отклика системы на периодическое внешнее воздействие сложной формы сводится к нахождению стационарного движения системы, вызываемого гармоническим внешним воздействием.

Решение этой задачи может быть найдено методом комплексных амплитуд. Этот метод основан на использовании принципа суперпозиции и позволяет свести решение дифференциального уравнения к решению уравнения алгебраического.

В общем случае уравнение линейной колебательной системы, на которую действует гармоническая внешняя сила с амплитудой F и частотой p , может быть представлено в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos pt. \quad (1.21)$$

При использовании метода комплексных амплитуд к правой части уравнения (1.21) добавляют мнимое слагаемое

$$jF \sin pt. \quad (1.22)$$

В результате получается уравнение, которое можно представить в виде

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\delta\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = F \exp(jpt). \quad (1.23)$$

Здесь выражение \tilde{x} обозначает комплексную величину. Вследствие справедливости принципа суперпозиции наличие в правой части этого уравнения мнимого добавка (1.22) приводит к появлению в решении мнимой части. При этом действительная часть решения уравнения (1.23) совпадает с решением исходного уравнения (1.21).

Частное решение уравнения (1.23) можно искать в виде

$$\tilde{x} = \tilde{X}_0 \exp(jpt). \quad (1.24)$$

Подставляя (1.24) в (1.23), получим для \tilde{X}_0 линейное алгебраическое уравнение

$$(-p^2 + 2j\delta p + \omega_0^2) \tilde{X}_0 = F.$$

Отсюда

$$\tilde{X}_0 = \frac{F}{\omega_0^2 - p^2 + 2j\delta p}.$$

Представим это выражение в виде

$$\tilde{X} = |\tilde{X}_0| \exp(j\psi), \quad (1.25)$$

где

$$|\tilde{X}_0| = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4p^2\delta^2}}; \quad \Psi = -\arctg \frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2}.$$

С учётом (1.25) решение модифицированного уравнения (1.23) можно представить в форме

$$\tilde{x} = |\tilde{X}_0| \exp(j(pt + \Psi)). \quad (1.26)$$

Действительная часть x этого выражения

$$x = |\tilde{X}_0| \cos(pt + \Psi) \quad (1.27)$$

и является искомым частным решением уравнения (1.21), то есть описывает вынужденное стационарное движение системы под действием гармонической внешней силы.

Как следует из (1.27), откликом системы на гармоническое внешнее воздействие является гармоническое колебание, амплитуда которого равна модулю величины \tilde{X} , определённой выражением (1.25), а фаза — аргументом этого выражения. Поэтому величина \tilde{X} называется комплексной амплитудой.

Задача 1.10

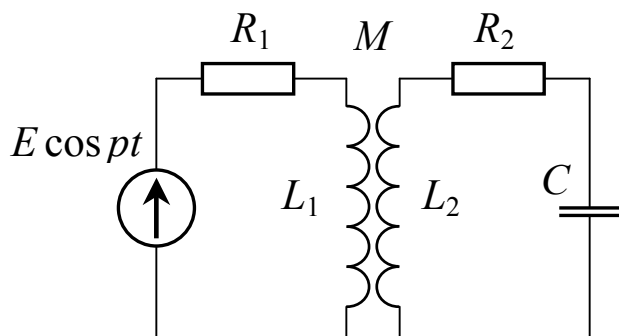


Рис. 1.9

Найти максимальное значение амплитуды тока в контуре L_2CR_2 (рис. 1.9) при условии, что подобраны оптимальные значения ёмкости C и коэффициента взаимной индукции M , а ЭДС генератора напряжения равна $E \cos pt$.

Решение

Используя правила Кирхгофа, получим систему уравнений, описывающую вынужденные движения в рассматриваемом устройстве:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = M \frac{di_2}{dt} + E \cos \omega t, \quad (1.28)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C} \int i_2 dt = M \frac{di_1}{dt}. \quad (1.29)$$

В правую часть уравнения (1.28) добавим мнимое слагаемое $jE \sin \omega t$. Представим систему уравнений (1.28), (1.29) в виде

$$L_1 \frac{d\tilde{i}_1}{dt} + R_1 \tilde{i}_1 = M \frac{d\tilde{i}_2}{dt} + E \exp(j\omega t), \quad (1.30)$$

$$L_2 \frac{d\tilde{i}_2}{dt} + R_2 \tilde{i}_2 + \frac{1}{C} \int \tilde{i}_2 dt = M \frac{d\tilde{i}_1}{dt}. \quad (1.31)$$

Здесь \tilde{i}_1 и \tilde{i}_2 — неизвестные комплексные величины. Будем искать их в виде

$$\tilde{i}_1 = \tilde{I}_1 \exp(j\omega t), \quad \tilde{i}_2 = \tilde{I}_2 \exp(j\omega t). \quad (1.32)$$

Подставляя (1.32) в (1.30), (1.31), получим систему алгебраических уравнений для определения комплексных амплитуд \tilde{I}_1 и \tilde{I}_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 z_1 + \tilde{I}_2 z_{\text{CB}} &= E, \\ \tilde{I}_1 z_{\text{CB}} + \tilde{I}_2 z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= j\omega L_1 + R_1; \\ z_2 &= j\omega L_2 + R_2 + 1/(j\omega C_2); \quad z_{\text{CB}} = j\omega M. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Решая систему уравнений (1.33), для \tilde{I}_2 получим

$$\tilde{I}_2 = \frac{-E z_{\text{CB}}}{z_1 z_2 - z_{\text{CB}}^2}. \quad (1.35)$$

Представим выражения для z_1 и z_2 , определённые соотношениями (1.34), в виде

$$z_1 = R_1 + jX_1, \quad z_2 = R_2 + jX_2, \quad (1.36)$$

где X_1 и X_2 — мнимые части соотношений соответственно z_1 и z_2 . Тогда выражение (1.35) можно представить в виде

$$\tilde{I}_2 = \frac{-jE\omega M/z_1}{R_2 + \left(\omega^2 M^2 R_1 / |z_1|^2\right) + j\left(X_2 - \left(\omega^2 M^2 X_1 / |z_1|^2\right)\right)}. \quad (1.37)$$

Отсюда для действительной амплитуды тока i_2 получаем:

$$|\tilde{I}_2| = \frac{E\omega M}{|z_1| \sqrt{\left(R_2 + \left(\omega^2 M^2 R_1 / |z_1|^2\right)\right)^2 + \left(X_2 - \left(\omega^2 M^2 X_1 / |z_1|^2\right)\right)^2}}. \quad (1.38)$$

Это выражение приобретает максимальное значение $|\tilde{I}_2|_{\text{м}}$, равное

$$|\tilde{I}_2|_{\text{м}} = \frac{E\omega M}{|z_1| \left(R_2 + \left(\omega M / |z_1|\right)^2 R_1\right)}, \quad (1.39)$$

при такой величине ёмкости C_2 , которая обращает в нуль второе слагаемое под корнем в знаменателе выражения (1.38). Отыскивая максимум этого выражения по ωM , найдём, что наибольшую амплитуду $|\tilde{I}_2|_{\text{мм}}$ ток i_2 имеет при

$$\omega M = |z_1| \sqrt{R_2 / R_1}.$$

Если это условие выполнено, то из (1.39) получим:

$$|\tilde{I}_2|_{\text{мм}} = E / \left(2\sqrt{R_1 R_2}\right).$$

Заметим, что, сравнивая дифференциальные уравнения (1.28), (1.29) с уравнениями (1.33) для комплексных амплитуд, можно видеть, что переход от первой системы уравнений ко второй может быть осуществлён путём формальной замены операции дифференцирования умножением на $j\omega$, операции интегрирования делением на $j\omega$, а реально действующей ЭДС $E \cos \omega t$ — амплитудой E .

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.11. Маятник состоит из жёсткого невесомого стержня длиной l , к одному из концов которого прикреплено тело с массой m , имеющее пренебрежимо малые размеры (рис. 1.10). Другой конец стержня может вращаться вокруг горизонтальной оси. На расстоянии a от оси к стержню прикреплена пружина с жесткостью k . Когда маятник находится в положении равновесия, пружина располагается горизонтально. Другой конец пружины перемещается по горизонтали в плоскости колебаний маятника по гармоническому закону:

$$x(t) = X_0 \cos pt .$$

Найти закон изменения во времени угла отклонения φ маятника от вертикали при условии, что при движении маятника возникают силы вязкого трения, колебания маятника можно считать малыми, а в положении равновесия системы стержень маятника располагается вертикально.

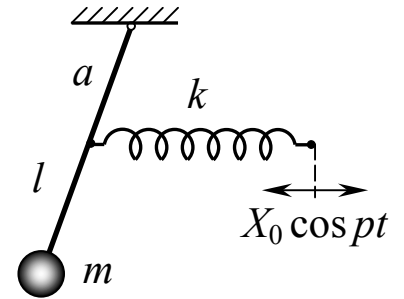


Рис. 1.10

Задача 1.12. Найти эквивалентное сопротивление между точками a, a' при резонансе токов в колебательных контурах, показанных на рис. 1.11, а, б). Для упрощения выкладок считать, что в каждой из параллельных ветвей контура активное сопротивление много меньше реактивного.

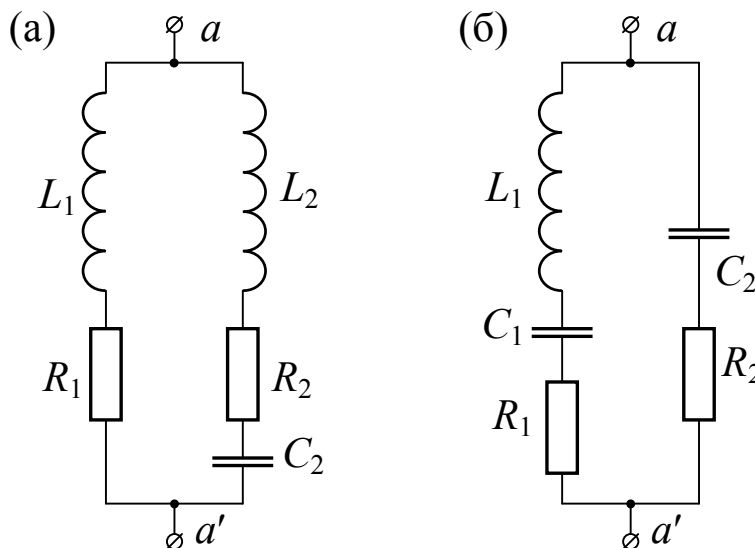


Рис. 1.11

2. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Существует два главных направления в развитии анализа движения нелинейных систем: аналитические методы и топологические методы графического интегрирования. Как правило, точное решение нелинейного уравнения, описывающего движение исследуемой системы, найти не удаётся. Поэтому аналитические методы основаны на

получении и исследовании приближённых решений. Топологические методы позволяют получить ответы на некоторые существенные вопросы, не решая нелинейное уравнение, с помощью так называемых качественных методов исследования. Они основаны на изучении представления решений дифференциального уравнения в фазовом пространстве.

2.1. Качественный анализ движения на фазовой плоскости

При исследовании движения нелинейных систем оказывается чрезвычайно полезным использование некоторых наглядных понятий и представлений геометрического характера. Основным из них является понятие фазового пространства. Фазовым пространством называется множество всех возможных состояний системы. Состояние динамической системы однозначно определено, если заданы значения всех динамических переменных, используемых для описания движения системы. Если динамическая система имеет одну степень свободы, её фазовое пространство двумерно. В дальнейшем будем для определенности считать его плоскостью.

Каждому определённом состоянию системы соответствует некоторая точка фазового пространства. Эта точка называется изображающей точкой. Если в системе происходит некоторый процесс, в результате которого изменяется состояние системы, то изображающая точка описывает некоторую линию в фазовом пространстве. Эта линия называется фазовой траекторией. Совокупность всех возможных фазовых траекторий системы называется её фазовым портретом. Он позволяет одним взглядом охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть в системе при всевозможных начальных условиях. С его помощью можно выяснить, какие типы движений могут быть у рассматриваемой системы (незатухающие, затухающие или нарастающие колебания, апериодический процесс), какова устойчивость этих движений и при каких начальных условиях реализуются разные типы движений. Поэтому проблема построения фазовых портретов представляет значительный интерес.

Чтобы получить фазовый портрет, необходимо построить множество составляющих его фазовых траекторий. Дифференциальное уравнение фазовых траекторий можно получить из уравнения движения системы.

Автономная система с одной степенью свободы в общем случае описывается уравнением вида:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (2.1)$$

Заменяем это уравнение системой из двух эквивалентных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отсюда, поделив второе уравнение на первое, получим искомое дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (2.3)$$

Это уравнение проще исходного уравнения движения системы (2.1), так как порядок последнего на единицу выше. Тем не менее, в большом числе случаев точное интегрирование уравнения (2.3) не представляется возможным, и для построения фазовых траекторий приходится использовать различные приближенные методы.

Уравнение (2.3) определяет угол наклона касательной к фазовой траектории в данной точке фазовой плоскости. В фазовом пространстве могут быть как такие точки, в которых касательная имеет вполне определённый наклон, так и такие, в которых не существует определённого направления касательной к фазовой траектории. Эти точки называются особыми. В особых точках и числитель, и знаменатель правой части уравнения (2.3) одновременно обращаются в нуль, следовательно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 0, \\ Q(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Используя эти соотношения и уравнения (2.2), находим, что в особых точках должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Следовательно, особые точки представляют на фазовой плоскости состояния равновесия системы. Координаты особых точек можно найти, решая систему уравнений (2.4).

Фазовые траектории в окрестностях особых точек определяют наиболее характерные черты фазового портрета системы. Поэтому, приступая к построению фазового портрета, целесообразно начинать с определения координат особых точек и построения фазовых траекторий в небольшой окрестности каждой из них.

Построить фазовые траектории в окрестностях особых точек можно различными способами. Можно получить уравнение фазовых траекторий, проинтегрировав соотношение (2.3). Если интегрирование этого соотношения не представляется возможным, но функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в правых частях уравнений (2.2) дифференцируемы, то можно получить приближённые уравнения фазовых траекторий, справедливые в небольших окрестностях особых точек, линеаризуя уравнения (2.2) и решая полученную систему линейных уравнений.

Если линеаризация уравнений (2.2) невозможна, но движение системы можно разделить на ряд последовательных этапов так, что на каждом из них система описывается линейным уравнением, допускающим аналитическое нахождение уравнения для отрезка фазовой траектории на данном этапе, то фазовую траекторию для движения в целом можно получить, так называемым методом поэтапного рассмотрения: сшивая на границах соседних этапов отрезки фазовых траекторий, найденные для каждого этапа в отдельности.

Приближённое построение фазовых траекторий можно также выполнить методом, основанным на аппроксимации малых отрезков

фазовой траектории, исходящей из рассматриваемой точки, малым отрезком касательной к фазовой траектории в этой точке. Наклон касательной определяется уравнением (2.3). В соответствии с этим методом, построив малый отрезок касательной, следует перейти в точку, расположенную в конце этого отрезка, и построить отрезок касательной в этой точке. Так, переходя от точки к точке, можно шаг за шагом построить всю фазовую траекторию в виде ломаной линии, состоящей из малых отрезков касательных. Точность такого построения зависит от малости длины отрезков.

На использовании касательных основан и получивший широкое распространение способ приближённого построения фазовых траекторий, называемый «методом изоклин». Изоклина — геометрическое место точек, в которых касательные к фазовым траекториям имеют один и тот же наклон. Уравнение изоклин можно получить из (2.3), положив в этом соотношении

$$d y/d x = \varepsilon .$$

Придавая параметру ε различные значения, получим множество уравнений для семейства изоклин. Начертив это семейство изоклин на фазовой плоскости, получим поле направлений фазовых траекторий. Ориентируясь по направлениям касательных, можно приближённо построить фазовые траектории.

Чтобы получить фазовый портрет системы во всём фазовом пространстве после того как в окрестностях особых точек фрагменты фазовых портретов уже построены, их необходимо дополнить фазовыми траекториями в остальных областях фазового пространства. В этих областях нет особых точек. Поэтому построение фазовых траекторий в этих областях обычно не представляет труда и может быть выполнено одним из упомянутых выше методов.

Задача 2.1

Построить фазовый портрет системы, движение которой описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy, \\ \dot{y} &= -cy + dxy, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где все коэффициенты a , b , c и d положительны, а возможные состояния системы ограничены областью значений переменных, удовлетворяющих неравенствам

$$x \geq 0; \quad y \geq 0. \quad (2.7)$$

Решение

Неравенство (2.7) означает, что фазовым пространством системы является первый квадрант фазовой плоскости. Найдём координаты особых точек фазового пространства. Для этого положим в (2.6) $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ и решим полученную систему уравнений. В результате найдём, что в фазовом пространстве системы имеется две особые точки, координаты которых определяются равенствами

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad (2.8)$$

$$x_2 = c/d, \quad y_2 = a/b. \quad (2.9)$$

Получим уравнение фазовых траекторий в окрестности особой точки (2.8), расположенной в начале координат. Для этого положим, что в момент времени $t = 0$ имеем $x = x_0$, $y = y_0$, где x_0 и y_0 — малые величины. Линеаризуя уравнения (2.6) и решая полученную систему линейных уравнений с указанными выше начальными условиями, найдём зависимость фазовых переменных от времени:

$$x(t) = x_0 \exp(at); \quad y(t) = y_0 \exp(-ct). \quad (2.10)$$

Отсюда, исключая время, получим

$$xy^\gamma = \text{const}, \quad (2.11)$$

где $\gamma = a/c$. Выражение (2.11) есть уравнение семейства гипербол, причём асимптоты этого семейства совпадают с осями координат. Таким образом, фазовыми траекториями системы в небольшой окрестности начала координат является семейство гипербол.

Для получения уравнения фазовых траекторий в окрестности второй особой точки с координатами (2.9), положим

$$x = x_2 + \xi; \quad y = y_2 + \eta, \quad (2.12)$$

где ξ и η — малые вариации. Подставляя (2.12) в систему уравнений (2.6), линеаризуя её и используя (2.9), получим уравнения для вариаций:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\frac{bc}{d}\eta, \\ \dot{\eta} &= \frac{ad}{b}\xi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Решая уравнения (2.13), найдём, что фазовые траектории удовлетворяют выражению

$$\xi^2 + \frac{b^2c}{ad^2}\eta^2 = \text{const}. \quad (2.14)$$

Соотношение (2.14) описывает семейство эллипсов. Следовательно, фазовые траектории вблизи второй особой точки являются семейством эллипсов.

В остальных областях фазового пространства фазовые траектории являются линиями, форма которых постепенно изменяется от гипербол вблизи начала координат до эллипсов в окрестности второй особой точки.

Фазовый портрет в целом показан на рис. 2.1.

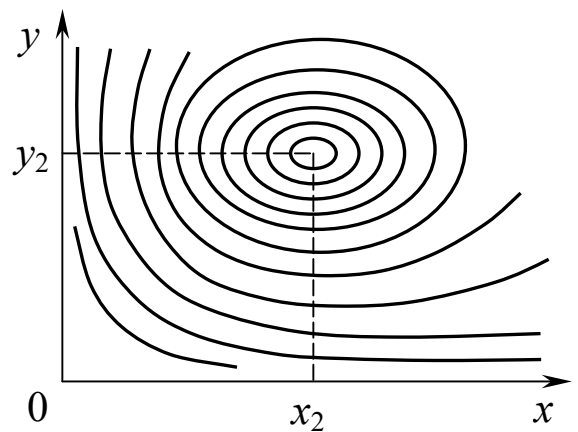


Рис. 2.1

Задача 2.2

Тело с массой m находится на горизонтальной поверхности между двумя пружинами и, двигаясь без трения, совершает колебательное движение, попеременно сжимая то правую пружину с жесткостью k , то

левую с жесткостью $10k$ (рис. 2.2). В состоянии равновесия обе пружины не деформированы, но касаются тела без зазоров.

1. Методом поэтапного рассмотрения получить аналитическое выражение для фазовых траекторий и построить фазовый портрет.
2. Как изменится вид фазовых траекторий, если жёсткость одной из пружин увеличивать до бесконечности?

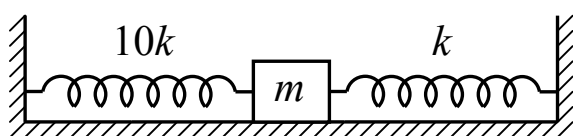


Рис. 2.2

3. Как изменится вид фазовых траекторий в случае, если в состоянии равновесия между телом и пружинами будет зазор?

Решение

Направим ось Ox по линии движения тела. Будем считать, что точка $x = 0$ соответствует положению равновесия системы, в котором пружины не деформированы. Силу, возвращающую тело к положению равновесия, можно представить выражением

$$f(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{при } x > 0, \\ k_2 x & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты упругости соответственно правой и левой пружин. Как можно видеть из этого выражения, колебательная система нелинейна, причём в точке $x = 0$ функция $f(x)$ не дифференцируема. Вместе с тем, весь интервал значений x , в котором перемещается тело, можно разделить на две области: $x > 0$ и $x < 0$, в каждой из которых система линейна. Это позволяет для построения фазового портрета воспользоваться методом поэтапного рассмотрения. Найдём уравнения фрагментов фазовых траекторий, расположенных в каждой из указанных выше областей.

Когда тело находится в области $x > 0$, сжата только правая пружина и движение тела описывается уравнением

$$m\ddot{x} + k_1 x = 0. \quad (2.15)$$

Перейдём от этого уравнения второго порядка к системе двух уравнений первого порядка. С этой целью положим

$$\dot{x} = y. \quad (2.16)$$

Тогда из (2.15) будем иметь

$$\dot{y} = -\omega_1^2 x, \quad (2.17)$$

где $\omega_1^2 = k_1/m$. Отсюда, поделив (2.17) на (2.16) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_1^2 \frac{x}{y},$$

интегрируя которое, найдём

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.18)$$

где $a^2 = C/\omega_1^2$; $b^2 = C$; C — постоянная интегрирования. Полученное соотношение является уравнением семейства эллипсов, охватывающих точку $x = 0$, причём эксцентриситет эллипсов этого семейства зависит от жесткости правой пружины. Начальные условия определяют значение константы C и тем самым позволяют выделить из этого семейства тот эллипс, половина которого, расположенная в правой полуплоскости, совпадает с расположенной там же частью фазовой траектории движения с заданными начальными условиями.

Аналогично можно показать, что часть фазовой траектории, расположенная в области $x < 0$, является левой половиной эллипса, охватывающего точку $x = 0$, но эксцентриситет этого эллипса зависит от жесткости левой пружины. Для сшивания частей фазовых траекторий, расположенных справа и слева от точки $x = 0$, воспользуемся тем, что в процессе колебаний скорость и координата тела должны быть непрерывными функциями времени, так как кинетическая и потенциальная энергии системы не могут изменяться скачками. Отсюда следует, что в точке $x = 0$ полуэллипсы, расположенные справа и слева, должны непрерывно переходить друг в друга. Поэтому фазовый портрет движения в целом имеет вид, показанный на рисунке 2.3.

Если жёсткость одной из пружин устремить к бесконечности, то на фазовой плоскости соответствующая система полуэллипсов вы-

родится в совокупность прямолинейных отрезков, лежащих на оси ординат.

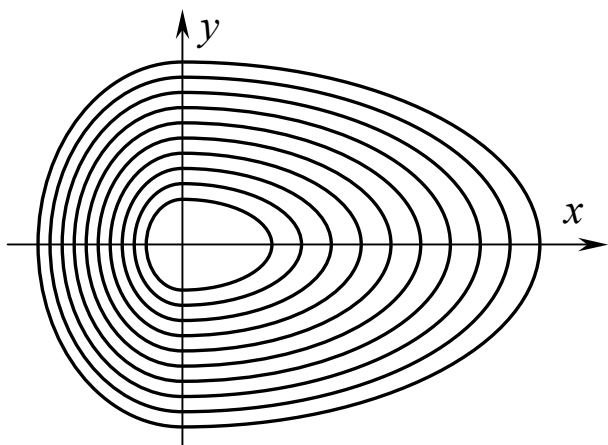


Рис. 2.3

Если между пружинами появится зазор, то движение тела в зазоре должно происходить с постоянной скоростью, так как по условию задачи трение отсутствует. Следовательно, на фазовой плоскости правая и левая системы полуэллипсов должны соединяться отрезками прямых линий, параллельных оси абсцисс.

Задача 2.3

Движение колебательной системы описывается уравнением

$$m\ddot{x} + kx + \gamma x^3 = 0. \quad (2.19)$$

Используя метод изоклин, построить фазовую траекторию движения тела массой $m = 0,2 \text{ кг}$ на пружине жесткостью $k = 1 \text{ Н/м}$ с коэффициентом нелинейности $\gamma = 4 \text{ Н/м}^3$ для следующих начальных условий: при $t = 0$ $\dot{x} = 5 \text{ м/с}$, $x = 0$.

Решение

Заменим уравнение (2.19) системой из двух уравнений первого порядка. С этой целью положим $\dot{x} = y$.

Тогда из (2.19) получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{kx + \gamma x^3}{my}. \quad (2.20)$$

Введём обозначение

$$dy/dx = \varepsilon. \quad (2.21)$$

Используя (2.1.21), из (2.1.20) получим

$$y = -\frac{kx + \gamma x^3}{\varepsilon m}. \quad (2.22)$$

Соотношение (2.22) является уравнением изоклины, в точках которой тангенс угла наклона касательных к интегральной кривой равен ε . Используя (2.22), построим на фазовой плоскости семейство изоклин для значений

$$\varepsilon = 0; \pm 1; \pm 3; \pm 10; \pm 30; \infty.$$

Как можно видеть из (2.22), изоклина, соответствующая $\varepsilon = 0$ в нашем случае совпадает с осью ординат, а изоклина, соответствующая $\varepsilon = \infty$ — с осью абсцисс. Все упомянутые изоклины изображены на рис. 2.4.

На изоклины целесообразно нанести небольшие отрезки касательных к интегральным кривым. Эти отрезки также изображены на рис. 2.4. Они образуют поле касательных, ориентируясь по которому, можно приближённо построить фазовую траекторию. Такое построение для фазовой траектории, проходящей через заданную точку фазовой плоскости, выполнено на рис. 2.1.4.

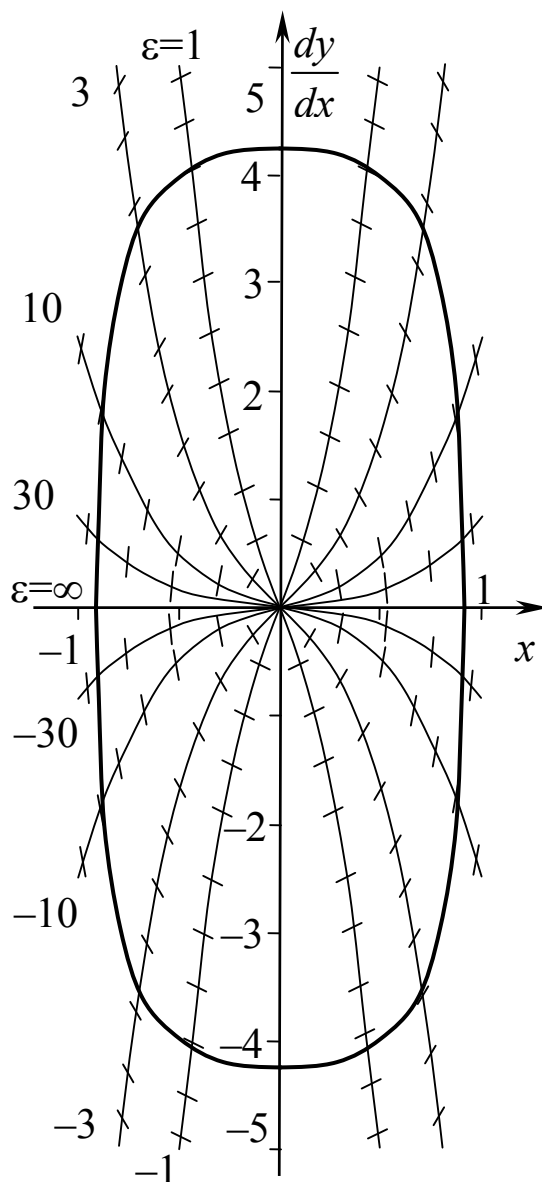


Рис. 2.4

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.4. Электрическая колебательная система состоит из последовательно соединённых катушки с индуктивностью L , конденсатора с ёмкостью C и резистора с сопротивлением R (рис. 2.5). Резистор зашунтирован идеальным диодом. Принимая

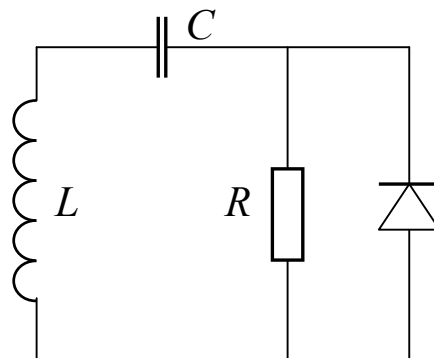


Рис. 2.5

за независимую переменную ток в катушке, построить (качественно) фазовый портрет системы для трёх случаев: $R = 0$, $R < 2\sqrt{L/C}$, $R > 2\sqrt{L/C}$.

Задача 2.5. Маятник представляет собой жёсткий стержень с грузиком на конце и расположен грузиком вверх между двумя жёсткими вертикальными стенками, отстоящими от оси вращения маятника на равных расстояниях $d < l$, где l — длина маятника, d — расстояние от оси вращения до стенок (рис. 2.6). Нарисовать (качественно) фазовый портрет системы для трёх случаев: 1 — движение между стенками происходит без трения, а при ударах о стенки часть энергии маятника переходит в тепло, 2 — удары о стенки абсолютно упругие, но при движении в зазоре между стенками имеется вязкое трение, 3 — удары о стенки абсолютно упругие, трение отсутствует.

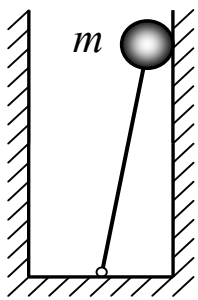


Рис. 2.6

Задача 2.6. Пружинный маятник (рис. 2.7) состоит из грузика с массой $m = 1$ кг, подвешенного на пружине, у которой сила упругости F_y связана с удлинением x соотношением: $F_y = k(x + \gamma x^3)$, где $k = 9$ Н/м и $\gamma = 1$ м⁻². При колебаниях грузика возникает сила вязкого трения $F_m = h dx/dt$, где $h = 1$ Н·с/м. Пользуясь методом изоклин, построить фазовую траекторию движения с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = -15$ м/с.

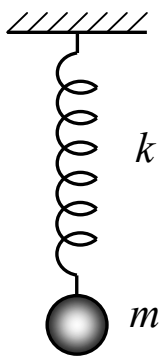


Рис. 2.7

Рекомендации: перейти к безразмерному времени, ограничиться построением изоклин с $\varepsilon = 0; \pm 1; \pm 3; \infty$. Ограничиться изменением x в пределах: $-2,5 \leq x \leq 1,0$ и изменением y в пределах: $-15 \leq y \leq 10$.

Задача 2.7. Длина l нити математического маятника (рис. 2.8,а) периодически изменяется на величину Δl по закону, показанному на рис. 2.8,б, с периодом $\tau = T_0/2$, где T_0 — период колебаний маятника при $l = l_0$, а l_0 — среднее значение длины нити.

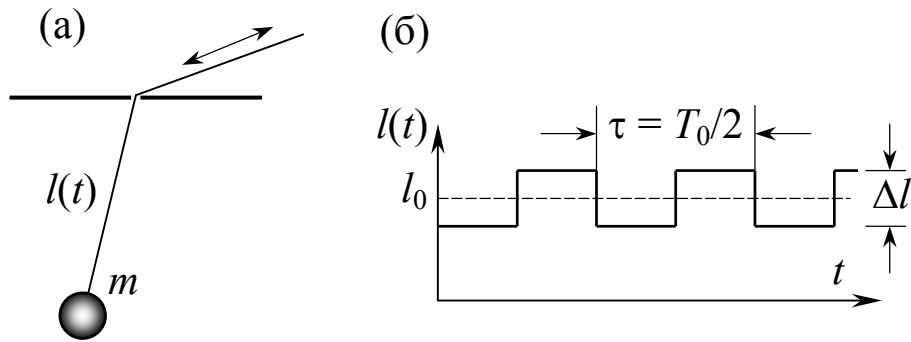


Рис. 2.8

Считая, что трение отсутствует, и используя метод поэтапного рассмотрения, нарисовать фазовые траектории движения системы для двух случаев: а) фазовые соотношения между изменениями длины маятника и изменениями угла отклонения оптимальны для вложения энергии в систему, б) указанные фазовые соотношения оптимальны для отбора энергии из системы.

Задача 2.8. Движение системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + E, \\ \dot{y} &= Cx + By + D.\end{aligned}$$

Найти координаты особых точек и нарисовать качественно фазовый портрет системы для следующих случаев:

1. $B = 0, C < 0$;
2. $B = 0, C > 0$;
3. $B < 0, C < 0; |C| > B^2/4$;
4. $B < 0, C < 0; |C| < B^2/4$;
5. $B > 0, C < 0; |C| > B^2/4$;
6. $B > 0, C < 0; |C| < B^2/4$.

Считать, что $E > 0, D > 0, |EB| > D$.

Задача 2.9. Для задачи 1.5 построить фазовый портрет системы. Ограничиться рассмотрением углов отклонения $-2\pi < \varphi < 2\pi$.

Задача 2.10. Небольшое тело совершает периодическое колебательное движение, соскальзывая с одной наклонной плоскости, поднимаясь по другой и двигаясь в обратном направлении (рис. 2.9). Обе на-



Рис. 2.9

клонные плоскости образуют с горизонтом угол α . Пренебрегая трением, построить фазовый портрет системы.

2.2. Слабо нелинейные системы с малыми потерями энергии. Метод гармонического баланса

Метод гармонического баланса является одним из наиболее простых приближённых методов аналитического исследования движения нелинейных колебательных систем. В своей наиболее простой форме, используемой ниже, этот метод позволяет исследовать только стационарные режимы движения.

Если на слабо нелинейную и слабо диссипативную систему действует гармоническая внешняя сила, то уравнение движения можно представить в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x, \dot{x}) + P \cos pt. \quad (2.23)$$

Здесь слагаемое $F(x, \dot{x})$ объединяет малые нелинейные и диссипативные члены уравнения, P и p — соответственно амплитуда и частота внешней силы. В соответствии с методом гармонического баланса в первом приближении решение уравнения (2.23) можно искать в виде

$$x = a_0 + a \cos pt + b \sin pt. \quad (2.24)$$

Здесь a и b — амплитуды первых гармонических составляющих решения, a_0 — постоянная составляющая, которая может появиться в решении при наличии в системе нелинейных элементов. Подставляя (2.24) в выражение для функции $F(x, \dot{x})$, разлагая полученное соотношение в ряд Фурье и отбрасывая все члены этого ряда кроме постоянной составляющей и первой гармоники, представим $F(x, \dot{x})$ приближенным выражением

$$F(x, \dot{x}) \approx \beta_0 + \beta_1 \cos pt + \beta_2 \sin pt. \quad (2.25)$$

Здесь

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, \dot{x}) d(pt), \quad (2.26)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x, \dot{x}) \cos pt d(pt), \quad (2.27)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x, \dot{x}) \sin pt d(pt). \quad (2.28)$$

Подставляя (2.25) в (2.23) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармонических функциях в правой и левой частях равенства, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_0 , a и b :

$$\omega_0^2 a_0 = \beta_0,$$

$$a(\omega_0^2 - p^2) = \beta_1 + P,$$

$$b(\omega_0^2 - p^2) = \beta_2.$$

При исследовании собственных колебаний консервативных систем решение (2.24) можно упростить, оставив, например, только два первых члена. Если, кроме того, нелинейная возвращающая сила описывается нечётной функцией $F(x)$ координаты x , то в решении должна отсутствовать постоянная составляющая. В этом случае уравнение (2.23) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(x), \quad (2.29)$$

а решение этого уравнения можно искать в форме

$$x = a \cos pt. \quad (2.30)$$

Подставляя (2.30) в $F(x)$, разлагая полученное выражение в ряд Фурье и ограничиваясь первой гармоникой, получим

$$F(x) \approx \beta_1 \cos \omega t. \quad (2.31)$$

Подставляя (2.30) и (2.31) в уравнение (2.29) и приравнявая коэффициенты при $\cos \omega t$ справа и слева от знака равенства, для частоты колебаний получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \beta_1/a. \quad (2.32)$$

Задача 2.11

Пружинный маятник состоит из грузика с массой m , подвешенного на пружине. Считая, что при смещении грузика от положения равновесия возникает возвращающая сила $f(x) = -kx - \gamma x^3$, найти зависимость частоты собственных колебаний системы от их амплитуды.

Решение

В данном случае уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = f(x). \quad (2.33)$$

Подставляя сюда выражение для $f(x)$, и используя обозначения

$$\omega_0^2 = k/m, \quad F(x) = -\gamma x^3/m,$$

преобразуем уравнение (2.33) к виду, совпадающему с (2.29). Будем искать решение в виде (2.30). Используя (2.27), для коэффициента β_1 получим

$$\beta_1 = \frac{3}{4} \frac{\gamma}{m} a^3.$$

Подставляя это соотношение в (2.32), найдём выражение для квадрата частоты собственных колебаний

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{m} a^3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.12. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью L и нелинейного конденсатора, ёмкость которого зави-

сит от заряда q по закону $C = C_0 / (1 + \gamma q^2)$, где C_0 и γ — константы. Пользуясь методом гармонического баланса, найти зависимость частоты собственных колебаний контура от их амплитуды.

Задача 2.13. Грузик с массой m подвешен на пружине и совершает колебания в вертикальном направлении под действием внешней силы $F_0 \cos pt$, приложенной к грузику. Считая, что при смещении грузика от положения равновесия возникает сила упругости $\Phi = -kx - \gamma x^3$, а сила трения пропорциональна скорости грузика, составить уравнение движения, решить его методом гармонического баланса, получить зависимость амплитуды колебаний грузика от частоты p и качественно построить график этой зависимости для случаев $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$.

Задача 2.14. Идеальный математический маятник совершает колебания с амплитудой 15° . На сколько процентов отличается частота этих колебаний от частоты малых колебаний? При какой амплитуде частота колебаний маятника будет отличаться от частоты малых колебаний на 2%?

Задача 2.15. Для колебательной системы, описанной в задаче 2.10, пренебрегая трением,

1. написать уравнение движения и, пользуясь методом гармонического баланса, получить приближенное выражение для зависимости периода движения от амплитуды колебаний в горизонтальном направлении.
2. Получить точное выражение для той же зависимости, пользуясь законами механики, и определить в процентах погрешность приближенного выражения при $\alpha \rightarrow 0$.

Задача 2.16. Небольшое тело с массой m может без трения двигаться по горизонтальной поверхности между двумя пружинами с жёсткостью k (рис. 2.10). Между пружинами име-

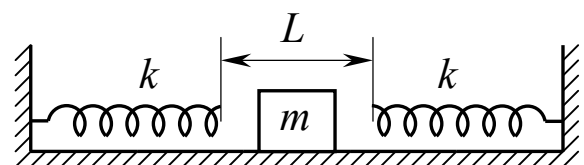


Рис. 2.10

ется зазор шириной L . Тело совершает периодическое движение, двигаясь по инерции в зазоре между пружинами и периодически «отражаясь» то от одной пружины, то от другой.

1. Пользуясь методом гармонического баланса, найти зависимость частоты колебаний от их амплитуды A в предположении, что размеры тела пренебрежимо малы, а ширина зазора L удовлетворяет условию $L \ll A$. В решении удерживать только члены первого порядка малости относительно L/A .
2. Пользуясь законами механики и методом поэтапного рассмотрения, получить точное выражение для частоты. Сравнить результаты обоих расчетов.

3. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Адиабатически медленное изменение параметров системы. Адиабатические инварианты

Пусть Λ — один из параметров консервативной системы, совершающей периодическое движение с периодом T . Изменение параметра Λ считается адиабатически медленным, если изменение Λ за период движения много меньше чем Λ , то есть если выполняется условие

$$\left| \frac{d\Lambda}{dt} \right| \frac{T}{\Lambda} \ll 1.$$

Введём обозначение

$$\left| \frac{d\Lambda}{dt} \right| \frac{T}{\Lambda} = \zeta.$$

Величины I , изменяющиеся много медленнее, чем Λ , называются адиабатическими инвариантами системы. Относительная скорость их изменения есть величина более высокого порядка малости, чем ζ :

$$\left| \frac{dI}{dt} \right| \frac{T}{I} \ll \zeta.$$

Адиабатический инвариант I можно вычислить с помощью соотношения

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq, \quad (3.1)$$

где q — обобщённая координата, p — обобщённый импульс, сопряжённый с координатой q , а интеграл берётся по фазовой траектории периодического движения, взятой при условии, что $\Lambda = \text{const}$. Интеграл в выражении (3.1) равен площади S фигуры, ограниченной фазовой траекторией на плоскости p, q . Поэтому выражение (3.1) можно представить в виде

$$I = S/2\pi. \quad (3.2)$$

Задача 3.1

Грузик с массой m , подвешенный на пружине, совершает колебания с частотой ω . Считая, что это устройство является гармоническим осциллятором, и пренебрегая трением, найти адиабатический инвариант системы.

Решение

Для энергии E гармонического осциллятора с массой m и собственной частотой ω имеем

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

На плоскости p, q это выражение является уравнением эллипса с полуосями $a = \sqrt{2mE}$, $b = \sqrt{2E/m\omega^2}$. Площадь эллипса S определяется выражением $S = \pi ab$. Отсюда для адиабатического инварианта гармонического осциллятора из (3.1.2) получим:

$$I = E/\omega.$$

Задача 3.2

В колебательном контуре без потерь энергии возбуждены колебания. Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе, имеющем ёмкость C , равна U_0 . Ёмкость колебательного контура адиабатически медленно изменилась на величину ΔC . Найти адиабатический инвариант колебательного контура и с его помощью определить относительное изменение $\Delta U/U_0$ амплитуды напряжения на конденсаторе.

Решение

Выберем в качестве обобщённой координаты q заряд конденсатора. Сопряжённый с ней обобщённый импульс p определяется выражением

$$p = \partial\lambda/\partial\dot{q}, \quad (3.3)$$

где λ — функция Лагранжа. В нашем случае

$$\lambda = \frac{L\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C}, \quad (3.4)$$

где L и C — соответственно индуктивность и ёмкость колебательного контура. Используя (3.1.3) и (3.1.4), для обобщённого импульса получаем

$$p = L\dot{q}. \quad (3.5)$$

С учётом (3.1.5) гамильтониан системы можно представить в виде

$$H = \frac{p^2}{2L} + \frac{q^2}{2C} = E, \quad (3.6)$$

где E — энергия системы. Отсюда получаем уравнение фазовой траектории:

$$\frac{p^2}{2LE} + \frac{q^2}{2CE} = 1. \quad (3.7)$$

Это — уравнение эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{2CE}; \quad b = \sqrt{2LE}. \quad (3.8)$$

Площадь эллипса определяется выражением

$$S = \pi ab. \quad (3.9)$$

Отсюда, используя (6.2), находим адиабатический инвариант колебательного контура:

$$I = S/2\pi = E/\omega_0. \quad (3.10)$$

Здесь $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансная частота колебательного контура.

В силу адиабатической инвариантности выражения E/ω_0 , эта величина должна иметь одно и то же значение как до изменения ёмкости, так и после него. Отсюда

$$\frac{E(C)}{\omega_0(C)} = \frac{E(C + \Delta C)}{\omega_0(C + \Delta C)}. \quad (3.11)$$

Величина E равна максимальному значению энергии, запасённой в конденсаторе, то есть значению энергии, запасённой в конденсаторе, когда напряжение на нём максимально. Пусть до изменения ёмкости это напряжение равно U_0 . Тогда из (3.11) находим

$$\frac{CU_0^2}{2} \sqrt{LC} = \frac{(C + \Delta C)(U_0 + \Delta U_0)^2}{2} \sqrt{L(C + \Delta C)},$$

откуда получаем

$$\frac{\Delta U_0}{U_0} = \left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right)^{-\frac{3}{4}} - 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3. Математический маятник, имеющий длину l , колеблется без потерь энергии с амплитудой φ_0 . Длина нити маятника адиабатически медленно изменяется на величину Δl . Считая колебания маятника малыми, найти адиабатический инвариант маятника и определить относительное изменение амплитуды колебаний $\Delta\varphi_0/\varphi_0$.

Задача 3.4. Показать, что при адиабатически медленном изменении масс Земли или Солнца эксцентриситет орбиты Земли является адиабатическим инвариантом.

3.2. Изменение параметров с частотой, соизмеримой с частотой собственных движений системы

А. Скачкообразное изменение параметров

Как правило, изменение параметров колебательной системы осуществляется некоторым внешним по отношению к системе устройством. Это устройство принято называть генератором накачки. В общем случае для изменения параметров системы требуется некоторое количество энергии. В зависимости от фазовых соотношений между изменением параметра и колебанием системы это количество энергии может передаваться как от генератора накачки к колебательному процессу в системе, так и в обратном направлении. Если мощность, передаваемая от генератора накачки колебательному процессу, превышает суммарную мощность потерь в диссипативных элементах колебательной системы, то интенсивность колебательного процесса увеличивается. В этом случае в системе возможно параметрическое возбуждение колебаний, называемое также параметрическим резонансом.

На практике идеальное скачкообразное изменение параметров неосуществимо. Поэтому рассматриваемый случай может соответствовать реальным процессам лишь приближённо. Условия возбуждения колебаний при скачкообразном изменении параметров можно найти, приравнявая энергию, передаваемую системе за период её движения, к потерям энергии в системе за то же время.

Задача 3.5

Один конец тонкой невесомой нити закреплён неподвижно в точке A , а другой проходит через небольшое отверстие B в неподвижной пластине (рис. 3.1). К этому концу нити приложена сила T , натягивающая нить. Точка A и отверстие B расположены на одной вертикали. На нити, в середине между точкой A и отверстием B находится небольшая бусинка, имеющая массу m . Если бусинку сместить

в горизонтальном направлении и затем отпустить, она будет совершать затухающие колебания с частотой ω_0 . Считая, что натяжение нити изменяется скачкообразно с частотой $2\omega_0$ в соответствии с графика-

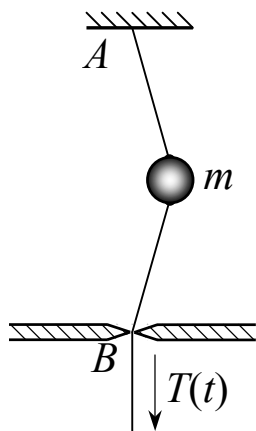


Рис. 3.1

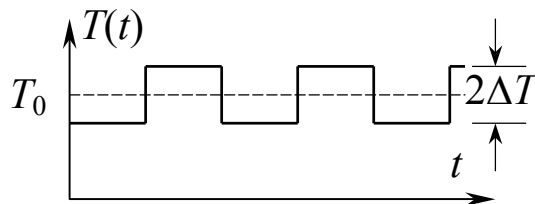


Рис. 3.2

ком, приведённым на рисунке 3.2, найти минимальное значение коэффициента модуляции натяжения нити $m = \Delta T/T$, при котором наступает параметрическое возбуждение колебаний.

Решение

Пусть бусинка смещена по горизонтали на такое расстояние, при котором нить вблизи точки A отклоняется от вертикали на угол α . Тогда сила F , возвращающая бусинку к положению равновесия, определяется выражением

$$F = 2T \sin \alpha,$$

где T — натяжение нити. Отсюда для энергии W , которую необходимо затратить, чтобы отклонить бусинку на такое расстояние, получим

$$W = \int_0^{\alpha} lT \sin \alpha \, d\alpha. \quad (3.12)$$

Здесь l — расстояние между точкой A и отверстием B . Считая, что угол α достаточно мал и полагая $\sin \alpha \approx \alpha$, получим

$$W = lT\alpha^2/2. \quad (3.13)$$

Найдём величину потерь энергии за период колебаний из-за наличия трения. Для этого воспользуемся определением добротности Q :

$$Q = 2\pi W_{\text{зап}} / \Delta W. \quad (3.14)$$

Здесь $W_{\text{зап}}$ — энергия, запасённая в системе, ΔW — потери энергии за период колебаний. Если амплитуда колебаний равна α , то запасённая энергия определяется выражением (3.13). Тогда, используя (3.13) и (3.14), для потерь энергии за период колебаний получим

$$\Delta W = \pi l T \alpha^2 / Q. \quad (3.15)$$

Как следует из условия задачи, за период колебаний натяжение нити дважды увеличивается на $2\Delta T$. Поэтому в соответствии с (3.2.2) вложение энергии $\Delta W_{\text{вл}}$ за то же время составляет

$$\Delta W_{\text{вл}} = 2\Delta T l \alpha^2. \quad (3.16)$$

Для возбуждения колебаний необходимо выполнение условия

$$\Delta W_{\text{вл}} = \Delta W.$$

Отсюда, используя (3.15) и (3.16) получаем условие параметрического возбуждения

$$\Delta T / T = \pi / 2Q.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.6. Длина нити l математического маятника (рис. 3.3) периодически изменяется на величину $2\Delta l$ по закону меандра (рис. 3.4) с периодом $\tau = T_0/2$, где T_0 — период колебаний маятника при $l = l_0$, где l_0 — среднее значение длины нити. Считая, что при движении маятника появляются силы вязкого трения, а добротность маятника равна Q , найти условие параметрического возбуждения колебаний.

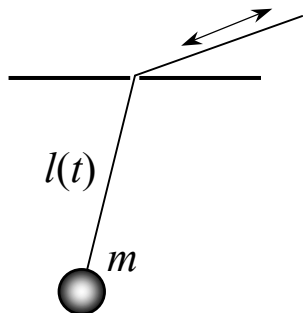


Рис. 3.3

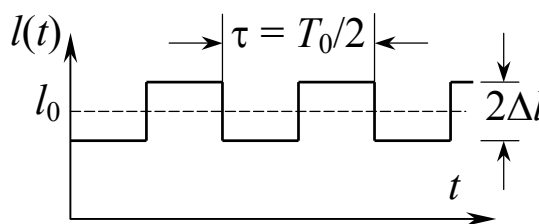


Рис. 3.4

Задача 3.7. Детская игрушка (рис. 3.5) состоит из двух нитей, проходящих через отверстия в пуговице и связанных у концов, так, что образуется замкнутое кольцо. Если это кольцо с одной стороны пуговицы накинуть на палец правой руки, а с другой стороны пуговицы — на палец левой руки, и, разместив пуговицу посередине, натянуть нити с некоторой силой F , то пуговица сможет совершать крутильные колебания. Если величину силы F изменять с частотой в два раза превышающей частоту крутильных колебаний пуговицы, то амплитуда крутильных колебаний увеличивается вследствие параметрического резонанса. Считая, что при вращении пуговицы возникает вязкое трение, пропорциональное угловой скорости, добротность крутильной колебательной системы равна Q , а сила F изменяется во времени в соответствии с графиком рис. 3.6, найти минимальную величину коэффициента модуляции силы $m_{\min} = (\Delta F/F)_{\min}$, при котором наступает параметрическое возбуждение колебаний.

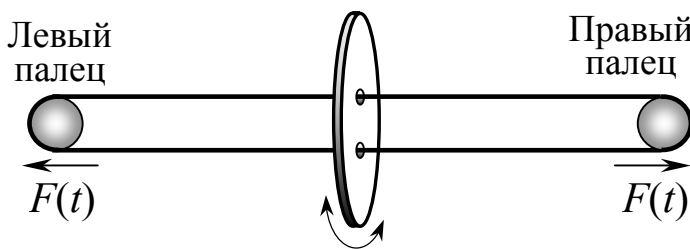


Рис. 3.5

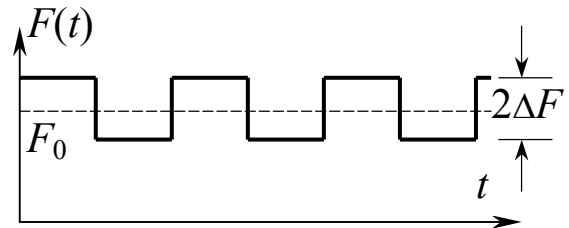


Рис. 3.6

Б. Изменение параметров по гармоническому закону

Если закон изменения параметров системы таков, что коэффициенты дифференциального уравнения, описывающего колебательный процесс, изменяются во времени по гармоническому закону, то для исследования параметрического возбуждения колебаний удобно использовать метод медленно меняющихся амплитуд. Этот метод помимо условий возбуждения позволяет находить стационарные режимы, а также исследовать их устойчивость и переходные процессы.

Если коэффициент модуляции параметров системы мал, то при использовании безразмерного времени $\tau = \omega t$ дифференциальное урав-

нение колебаний системы с малыми диссипацией, нелинейностью и глубиной модуляции параметра можно представить в виде

$$x'' + x = F(x, x', \tau). \quad (3.17)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по безразмерному времени, а $F(x, x', \tau)$ — малый по сравнению с единицей член уравнения, объединяющий слагаемые, описывающие диссипацию, нелинейность и модуляцию параметра. В соответствии с методом медленно меняющихся амплитуд решение уравнения (3.17) можно искать в виде

$$x = u \cos \tau + v \sin \tau, \quad (3.8)$$

где u и v — медленно меняющиеся за период колебаний системы функции, для которых справедливы приближённые укороченные уравнения

$$u' = \varphi(u, v); \quad v' = \psi(u, v). \quad (3.19)$$

Здесь величины $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ определяются соотношениями

$$\varphi(u, v) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, x', \tau) \sin \tau \, d\tau,$$

$$\psi(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, x', \tau) \cos \tau \, d\tau.$$

Для отыскания стационарных значений амплитуд u и v положим в уравнениях (3.19) $u' = 0$ и $v' = 0$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= 0, \\ \psi(u, v) &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

решая которую, найдём стационарные амплитуды u_i и v_i .

Устойчивость стационарного режима с амплитудами u_i и v_i исследуем методом возмущений. Положим

$$\begin{aligned} u &= u_i + \eta, \\ v &= v_i + \zeta, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где η и ζ — малые вариации. Подставим (3.21) в (3.19), разложим полученные уравнения в ряд Тейлора около точки $u = u_i$ и $v = v_i$ и ограничимся в этом разложении линейными относительно η и ζ членами. В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений для малых вариаций η и ζ :

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \left[\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \eta + \left[\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \zeta, \\ \dot{\zeta} &= \left[\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \eta + \left[\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \zeta.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Будем искать решение системы (3.22) в виде

$$\eta = \eta_0 \exp(\lambda \tau); \quad \zeta = \zeta_0 \exp(\lambda \tau).\tag{3.23}$$

Подставляя (3.23) в (3.22), получим квадратное уравнение для определения значений характеристического показателя λ . Если реальная часть хотя бы одного из возможных значений характеристического показателя положительна, то рассматриваемый стационарный режим неустойчив.

Находит также применение вариант метода медленно меняющихся амплитуд, в соответствии с которым решение уравнения (3.17) ищется в виде

$$x = A(\tau) \cos(\tau + \varphi(\tau)),\tag{3.24}$$

где амплитуда $A(\tau)$ и фаза $\varphi(\tau)$ предполагаются медленно меняющимися функциями времени. Такой вид решения приводит к укороченным уравнениям вида

$$\begin{aligned}A' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, x', \tau) \sin(\tau + \varphi(\tau)) d(\tau + \varphi(\tau)), \\ A\varphi' &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, x', \tau) \cos(\tau + \varphi(\tau)) d(\tau + \varphi(\tau)).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Нахождение стационарных режимов и исследование их устойчивости выполняется с помощью уравнений (3.25) так же как и при отыскании решения в форме (3.18).

Задача 3.8

Последовательный колебательный контур содержит катушку с индуктивностью L , конденсатор, ёмкость C которого изменяется по закону

$$C = C_0 / (1 + m \cos pt),$$

и нелинейный резистор, сопротивление R которого зависит от амплитуды I тока в соответствии с соотношением

$$R = R_0 (1 + \beta_0 I^2),$$

где β_0 — постоянный коэффициент. Собственная частота колебательного контура $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$ и частота внешнего воздействия p удовлетворяют неравенству $|(4\omega_0^2/p^2) - 1| \ll 1$. Считая, что m и $R_0/\omega_0 L$ — малые величины, и используя метод медленно меняющихся амплитуд, найти область параметрического резонанса, определить область допустимых расстроек, в которой происходит возбуждение; получить выражение для стационарной амплитуды и построить качественно зависимость амплитуды колебаний от расстройки.

Решение

Обозначим через x заряд на конденсаторе колебательного контура. Тогда уравнение колебаний можно представить в виде

$$L\ddot{x} + R_0 (1 + \beta_0 I^2) \dot{x} + \frac{1}{C_0} (1 + m \cos pt) x = 0. \quad (3.26)$$

Используя обозначения

$$2\theta = R_0/\omega L, \quad \omega_0^2 = 1/LC_0, \quad p = 2\omega; \quad \omega_0^2/\omega^2 = 1 - \xi,$$

введя безразмерное время $\tau = \omega t$ и отбрасывая член второго порядка малости, пропорциональный произведению ξm , представим уравнение (3.26) в форме

$$x'' + x = \xi x - 2\theta(1 + \beta_0 I^2)x' - mx \cos 2\tau. \quad (3.27)$$

Уравнение (3.2.16) имеет тот же вид, что и уравнение (3.2.6) при

$$F(x, x', \tau) = \xi x - 2\theta(1 + \beta_0 I^2)x' - mx \cos 2\tau. \quad (3.28)$$

Решение уравнения (3.27) будем искать в форме (3.18). В выражении (3.18) u и v — амплитуды квадратурных составляющих решения. Полная амплитуда A колебаний заряда связана с u и v соотношением

$$A = \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (3.29)$$

В свою очередь, амплитуда тока I связана с амплитудой заряда A выражением

$$I = \omega A. \quad (3.30)$$

Используя (3.19), с учетом (3.27)—(3.30) получим укороченные уравнения

$$\begin{aligned} u' &= -\theta_0 u - \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{m}{2} \right) v, \\ v' &= -\theta_0 v - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} - \xi \right) u, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где использовано обозначение

$$\theta_0 = \theta(1 + \omega^2 \beta_0 A^2). \quad (3.32)$$

Из (3.31), используя (3.20), получим систему уравнений для отыскания возможных стационарных значений амплитуд u и v :

$$\begin{aligned} \theta_0 u + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} + \xi \right) v &= 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} - \xi \right) u + \theta_0 v &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Решая систему уравнений (3.33), найдём, что возможны два стационарных значения амплитуды колебаний:

$$A_1 = 0; \quad A_2 = \frac{1}{\omega^2 \beta_0} \left(\frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2} - 1 \right). \quad (3.34)$$

Первое из этих значений соответствует состоянию покоя, второе — колебанию с отличной от нуля амплитудой.

Для исследования устойчивости состояния покоя предположим, что амплитуды u и v получили небольшие приращения, равные соответственно η и ζ . Линеаризуя укороченные уравнения (3.31), для вариаций η и ζ получим систему уравнений (3.22), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \eta' &= -\theta\eta - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} + \xi \right) \zeta, \\ \zeta' &= -\theta\zeta - \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} - \xi \right) \eta. \end{aligned}$$

Отыскивая решение этой системы уравнений в виде (3.23), для характеристического показателя λ получим:

$$\lambda_1 = -\theta - \frac{1}{2} \sqrt{m^2/4 - \xi^2}; \quad \lambda_2 = -\theta + \frac{1}{2} \sqrt{m^2/4 - \xi^2}. \quad (3.35)$$

Из (3.35) видно, что оба значения характеристического показателя вещественны при условии, что $m/2 > \xi$. Если это условие выполнено, то $\lambda_1 < 0$ всегда, а $\lambda_2 > 0$ при условии, что

$$m/2 > \sqrt{4\theta^2 + \xi^2}. \quad (3.36)$$

Это неравенство и есть условие возбуждения колебаний. Из (3.36) следует, что минимальная величина коэффициента модуляции $m_{\text{мин}}$, при которой ещё возможно возбуждение колебаний, достигается при условии, что $\xi = 0$ и определяется равенством

$$m_{\text{мин}} = 4\theta. \quad (3.37)$$

Принимая во внимание, что $2\theta = 1/Q$, где Q — добротность колебательного контура, выражение (3.37) можно также представить в виде:

$$m_{\text{мин}} = 2/Q.$$

Для области расстроек, в которой возможно возбуждение колебаний, из (3.36) получим:

$$|\xi| < \sqrt{(m^2/4) - 4\theta^2}.$$

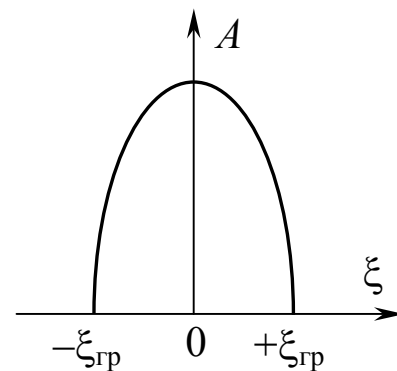


Рис. 3.7

Зависимость амплитуды колебаний от расстройки ξ определяется выражением (3.34). Вид этой зависимости качественно показан на рис. 3.7.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.9. Решить задачу 3.8 для случая, когда сопротивление резистора определяется соотношением

$$R = R_0(1 + \beta_0 I),$$

где I — амплитуда тока в контуре.

Задача 3.10. Последовательный колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью L , резистора с сопротивлением R , и конденсатора, ёмкость которого изменяется во времени по закону

$$C = C_0/(1 + m \cos 2\omega t).$$

Добротность контура $Q \gg 1$. Расстройка $\xi = 1 - (\omega_0^2/\omega^2)$ и коэффициент модуляции ёмкости m удовлетворяют неравенствам $\xi \ll 1$, $m \ll 1$.

Методом медленно меняющихся амплитуд найти условие параметрического возбуждения и область расстроек, в которой наблюдается параметрический резонанс.

Задача 3.11. Длина нити математического маятника периодически изменяется во времени по закону $l = l_0/(1 + m \cos 2\omega t)$. При движении маятника возникают силы вязкого трения, пропорциональ-

ные линейной скорости маятника. Добротность маятника $Q \gg 1$. Расстройка ξ , определяемая соотношением $\xi = 1 - (\omega_0^2/\omega^2)$ (здесь $\omega_0^2 = g/l$), а также коэффициент модуляции m удовлетворяют неравенствам $\xi \ll 1, m \ll 1$.

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд, получить условие параметрического возбуждения колебаний и определить область расстроек, в которой происходит возбуждение. Найти минимальное значение m , при котором возможно параметрическое возбуждение колебаний.

4. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

4.1. Автоколебательные системы с высокодобротным колебательным элементом

Для исследования автоколебательных систем, содержащих высокодобротный колебательный элемент, может быть использован метод медленно меняющихся амплитуд, рассмотренный в предыдущем разделе.

Задача 4.1

В последовательный колебательный контур, состоящий из индуктивности L , ёмкости C и резистора R_0 , включен элемент с падающим участком на вольтамперной характеристике. Рабочая точка этого элемента выбрана таким образом, что падение напряжения на элементе связано с током, текущим через него, соотношением: $u = -S_1 i + S_3 i^3$.

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд, найти стационарные режимы и исследовать их устойчивость.

Решение

Пусть q — заряд на конденсаторе колебательного контура. Тогда дифференциальное уравнение для колебаний заряда имеет вид

$$L\ddot{q} + R_0\dot{q} + \frac{q}{C} + u = 0. \quad (4.1)$$

Здесь u — падение напряжения на элементе с падающим участком вольтамперной характеристики. По условию задачи

$$u = -S_1\dot{q} + S_3\dot{q}^3. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1), вводя безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и используя обозначения

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= 1/LC; & 2\theta_0 &= R_0/\omega_0 L; & 2\theta &= S_1/\omega_0 L; \\ 2\beta &= \omega_0 S_3/L; & y &= q\sqrt{\beta/(\theta - \theta_0)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

преобразуем уравнение (4.1) к виду

$$y'' + y = F(y'), \quad (4.4)$$

где

$$F(y') = 2y'(\theta - \theta_0)(1 - (y')^2). \quad (4.5)$$

Будем искать решение уравнения (4.4) в форме

$$q = A(\tau)\cos(\tau + \varphi(\tau)).$$

Тогда с учётом (4.5) укороченные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} A' &= A(\theta - \theta_0)\left(1 - \left(3A^2/4\right)\right), \\ A\varphi' &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из второго уравнения (4.6) следует, что фаза колебательного процесса постоянна. Следовательно, обусловленная нелинейностью системы поправка к частоте в рассматриваемом приближении отсутствует.

Полагая $A' = 0$ и используя первое из укороченных уравнений, находим, что возможны два стационарных значения амплитуды колебаний:

$$A_1 = 0; \quad (4.7)$$

$$A_2 = 2/\sqrt{3}. \quad (4.8)$$

Значение $A_1 = 0$ соответствует состоянию покоя. Для исследования устойчивости этого состояния положим

$$A = A_1 + \eta, \quad (4.9)$$

где η — малая вариация. Подставляя (4.9) в (4.6) и линеаризуя полученное уравнение с учётом (4.7), получим

$$\eta' = (\theta - \theta_0)\eta. \quad (4.10)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\eta = \eta_0 \exp(\lambda\tau). \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.10), будем иметь

$$\lambda = \theta - \theta_0. \quad (4.12)$$

Состояние покоя устойчиво, если $\lambda < 0$. Используя это условие, из (4.12) находим условие возбуждения колебаний:

$$\theta_0 < \theta. \quad (4.13)$$

Принимая во внимание (4.3), можно представить условие возбуждения в виде

$$S_1 > R.$$

Для исследования устойчивости стационарного состояния с амплитудой A_2 положим

$$A = A_2 + \eta, \quad (4.14)$$

где η — малое приращение, $\eta \ll A_2$. Подставляя (4.14) в (4.6) и линеаризуя полученное уравнение с учётом (4.8), будем иметь

$$\eta' = 2(\theta_0 - \theta)\eta. \quad (4.15)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде (4.11). Тогда после подстановки (4.11) в (4.15), для характеристического показателя λ получим

$$\lambda = 2(\theta_0 - \theta). \quad (4.16)$$

Для устойчивости стационарного режима с ненулевой амплитудой необходимо иметь

$$\lambda < 0. \quad (4.17)$$

Сравнивая выражение (4.16) с условием возбуждения (4.13), находим, что если выполнено условие возбуждения, то стационарный режим с амплитудой $A_2 \neq 0$ устойчив.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.2. К параллельному колебательному контуру (рис. 4.1), состоящему из индуктивности L , ёмкости C и резистора R , подключен элемент с падающим участком на вольтамперной характеристике (туннельный диод). Рабочая точка этого элемента выбрана таким образом, что напряжение u на элементе связано с током i , текущим через него, соотношением

$$i = \alpha_0 u + \gamma_0 u^3.$$

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд, найти условие возбуждения колебаний, стационарные режимы и исследовать их устойчивость.

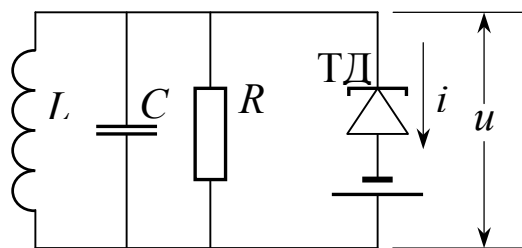


Рис. 4.1

Задача 4.3. На ленте, равномерно двигающейся со скоростью v_0 , лежит груз с массой m . Груз двумя одинаковыми пружинами, имеющими жесткость k , связан с неподвижными стенками (рис. 4.2).

Сила трения между грузом и лентой зависит от скорости v движения ленты относительно груза в соответствии с графиком, показанным на рис. 4.3. При определённых условиях груз начинает периодически двигаться по закону, близкому к гармоническому. При движе-

нии груза помимо силы трения о ленту возникает ещё сила вязкого трения $F_v = h\dot{x}$, где \dot{x} — скорость груза.

Скорость ленты соответствует точке перегиба на падающем участке графика рис. 4.3 (точка «а»), а характеристика трения в небольшой окрестности этой точки может быть представлена многочленом третьей степени: $F = -\alpha v + \gamma v^3$, где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд, найти стационарные режимы движения, исследовать их устойчивость и получить условия возбуждения гармонических колебаний.

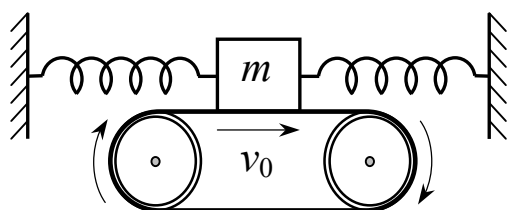


Рис. 4.2

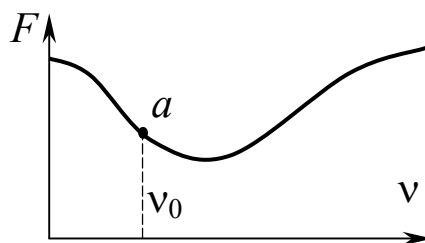


Рис. 4.3

Задача 4.4. Маятник Фроуда представляет собой горизонтальный вал, на котором размещена втулка. Втулка может вращаться относительно вала с некоторым трением. К этой втулке прикреплен жёсткий стержень маятника. Длина стержня l . На конце стержня размещён грузик маятника (рис. 4.4). Вал вращается с постоянной угловой скоростью ω . При определённых условиях в системе происходит возбуждение незатухающих колебаний маятника, по форме близких к гармоническим. Момент сил трения между валом и втулкой зависит от разности $\Delta\omega$ угловых скоростей вала и втулки как показано на рис. 4.5. Пренебрегая массой втулки и стержня, считая, что при дви-

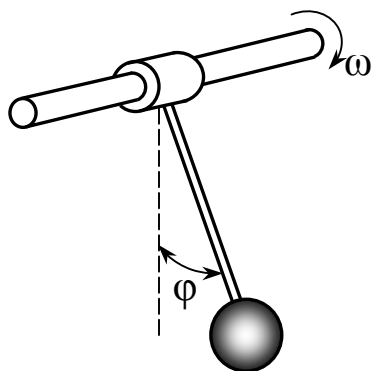


Рис. 4.4

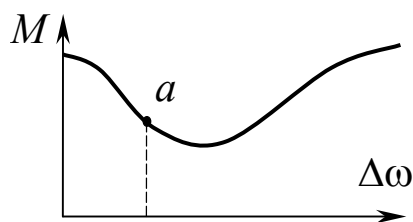


Рис. 4.5

жении маятника в воздухе возникает сила вязкого трения $F_B = hl\varphi'$ (здесь φ' — угловая скорость маятника), приложенная к грузику маятника, угловая скорость вала соответствует точке перегиба (точка «а») на падающем участке графика рис. 4.5, колебания маятника имеют малую амплитуду, а характеристика трения в небольшой окрестности этой точки может быть представлена многочленом третьей степени:

$$M = -\alpha(\Delta\omega) + \gamma(\Delta\omega)^3; \quad \alpha > 0; \quad \gamma > 0,$$

получить условие возбуждения колебаний найти стационарные режимы движения системы и исследовать их устойчивость.

Задача 4.5. На рисунке 4.6 представлена упрощённая принципиальная схема автоколебательной системы томсоновского типа. Зависимость тока стока i транзистора от напряжения смещения u в окрестности рабочей точки описывается выражением

$$i = i_0 + S_0u - S_1u^3, \text{ где } S_0 > 0, S_1 > 0.$$

Пользуясь методом медленно меняющихся амплитуд и считая, что добротность Q колебательного контура удовлетворяет условию $Q \gg 1$, получить условие возбуждения колебаний, найти стационарные режимы и исследовать их устойчивость.

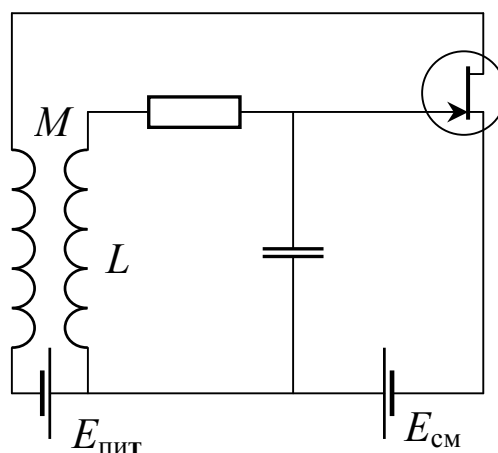


Рис. 4.6

5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Число степеней свободы n определяется как число *независимых* переменных, необходимое для описания поведения системы. Систему со многими степенями свободы можно рассматривать как совокупность n подсистем с одной степенью свободы, связанных друг с другом. Такие подсистемы с одной степенью свободы называются **парциальными**. Связь между ними приводит к тому, что колебания в одной из подсистем влияют на колебания в других.

Для выделения парциальной системы необходимо в дифференциальных уравнениях, описывающих поведение системы, положить равными нулю все независимые переменные, кроме одной. Поскольку независимые переменные могут быть выбраны различными способами, то и разбиение всей системы на парциальные является неоднозначным.

Частоты, с которыми происходят колебания в изолированной системе, называются **собственными**, или **нормальными** частотами. Собственные частоты парциальных систем называются **парциальными** частотами. Парциальные частоты определяются выбором независимых переменных. В отличие от этого, *нормальные частоты не зависят от выбора переменных*; они определяются только свойствами системы, ее параметрами.

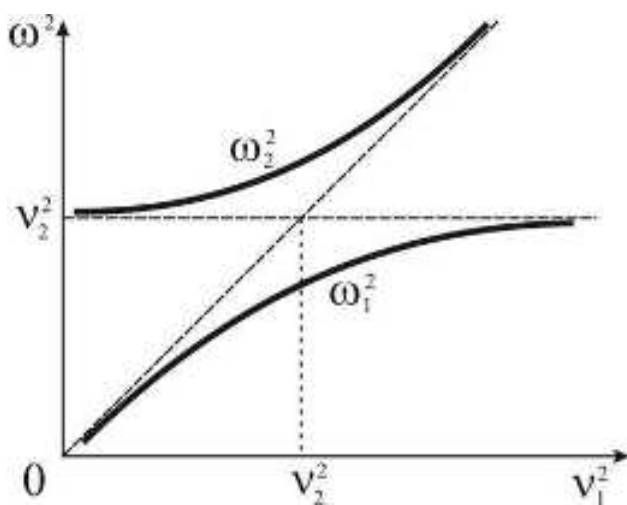


Рис. 5.1

Для системы с двумя степенями свободы ($n = 2$) соотношение между нормальными и парциальными частотами иллюстрируется **графиком Вина**, показанным на рис. 5.1. Из этого графика следует, что при любых значениях параметров системы, во-первых, нормальные частоты ω_1 и ω_2 никогда не совпадают с парциальными частотами ν_1 и ν_2 , а во-вторых,

парциальные частоты всегда лежат между нормальными частотами. В системах с бóльшим числом степеней свободы ($n > 2$) ситуация сложнее: при определенных значениях параметров отдельные парциальные частоты могут совпадать с нормальными.

Поведение колебательной системы с n степенями свободы описывается совокупностью n связанных между собой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для полного решения колебательной задачи необходимо задать $2n$ начальных условий: n условий на начальные смещения обобщенных координат и n условий на их начальные скорости. Существует два метода получения системы дифференциальных уравнений: динамический и энергетический. В динамическом методе необходимо записать динамические уравнения: законы Ньютона для механической системы или правила Кирхгофа — для электрической. В энергетическом методе сначала записываются выражения для потенциальной (V) и кинетической (T) энергии системы, а затем используются уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_s} + \frac{\partial V}{\partial x_s} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1)$$

где x_s — обобщенные координаты. Разумеется, оба метода приводят к одинаковой системе дифференциальных уравнений. Тем не менее, в качестве практического совета может быть рекомендовано использовать энергетический метод для механических систем и динамический метод — для систем электрических.

В случае консервативных систем с двумя степенями свободы система уравнений, в зависимости от характера связи, может иметь разный вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + v_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + v_2^2 x_2 - \alpha_2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + v_1^2 x_1 - \beta_1 \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + v_2^2 x_2 - \beta_2 \ddot{x}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + v_1^2 x_1 - \alpha_1 x_2 - \beta_1 \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + v_2^2 x_2 - \alpha_2 x_1 - \beta_2 \ddot{x}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

где v_1 и v_2 — парциальные частоты, α_1 , α_2 , β_1 и β_2 — коэффициенты связи. Решение любой из этих систем ищется в виде:

$$x_1(t) = A \exp(j\omega t) \quad \text{и} \quad x_2(t) = B \exp(j\omega t). \quad (5.5)$$

Подстановка (5.5) в систему дифференциальных уравнений (5.2)—(5.4) приводит к системе двух алгебраических однородных уравнений, нетривиальное решение которой получается при условии, что ее определитель равен нулю. Это условие дает характеристическое уравнение биквадратного типа, имеющее два действительных корня ω_1^2 и ω_2^2 . В результате получается решение колебательной задачи в форме:

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2), \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= b_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + b_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) = \\ &= a_1 \kappa_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + a_2 \kappa_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2), \end{aligned} \quad (5.7)$$

где величины κ_1 и κ_2 , определяющие соотношения амплитуд одинаковых гармонических компонент в (5.6) и (5.7):

$$\kappa_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad \kappa_2 = \frac{b_2}{a_2}, \quad (5.8)$$

называются **коэффициентами распределения амплитуд** на частотах ω_1 и ω_2 соответственно.

Коэффициенты распределения амплитуд находятся из системы алгебраических уравнений при подстановке в нее поочередно найденных частот ω_1 и ω_2 . Также как и собственные частоты, коэффициенты распределения определяются параметрами системы. Но в отличие от собственных частот, вид выражений для κ_1 и κ_2 зависит от выбора независимых переменных. Более того, эти коэффициенты могут быть размерными.

Договоримся здесь и всюду в дальнейшем более низкую собственную частоту обозначать как ω_1 , а более высокую — как ω_2 . При любых параметрах системы коэффициенты κ_1 и κ_2 имеют разный знак. Если, например, справедливы неравенства $\kappa_1 > 0$ и $\kappa_2 < 0$, то из выражений (5.6) и (5.7) следует, что колебания на низкой частоте ω_1 синфазны, а на частоте ω_2 — противофазны. Одинаковые фазы ψ_1 и ψ_2 гармонических компонент в решениях (5.6) и (5.7) получаются вследствие того, что коэффициенты распределения являются действительными величинами. Но так обстоит дело только в консервативных системах. Если в системе есть потери, то коэффициенты распределения получаются комплексными и, как следствие, возникает сдвиг фаз у компонент с одинаковой частотой.

Как видно из (5.6) и (5.7), в общем случае колебания обеих обобщенных координат x_1 и x_2 имеют бигармонический характер. Амплитуды a_1 , a_2 и фазы ψ_1 , ψ_2 находятся из начальных условий на смещения $x_1(0)$, $x_2(0)$ и скорости $\dot{x}_1(0)$, $\dot{x}_2(0)$. При этом можно так подобрать начальные условия, чтобы во всей системе колебания были чисто гармонические с частотой ω_1 или ω_2 . Однако никаким выбором начальных условий нельзя возбудить в системе колебания на парциальных частотах ν_1 и ν_2 .

Соотношения (5.6) и (5.7) можно рассматривать как формулы линейного преобразования координат x_1 и x_2 в координаты ζ и η , где

$$\zeta = a_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1), \quad \eta = a_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2). \quad (5.9)$$

Координаты ζ и η называются **нормальными координатами**; они выражаются через x_1 и x_2 формулами

$$\zeta = \frac{x_2 - \kappa_2 x_1}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad \eta = \frac{-x_2 + \kappa_1 x_1}{\kappa_1 - \kappa_2}. \quad (5.10)$$

Как видно из (5.9), при любых начальных условиях каждая из нормальных координат совершает гармоническое колебание с частотой ω_1 или ω_2 . Уравнения колебаний в этих координатах не содержат членов, описывающих связь между подсистемами:

$$\ddot{\zeta} + \omega_1^2 \zeta = 0, \quad \ddot{\eta} + \omega_2^2 \eta = 0. \quad (5.11)$$

Поэтому при формальном подходе к нахождению парциальных частот получаем, что в этом случае $\nu_1 = \omega_1$ и $\nu_2 = \omega_2$, а график Вина вырождается в две прямые линии.

Задача 5.1

Для линейной консервативной системы, изображенной на рис. 5.2, найти собственные частоты и коэффициенты распределения амплитуд.

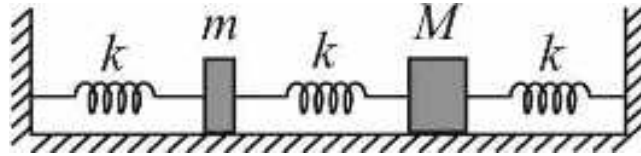


Рис. 5.2

Решение

Запишем выражения для потенциальной и кинетической энергии системы, обозначив через x_1 и x_2 смещения масс m и M от положения равновесия по горизонтали:

$$V = \frac{k}{2} [x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + x_2^2], \quad (5.12)$$

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{M}{2} \dot{x}_2^2. \quad (5.13)$$

Подставив (5.12) и (5.13) в уравнения Лагранжа (5.1), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ M\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Положив в (5.14) поочередно $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$, получим выражения для парциальных частот:

$$v_1^2 = \frac{2k}{m} \quad \text{и} \quad v_2^2 = \frac{2k}{M}. \quad (5.15)$$

Отсюда ясно, что одна парциальная система представляет собой тело массой m с двумя присоединенными к нему пружинами, а вторая — тело с массой M также с двумя присоединенными пружинами.

Введя коэффициенты связи

$$\alpha_1 = \frac{k}{m} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{k}{M}, \quad (5.16)$$

приведем систему (5.14) к виду (5.2). Подстановка пробного решения в форме (5.5) дает систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (-\omega^2 + v_1^2)A - \alpha_1 B = 0 \\ -\alpha_2 A + (-\omega^2 + v_2^2)B = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

Характеристическое биквадратное уравнение для этой системы имеет вид:

$$\omega^4 - (v_1^2 + v_2^2)\omega^2 + v_1^2 v_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (5.18)$$

Отсюда находим собственные частоты:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(v_1^2 + v_2^2) \mp \sqrt{(v_1^2 - v_2^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2}}{2} \quad (5.19)$$

и затем коэффициенты распределения амплитуд

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\omega_{1,2}^2 + v_1^2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{-\omega_{1,2}^2 + v_2^2}. \quad (5.20)$$

Через физические параметры рассматриваемой системы:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k}{m} \left[(\mu + 1) \mp \sqrt{(\mu - 1)^2 + \mu} \right], \quad (5.21)$$

$$\kappa_{1,2} = -(\mu - 1) \pm \sqrt{(\mu - 1)^2 + \mu}, \quad (5.22)$$

где $\mu \equiv m/M$. Колебания на низкой частоте ω_1 являются синфазными ($\kappa_1 > 0$), а на высокой частоте ω_2 — противофазными ($\kappa_1 < 0$). При $\mu = 1$ низкая частота равна $\omega_1 = \sqrt{k/m}$; тела колеблются как единое целое. А высокая частота равна $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$; тела колеблются в противоположные стороны с равными амплитудами.

Задача 5.2

Для линейной консервативной системы, изображенной на рис. 5.3,а, получить систему дифференциальных уравнений в случае произвольных значений емкостей и индуктивностей. Найти собственные частоты и коэффициенты распределения амплитуд при условии $C_1 = C_2 = C$ и $L_1 = L_2 = L$.

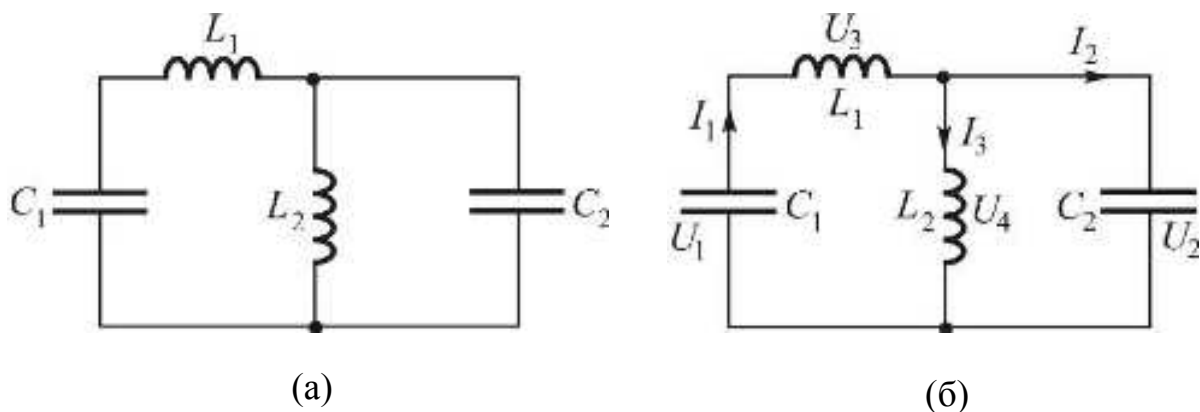


Рис. 5.3

Решение

Введем токи и напряжения, как показано на рис. 5.3,б. Очевидно, что не любая пара из этих семи переменных может быть выбрана в качестве независимых координат. Например, токи I_1 , I_2 и I_3 выражаются соответственно через напряжения U_1 , U_2 и U_4 ; кроме того, $U_2 = U_4$. Если в качестве независимых переменных выбрать токи I_1 и I_2 , то, используя правила Кирхгофа, можно записать:

$$\frac{1}{C_1} \int I_1 dt + L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_3}{dt} = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{C_2} \int I_2 dt - L_2 \frac{dI_3}{dt} = 0, \quad (5.24)$$

$$I_3 = I_1 - I_2. \quad (5.25)$$

Продифференцировав уравнения (5.23)—(5.25), приведем их к виду:

$$\begin{cases} \ddot{I}_1 + \frac{1}{(L_1 + L_2)C_1} I_1 - \frac{L_2}{L_1 + L_2} \ddot{I}_2 = 0 \\ \ddot{I}_2 + \frac{1}{L_2 C_2} I_2 - \ddot{I}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

Сравнивая (5.26) с (5.3), или, положив поочередно в (5.26) $I_2 = 0$ и $I_1 = 0$, находим парциальные частоты и коэффициенты связи:

$$v_1^2 = \frac{1}{(L_1 + L_2)C_1}, \quad v_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}, \quad (5.27)$$

$$\beta_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2}, \quad \beta_2 = 1. \quad (5.28)$$

Таким образом, система (5.26) принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{I}_1 + v_1^2 I_1 - \beta_1 \ddot{I}_2 = 0 \\ \ddot{I}_2 + v_2^2 I_2 - \beta_2 \ddot{I}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

Выбранным независимым переменным соответствуют парциальные системы, изображенные на рис. 5.4.

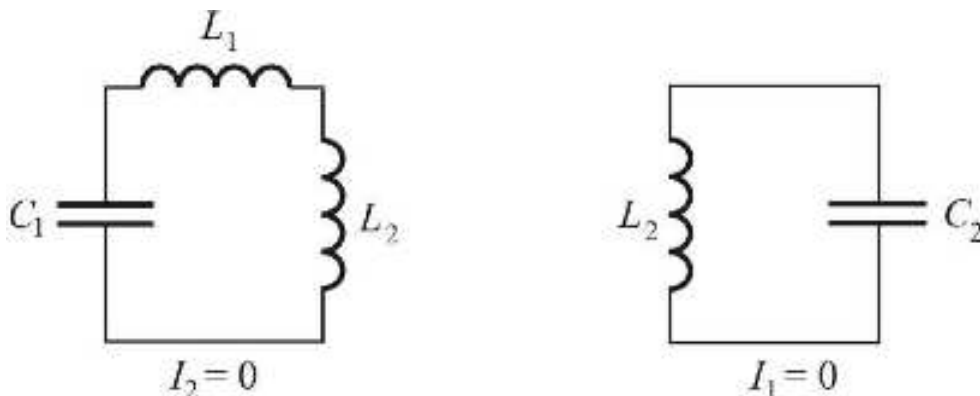


Рис. 5.4

Подстановка в систему (5.29) пробного решения в форме (5.5) приводит к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (-\omega^2 + v_1^2)A + \beta_1\omega^2 B = 0 \\ \beta_2\omega^2 A + (-\omega^2 + v_2^2)B = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Условие равенства нулю определителя этой системы дает биквадратное уравнение

$$(1 - \beta_1\beta_2)\omega^4 - (v_1^2 + v_2^2)\omega^2 + v_1^2v_2^2 = 0, \quad (5.31)$$

решение которого имеет вид:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(v_1^2 + v_2^2) \mp \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)^2 - 4(1 - \beta_1\beta_2)v_1^2v_2^2}}{2(1 - \beta_1\beta_2)}. \quad (5.32)$$

Подставив поочередно найденные частоты ω_1 и ω_2 в систему (5.30), получим выражения для коэффициентов распределения амплитуд:

$$\kappa_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}^2 - v_1^2}{\beta_1\omega_{1,2}^2} = \frac{\beta_2\omega_{1,2}^2}{\omega_{1,2}^2 - v_2^2}. \quad (5.33)$$

Учитывая условие задачи, получаем окончательно:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2LC}, \quad \kappa_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.62, \quad \kappa_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.62. \quad (5.34)$$

Таким образом, колебания на низкой частоте ω_1 являются противофазными, а на высокой частоте ω_2 — синфазными. Такая ситуация является следствием нашего выбора направлений токов I_1 и I_2 в системе. Если поменять направление тока I_2 на противоположное, то вместо (5.25) будет справедливо соотношение $I_3 = I_1 + I_2$, а коэффициенты κ_1 и κ_2 сменяют знак. Колебания на частоте ω_1 станут синфазными, а на частоте ω_2 — противофазными.

Если в качестве независимых переменных выбрать напряжения U_1 и U_2 (рис. 5.3,б), то вместо (5.26) получим

$$\begin{cases} \ddot{U}_1 + \frac{1}{(L_1 + L_2)C_1}U_1 - \frac{L_2C_2}{(L_1 + L_2)C_1}\ddot{U}_2 = 0 \\ \ddot{U}_2 + \frac{1}{L_2C_2}U_2 - \frac{C_1}{C_2}\ddot{U}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Введя парциальные частоты и коэффициенты связи:

$$v_1^2 = \frac{1}{(L_1 + L_2)C_1}, \quad v_2^2 = \frac{1}{L_2C_2}, \quad (5.36)$$

$$\beta_1 = \frac{L_2C_2}{(L_1 + L_2)C_1}, \quad \beta_2 = \frac{C_1}{C_2}, \quad (5.37)$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{U}_1 + v_1^2U_1 - \beta_1\ddot{U}_2 = 0 \\ \ddot{U}_2 + v_2^2U_2 - \beta_2\ddot{U}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

которая определяет собственные частоты в форме (5.21). Учитывая соотношения между параметрами системы, заданные в условии задачи, найдем, что собственные частоты и коэффициенты распределения амплитуд определяются, как и в ранее рассмотренном варианте, формулами (5.34).

Задача 5.3

Малые колебания грузов с массами m_1 и m_2 в системе, изображенной на рис. 5.5, происходят в плоскости чертежа. Какие начальные условия надо задать в системе для возбуждения низкочастотного нормального колебания? У какого груза амплитуда колебаний будет больше? Расчет выполнить для $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, $a = l/2$ и $k = 12mg/l$.

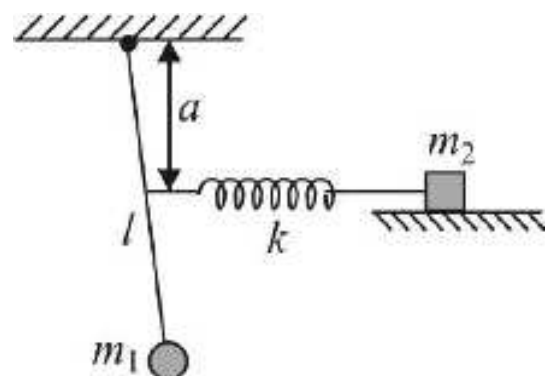


Рис. 5.5

Решение

В качестве независимых координат выберем угол отклонения маятника φ , отсчитываемый от положения равновесия против часовой стрелки, и линейную координату x , отсчитываемую от положения равновесия груза m_2 вправо. Предполагая малую амплитуду колебаний, запишем кинетическую и потенциальную энергию системы:

$$T = \frac{m_1 l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}^2, \quad (5.39)$$

$$V = \frac{m_1 g l}{2} \varphi^2 + \frac{k}{2} (x - a\varphi)^2. \quad (5.40)$$

Подставив (5.39) и (5.40) в уравнения Лагранжа (5.1), получим систему дифференциальных уравнений в форме:

$$\begin{cases} m_1 l^2 \ddot{\varphi} + (m_1 g l + k a^2) \varphi - k a x = 0 \\ m_2 \ddot{x} + k x - k a \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

Введя парциальные частоты и коэффициенты связи по формулам

$$v_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{k a^2}{m_1 l^2}, \quad v_2^2 = \frac{k}{m_2}, \quad \alpha_1 = \frac{k a}{m_1 l^2}, \quad \alpha_2 = \frac{k a}{m_2}, \quad (5.42)$$

приведем систему (5.41) к виду (5.2):

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + v_1^2 \varphi - \alpha_1 x = 0 \\ \ddot{x} + v_2^2 x - \alpha_2 \varphi = 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

Отметим, что для выбранных независимых переменных φ и x одна парциальная система состоит из маятника с пружиной, у которой закреплен правый конец, а вторая — из груза m_2 и пружины с закрепленным левым концом.

Системе дифференциальных уравнений (5.43) соответствует система алгебраических уравнений (5.17) с характеристическим уравнением (5.18). Собственные частоты и коэффициенты распределения ампли-

туд определяются выражениями (5.19) и (5.20). Учитывая заданные условия задачи соотношения между параметрами, получаем:

$$\omega_{1,2}^2 = (4 \mp 2\sqrt{3}) \frac{g}{l}, \quad \kappa_{1,2} = \pm \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Отметим, что в данном случае коэффициенты κ_1 и κ_2 получились размерными из-за выбора разнородных независимых переменных.

Общий вид решения колебательной задачи запишется в виде:

$$\varphi = A_1 \exp(j\omega_1 t) + A_1^* \exp(-j\omega_1 t) + A_2 \exp(j\omega_2 t) + A_2^* \exp(-j\omega_2 t), \quad (5.44)$$

где звездочка * означает комплексное сопряжение. Выражение (5.44) можно привести к виду (5.6):

$$\varphi = a_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2), \quad (5.45)$$

где $a_{1,2} \equiv 2|A_{1,2}|$ и $\psi_{1,2} \equiv \arg(A_{1,2})$. Аналогично получим:

$$x = a_1 \kappa_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + a_2 \kappa_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2). \quad (5.46)$$

Чтобы, в соответствии с условием задачи, возбудить в системе только низкочастотное колебаний с частотой ω_1 , надо задать соответствующие начальные условия. Возможны разные варианты, например, такие:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad x(0) = \varphi_0 \kappa_1, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (5.47)$$

из которых следует, что

$$a_1 = \varphi_0, \quad a_2 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0.$$

В выбранных переменных φ и x амплитуды колебаний соответственно равны φ_0 и $\varphi_0 \kappa_1 = \varphi_0 l / \sqrt{3}$. Но для сравнения амплитуд, их надо привести к величинам одной размерности. Поскольку линейная амплитуда груза m_1 равна $\varphi_0 l$, то отсюда получаем, что амплитуда груза m_2 в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем у груза m_1 .

Задача 5.4

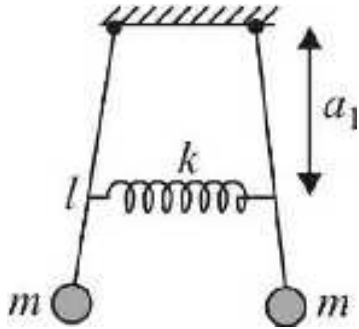


Рис. 5.6

Два одинаковых маятника связаны пружиной, как показано на рис. 5.6. В начальный момент времени $t=0$ колебаний в системе нет, но левый маятник отклонен на малый угол φ_0 . Нарисовать зависимость угловых координат от времени $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ для двух значений расстояния a_1 : $a_1 = a$ и $a_1 = 2a$, считая, что $ka^2 \ll mgl$.

Решение

По методике, изложенной в предыдущей задаче, найдем сначала собственные частоты колебательной системы и коэффициенты распределения амплитуд. В качестве независимых переменных выберем углы отклонения маятников φ_1 и φ_2 , отсчитывая их от положения равновесия вправо. Тогда для кинетической и потенциальной энергии получатся выражения:

$$T = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}_2^2, \quad (5.48)$$

$$V = \frac{mgl}{2} \varphi_1^2 + \frac{mgl}{2} \varphi_2^2 + \frac{ka_1^2}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (5.49)$$

Система дифференциальных уравнений запишется в виде:

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{\varphi}_1 + (mgl + ka_1^2) \varphi_1 - ka_1^2 \varphi_2 = 0 \\ ml^2 \ddot{\varphi}_2 + (mgl + ka_1^2) \varphi_2 - ka_1^2 \varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

Введя парциальные частоты и коэффициенты связи

$$\nu_1^2 = \nu_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{ka_1^2}{ml^2} \equiv \nu^2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{ka_1^2}{ml^2} \equiv \alpha, \quad (5.51)$$

приведем систему (5.50) к виду:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + v^2 \varphi_1 - \alpha \varphi_2 = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + v^2 \varphi_2 - \alpha \varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

Отсюда находим собственные частоты

$$\omega_{1,2}^2 = v^2 \mp \alpha, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2ka_1^2}{ml^2} \quad (5.53)$$

и коэффициенты распределения амплитуд

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = -1. \quad (5.54)$$

Соотношения (5.53) и (5.54) говорят о том, что на меньшей собственной частоте ω_1 маятники должны колебаться синфазно с одинаковой амплитудой; поэтому наличие пружины не будет как-либо сказываться. А на частоте ω_2 колебания должны иметь противофазный характер.

Предположим, что до начального момента времени $t = 0$ левый маятник был отклонен на угол φ_0 , а правый удерживался в положении равновесия. Этому соответствуют начальные условия:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (5.55)$$

Тогда колебания в системе при $t \geq 0$ будут описываться выражениями:

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right), \quad (5.56)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right). \quad (5.57)$$

Условие $ka^2 \ll mgl$ означает, что частоты ω_1 и ω_2 близки и колебания, описываемые формулами (5.56) и (5.57), имеют характер **биений**. Они показаны на рис. 5.7. Из рисунка видно, что амплитуда колебаний первого маятника уменьшается по синусоидальному закону вследствие перекачки энергии во вторую парциальную систему. При этом амплитуда второго маятника возрастает также по синусои-

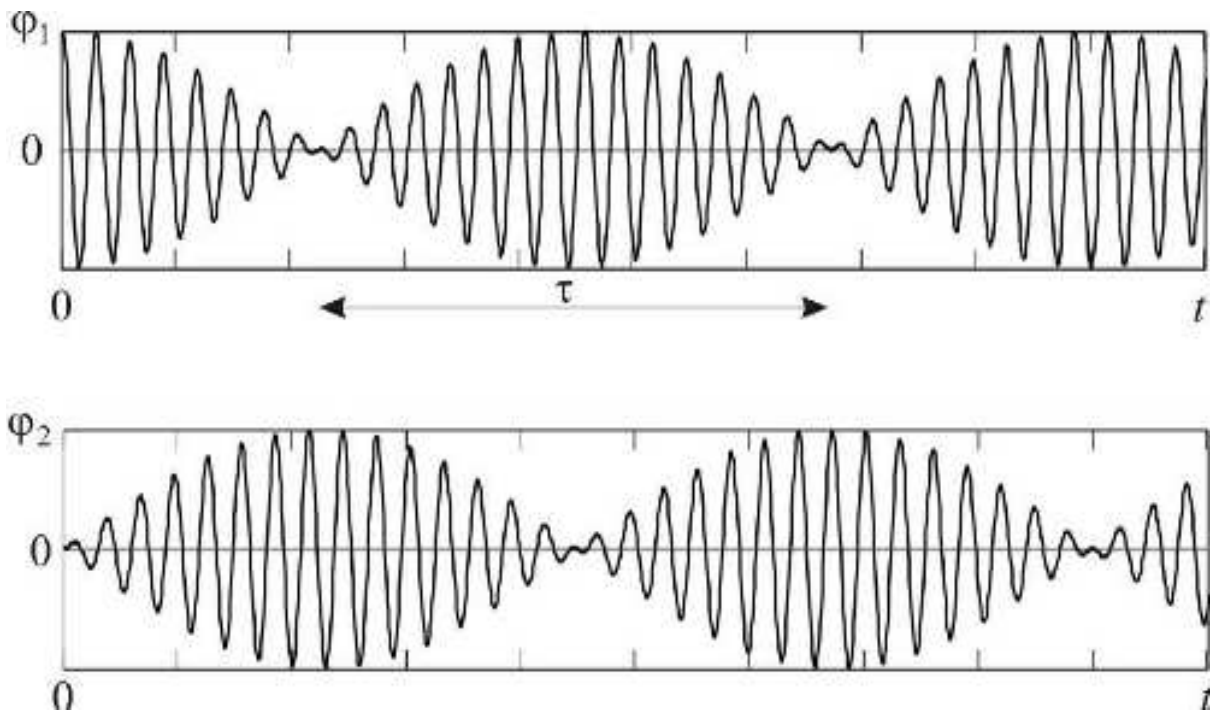


Рис. 5.7

дальному закону и достигает максимального значения φ_0 в тот момент, когда угол φ_1 становится равным нулю. Далее начинается процесс обратной перекачки энергии из второй парциальной системы в первую. Такой полный обмен энергией между парциальными системами характерен для случая равенства парциальных частот: $\nu_1 = \nu_2$.

Период биений равен

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \equiv \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta f}. \quad (5.58)$$

При малой разности собственных частот из (5.53) получается следующее выражение для периода биений:

$$\tau \approx \frac{2\pi\nu}{\alpha} \approx \frac{2\pi ml^2}{ka_1^2} \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.59)$$

Таким образом, возвращаясь к условию задачи, можно дать следующий ответ: в обоих случаях $a_1 = a$ и $a_1 = 2a$ вид биений будет таким, как на рис. 5.7, но периоды биений будут отличаться в 4 раза: $\tau_2 = \tau_1/4$.

Здесь на конкретном примере продемонстрирована общая закономерность поведения консервативных систем с двумя степенями свободы. В случае синхронизма парциальных частот ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$) происходит полная перекачка энергии из одной парциальной подсистемы в другую. Величина коэффициентов связи определяет время перекачки: чем они больше, тем меньше время перекачки. Если же парциальные частоты сильно различаются, то имеет место слабый обмен энергией между подсистемами (малая глубина биений) даже при сильной связи. Поэтому более полно взаимодействие подсистем характеризуется не коэффициентами связи α_1 и α_2 , а так называемой **связанностью**

$$\sigma = \frac{2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{|\nu_1^2 - \nu_2^2|}. \quad (5.60)$$

Рис. 5.8 иллюстрирует случай большого различия парциальных частот, когда $|\kappa_1/\kappa_2| = 5$.

Отметим также, что в рассмотренной задаче нормальные координаты имеют вид:

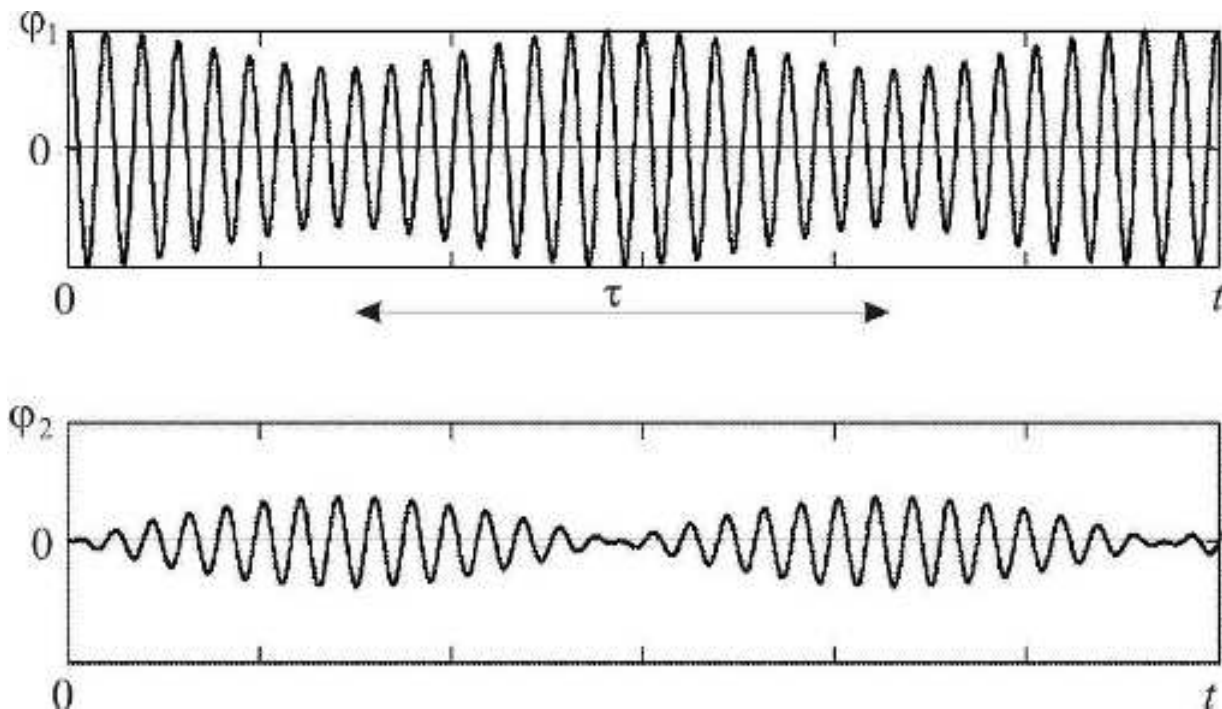


Рис. 5.8

$$\zeta = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_1 t, \quad \eta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega_2 t. \quad (5.61)$$

Задача 5.5

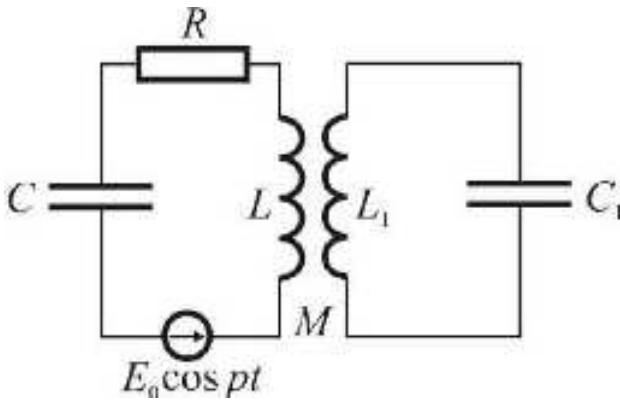


Рис. 5.9

В колебательный контур LCR (рис. 5.9) включена э.д.с. $E_0 \cos pt$.

На сколько уменьшится амплитуда тока в этом контуре, если для демпфирования колебаний использовать дополнительный контур $L_1 C_1$? На какую частоту нужно настроить этот контур, и какова будет в нем амплитуда тока? Считать, что частота p попадает в полосу пропускания первого контура.

Решение

В качестве независимых переменных выберем токи I_1 и I_2 в первом и втором контуре соответственно. Запишем уравнения Кирхгофа в комплексной форме:

$$\frac{1}{C} \int I_1 dt + I_1 R + L \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = E_0 e^{jpt}, \quad (5.62)$$

$$\frac{1}{C_1} \int I_2 dt + L_1 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = 0. \quad (5.63)$$

Вводя парциальные частоты ν_1 , ν_2 , коэффициенты связи β_1 , β_2 и коэффициент затухания δ :

$$\nu_1^2 = \frac{1}{LC}, \quad \nu_2^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad \beta_1 = \frac{M}{L}, \quad \beta_2 = \frac{M}{L_1}, \quad \delta = \frac{R}{2L} \quad (5.64)$$

получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{I}_1 + 2\delta \dot{I}_1 + \nu_1^2 I_1 + \beta_1 \ddot{I}_2 = \frac{j p}{L} E_0 e^{jpt} \\ \ddot{I}_2 + \nu_2^2 I_2 + \beta_2 \ddot{I}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.65)$$

Поскольку вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы, то решение системы (5.65) ищем в виде

$$I_1(t) = A \exp(jpt), \quad I_2(t) = B \exp(jpt). \quad (5.66)$$

Подстановка (5.66) в (5.65) дает неоднородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (-p^2 + 2j p \delta + v_1^2)A - \beta_1 p^2 B = j \frac{p E_0}{L} \\ -\beta_2 p^2 A + (-p^2 + v_2^2)B = 0 \end{cases} \quad (5.67)$$

решение которой имеет вид:

$$A = j \frac{p E_0}{L} \cdot \frac{-p^2 + v_2^2}{(-p^2 + v_2^2)(-p^2 + 2j p \delta + v_1^2) - p^4 \beta_1 \beta_2}, \quad (5.68)$$

$$B = j \frac{p^3 E_0}{L} \cdot \frac{\beta_2}{(-p^2 + v_2^2)(-p^2 + 2j p \delta + v_1^2) - p^4 \beta_1 \beta_2}. \quad (5.69)$$

Для демпфирования колебаний в первом контуре надо выбрать параметры второго контура из условия $v_2 = p$. В этом случае $A = 0$, а амплитуда во втором контуре будет равна $B = E_0 / pM$.

Задачи для самостоятельного решения

Задачи 5.6, а-з. Для одной из систем, изображенных на рис. 5.10,а-з, получить систему дифференциальных уравнений в случае произвольных значений параметров. Указать парциальные системы для выбранных независимых координат. Найти собственные частоты и коэффициенты распределения амплитуд при условиях:

а) $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = 3l$, $l_2 = l$. Расчеты выполнить для $k = 3mg/l$.

б) $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $l_1 = l$, $l_2 = 2l$. Расчеты выполнить для $k = 3mg/l$.

в) $m_1 = 3m$, $m_2 = 2m$, $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, $a = l/2$. Расчеты выполнить для $k = 2mg/l$.

г) $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $l_1 = l$, $l_2 = 2l$. Расчеты выполнить для $k = 4mg/l$.

д) $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, $k_1 = k$, $k_2 = 2k$. Расчеты выполнить для $k = 4mg/l$.

е) $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $l_1 = l$, $l_2 = 2l$. Расчеты выполнить для $k = 6mg/l$.

ж) $m_1 = m$, $m_2 = 4m$. Расчеты выполнить для $k = 2mg/l$.

з) $m_1 = 4m$, $m_2 = m$, $a = l/2$, $k_1 = k$, $k_2 = 2k$. Расчеты выполнить для $k = 6mg/l$.

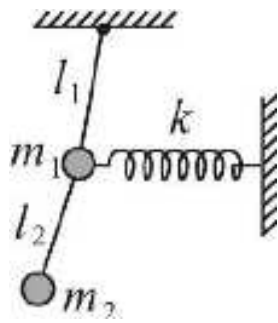


Рис. 5.10,а

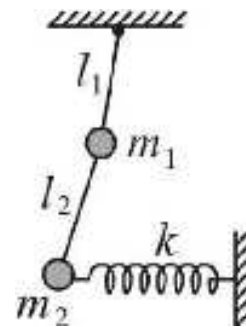


Рис. 5.10,б

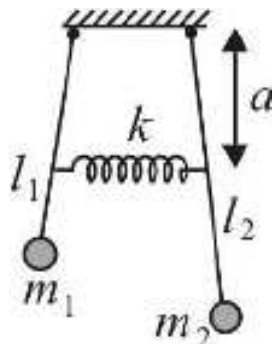


Рис. 5.10,в

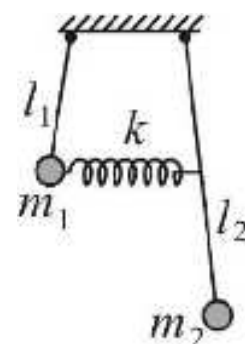


Рис. 5.10,г

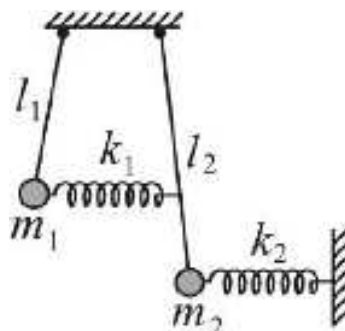


Рис. 5.10,д

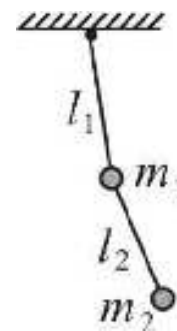


Рис. 5.10,е

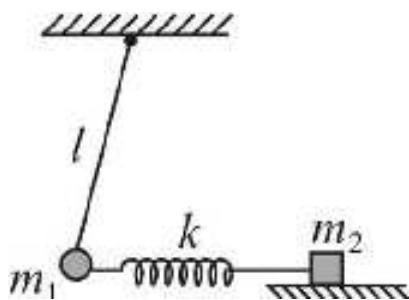


Рис. 5.10,ж

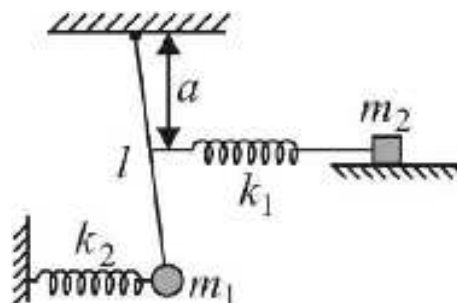


Рис. 5.10,з

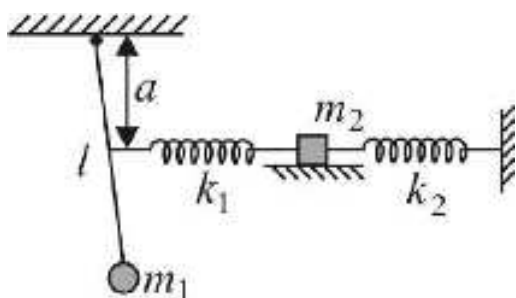


Рис. 5.10,и

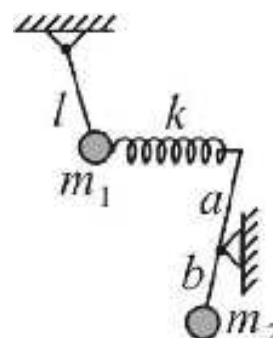


Рис. 5.10,к

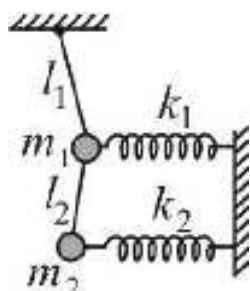


Рис. 5.10,л

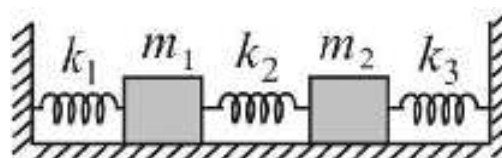


Рис. 5.10,м

Задачи 5.7, а-е. Связанные маятники, изображенные на рис. 5.10,а-е, совершают малые колебания в плоскости чертежа. Какие начальные условия надо задать в системе для возбуждения низкочастотного нормального колебания? У какого груза амплитуда колебаний будет больше? Задачу решить для одной из систем при условиях:

- $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $l_1 = l$, $l_2 = 3l$. Расчеты выполнить для $k = 3mg/l$.
- $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $l_1 = l$, $l_2 = 2l$. Расчеты выполнить для $k = 3mg/l$.
- $m_1 = 3m$, $m_2 = 2m$, $l_2 = 2l$, $l_2 = l$, $a = l$. Расчеты выполнить для $k = 2mg/l$.

- г) $m_1 = 3m, m_2 = m, l_1 = l, l_2 = 2l$. Расчеты выполнить для $k = 6mg/l$.
- д) $m_1 = m_2 = m, l_1 = 2l, l_2 = l, k_1 = k, k_2 = 3k$. Расчеты выполнить для $k = 6mg/l$.
- е) $m_1 = 2m, m_2 = m, l_1 = l, l_2 = 2l$. Расчеты выполнить для $k = 4mg/l$.

Задачи 5.8, ж-м. Связанные маятники, изображенные на рис. 5.10, ж-м, совершают малые колебания в плоскости чертежа. Какие начальные условия надо задать в системе для возбуждения высокочастотного нормального колебания? У какого груза амплитуда колебаний будет больше? Задачу решить для одной из систем при условиях:

- ж) $m_1 = 2m, m_2 = m$. Расчеты выполнить для $k = 4mg/l$.
- з) $m_1 = 2m, m_2 = m, a = l/4, k_1 = 2k, k_2 = k$. Расчеты выполнить для $k = 4mg/l$.
- и) $m_1 = m, m_2 = 2m, a = l/3, k_1 = 3k, k_2 = 2k$. Расчеты выполнить для $k = 2mg/l$.
- к) $m_1 = 4m, m_2 = m, a = b = l/2$. Расчеты выполнить для $k = 2mg/l$.
- л) $m_1 = m_2 = m, l_1 = 3l, l_2 = l, k_1 = k, k_2 = 2k$. Расчеты выполнить для $k = 6mg/l$.
- м) $m_1 = m, m_2 = 2m, k_1 = k_3 = k, k_2 = 2k$. Расчеты выполнить для $k = mg/l$.

Задача 5.9, г-ж. Для колебательных систем, изображенных на рис. 5.10, г-ж, найти условия, при которых будет наблюдаться полная перекачка энергии из одной парциальной системы в другую. Определить время перекачки τ . Задачу решить для одной из систем при условии:

- г) $m_1 = m, m_2 = 2m, l_1 = l, l_2 = 2l$. Расчеты выполнить для $k = 4mg/l$.
- д) $m_1 = m_2 = m, l_1 = l, l_2 = 2l, k_1 = k, k_2 = 2k$. Расчеты выполнить для $k = mg/l$.
- е) $m_1 = 2m, m_2 = m, l_1 = l, l_2 = 3l$. Расчеты выполнить для $k = 6mg/l$.
- ж) $m_1 = m, m_2 = 2m$. Расчеты выполнить для $k = 4mg/l$.

Задачи 5.10, а-з. Для одной из систем, изображенных на рис. 5.11,а-з, получить систему дифференциальных уравнений в случае произвольных значений параметров. Найти собственные частоты и коэффициенты распределения амплитуд при условиях:

- а) $L_1 = L_2 = L, C_1 = C, C_2 = 2C, C_3 = 3C$.
 б) $L_1 = L_2 = L, L_3 = 2L, C_1 = C_2 = C_3 = C$.

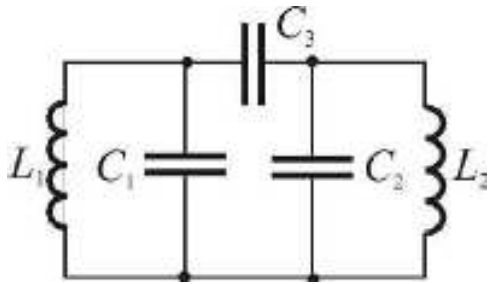


Рис. 5.11,а

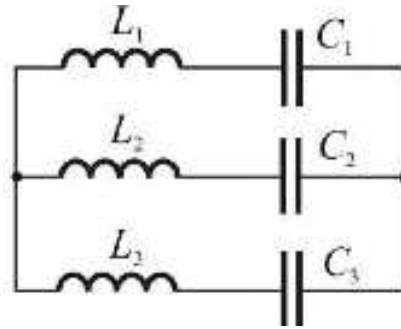


Рис. 5.11,б

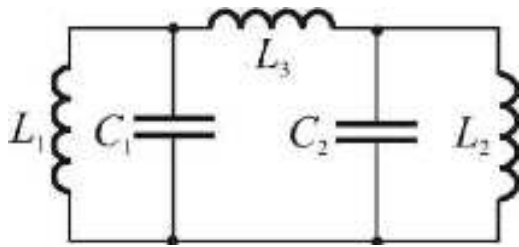


Рис. 5.11,в

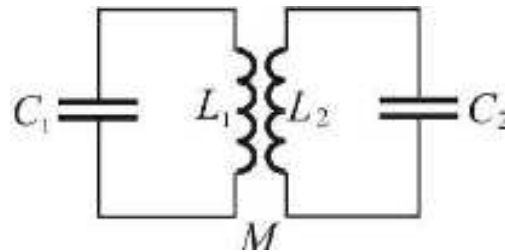


Рис. 5.11,г

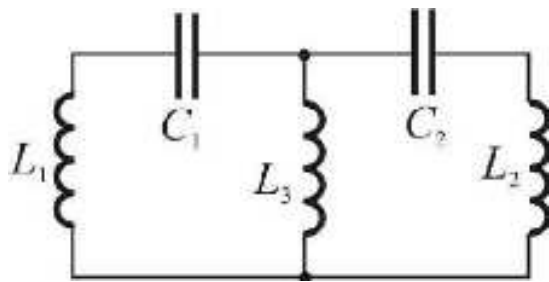


Рис. 5.11,д

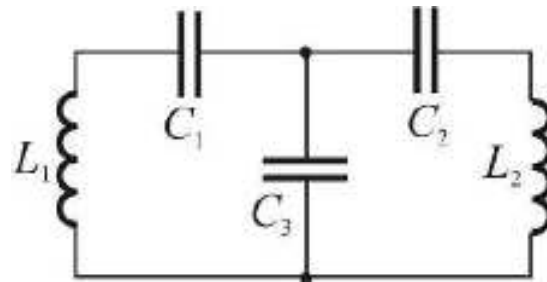


Рис. 5.11,е

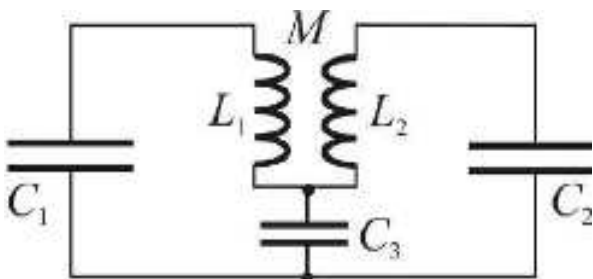


Рис. 5.11,ж

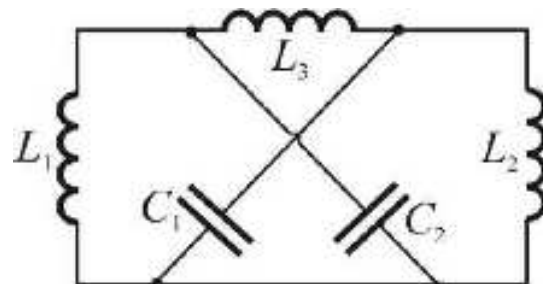


Рис. 5.11,з

- в) $L_1 = L, L_2 = 2L, L_3 = 3L, C_1 = C, C_2 = 2C$.
- г) $L_1 = L, L_2 = 2L, C_1 = C, C_2 = 2C$.
- д) $L_1 = L, L_2 = 2L, L_3 = 3L, C_1 = C, C_2 = 2C$.
- е) $L_1 = L, L_2 = 4L, C_1 = C, C_2 = 2C, C_3 = 3C$.
- ж) $L_1 = L_2 = L, C_1 = C, C_2 = 2C, C_3 = 3C$.
- з) $L_1 = 2L, L_2 = L, L_3 = 3L, C_1 = C, C_2 = 2C$.

Задачи 5.11, в-д. Какие начальные заряды надо задать на конденсаторах C_1 и C_2 в колебательных системах, изображенных на рис. 5.11, в-д, для возбуждения низкочастотного или высокочастотного нормального колебания? Задачу решить для одной из систем при условии:

- в) $L_1 = L, L_2 = 2L, L_3 = 3L, C_1 = 4C, C_2 = C$.
- г) $L_1 = L, L_2 = 2L, C_1 = 3C, C_2 = C$.
- д) $L_1 = L, L_2 = 2L, L_3 = 3L, C_1 = 2C, C_2 = C$.

Задачи 5.12, а,е. Какие начальные токи надо задать в катушках индуктивности L_1 и L_2 в колебательных системах, изображенных на рис. 5.11, а,е, для возбуждения низкочастотного или высокочастотного нормального колебания? Задачу решить для одной из систем при условии:

- а) $L_1 = L, L_2 = 2L, C_1 = C, C_2 = 2C, C_3 = 3C$.
- е) $L_1 = 2L, L_2 = L, C_1 = C, C_2 = 2C, C_3 = 3C$.

Задачи 5.13, а-г. Как изменится график Вина при замене:

- а) $k \rightarrow 2k$ в колебательной системе, изображенной на рис. 5.10, в.
- б) $k_1 \rightarrow 2k_1$ в колебательной системе, изображенной на рис. 5.10, д.
- в) $L_3 \rightarrow 2L_3$ в колебательной системе, изображенной на рис. 5.11, в.
- г) $C_3 \rightarrow 2C_3$ в колебательной системе, изображенной на рис. 5.11, е.

Задачу решить для одной из систем.

Задача 5.14. Связанные маятники, изображенные на рис. 5.12, могут колебаться в плоскости чертежа. В начальный момент времени $t = 0$ колебаний в системе нет, но левый маятник отклонен на малый угол φ_0 . Нарисовать временные зависимости углов отклонения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Как изменится вид колебаний, если удалить нижнюю или верхнюю пружину?

Задача 5.15. Связанные маятники, изображенные на рис. 5.12, могут колебаться в плоскости чертежа. В начальный момент времени $t = 0$ колебаний в системе нет, оба маятника находятся в положении равновесия. В этот момент правому маятнику толчком сообщается скорость v_0 . Нарисовать временные зависимости углов отклонения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Построить зависимость периода биений от расстояния a ($0 \leq a \leq l$).

Задача 5.16. Связанные маятники, изображенные на рис. 5.13, могут колебаться в плоскости чертежа. В начальный момент времени $t = 0$ колебаний в системе нет, верхний маятник находится в положении равновесия, а нижний маятник отклонен на малый угол φ_0 . Нарисовать временные зависимости углов отклонения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ для двух значений массы нижнего шарика: $m_1 = m/10$ и $m_1 = m/5$.

Задача 5.17. Связанные маятники, изображенные на рис. 5.13, могут колебаться в плоскости чертежа. В начальный момент времени $t = 0$ колебаний в системе нет, оба маятника находятся в положении

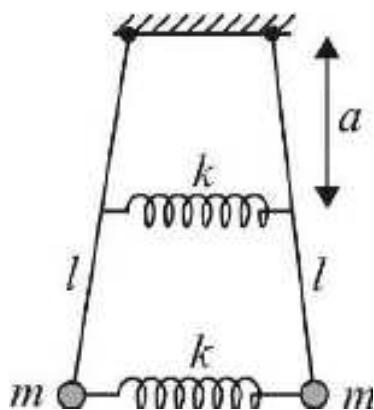


Рис. 5.12

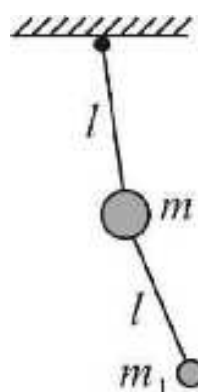


Рис. 5.13

равновесия. В этот момент нижнему маятнику толчком сообщается скорость v_0 . Нарисовать временные зависимости углов отклонения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ для двух значений массы нижнего шарика: $m_1 = m/10$ и $m_1 = m/15$.

Задача 5.18. Два одинаковых контура LC связаны емкостями C_1 (рис. 5.14). В начальный момент времени $t = 0$ все токи равны нулю, а на левом конденсаторе C имеется заряд q_0 . Нарисовать временные зависимости напряжений на катушках индуктивности $U_1(t)$ и $U_2(t)$ для двух положений ключа K : замкнутого и разомкнутого. Считать, что $C_1 \ll C$.

Задача 5.19. Два одинаковых контура LC связаны индуктивностями L_1 (рис. 5.15). В начальный момент времени $t = 0$ все токи равны нулю, а на левом конденсаторе C имеется заряд q_0 . Нарисовать временные зависимости напряжений на катушках индуктивности $U_1(t)$ и $U_2(t)$ для двух положений ключа K (замкнутого и разомкнутого), полагая, что $L \ll L_1$.

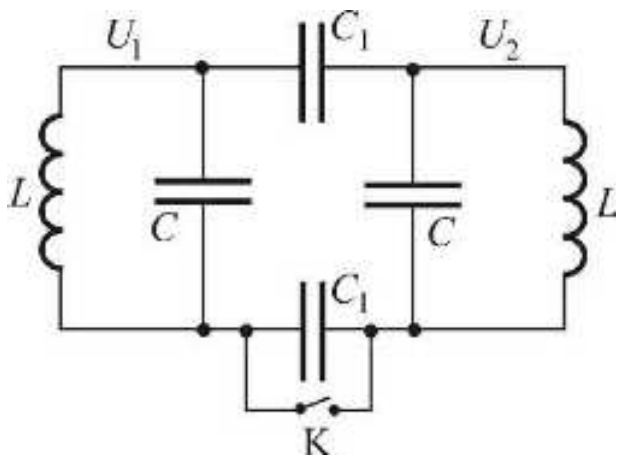


Рис. 5.14

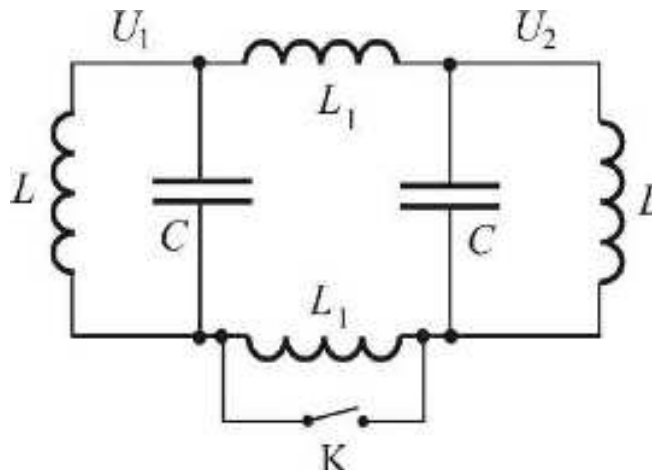


Рис. 5.15

Задача 5.20. Для колебательной системы, изображенной на рис. 5.6, найти зависимость собственных частот ω_1 и ω_2 , а также частоты биений Ω от положения пружины. Построить графики $\omega_1(a_1)$, $\omega_2(a_1)$ и $\Omega(a_1)$, считая, что $0 \leq a_1 \leq l$. Расчет выполнить для случая $ka^2 \ll mgl$. Объяснить полученные результаты.

Задача 5.21. Для колебательной системы, изображенной на рис. 5.16, найти зависимость периода биений τ от положения груза правого маятника, полагая, что груз может быть закреплен как выше, так и ниже пружины ($a \geq l$ или $a \leq l$). Построить графики $\tau(a)$ для случаев $m_1 = m_2$ и $m_1 \neq m_2$. Объяснить полученные результаты.

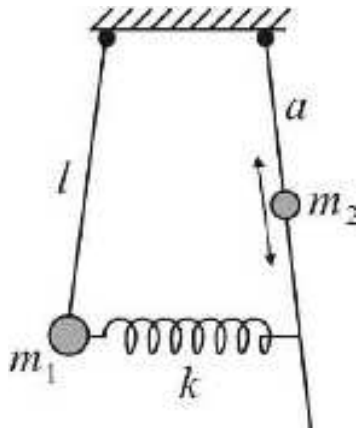


Рис. 5.16

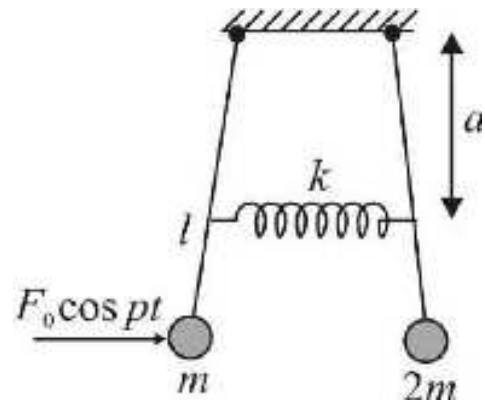


Рис. 5.17

Задача 5.22. На левый маятник колебательной системы, изображенной на рис. 5.17, действует внешняя сила с амплитудой F_0 и частотой p . Получить выражения для амплитуд колебаний A и B обоих маятников и построить зависимости $A(p)$ и $B(p)$. Определить, при каком условии происходит демпфирование колебаний левого маятника.

Задача 5.23. На груз массой m колебательной системы, изображенной на рис. 5.18, действует внешняя сила с амплитудой F_0 и частотой p . Найти амплитуды колебаний A и B обоих грузов и построить зависимости $A(p)$ и $B(p)$. Определить, при каком условии происходит демпфирование колебаний правого груза.

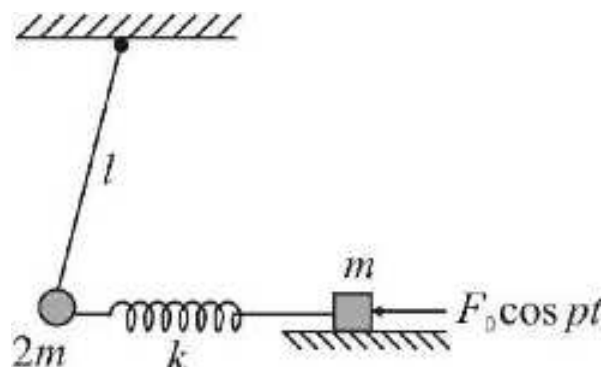


Рис. 5.18

Задача 5.24. На левый груз колебательной системы, изображенной на рис. 5.19, действует внешняя сила с амплитудой F_0 и частотой p . Найти амплитуды колебаний A и B обоих грузов и построить зависимости $A(p)$ и $B(p)$. Определить, при каком условии происходит демпфирование колебаний левого груза.

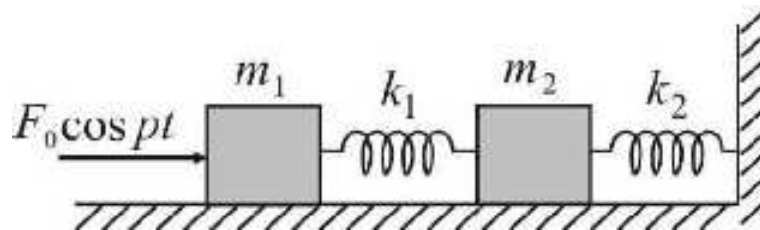


Рис. 5.19

Задачи 5.25, а, б. Для одной из систем, изображенных на рис. 5.20, получить выражения для амплитуд колебаний токов $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$, текущих через катушки индуктивности L , и построить частотные зависимости $I^{(1)}(p)$ и $I^{(2)}(p)$.

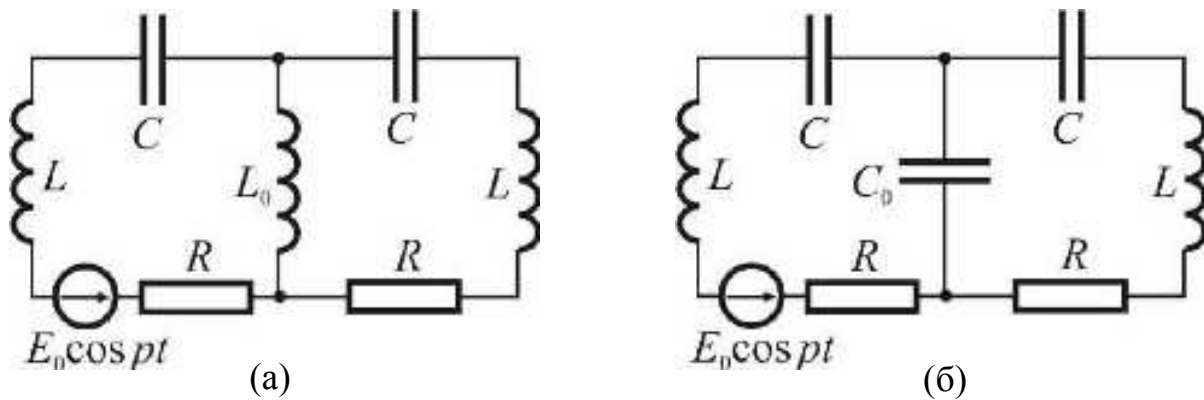


Рис. 5.20

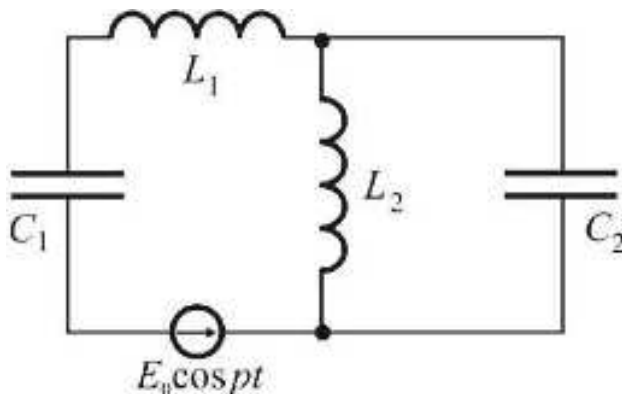


Рис. 5.21

Задача 5.26. В колебательную систему, изображенную на рис. 5.21, включена э.д.с. $E_0 \cos pt$. Найти условие, при котором ток через конденсатор C_1 будет равен нулю. Для этого случая определить величину тока через конденсатор C_2 .

Задача 5.27. Система из двух связанных контуров L_1C_1R и L_2C_2 запитывается от генератора тока с амплитудой I_0 и частотой p (рис. 5.22). Получить выражения для напряжений на контурах U_1 и U_2 и найти условие, при котором напряжение U_1 будет минимально. Объяснить полученный результат.

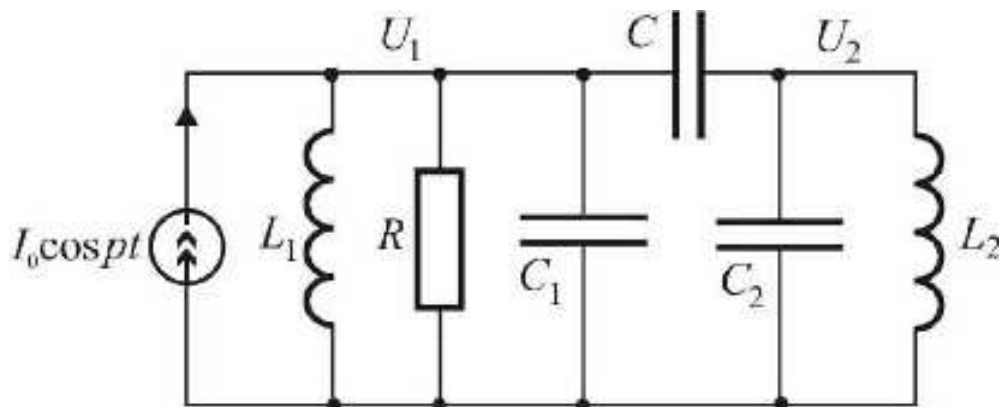


Рис. 5.22

Задача 5.28. Система из двух связанных контуров L_1C_1R и L_2C_2 запитывается от генератора тока с амплитудой I_0 и частотой p (рис. 5.23). Получить выражения для напряжений на контурах U_1 и U_2 и найти условие, при котором напряжение U_1 будет минимально. Объяснить полученный результат.

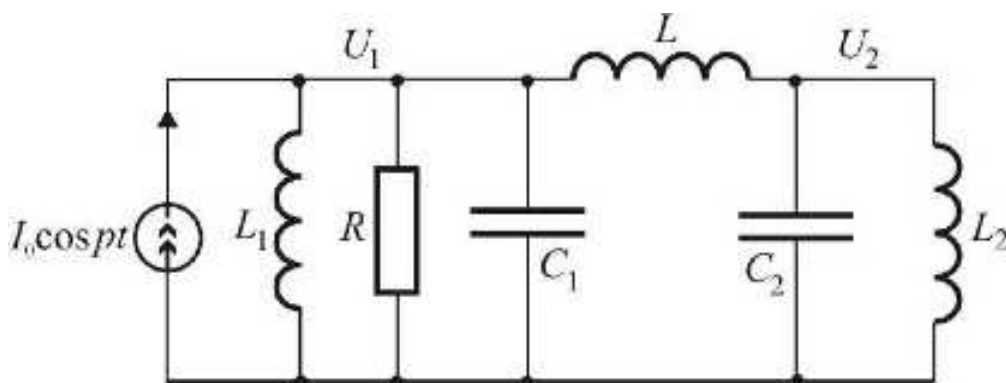


Рис. 5.23

Задачи 5.29 ,а,б. В системе двух связанных контуров действуют две внешние силы $E_1 \cos pt$ и $E_2 \cos pt$ (рис. 5.24). Найти соотношение амплитуд E_2/E_1 , при котором в системе не

шение амплитуд E_2/E_1 , при котором в системе не возбуждается низшее из собственных колебаний с частотой ω_1 при $p \rightarrow \omega_1$. Расчет выполнить для одного из представленных вариантов.

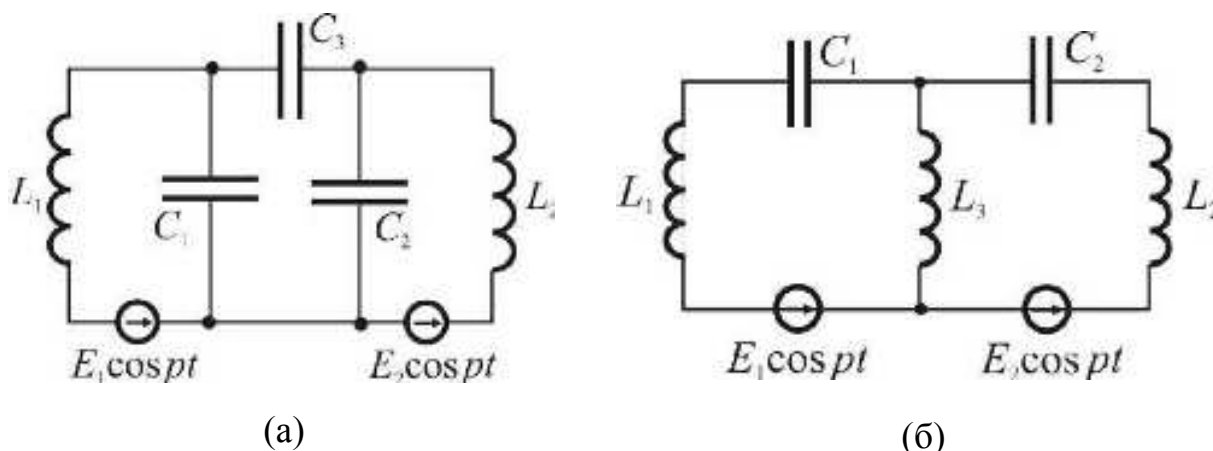


Рис. 5.24

6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

6.1. Двухконтурные параметрические усилители

На рис. 6.1 показана принципиальная схема двухконтурного параметрического усилителя. Она включает в себя два колебательных контура $L_1 C_1 R'_1$ и $L_2 C_2 R_2$, связанных нелинейным конденсатором C . В качестве нелинейного конденсатора обычно используется полупро-

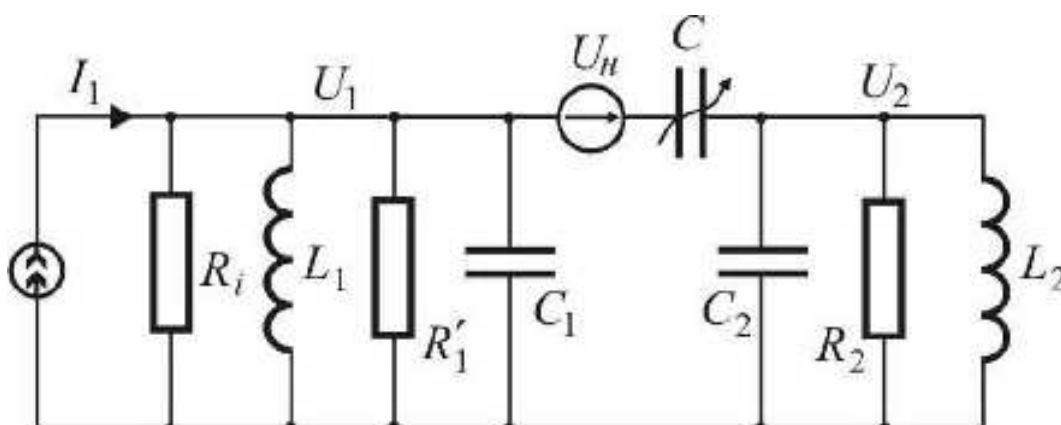


Рис. 6.1

водниковый диод, на который подается запирающее постоянное напряжение (не показанное на рисунке). Источник усиливаемого сигнала представлен генератором тока I_1 с внутренним сопротивлением R_i :

$$I_1 = I_0 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (6.1)$$

где I_0 — амплитуда, ω_1 — частота усиливаемого сигнала, φ — начальная фаза. Эффект параметрического усиления возникает при включении в схему генератора накачки с напряжением

$$U_n = A_n \cos(\omega_n t), \quad (6.2)$$

где A_n — амплитуда, ω_n — частота накачки.

Характеристику конденсатора C опишем в виде нелинейной зависимости заряда q_C от напряжения на конденсаторе U_C . Разлагая эту характеристику в ряд и оставляя в нем только первые два члена, получим

$$q_C = C_0 U_C + \alpha U_C^2, \quad (6.3)$$

где C_0 — постоянная составляющая емкости, α — коэффициент, характеризующий нелинейность конденсатора.

Действие на нелинейный конденсатор колебаний с частотами ω_1 и ω_n приводит к появлению комбинационных частот $\omega_2 = \omega_n \pm \omega_1$. В случае, когда парциальные частоты системы

$$\nu_1^2 = \frac{1}{L_1(C_1 + C_0)} \quad \text{и} \quad \nu_2^2 = \frac{1}{L_2(C_2 + C_0)} \quad (6.4)$$

сильно отличаются (для определенности: $\nu_1 \ll \nu_2$), что означает малую *связанность* контуров, и выполняются условия $\omega_1 \approx \nu_1$ и $\omega_2 \approx \nu_2$, колебания в левом контуре будут происходить в основном на частоте ω_1 , а в правом — на частоте ω_2 . Поэтому решение колебательной задачи будем искать в виде

$$U_1 = A \cos(\omega_1 t + \psi_1), \quad U_2 = B \cos(\omega_2 t + \psi_2). \quad (6.5)$$

С учетом этого система уравнений, описывающих колебания в системе, будет иметь вид

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{L_1} \int U_1 dt + \frac{U_1}{R_1} + C_1 \frac{dU_1}{dt} + \left. \frac{dq_C}{dt} \right|_{\omega_1} \\ \left. \frac{dq_C}{dt} \right|_{\omega_2} = \frac{1}{L_2} \int U_2 dt + \frac{U_2}{R_2} + C_2 \frac{dU_2}{dt} \\ U_1 = U_H + U_C + U_2 \end{cases} \quad (6.6)$$

где U_1 и U_2 — напряжения на левом и правом контурах соответственно, $R_1 = R'_1 R_i / (R'_1 + R_i)$, члены $(dq_C/dt)_{\omega_{1,2}}$ описывают компоненты тока через нелинейный конденсатор с частотами ω_1 и ω_2 .

В случае точной настройки колебательных контуров: $\omega_1 = \nu_1$ и $\omega_2 = \nu_2$ — система уравнений (6.6) дает следующие выражения для амплитуд колебаний:

$$A = I_0 \frac{R_1}{1 \pm \alpha^2 R_1 R_2 A_H^2 \omega_1 \omega_2}, \quad B = I_0 \frac{\alpha R_1 R_2 A_H \omega_2}{1 \pm \alpha^2 R_1 R_2 A_H^2 \omega_1 \omega_2}. \quad (6.7)$$

В этих формулах знак «+» относится к варианту **низкочастотной накачки**, когда $\omega_H = \omega_2 - \omega_1$, а знак «-» — к варианту **высокочастотной накачки**, когда $\omega_H = \omega_2 + \omega_1$.

Из (6.7) следует, что в варианте высокочастотной накачки при увеличении амплитуды накачки A_H амплитуда колебаний монотонно возрастает как в левом, так и в правом контурах и стремится к бесконечности при $A_H \rightarrow A_{H \text{ кр}}$, где

$$A_{H \text{ кр}}^2 = \frac{1}{\alpha^2 R_1 R_2 \omega_1 \omega_2}. \quad (6.8)$$

При превышении критического значения $A_{H \text{ кр}}$ система самовозбуждается, превращаясь в генератор. Такое поведение характерно для так называемых **регенеративных** систем. Поскольку усиление сигнала

происходит в обоих контурах, то усиленный сигнал можно снимать как с левого, так и с правого контура. В первом случае сигнал снимается на исходной несущей частоте ω_1 (т.е без преобразования частоты), тогда как во втором — на частоте ω_2 (с преобразованием частоты).

В варианте низкочастотной накачки самовозбуждение системы невозможно ни при каком значении амплитуды накачки — система является **нерегенеративной**. Эффект усиления можно получить лишь при съеме сигнала с правого контура (с преобразованием частоты). Максимум усиления достигается при амплитуде накачки, определяемой выражением

$$A_{н\text{ опт}}^2 = \frac{1}{\alpha^2 R_1 R_2 \omega_1 \omega_2}. \quad (6.9)$$

Полоса усиления параметрических усилителей $\Delta\omega_1$ может быть оценена по следующей приближенной формуле

$$\frac{\Delta\omega_1}{\omega_1} \approx \frac{1}{Q_1} \left(1 \pm \frac{A_n^2}{A_{н\text{ кр}}^2} \right), \quad (6.10)$$

где знаки « \pm » соответствуют формулам (6.7).

Задача 6.1

Для регенеративного параметрического усилителя, изображенного на рис. 6.1, получить выражение для коэффициента усиления по мощности, предполагая, что усиленный сигнал снимается с левого контура на частоте ω_1 , а нагрузкой является сопротивление R'_1 . Расчет выполнить для случая оптимального согласования источника сигнала с нагрузкой: $R_i = R'_1$. Определить значение коэффициента усиления при $A_n = 0.9 A_{н\text{ кр}}$.

Решение

Коэффициент усиления по мощности определим как отношение мощности $P_{\text{вых}}$, выделяющейся в нагрузке R'_1 , к мощности $P_{\text{сogl}}$,

которую может отдать источник сигнала в согласованную нагрузку $R_H = R_i$:

$$K_P = \frac{P_{\text{вых}}}{P_{\text{согл}}}. \quad (6.11)$$

Для схемы, показанной на рис. 6.1,

$$P_{\text{согл}} = \frac{I_0^2 R_i}{8}, \quad P_{\text{вых}} = \frac{A^2}{2R_1'}. \quad (6.12)$$

Используя первое из выражений (6.7), получаем:

$$K_P = \frac{4R_1^2}{R_i R_1' (1 - \alpha^2 R_1 R_2 A_H^2 \omega_1 \omega_2)^2} = \frac{4R_i R_1'}{(R_i + R_1')^2} \left(1 - \frac{A_H^2}{A_{H\text{кр}}^2} \right)^{-2}. \quad (6.13)$$

При варьировании сопротивления нагрузки R_1' коэффициент усиления достигает максимального значения, когда $R_1' = R_i$. В этом случае

$$K_P = \left(1 - \frac{A_H^2}{A_{H\text{кр}}^2} \right)^{-2}. \quad (6.14)$$

Отсюда получаем, что при $A_H = 0.9 A_{H\text{кр}}$ коэффициент усиления равен $K_P = 27.7$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.2. Для регенеративного параметрического усилителя, изображенного на рис. 6.1, получить выражение для коэффициента усиления по мощности K_P , предполагая, что усиленный сигнал снимается с правого контура на частоте ω_2 , а нагрузкой является сопротивление R_2 . Расчет выполнить для случая оптимального согласования источника сигнала с входным контуром: $R_i = R_1'$.

Задача 6.3. Для регенеративного параметрического усилителя, изображенного на рис. 6.1, найти соотношение коэффициентов усиления по мощности для двух вариантов: съеме усиленного сигнала с

преобразованием и без преобразования частоты. Расчет выполнить для случая оптимального согласования источника сигнала с входным контуром: $R_i = R_1'$. Рассмотреть предельный случай $A_n \rightarrow A_{n \text{ кр}}$.

Задача 6.4. Для нерегенеративного параметрического усилителя, изображенного на рис. 6.1, получить выражения амплитуды выходного напряжения и коэффициента усиления по мощности K_P , предполагая, что усиленный сигнал снимается с правого контура на частоте ω_2 , а нагрузкой является сопротивление R_2 . Построить зависимость коэффициента усиления от амплитуды накачки A_n , найти его максимальное значение $K_{P \text{ max}}$ и соответствующую величину амплитуды накачки $A_{n \text{ опт}}$.

Задача 6.5. Для двухконтурного параметрического регенеративного усилителя, у которого входной контур, имеющий полосу пропускания $\Delta f_1 = 2$ МГц, настроен на частоту $f_1 = 50$ МГц, а второй контур с полосой $\Delta f_2 = 1$ МГц настроен на частоту $f_2 = 4$ МГц:

- а) определить частоту накачки;
- б) нарисовать качественную зависимость амплитуды колебаний в каждом контуре от амплитуды накачки A_n ;
- в) найти коэффициенты усиления по мощности для случаев усиления с преобразованием и без преобразования частоты при $A_n = 0.95 A_{n \text{ кр}}$;
- г) определить полосу усиления.

Задача 6.6. Для двухконтурного параметрического нерегенеративного усилителя, у которого входной контур, имеющий полосу пропускания $\Delta f_1 = 1$ МГц, настроен на частоту $f_1 = 10$ МГц, а второй контур с полосой $\Delta f_2 = 2$ МГц настроен на частоту $f_2 = 70$ МГц:

- а) определить частоту накачки;
- б) нарисовать качественную зависимость амплитуды колебаний в каждом контуре от амплитуды накачки A_n ;

- в) получить выражение для максимального коэффициента усиления по мощности и найти его значение;
- г) определить полосу усиления.

Задача 6.7. Для двухконтурного параметрического регенеративного усилителя, у которого входной контур, имеющий полосу пропускания $\Delta f_1 = 1$ МГц, настроен на частоту $f_1 = 20$ МГц, а второй контур с полосой $\Delta f_2 = 2$ МГц настроен на частоту $f_2 = 70$ МГц:

- а) определить частоту накачки;
- б) нарисовать качественную зависимость амплитуды колебаний в каждом контуре от амплитуды накачки A_n ;
- в) найти коэффициенты усиления по мощности для случаев усиления с преобразованием и без преобразования частоты при $A_n = 0.94 A_{n\text{кр}}$;
- г) определить полосу усиления.

Задача 6.8. Для двухконтурного параметрического нерегенеративного усилителя, у которого входной контур, имеющий полосу пропускания $\Delta f_1 = 2$ МГц, настроен на частоту $f_1 = 15$ МГц, а второй контур с полосой $\Delta f_2 = 5$ МГц настроен на частоту $f_2 = 100$ МГц:

- а) определить частоту накачки;
- б) нарисовать качественную зависимость амплитуды колебаний в каждом контуре от амплитуды накачки A_n ;
- в) получить выражение для максимального коэффициента усиления по мощности и найти его значение;
- г) определить полосу усиления.

6.2. Двухконтурный параметрический генератор

Двухконтурный параметрический усилитель (рис. 6.1) в варианте высокочастотной накачки при $A_n > A_{n\text{кр}}$ превращается в генератор. Его принципиальная схема представлена на рис. 6.2.

Система уравнений, описывающих колебания в системе, имеет вид

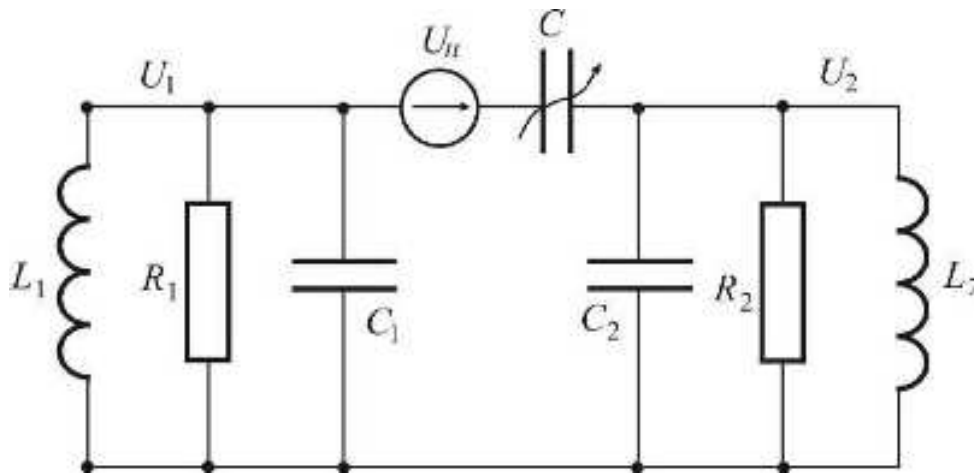


Рис. 6.2

$$\begin{cases} \frac{1}{L_1} \int U_1 dt + \frac{U_1}{R_1} + C_1 \frac{dU_1}{dt} + \frac{dq_C}{dt} \Big|_{\omega_1} = 0 \\ \frac{1}{L_2} \int U_2 dt + \frac{U_2}{R_2} + C_2 \frac{dU_2}{dt} - \frac{dq_C}{dt} \Big|_{\omega_2} = 0 \\ U_1 = U_H + U_C + U_2 \end{cases} \quad (6.15)$$

Как и в случае параметрического усилителя, предполагаем, что нелинейная характеристика конденсатора C описывается выражением (6.3). При этом выполняются соотношения

$$\omega_H = \omega_2 + \omega_1, \quad \omega_1 \approx \nu_1, \quad \omega_2 \approx \nu_2. \quad (6.16)$$

Подстановка в (6.15) решений в форме (6.5) приводит к следующим выражениям для частот параметрической генерации:

$$\omega_1 = \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \omega_H - \frac{\delta_1 \nu_2 - \delta_2 \nu_1}{\delta_1 + \delta_2}, \quad (6.17)$$

$$\omega_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \omega_H + \frac{\delta_1 \nu_2 - \delta_2 \nu_1}{\delta_1 + \delta_2}, \quad (6.18)$$

где $\delta_{1,2} = [2R_{1,2}(C_0 + C_{1,2})]^{-1}$ — парциальные коэффициенты затухания колебательных контуров. Формулы (6.17) и (6.18) дают зависимость частот генерации от частот накачки.

Амплитуды и мощности колебаний в контурах соотносятся как

$$\frac{B}{A} = \sqrt{\frac{R_2 \omega_2}{R_1 \omega_1}}, \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (6.19)$$

а граничные значения полосы параметрического возбуждения определяются выражением

$$\omega_{н гр} = \omega_n \pm (\delta_1 + \delta_2) \sqrt{\frac{A_n^2}{A_{н кр}^2} - 1} \equiv \omega_n \pm \Delta\omega_n. \quad (6.20)$$

Как следует из (6.20), полоса возбуждения $2\Delta\omega_n$ растет при увеличении амплитуды накачки A_n . Если $A_n > A_{н кр}$, то вложение энергии в систему из генератора накачки превышает потери и амплитуда колебаний в обоих контурах растет до бесконечности. Разумеется, в реальной системе всегда существуют механизмы, ограничивающие рост амплитуды и приводящие к установлению стационарного режима генерации. Среди них основными являются неизохронность системы вследствие реактивной нелинейности (**расстроечный механизм**) и нелинейность потерь (**диссипативный механизм**). В первом случае для появления эффекта ограничения амплитуды необходимо учесть в формуле (6.3) третий член разложения:

$$q_C = C_0 U_C + \alpha U_C^2 + \beta U_C^3. \quad (6.21)$$

При $\beta < 0$ среднее за период колебаний значение емкости уменьшается с ростом амплитуды, что приводит к увеличению парциальных частот ν_1 и ν_2 . Из-за такой расстройки парциальных частот относительно частот генерации ω_1 и ω_2 уменьшается вложение энергии в систему из генератора накачки. При $\beta > 0$ среднее значение емкости возрастает, частоты ν_1 и ν_2 уменьшаются, что также приводит к ограничению амплитуды колебаний. Диссипативный механизм ограничения амплитуды работает, когда в системе есть элемент с нелинейной вольт-амперной характеристикой, так что сопротивление можно записать в виде

$$R = R_0 I + a I^2 + b I^3. \quad (6.22)$$

Представленный выше анализ выполнен в предположении, что в левом контуре присутствуют колебания только частоты ω_1 , а в правом — только частоты ω_2 . Однако действие этих колебаний на нелинейную емкость C приводит в общем случае к появлению целого спектра комбинационных частот вида $m\omega_1 + n\omega_2$, где $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Если какая-нибудь из этих частот попадает в полосу пропускания одного из контуров, то наложение двух колебаний с близкими частотами даст биения. Аналогичная ситуация сложится и в другом контуре. Из-за наличия нелинейной емкости возникнет взаимное влияние комбинационных частот и частот параметрической генерации ω_1 и ω_2 , которое может привести к их взаимному «подтягиванию» и возникновению явления **автозахватывания** (автосинхронизации). В этом режиме колебания становятся чисто гармоническими с частотами, отличающимися от тех, которые определяются формулами (6.17) и (6.18). Наиболее легко автозахватывание происходит, когда частота ω_2 почти кратна ω_1 . В синхронном режиме выполняется соотношение $\omega_1 = \omega_n / N$, т.е. система представляет собой **делитель частоты** накачки в N раз.

Весьма полезными при анализе нелинейно-параметрических систем являются **соотношения Мэнли-Роу**, которые позволяют легко определить, как распределяется мощность колебаний по комбинационным частотам. В частном случае, когда в системе есть два источника колебаний — сигнальный с частотой ω_1 и накачки с частотой ω_n — соотношения Мэнли-Роу имеют вид:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_n} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{nP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_n} = 0, \quad (6.23)$$

где P_{mn} — мощности на соответствующих частотах $\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_n$. При этом мощностям, вводимым в систему, приписывается знак «+», а мощностям, рассеиваемым в системе на сопротивлениях — знак «-». По физическому смыслу формулы (6.23) представляют собой законы сохранения квантов накачки (первая формула) и квантов сигнала (вторая формула).

Задача 6.9

Для двухконтурного параметрического генератора (рис. 6.2), у которого первый контур с добротностью $Q_1 = 10$ настроен на частоту $\nu_1/2\pi = 10$ МГц, а второй контур с добротностью $Q_2 = 30$ — на частоту $\nu_2/2\pi = 50$ МГц:

- а) нарисовать зависимость частот генерации от частоты накачки с учетом эффекта деления частоты и определить кратность деления;
- б) как изменится эта зависимость при $Q_2 = 10$;
- в) используя соотношения Мэнли-Роу, найти мощность, отбираемую от генератора накачки, и мощность генерации во втором контуре при оптимальной настройке, если мощность в первом контуре равна $P_1 = 100$ мВт.

Решение

Для построения зависимостей $\omega_{1,2}(\omega_n)$ воспользуемся формулами (6.17) и (6.18), заменив в них коэффициенты затухания $\delta_{1,2}$ парциальными добротностями контуров $Q_{1,2}$:

$$\delta_{1,2} = \frac{\nu_{1,2}}{2Q_{1,2}}. \quad (6.24)$$

В результате получим:

$$\omega_1 = \frac{\nu_1 Q_2}{\nu_1 Q_2 + \nu_2 Q_1} \omega_n - \frac{\nu_1 \nu_2 (Q_2 - Q_1)}{\nu_1 Q_2 + \nu_2 Q_1}, \quad (6.25)$$

$$\omega_2 = \frac{\nu_2 Q_1}{\nu_1 Q_2 + \nu_2 Q_1} \omega_n + \frac{\nu_1 \nu_2 (Q_2 - Q_1)}{\nu_1 Q_2 + \nu_2 Q_1}. \quad (6.26)$$

На рис. 6.3 прямой 1 изображена зависимость $\omega_1(\omega_n)$, а прямой 2 — зависимость $\omega_2(\omega_n)$. Угловые коэффициенты прямых соответственно равны $k_1 = 0.375$ и $k_2 = 0.625$. Область параметрического возбуждения колебаний располагается вблизи частоты $\omega_{n0} = \nu_1 + \nu_2$. Область деления частоты обычно лежит внутри области параметри-

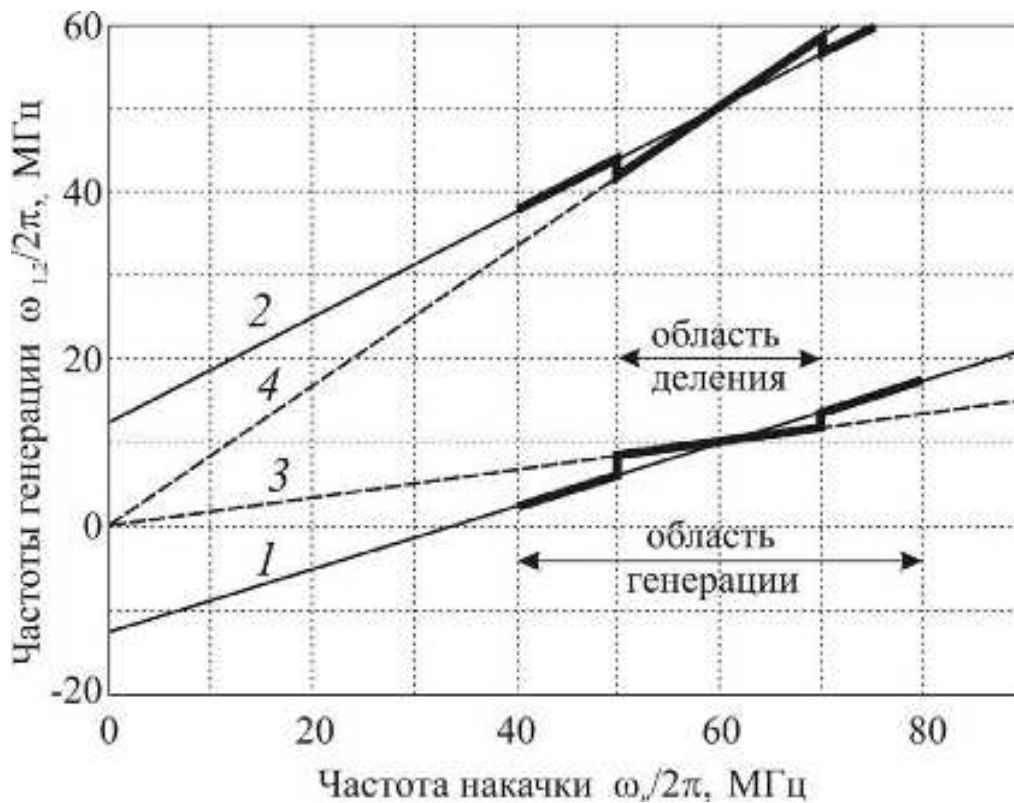


Рис. 6.3

ческой генерации. Эффект деления частоты означает, что частоты ω_1 и ω_n должны находиться в целочисленном соотношении: $\omega_1 = \omega_n / N$, где N — кратность деления. В рассматриваемом примере $\omega_{n0} / 2\pi = 60$ МГц, поэтому можно получить деление частоты с кратностью $N = 6$. В области деления зависимости частот генерации ω_1 и ω_2 от частоты накачки должны иметь вид

$$\omega_1 = \frac{\omega_n}{N}, \quad \omega_2 = \omega_n \frac{(N-1)}{N}. \quad (6.27)$$

Эти зависимости изображены на рисунке пунктирными прямыми 3 и 4. Жирные ломаные описывают реальную ситуацию. Вдали от частоты ω_{n0} в системе возбуждаются колебания с частотами, лежащими на прямых 1 и 2. При приближении к частоте ω_{n0} , когда комбинационные частоты начинают попадать в полосу пропускания контуров, возникают биения, которые, при наступлении автозахватывания, скачком сменяются чисто гармоническим режимом с частотами, лежащими на прямых 3 и 4.

Если $Q_2 = 10 = Q_1$, то прямые 1 и 2 совпадают с прямыми 3 и 4. Это означает, что область деления частоты становится максимально широкой и эффект деления частоты может существовать во всей области параметрической генерации.

Для расчета мощностей воспользуемся соотношениями Мэнли-Роу, полагая, что в системе присутствуют колебания только с тремя частотами: ω_1 , ω_2 и ω_H . При этом в выражении $\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_H$ частоте ω_1 соответствуют индексы $m = 0$ и $n = 1$, частоте ω_2 — индексы $m = 1$ и $n = -1$, а также $m = -1$ и $n = 1$, частоте ω_H — индексы $m = 1$ и $n = 0$. Соотношения (6.23) дают:

$$\frac{P_{10}}{\omega_H} + \frac{P_{1-1}}{\omega_2} = 0, \quad \frac{P_{01}}{\omega_1} - \frac{P_{1-1}}{\omega_2} = 0. \quad (6.28)$$

Отсюда получаем:

$$P_{1-1} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} P_{01}, \quad \text{т.е.} \quad P_2 = -\frac{\omega_2}{\omega_1} P_1;$$

$$P_{10} = \frac{\omega_H}{\omega_2} P_{1-1} = -\frac{\omega_H}{\omega_1} P_{01}, \quad \text{т.е.} \quad P_H = -\frac{\omega_H}{\omega_1} P_1.$$

При оптимальной настройке $\omega_1/2\pi = 10$ МГц, $\omega_2/2\pi = 50$ МГц и $\omega_H/2\pi = 60$ МГц, поэтому мощность во втором контур равна $P_2 = -500$ мВт, а мощность накачки $P_H = 600$ мВт. Здесь мы учли, что, в соответствии с правилом выбора знаков, мощность накачки положительная (она вводится в систему), а мощности P_1 и P_2 — отрицательные (они выводятся из системы).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.10. Для двухконтурного параметрического генератора (рис. 6.2), у которого первый контур с добротностью $Q_1 = 100$ настроен на частоту $\nu_1/2\pi = 10$ МГц, а второй контур с добротностью $Q_2 = 20$ — на частоту $\nu_2/2\pi = 75$ МГц, построить зависимости частот генерации от частоты накачки. Качественно указать область параметрической генерации. Определить, во сколько раз стабильность

частот генерации отличается от стабильности частоты накачки. Используя соотношения Мэнли-Роу, найти мощность, отбираемую от генератора накачки, и мощность генерации во втором контуре при оптимальной настройке, если мощность в первом контуре равна $P_1 = 15$ мВт.

Задача 6.11. Для двухконтурного параметрического генератора (рис. 6.2), у которого первый контур с добротностью $Q_1 = 50$ настроен на частоту $\nu_1/2\pi = 10$ МГц, а второй контур с добротностью $Q_2 = 20$ — на частоту $\nu_2/2\pi = 40$ МГц:

- а) нарисовать зависимость частот генерации от частоты накачки с учетом эффекта деления частоты и определить кратность деления;
- б) как изменится эта зависимость при $Q_1 = 20$;
- в) используя соотношения Мэнли-Роу, найти мощность, отбираемую от генератора накачки, и мощность генерации в первом контуре при оптимальной настройке, если мощность во втором контуре равна $P_2 = 50$ мВт.

Задача 6.12. Для двухконтурного параметрического генератора (рис. 6.2), у которого первый контур с добротностью $Q_1 = 30$ настроен на частоту $\nu_1/2\pi = 15$ МГц, а второй контур с добротностью $Q_2 = 15$ — на частоту $\nu_2/2\pi = 30$ МГц:

- а) нарисовать зависимость частот генерации от частоты накачки с учетом эффекта деления частоты и определить кратность деления;
- б) как изменится эта зависимость при $Q_1 = 15$;
- в) используя соотношения Мэнли-Роу, найти мощность генерации в каждом из контуров при оптимальной настройке, если мощность, отбираемая от генератора накачки, равна $P_n = 200$ мВт.

Задача 6.13. Для двухконтурного параметрического генератора (рис. 6.2), у которого первый контур с добротностью $Q_1 = 20$ настроен на частоту $\nu_1/2\pi = 10$ МГц, а второй контур с добротностью $Q_2 = 40$ — на частоту $\nu_2/2\pi = 40$ МГц:

- а) нарисовать зависимость частот генерации от частоты накачки с учетом эффекта деления частоты и определить кратность деления;
- б) как изменится эта зависимость при $Q_2 = 20$;
- в) используя соотношения Мэнли-Роу, найти мощность генерации в каждом из контуров при оптимальной настройке, если мощность, отбираемая от генератора накачки, равна $P_H = 400$ мВт.

Задача 6.14. Для двухконтурного параметрического генератора, представленного на рис. 6.2, построить зависимость мощности колебаний в первом (P_1) и втором (P_2) контурах от частоты накачки ω_H , а также зависимость граничных частот параметрического возбуждения $\omega_{Hгр}$ от амплитуды накачки A_H . Рассмотреть случаи $\beta = 0$, $\beta > 0$ и $\beta < 0$.

6.3. Двухконтурный LC-генератор с реактивной связью

На рис. 6.4 представлена принципиальная схема LC-генератора (генератора Томсона) с колебательным контуром $L_1C_1R_1$ в цепи затвора полевого транзистора, у которого нагрузкой является колебательный контур $L_2C_2R_2$. Рассмотрим случай, когда сигнал обратной связи снимается через коэффициент взаимной индукции M с контура

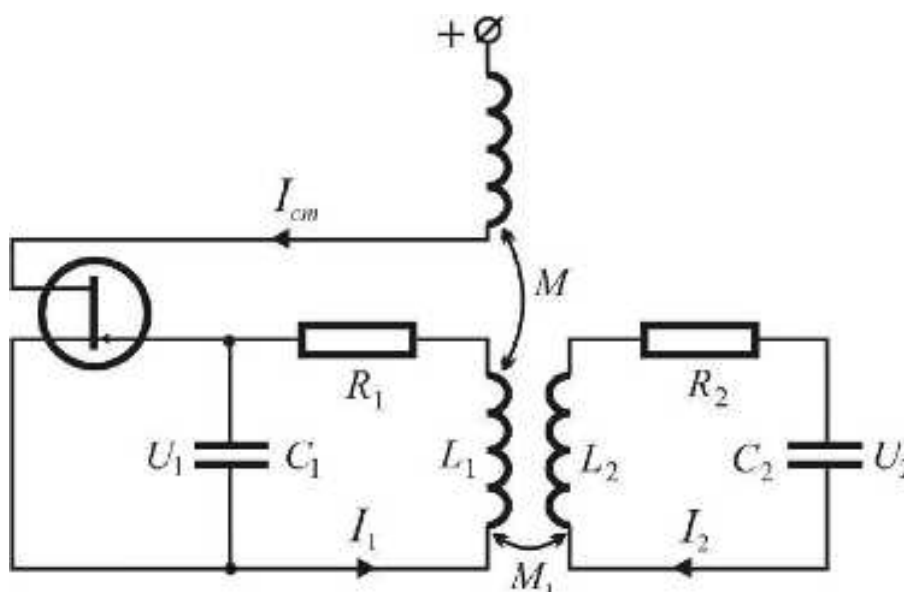


Рис. 6.4

генератора, а рабочая точка выбрана в середине линейного участка характеристики транзистора $I_{cm}(U_1)$, где I_{cm} — ток стока, а U_1 — напряжение на затворе.

Для введенных на рисунке обозначений уравнения колебаний в контурах имеют вид:

$$\frac{1}{C_1} \int I_1 dt + R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M_1 \frac{dI_2}{dt} = M \frac{dI_{cm}}{dt}, \quad (6.29)$$

$$\frac{1}{C_2} \int I_2 dt + R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M_1 \frac{dI_2}{dt} = 0. \quad (6.30)$$

Нелинейную характеристику транзистора $I_{cm}(U_1)$ разложим в ряд до кубического члена:

$$I_{cm} = S_0 U_1 - \frac{S_2}{3} U_1^3, \quad (6.31)$$

где S_0 — дифференциальная крутизна в выбранной рабочей точке транзистора, S_2 — коэффициент, характеризующий нелинейность характеристики $I_{cm}(U_1)$. Предполагая, что на затворе транзистора действует гармоническое напряжение

$$U_1 = A \cos \omega t, \quad (6.32)$$

подставим это выражение в (6.31) и выделим амплитуду первой гармоники I_{cm}^ω . Тогда для **средней крутизны** \bar{S} получим выражение

$$\bar{S}(A) = \frac{I_{cm}^\omega}{A} = S_0 - \frac{S_2}{4} A^2. \quad (6.33)$$

Вводя парциальные частоты

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad (6.34)$$

парциальные коэффициенты затухания

$$\delta_1 = \frac{R_1}{2L_1}, \quad \delta_2 = \frac{R_2}{2L_2}, \quad (6.35)$$

коэффициенты связи

$$\alpha_1 = \frac{M_1 C_2}{L_1 C_1}, \quad \alpha_2 = \frac{M_1 C_1}{L_2 C_2} \quad (6.36)$$

и переходя к переменным U_1 и U_2 , приведем уравнения (6.29) и (6.30) к виду

$$\begin{cases} \ddot{U}_1 + 2\delta_1 \dot{U}_1 + v_1^2 U_1 + \alpha_1 \ddot{U}_2 = Mv_1^2 \bar{S}(A) \dot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 + 2\delta_2 \dot{U}_2 + v_2^2 U_2 + \alpha_2 \ddot{U}_1 = 0 \end{cases} \quad (6.37)$$

Подставив в (6.37) пробное решение в форме

$$U_1 = A \cos \omega t, \quad U_2 = B \cos(\omega t + \psi), \quad (6.38)$$

получим выражения для соотношения амплитуд колебаний в контурах

$$\frac{B}{A} = \frac{\alpha_2 \omega^2}{\sqrt{(v_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2}}, \quad (6.39)$$

а также для нахождения частоты колебаний

$$\omega^2 \left[1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \omega^2 (v_2^2 - \omega^2)}{(v_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2} \right] = v_1^2 \quad (6.40)$$

и амплитуды колебаний в контуре генератора

$$A^2 = \frac{4}{S_2} \left[S_0 - \frac{2\delta_1}{Mv_1^2} - \frac{2\delta_2}{Mv_1^2} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \omega^4}{(v_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2} \right]. \quad (6.41)$$

Анализ частотного соотношения (6.40) показывает, что в зависимости от значений коэффициентов связи α_1 и α_2 возможны различные ситуации. Введем обобщенный коэффициент связи

$$\chi = \alpha_1 \alpha_2 Q_2^2, \quad (6.42)$$

где $Q_2 = v_2 / 2\delta_2$ — парциальная добротность дополнительного контура. При $\chi \leq \chi_{кр} = 1$ зависимость частоты ω от параметров системы

является однозначной. Если же $\chi > \chi_{кр}$, то в области вблизи синхронизма парциальных частот $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ уравнение (6.40) имеет три действительных корня. Средний корень $\omega_0 = \nu$ соответствует неустойчивому положению равновесия, а два других (ω_1 и ω_2) — устойчивым положениям равновесия. Однако при заданных исходных условиях (сигнал обратной связи снимается с контура генератора, и рабочая точка транзистора выбрана на линейном участке его характеристики) бигармонический режим невозможен. В зависимости от предыстории система может находиться в состоянии генерации либо частоты ω_1 , либо частоты ω_2 . Это явление носит название **затягивания**.

Влияние дополнительного контура проявляется не только во внесении реактивности в контур генератора, приводящей к изменению частоты генерации (этот эффект описывается вторым слагаемым в формуле (6.40)). Поскольку часть энергии перекачивается из контура генератора в дополнительный контур и там рассеивается на сопротивлении R_2 , то это означает внесение также дополнительных потерь в контур генератора, которые описываются третьим слагаемым в формуле (6.41). Оба эффекта наиболее сильно проявляются при близких парциальных частотах, т.е. при большой *связанности* контуров.

В случае равенства парциальных частот ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$) формула (6.41) приводится к виду:

$$A^2 = \frac{4}{S_2} \left[S_0 - \frac{1}{M\nu} \left(\frac{1}{Q_1} + \chi \frac{1}{Q_2} \right) \right], \quad (6.43)$$

где $Q_1 = \nu_1/2\delta_1$ и $Q_2 = \nu_2/2\delta_2$ — парциальные добротности контуров. Анализ выражений (6.39) и (6.41) позволяет сделать вывод, что в рассматриваемой системе в зависимости от соотношения параметров возможны различные режимы:

1) если

$$\chi \leq \chi_{кр} \quad \text{и} \quad S_0 > \frac{1}{M\nu} \left(\frac{1}{Q_1} + \chi \frac{1}{Q_2} \right), \quad (6.44)$$

то имеет место **отсос** энергии из контура генератора в дополнительный контур (перекачка энергии в дополнительный контур приводит к уменьшению амплитуды A в области близости парциальных частот);
 2) если

$$\chi \leq \chi_{кр} \quad \text{или} \quad \chi > \chi_{кр}, \quad \text{но} \quad S_0 < \frac{1}{M\nu} \left(\frac{1}{Q_1} + \chi \frac{1}{Q_2} \right), \quad (6.45)$$

то в области вблизи частоты ν происходит **гашение** автоколебаний из-за того, что вложение энергии в систему из источника питания становится меньше потерь;

3) если

$$\chi > \chi_{кр} \quad \text{и} \quad S_0 > \frac{1}{M\nu} \left(\frac{1}{Q_1} + \chi \frac{1}{Q_2} \right), \quad (6.46)$$

то колебания существуют во всем диапазоне изменения частот, но в области близости парциальных частот наблюдается явление **затягивания**.

Задача 6.15

Для изображенного на рис. 6.4 двухконтурного LC -генератора с параметрами $Q_1 = 40$, $Q_2 = 60$, $\nu_2 = 6 \cdot 10^7$ рад/с, $M = 33$ мГн, $S_0 = 20$ мА/В, $S_2 = 5$ мА/В³ рассчитать и построить зависимости частоты генерации ω и амплитуды колебаний A от парциальной частоты контура генератора ν_1 для трех значений обобщенного коэффициента связи: $\chi < \chi_{кр}$, $\chi = \chi_{кр}$ и $\chi > \chi_{кр}$. Считать, что перестройка ν_1 производится вблизи частоты ν_2 и что в этой области изменением добротности контура генератора можно пренебречь.

Решение

Преобразуем формулы (6.40) и (6.41), введя в них коэффициент χ и заменив коэффициенты затухания через добротности. В результате получим

$$x = y \left[1 + \frac{\chi(1-y)}{1 + (1-y)^2 Q_2^2 / y} \right], \quad (6.47)$$

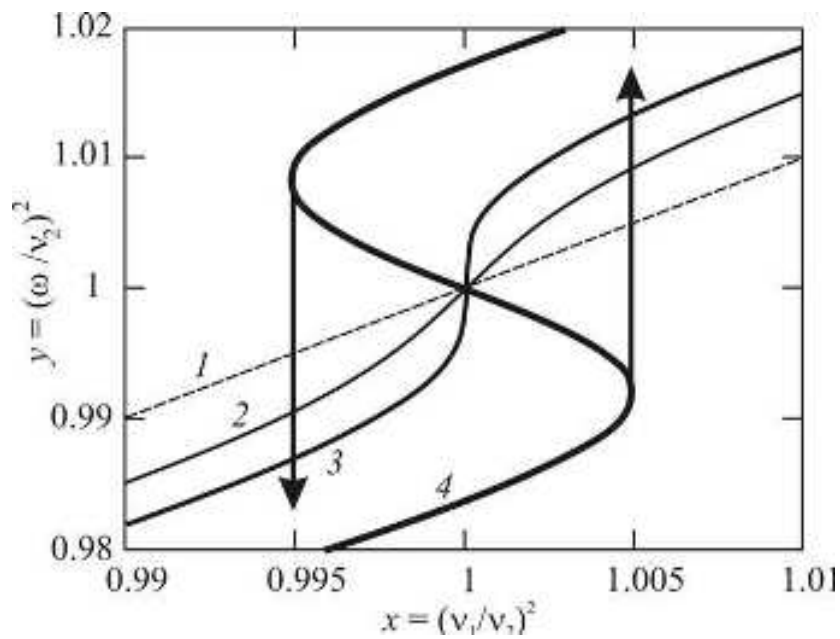
$$A^2 = \frac{4}{S_2} \left\{ S_0 - \frac{1}{Mv_1} \left[\frac{1}{Q_1} + \frac{\chi}{Q_2} \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{1 + (1-y)^2 Q_2^2 / y} \right] \right\}, \quad (6.48)$$

где введены нормированные частоты:

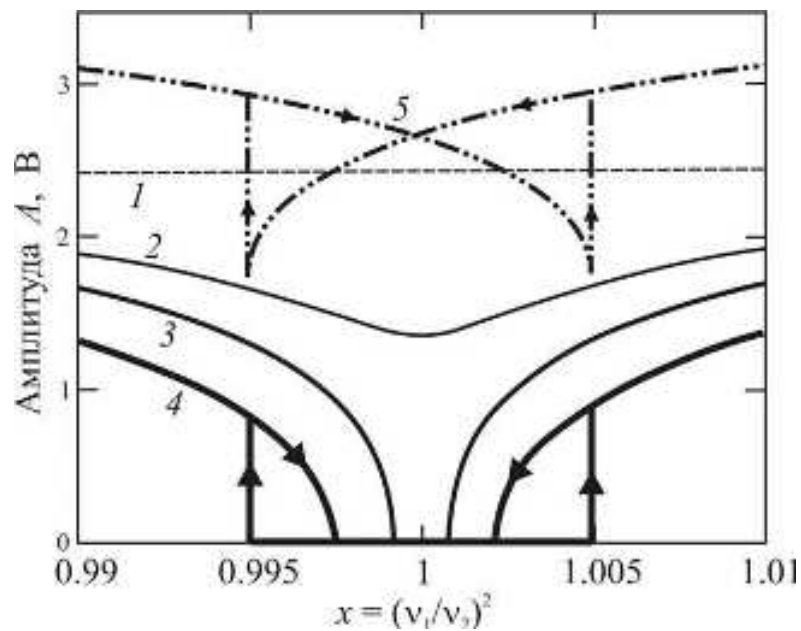
$$x = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2, \quad y = \left(\frac{\omega}{v_2} \right)^2. \quad (6.49)$$

Формула (6.47) позволяет легко рассчитать зависимость $x(y)$, которую затем можно использовать для нахождения амплитуды A .

На рис. 6.5 представлены частотные (а) и амплитудные (б) характеристики рассматриваемой системы. Пунктирные прямые 1 относятся к варианту одноконтурного LC -генератора, когда $\chi = 0$. В этом случае $\omega = v_1$, а амплитуда колебаний при небольшом диапазоне изменения v_1 остается практически постоянной. Кривые 2, рассчитанные для $\chi = 0.6 < \chi_{кр}$, иллюстрируют эффект отсоса энергии из контура генератора в дополнительный контур. Наибольшее влияние дополнительного контура сказывается при $v_1 = v_2$. Кривые 3 рассчитаны для критического значения $\chi = \chi_{кр} = 1$. В точке синхронизма парциальных частот ($v_1 = v_2$) производная $dv_1/d\omega = 0$. Подкачка энергии в колебательные контура через транзистор недостаточна для поддержания колебаний, поэтому вблизи точки $v_1 = v_2$ происходит гашение автоколебаний. Но обе кривые 3 на рисунках (а) и (б) однозначны во всей области частот v_1 . Совсем другая ситуация возникает при $\chi > \chi_{кр}$. Она иллюстрируется кривыми 4, рассчитанными для $\chi = 2$. Возникает область затягивания (неоднозначности частотной характеристики), на краях которой система скачком переходит из низшего состояния в верхнее или наоборот (скачки показаны на рисунках стрелками). При заданном значении $S_0 = 20$ мА/В внутри области затягивания существует также более узкая область гашения автоколебаний (кривая 4 на рис. 6.5,б). При увели-



(а)



(б)

Рис. 6.5.

чении S_0 область гашения исчезает. Этот случай иллюстрирует кривая 5, рассчитанная для $\chi = 2$ и $S_0 = 30$ мА/В.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.16. Считая, что характеристику полевого транзистора на рис. 6.4 можно аппроксимировать выражением

$$I_{cm} = S_0 U_1 + S_1 U_1^2 - S_2 U_1^3,$$

получить формулу зависимости средней крутизны \bar{S} от амплитуды колебаний в контуре генератора A в предположении, что обобщенный коэффициент связи $\chi \leq \chi_{кр}$. Изобразить графически эту зависимость.

Задача 6.17. Для области затягивания, когда в двухконтурном генераторе, показанном на рис. 6.4, потенциально возможен бигармонический режим:

$$U_1 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t,$$

получить выражения для средней крутизны на частотах ω_1 и ω_2 в форме зависимостей $\bar{S}_{\omega_1}(A_1, A_2)$ и $\bar{S}_{\omega_2}(A_1, A_2)$. Считать, что характеристику полевого транзистора можно аппроксимировать выражением $I_{cm} = S_0 U_1 + S_1 U_1^2 - S_2 U_1^3$.

Задача 6.18. Для двухконтурного генератора, схема которого показана на рис. 6.4, получить выражения для частот генерации ω_1 и ω_2 в точке синхронизма парциальных частот $\nu_1 = \nu_2 \equiv \nu$. Построить зависимости нормированных частот ω_1/ν и ω_2/ν от обобщенного коэффициента связи χ для парциальной добротности дополнительного контура $Q_2 = 50$.

Задача 6.19. Для двухконтурного генератора, схема которого показана на рис. 6.4, получить выражения для частот генерации ω_1 и ω_2 в точке синхронизма парциальных частот $\nu_1 = \nu_2 \equiv \nu$. Построить зависимости нормированных частот ω_1/ν и ω_2/ν от парциальной добротности дополнительного контура Q_2 для обобщенного коэффициента связи $\chi = 2$.

Задача 6.20. Для двухконтурного LC -генератора (рис. 6.4), у которого добротность дополнительного контура равна $Q_2 = 70$, рассчитать и построить зависимость относительной полосы затягивания $\Delta\omega/\nu_2$ от обобщенного коэффициента связи χ , предполагая, что перестройка частоты генерации осуществляется изменением емкости C_1 . Значение χ менять в диапазоне $\chi \leq 10$.

Задача 6.21. Для двухконтурного LC -генератора (рис. 6.4), у которого $L_1 = L_2 = 4$ мкГн, $M_1 = 0.2$ мкГн, рассчитать и построить зависимость относительной полосы затягивания $\Delta\omega/v_2$ от добротности дополнительного контура равна Q_2 , предполагая, что перестройка частоты генерации осуществляется изменением емкости C_1 . Значение Q_2 менять в диапазоне $Q_2 \leq 100$.

Задача 6.22. Для двухконтурного LC -генератора (рис. 6.4) получить условия на значения парциальных добротностей контуров Q_1 и Q_2 , при которых в системе будет наблюдаться явление затягивания. Изобразить эти условия графически на оси Q_2 и проиллюстрировать численным примером.

Задача 6.23. Для двухконтурного LC -генератора (рис. 6.4) нарисовать качественные графики зависимостей графиками $\omega^2(v_1^2)$, $A(v_1^2)$ и $B(v_1^2)$ для всех вариантов поведения системы, полагая, что изменение v_1 осуществляется перестройкой конденсатора C_1 . Дать физическое объяснение построенным зависимостям.

Задача 6.24. Для двухконтурного LC -генератора (рис. 6.4) нарисовать качественные графики зависимостей графиками $\omega^2(v_2^2)$, $A(v_2^2)$ и $B(v_2^2)$ для всех вариантов поведения системы, полагая, что изменение v_2 осуществляется перестройкой конденсатора C_2 . Дать физическое объяснение построенным зависимостям.

Задача 6.25. Для двухконтурного LC -генератора (рис. 6.4) проанализировать переход к режиму гашения автоколебаний в точке синхронизма парциальных частот $v_1 = v_2 \equiv v$ при увеличении добротности дополнительного контура Q_2 . Считать, что изменение Q_2 происходит за счет изменения сопротивления R_2 . Получить выражения и построить на одном графике зависимости $A^2(Q_2)$ и $B^2(Q_2)$. Найти максимальное значение амплитуды B и соответствующие значения Q_2 и A .

6.4. Двухконтурный LC-генератор с резистивной связью

Схема генератора представлена на рис. 6.6. Его основу составляет обычный генератор Томсона с колебательным контуром $L_1C_1R_1$ в цепи затвора полевого транзистора. Этот генератор связан с дополнительным контуром $L_2C_2R_2$ с помощью сопротивления R . Система уравнений, описывающих колебания в такой системе, имеет вид:

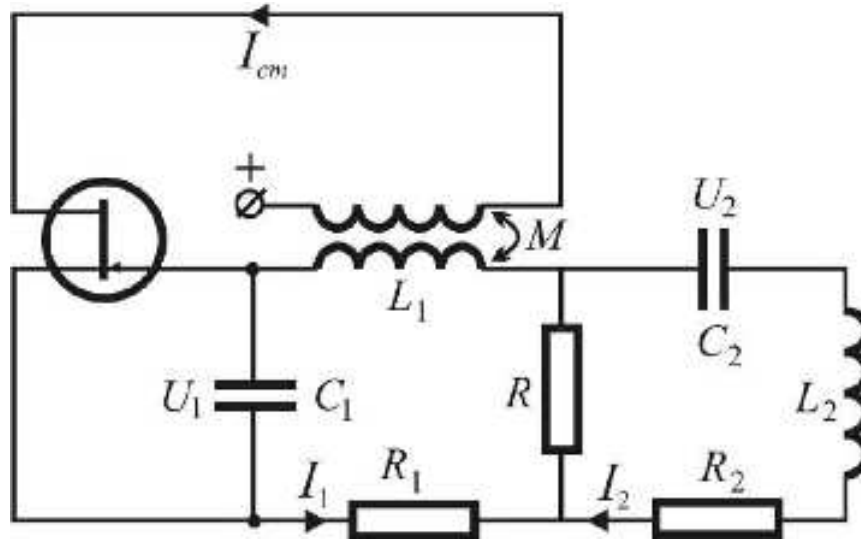


Рис. 6.6

$$\begin{cases} \frac{1}{C_1} \int I_1 dt + R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + R(I_1 + I_2) = M \frac{dI_{cm}}{dt} \\ \frac{1}{C_2} \int I_2 dt + R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + R(I_1 + I_2) = 0 \end{cases} \quad (6.50)$$

Введем парциальные частоты

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad (6.51)$$

парциальные коэффициенты затухания

$$\delta_1 = \frac{R_1 + R}{2L_1}, \quad \delta_2 = \frac{R_2 + R}{2L_2} \quad (6.52)$$

и коэффициенты связи

$$\alpha_1 = \frac{RC_2}{L_1C_1}, \quad \alpha_2 = \frac{RC_1}{L_2C_2}. \quad (6.53)$$

Выбрав в качестве независимых переменных напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах C_1 и C_2 , приведем уравнения (6.50) к виду

$$\begin{cases} \ddot{U}_1 + 2\delta_1\dot{U}_1 + \nu_1^2 U_1 + \alpha_1\dot{U}_2 = M\nu_1^2 \bar{S}(A)\dot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 + 2\delta_2\dot{U}_2 + \nu_2^2 U_2 + \alpha_2\dot{U}_1 = 0 \end{cases} \quad (6.54)$$

Подстановка в (6.54) пробного решения в форме (6.38) приводит к следующим выражениям, определяющим соотношение амплитуд колебаний в контурах

$$\frac{B}{A} = \frac{\alpha_2 \omega}{\sqrt{(\nu_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2}}, \quad (6.55)$$

частоту колебаний

$$\omega^2 \left[1 - \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\nu_2^2 - \omega^2)}{(\nu_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2} \right] = \nu_1^2 \quad (6.56)$$

и амплитуду колебаний в контуре генератора

$$A^2 = \frac{4}{S_2} \left[S_0 - \frac{2\delta_1}{M\nu_1^2} + \frac{2\delta_2}{M\nu_1^2} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \omega^2}{(\nu_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2} \right]. \quad (6.57)$$

Наиболее существенное отличие формул (6.55)—(6.57) от (6.39)—(6.41) состоит в том, что члены, описывающие влияние дополнительного контура (второе слагаемое в (6.56) и третье слагаемое в (6.57)), имеют другой знак. Это означает, во-первых, что вносимая дополнительным контуром реактивность понижает частоту генерации ω в области $\nu_1 < \nu_2$ и повышает — в области $\nu_1 > \nu_2$. А во-вторых, дополнительный контур за счет своего шунтирующего действия увеличивает добротность системы, что приводит к возрастанию амплитуды колебаний в области близких парциальных частот. В точке синхронизма $\nu_1 = \nu_2 \equiv \nu$ формула (6.56) дает единственное действитель-

ное значение частоты генерации $\omega = \nu$. Следовательно, здесь явление **затягивания** отсутствует. Однако при достаточно большой связи между контурами затягивание может возникнуть по обе стороны от точки $\nu_1 = \nu_2$.

Задача 6.26

Для изображенного на рис. 6.6 двухконтурного LC -генератора получить выражение для критической связи, определяющей возникновение явления затягивания, и построить кривые зависимости частоты генерации от парциальной частоты контура генератора при фиксированном значении парциальной частоты дополнительного контура.

Решение

Учитывая, что влияние дополнительного контура сказывается при относительно небольшой расстройке контуров, введем переменные ζ и η формулами:

$$\zeta = \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2\omega^2} \approx \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2}, \quad \eta = \frac{\omega^2 - \nu_2^2}{2\omega^2} \approx \frac{\omega - \nu_2}{\nu_2}. \quad (6.58)$$

Таким образом, переменные ζ и η представляют собой относительные расстройки парциальной частоты контура генератора ν_1 и частоты генерации ω от фиксированной частоты дополнительного контура ν_2 . Подставив ζ и η в (6.56), получим соотношение:

$$\zeta = \eta \left[1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{4(\omega^2 \eta^2 + \delta_2^2)} \right]. \quad (6.59)$$

Критическое значение связи определяется из условия существования единственного действительного корня в точках, где $d\zeta/d\eta = 0$. Продифференцировав функцию $\zeta(\eta)$, получим биквадратное уравнение, дискриминант которого равен нулю при $\alpha_1 \alpha_2 = 32\delta_2^2$. Учитывая, что в данном случае коэффициенты связи α_1 и α_2 являют-

ся размерными величинами, удобно ввести обобщенный коэффициент связи выражением

$$\chi = \frac{\alpha_1 \alpha_1 Q_2^2}{\omega^2}, \quad (6.60)$$

где $Q_2 = \omega/2\delta_2$ — парциальная добротность дополнительного контура. В результате получим для критического значения связи значение: $\chi_{кр} = 8$.

Выражение (6.59) можно преобразовать к виду

$$\zeta = \eta \left[1 + \frac{\chi}{4\eta^2 Q_2^2 + 1} \right]. \quad (6.61)$$

Для определенности зададим добротность дополнительного контура, например, равной $Q_2 = 40$ и будем считать, что разные значения χ получаются из-за разных коэффициентов связи α_1 и α_2 .

На рис. 6.7 показаны зависимости $\eta(\zeta)$ для разных значений обобщенного коэффициента связи χ . Прямая 1 относится к случаю $\chi = 0$ и характеризует линейную зависимость частоты генерации от

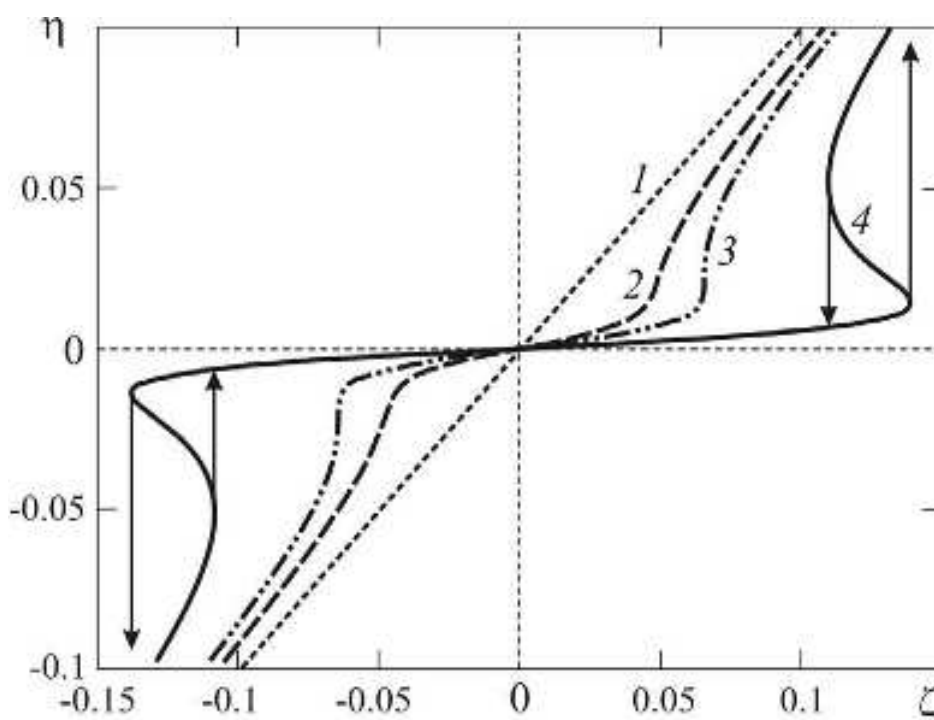


Рис. 6.7

собственной частоты контура для одноконтурного генератора Томсона. Кривые 2, 3 и 4 рассчитаны для $\chi = 5, 8$ и 20 соответственно. При связи, меньшей критической (кривая 2), зависимость $\eta(\zeta)$ однозначна во всей области частот. Кривая 3 соответствует критической связи; в точках

$$\zeta = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2Q_2} = \pm 0.065 \quad \text{и} \quad \eta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2Q_2} = \pm 0.022$$

касательная к ней вертикальна. Для кривой 4 связь больше критической; в областях частотной и амплитудной бистабильности наблюдается явление затягивания.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.27. На основе результатов задачи 6.26 построить качественные зависимости частоты колебаний ω двухконтурного генератора с резистивной связью от парциальной частоты дополнительного контура ν_2 при фиксированной частоте ν_1 для трех значений обобщенного коэффициента связи χ : $\chi < \chi_{кр}$, $\chi = \chi_{кр}$ и $\chi > \chi_{кр}$.

Задача 6.28. Для двухконтурного генератора, изображенного на рис. 6.6, построить качественные зависимости амплитуд колебаний A и B от частоты ν_1 при фиксированной частоте дополнительного контура ν_2 для случаев $\chi < \chi_{кр}$ и $\chi > \chi_{кр}$.

Задача 6.29. Для двухконтурного генератора, изображенного на рис. 6.6, получить выражение и построить зависимость амплитуды колебаний A от сопротивления связи R . Определить граничное значение $R_{ср}$, при котором в системе происходит срыв колебаний. Расчет выполнить для $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

Задача 6.30. Для двухконтурного генератора с резистивной связью получить выражение для коэффициента стабилизации частоты $S = d\nu_1/d\omega$ в области $\nu_1 \approx \nu_2$. Построить график зависимости коэф-

коэффициента стабилизации от сопротивления связи R и найти максимальное значение коэффициента стабилизации.

Задача 6.31. Для двухконтурного генератора с резистивной связью, имеющего параметры: $L_1 = 1$ мкГн, $L_2 = 100$ мкГн, $C_2 = 1$ нФ, $R_2 \approx 0$, численно рассчитать и построить графики зависимости $\omega^2(v_1^2)$ для двух значений сопротивления связи $R = 1$ Ом и $R = 5$ Ом, полагая, что изменение v_1 осуществляется перестройкой конденсатора C_1 . Для обоих вариантов найти значения коэффициента стабилизации частоты $S = dv_1/d\omega$ в области $v_1 \approx v_2$. Качественно построить график зависимости $A(v_1)$.

7. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Колебания в системе с n степенями свободы описываются n независимыми координатами. Как и в системах с двумя степенями свободы, можно ввести нормальные координаты, число которых равно числу степеней свободы. Каждая нормальная координата совершает гармоническое колебание с собственной, или нормальной, частотой. Свободные и вынужденные колебания можно представить в виде суперпозиции нормальных колебаний.

Для линейной консервативной системы потенциальную и кинетическую энергию можно записать в виде квадратичных форм:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n k_{rs} x_r x_s, \quad T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^n m_{rs} \dot{x}_r \dot{x}_s. \quad (7.1)$$

Совокупность коэффициентов k_{rs} и m_{rs} образуют **матрицы упругости $\hat{\mathbf{k}}$ и массы $\hat{\mathbf{m}}$** :

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Из (7.1) следует, что эти матрицы являются квадратными и симметричными:

$$k_{rs} = k_{sr}, \quad m_{rs} = m_{sr}. \quad (7.3)$$

Подставив выражения (7.1) в уравнения Лагранжа (5.1), получим систему n линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{s=1}^n m_{rs} \ddot{x}_s + \sum_{s=1}^n k_{rs} x_s = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (7.4)$$

которую удобно записать в компактной матричной форме:

$$\hat{\mathbf{m}}\ddot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{x} = 0, \quad (7.5)$$

где \mathbf{x} — вектор-столбец колебаний с компонентами $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Как и в случае систем с двумя степенями свободы, решение (7.5) ищем в комплексной форме:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} \exp(j\omega t), \quad (7.6)$$

где \mathbf{A} — вектор-столбец амплитуд. Подставив (7.6) в (7.5), получим однородное алгебраическое уравнение

$$(-\omega^2 \hat{\mathbf{m}} + \hat{\mathbf{k}})\mathbf{A} = 0, \quad (7.7)$$

которое имеет нетривиальное решение только при равенстве нулю детерминанта:

$$|-\omega^2 \hat{\mathbf{m}} + \hat{\mathbf{k}}| = 0. \quad (8.8)$$

Выражение (7.8) является уравнением n -й степени относительно ω^2 .

Найдя собственные частоты ω_s (точно, если удастся решить уравнение (7.8), или приближенно путем компьютерного расчета), надо их по очереди подставить в (7.7) и определить вектора амплитуд \mathbf{A}_s . Теперь можно записать общее решение колебательной задачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{s=1}^n \left[\mathbf{A}_s \exp(j\omega_s t) + \mathbf{A}_s^* \exp(-j\omega_s t) \right] = \\ &= \sum_{s=1}^n 2|\mathbf{A}_s| \cos(\omega_s t + \psi_s) = \sum_{s=1}^n C_{s1} \mathbf{K}_s \cos(\omega_s t + \psi_s), \end{aligned} \quad (7.9)$$

где $C_{s1} = 2|A_{s1}|$, $s = 1, 2, \dots, n$. Введенная величина \mathbf{k}_s представляет собой вектор-столбец **коэффициентов распределения амплитуд** на частоте ω_s , который также носит название **формы s -го колебания**. Выражение (7.9) является обобщением формул (5.6)—(5.7). Для полного решения колебательной задачи необходимо задать начальные отклонения $x_s(0)$ и скорости $\dot{x}_s(0)$. Этих $2n$ значений достаточно для определения остающихся неизвестными в (7.9) $2n$ величин C_{s1} и ψ_s .

Вводя нормальные координаты

$$\eta_s = C_{s1} \cos(\omega_s t + \psi_s), \quad (7.10)$$

общее решение (7.9) можно представить как суперпозицию нормальных колебаний:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{s=1}^n \mathbf{k}_s \eta_s(t). \quad (7.11)$$

Таким образом, каждому нормальному колебанию соответствует своя форма колебаний \mathbf{k}_s . Если каким-либо образом удастся найти формы нормальных колебаний, то собственные частоты можно рассчитать по формуле

$$\omega_s^2 = \frac{\mathbf{k}_s \hat{\mathbf{k}} \mathbf{k}_s}{\mathbf{k}_s \hat{\mathbf{m}} \mathbf{k}_s}. \quad (7.12)$$

Теорема. Формы колебаний, соответствующие разным собственным частотам ω_s , взаимно ортогональны. Математически это утверждение записывается так:

$$\mathbf{k}_r \hat{\mathbf{m}} \mathbf{k}_s = 0, \quad \mathbf{k}_r \hat{\mathbf{k}} \mathbf{k}_s = 0 \quad \text{при } r \neq s. \quad (3.13)$$

В некоторых случаях с помощью этой теоремы можно легко найти собственные частоты.

Задача 7.1

Малые колебания шариков в системе, показанной на рис. 7.1, происходят в вертикальной плоскости. Для этой системы:

а) найти матрицы упругости $\hat{\mathbf{k}}$ и массы $\hat{\mathbf{m}}$;

б) рассчитать парциальные и собственные частоты, а также формы нормальных колебаний;

в) показать на графике взаимное расположение парциальных и собственных частот;

г) изобразить графически формы нормальных колебаний.

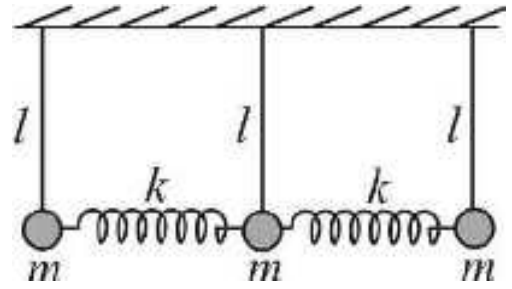


Рис. 7.1

Решение

Обозначим угловые смещения шариков в плоскости чертежа как φ_s ($s = 1, 2, 3$). Тогда потенциальная энергия системы запишется как

$$V = \frac{kl^2}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{kl^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \frac{mgl}{2}\varphi_1^2 + \frac{mgl}{2}\varphi_2^2 + \frac{mgl}{2}\varphi_3^2, \quad (7.14)$$

а кинетическая — в виде

$$T = \frac{ml^2}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2). \quad (7.15)$$

Сопоставляя эти выражения с формулами (7.1), получаем матрицы упругости и массы:

$$\hat{\mathbf{k}} = kl^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 + mg/kl & 1 & 0 \\ 1 & 2 + mg/kl & 1 \\ 0 & 1 & 1 + mg/kl \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{m}} = ml^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

При записи матрицы $\hat{\mathbf{k}}$ надо обратить внимание на то, что в суммах (7.1), вследствие симметричности матриц, есть подобные члены, например, слагаемые $k_{12}x_1x_2$ и $k_{21}x_2x_1$, которые вместе дают $2k_{12}x_1x_2$.

Подставив выражения (7.14) и (7.15) в уравнения Лагранжа (5.1), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} ml\ddot{\varphi}_1 + (kl + mg)\varphi_1 - kl\varphi_2 = 0 \\ ml\ddot{\varphi}_2 + (2kl + mg)\varphi_2 - kl\varphi_1 - kl\varphi_3 = 0 \\ ml\ddot{\varphi}_3 + (kl + mg)\varphi_3 - kl\varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

Положив здесь по очереди $\varphi_s = 0$, найдем парциальные частоты:

$$v_1^2 = v_3^2 = \frac{k}{m} + \frac{g}{l}, \quad v_2^2 = 2\frac{k}{m} + \frac{g}{l}. \quad (7.18)$$

Для выбранных независимых переменных парциальные системы представляют собой: левый маятник с пружиной, правый конец которой закреплен; средний маятник с двумя пружинами, концы которых закреплены; правый маятник с пружиной, левый конец которой закреплен.

Решение системы (7.17) ищем в виде

$$\varphi_s = A_s \exp(j\omega t). \quad (7.19)$$

Подстановка этих выражений дает систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (-ml\omega^2 + kl + mg)A_1 - klA_2 = 0 \\ -klA_1 + (-ml\omega^2 + kl + mg)A_2 - klA_3 = 0 \\ -klA_2 + (-ml\omega^2 + kl + mg)A_3 = 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

которая имеет ненулевые решения при равенстве нулю ее определителя. Это условие приводит к бикубическому уравнению

$$(-ml\omega^2 + kl + mg)^3 - 2k^2l^2(-ml\omega^2 + kl + mg) = 0, \quad (7.21)$$

которое распадается на линейное и биквадратное. В итоге находим три собственные частоты:

$$\omega_1^2 = (1 - \sqrt{2})\frac{k}{m} + \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m} + \frac{g}{l}, \quad \omega_3^2 = (1 + \sqrt{2})\frac{k}{m} + \frac{g}{l}. \quad (7.22)$$

Взаимное расположение собственных и парциальных частот системы для случая $kl = mg$ показано на рис. 7.2. Можно отметить, что, в от-

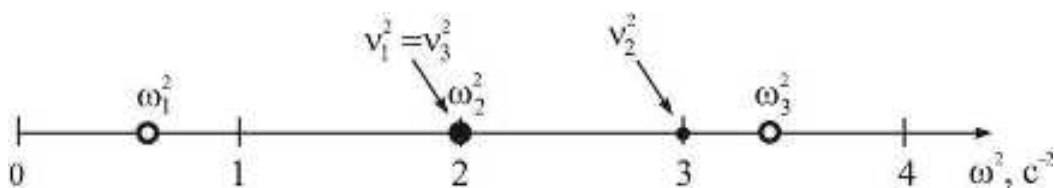


Рис. 7.2

личие от систем с двумя степенями свободы, здесь возможно совпадение собственных частот с парциальными.

Для нахождения форм собственных колебаний подставим поочередно частоты ω_s в систему (7.20) и найдем соотношения амплитуд A_2/A_1 и A_3/A_1 . В результате получим следующие выражения для форм колебаний:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Схематически эти формы показаны на рис. 7.3. Значения компонент \mathbf{k}_s представлены точками, через которые проведены ломаные линии. Из рисунка следует, что на наименьшей частоте ω_1 все шарики колеблются синфазно, но при этом средний шарик отклоняется на угол в $\sqrt{2}$ раз больший, чем крайние. На частоте ω_2 средний шарик не совершает колебаний, а крайние отклоняются на равные углы в противоположные стороны. На наивысшей частоте ω_3 средний шарик колеблется в противофазе с крайними.

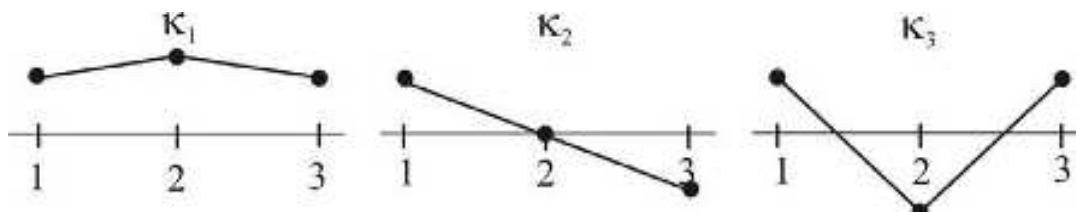


Рис. 7.3

Задача 7.2

В системе, изображенной на рис. 7.4, колебания происходят вдоль горизонтальной оси. Для этой системы:

а) записать матрицы упругости и массы;

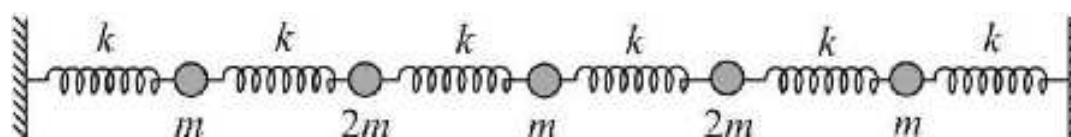


Рис. 7.4

- б) найти формы нормальных колебаний;
 в) рассчитать собственные частоты.

Решение

Обозначим смещения шариков вдоль горизонтальной оси как x_s ($s = 1, 2, \dots, 5$). Запишем выражения для потенциальной и кинетической энергии:

$$V = \frac{k}{2} [x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (x_5 - x_4)^2 + x_5^2], \quad (7.23)$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + 2\dot{x}_4^2 + \dot{x}_5^2). \quad (7.24)$$

Матрицы упругости и массы в данном случае имеют вид:

$$\hat{\mathbf{k}} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{m}} = m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

Характеристическое уравнение для рассматриваемой системы является алгебраическим уравнением 5-й степени относительно ω^2 , и в общем случае оно не может быть разрешено в радикалах. Поэтому для нахождения собственных частот воспользуемся некоторыми априорными соображениями, основанными на симметрии системы. Можно ожидать, что формы собственных колебаний в системе будут похожи на формы колебаний однородного упругого стержня или струны, у которых концы жестко закреплены. В этом случае для наинизшей собственной частоты ω_1 форма колебаний представляет собой половину периода синусоиды, для частоты ω_2 — полный период синусоиды и т.д. На рис. 7.5 эти формы показаны штриховыми линиями.

Смещения шариков в системе происходят по горизонтали. Однако для визуализации форм колебаний удобно откладывать компоненты векторов \mathbf{k}_s по вертикальной оси, как это показано на рисунке.

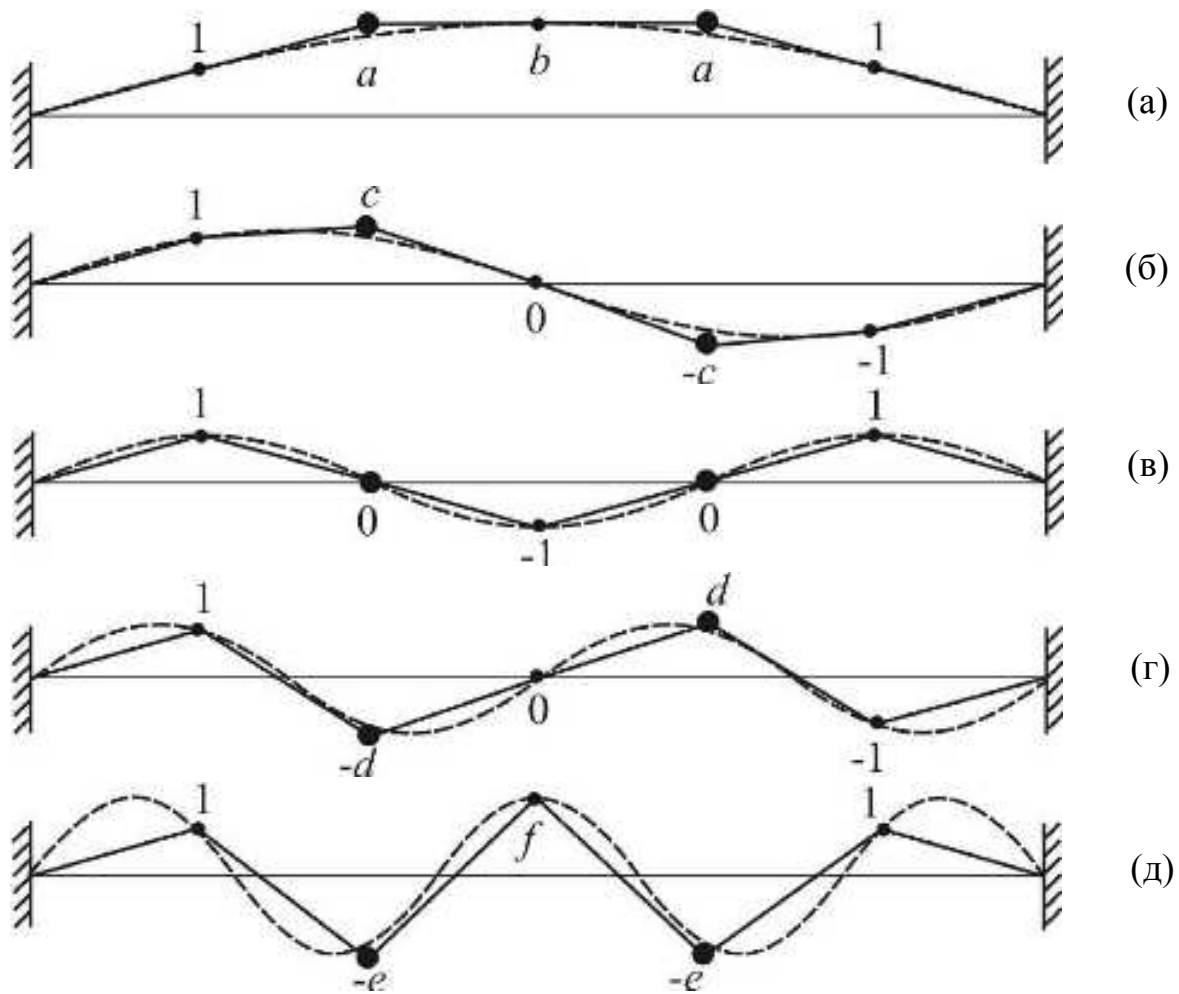


Рис. 7.5

Учтем, что в соответствии с выбранным правилом нормировки (7.9) все первые компоненты векторов \mathbf{k}_s равны единице. Далее, рассматривая форму \mathbf{k}_1 (рис. 7.5,а), можно, на основе симметрии системы, утверждать, что компонента k_{15} также равна единице, а, кроме того, $k_{12} = k_{14}$. Значения k_{12} и k_{13} неизвестны; обозначим их как a и b . Рассуждая аналогично, введем пока неизвестные величины c (для формы \mathbf{k}_2), d (для формы \mathbf{k}_4), e и f (для формы \mathbf{k}_5).

Теперь воспользуемся теоремой об ортогональности форм нормальных колебаний. Записывая разные варианты соотношений (7.13), получим систему алгебраических уравнений, из которой находятся все введенные неизвестные величины. Например, соотношение $\mathbf{k}_4 \hat{m} \mathbf{k}_2 = 0$ дает уравнение $2dc = 1$, соотношение $\mathbf{k}_5 \hat{k} \mathbf{k}_1 = 0$ — уравнение $a - e = 1$. В итоге получим:

$$a = \frac{1+\sqrt{7}}{2}, \quad b = 2, \quad c = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad d = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad e = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \quad f = 2.$$

Таким образом, формы нормальных колебаний имеют вид:

$$\mathbf{\kappa}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+\sqrt{7})/2 \\ 2 \\ (1+\sqrt{7})/2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1.82 \\ 2 \\ 1.82 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\kappa}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+\sqrt{3})/2 \\ 0 \\ -(1+\sqrt{3})/2 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1.37 \\ 0 \\ -1.37 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\kappa}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\kappa}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1-\sqrt{3})/2 \\ 0 \\ (-1+\sqrt{3})/2 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -0.37 \\ 0 \\ 0.37 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\kappa}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1-\sqrt{7})/2 \\ 2 \\ (1-\sqrt{7})/2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -0.82 \\ 2 \\ -0.82 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Интересно отметить, что компоненты формы синусоиды на рис. 7.5,а имеют значения: $\{1, \sqrt{3}/2 \approx 1.73, 2, 1.73, 1\}$. Сравнивая эти значения с $\mathbf{\kappa}_1$, видим, что использованная при решении задачи синусоидальная аппроксимация дает ошибку всего лишь на 5%.

Теперь, зная формы колебаний, можно легко по формуле (7.12) рассчитать собственные частоты:

$$\omega_1^2 = \frac{7-2\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}} \frac{k}{m} \approx 0.18 \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3}{3+\sqrt{3}} \frac{k}{m} \approx 0.63 \frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = 2 \frac{k}{m},$$

$$\omega_4^2 = \frac{3}{3-\sqrt{3}} \frac{k}{m} \approx 2.37 \frac{k}{m}, \quad \omega_5^2 = \frac{7+2\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}} \frac{k}{m} \approx 2.82 \frac{k}{m}.$$

Интересно отметить, что отличие собственной частоты системы ω_1 от частоты синусоиды, использованной в нашей аппроксимации (рис. 7.5,а), составляет всего лишь 0.5%, что на порядок меньше ошибки аппроксимации формы колебания. Здесь на частном примере мы продемонстрировали **теорему об экстремальных свойствах собственных частот**.

Взаимное расположение собственных частот показано на рис. 7.6. Здесь также отмечены парциальные частоты $\nu_1 = \nu_3 = \nu_5 = \sqrt{2k/m}$ и $\nu_2 = \nu_4 = \sqrt{k/m}$.

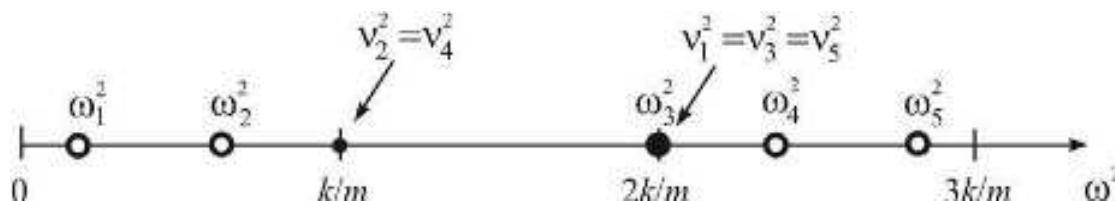


Рис. 7.6

Задача 7.3

Одномерный кристалл состоит из цепочки двух сортов атомов с массами m и M , расположенных в чередующемся порядке с интервалом d . Всего кристалл содержит по n штук каждого сорта атомов. Найти собственные частоты продольных колебаний системы в предположении, что упругое взаимодействие соседних атомов характеризуется коэффициентом жесткости k . Рассмотреть случай закрепленных концов кристалла (рис. 3.7).

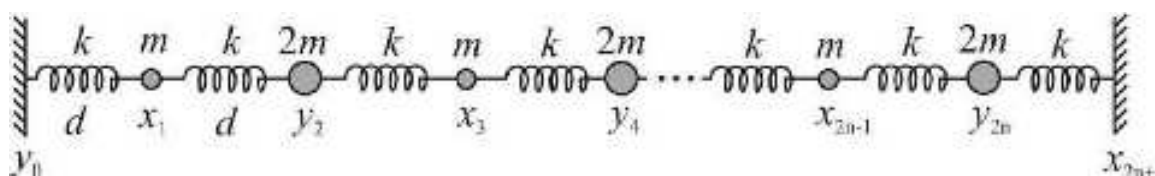


Рис. 7.7

Решение

Введем независимые координаты по следующему правилу: для атомов с массой m — x_i , где i принимает нечетные значения $1, 3, \dots, 2n - 1$, а для атомов с массой M — y_i , где i принимает четные значения $2, 4, \dots, 2n$. Кроме того, для записи граничных условий введем координаты y_0 для левого конца и x_{2n+1} — для правого конца; при этом, учитывая условие задачи,

$$y_0 = 0, \quad x_{2n+1} = 0. \quad (7.26)$$

В этих переменных выражения для потенциальной и кинетической энергии имеют вид:

$$V = \frac{k}{2} \left[(x_1 - y_0)^2 + (y_2 - x_1)^2 + (x_3 - y_2)^2 + \dots + (x_{2n+1} - y_{2n})^2 \right], \quad (7.27)$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_5^2 + \dots + \dot{x}_{2n-1}^2) + \frac{M}{2} (\dot{y}_2^2 + \dot{y}_4^2 + \dot{y}_6^2 + \dots + \dot{y}_{2n}^2). \quad (7.28)$$

Подставив (7.27) и (7.28) в уравнения Лагранжа (5.1), получим систему из $2n + 2$ дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i + k[2x_i - (y_{i-1} + y_{i+1})] = 0, & i = 1, 3, \dots, 2n+1 \\ M\ddot{y}_i + k[2y_i - (x_{i-1} + x_{i+1})] = 0, & i = 0, 2, 4, \dots, 2n \end{cases} \quad (7.29)$$

Из (7.29) и рис. 7.7 ясно, что парциальные частоты равны:

$$v_1^2 = \frac{2k}{M} \quad \text{и} \quad v_2^2 = \frac{2k}{m}. \quad (7.30)$$

Решение системы (7.29) ищем в виде:

$$x_i = A_i \cos(\omega t + \psi), \quad y_i = B_i \cos(\omega t + \psi), \quad (7.31)$$

где A_i и B_i — формы колебаний для масс m и M соответственно. Рассуждая так же, как и в задаче 7.2, предположим гармонический вид форм колебаний:

$$A_i = a \sin(i\beta), \quad B_i = b \sin(i\beta), \quad (7.32)$$

Подставив (7.32) в систему (7.29), получим:

$$\begin{cases} [(-m\omega^2 + 2k) \cdot a - 2k \cos \beta \cdot b] \sin i\beta = 0, & i = 1, 3, \dots, 2n+1 \\ [-2k \cos \beta \cdot a + (-M\omega^2 + 2k) \cdot b] \sin i\beta = 0, & i = 0, 2, 4, \dots, 2n \end{cases} \quad (7.33)$$

Поскольку уравнения (7.33) должны удовлетворяться при любых значениях i , то отсюда следует, что

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + 2k) \cdot a - 2k \cos \beta \cdot b = 0 \\ -2k \cos \beta \cdot a + (-M\omega^2 + 2k) \cdot b = 0 \end{cases} \quad (7.34)$$

Таким образом, система (7.29) из $2n + 2$ уравнений сведена, благодаря симметрии кристалла, к системе из двух уравнений (7.34). Отметим, что для системы с двумя степенями свободы, состоящей из двух шариков с массами m и M , связанных между собой и с неподвижными опорами тремя пружинами с жесткостью k (рис. 5.2), система алгебраических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + 2k) \cdot a - k \cdot b = 0 \\ -k \cdot a + (-M\omega^2 + 2k) \cdot b = 0 \end{cases} \quad (7.35)$$

Отличие состоит лишь в множителе $\cos \beta$, который и определяет $2n$ собственных частот.

На левой границе условие (7.26) удовлетворяется благодаря правильному выбору формы колебаний в виде (7.32). Для правой границе из (7.26) имеем:

$$A_{2n+1} = a \sin[(2n + 1)\beta] = 0. \quad (7.36)$$

Отсюда получаем набор возможных значений β_s :

$$\beta_s = \frac{\pi s}{2n + 1}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (7.37)$$

Подставляя в (7.35) поочередно разные значения β_s , получим собственные частоты системы:

$$\omega_{s1,2}^2 = \frac{k}{m} \left[(\mu + 1) \mp \sqrt{(\mu + 1)^2 - 4\mu \sin^2 \beta_s} \right], \quad s = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (7.38)$$

а затем, по классической схеме решения, находим коэффициенты распределения амплитуд:

$$\kappa_{s1,2} = \frac{-m\omega_{s1,2}^2 + 2k}{2k \cos \beta_s} = \frac{-\omega_{s1,2}^2 + v_2^2}{v_2^2 \cos \beta_s} = \frac{-(\mu - 1) \pm \sqrt{(\mu + 1)^2 - 4\mu \sin^2 \beta_s}}{2 \cos \beta_s}, \quad (7.39)$$

где $\mu \equiv m/M$. Нетрудно убедиться, что значения $s > n$ не дают новых собственных частот. Таким образом, в полном соответствии с общими физическими принципами мы получили для системы с $2n$ степе-

нями свободы $2n$ собственных частот ω_{s1} и ω_{s2} . Коэффициенты a и b в (7.32) находятся из начальных условий.

Исследуем спектр частот (7.38). Сначала отметим, что аналогично системам с двумя степенями свободы здесь выполняется соотношение $\omega_{s1} < \nu_1 < \nu_2 < \omega_{s2}$. Поэтому на частотах ω_{s1} коэффициенты распределения амплитуд $\kappa_{s1} > 0$, что означает синфазность колебаний атомов. Форма этих колебаний для $n = 5$ и $s = 1$ показана на рис. 7.8,а. Это акустические колебания, связанные с изменением плотности среды. На языке квантовой механики им соответствуют так называемые **акустические фононы**. В отличие от этого, на частотах ω_{s2} все коэффициенты $\kappa_{s2} < 0$. Легкие и тяжелые атомы колеблются в противофазе (рис. 7.8,б). Это внутримолекулярные колебания, не связанные с изменением плотности среды. Таким колебаниям соответствуют **оптические фононы**.

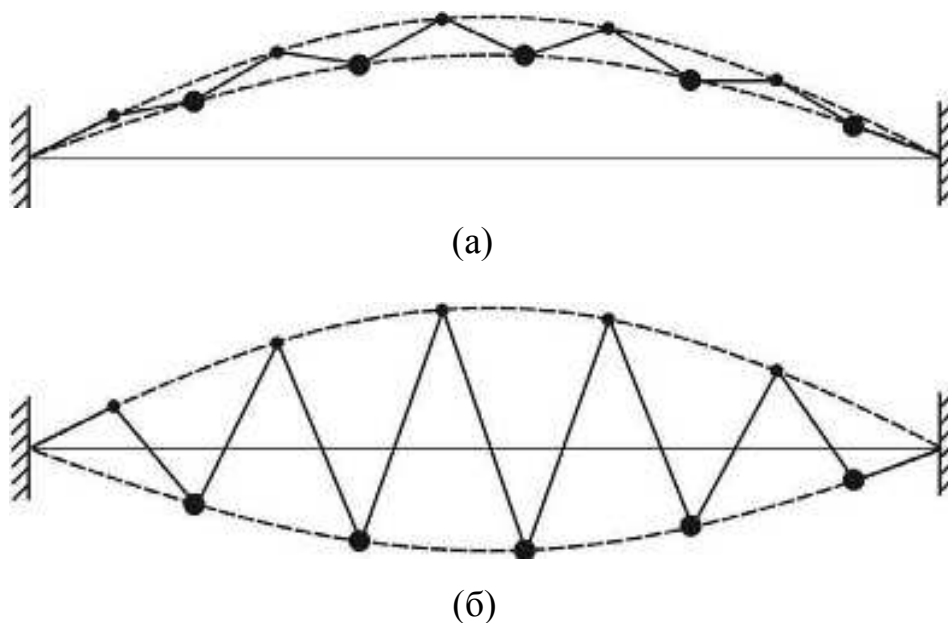


Рис.7.8

На рис. 7.9 представлены зависимости собственных частот ω_{s1} (сплошная кривая) и ω_{s2} (штриховая кривая) от номера колебательной моды s . Расчет выполнен по формуле (7.38) для $\mu = 0.5$ (т.е. $M = 2m$) и $n = 1000$. По оси ординат отложена нормированная частота ω_s/ω_0 , где $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$. По существу эти кривые представляют собой

дисперсионные характеристики рассмотренного одномерного кристалла, т.к. номер s определяет, согласно (7.37), параметр β_s , а величина $i\beta_s$ в формулах (7.32) аналогична постоянной распространения в волновых процессах. Линейная зависимость ω_{s1} от s в области низких частот говорит о том, что здесь скорость звука не зависит от частоты. Дисперсия начинает проявляться лишь в области больших частот, когда среду уже нельзя рассматривать как сплошную — надо учитывать ее атомарное строение. При $s = n$ из формулы (7.38) получаем, что $\omega_{s1} \approx v_1$ и $\omega_{s2} \approx v_2$.

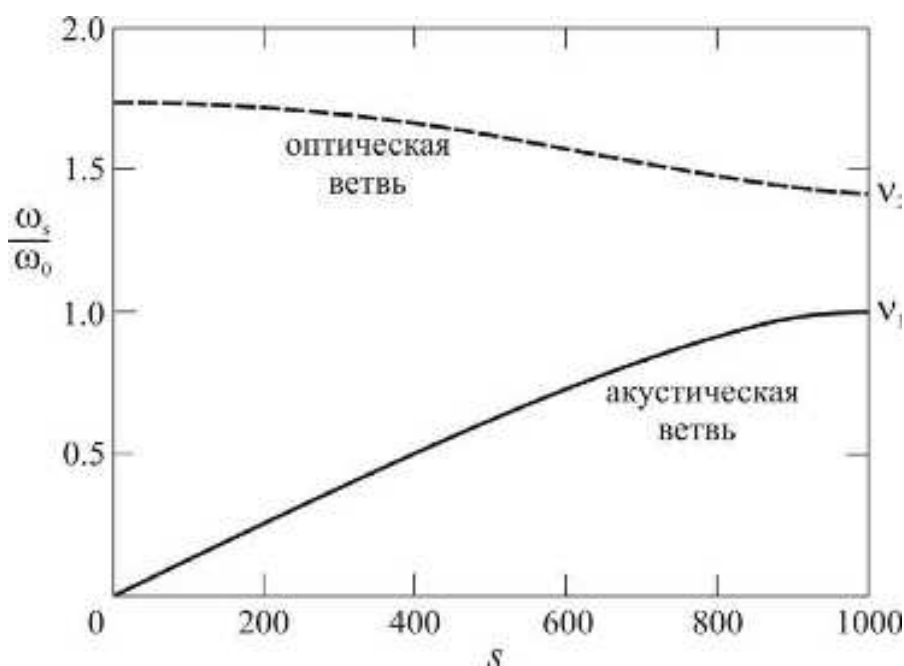


Рис. 7.9

Задача 7.4

Для системы, изображенной на рис. 7.4, решить задачу о вынужденных колебаниях под действием силы \mathbf{F}_0 , имеющей компоненты: $\{1, 0, -1, 0, 1\}$. Получить амплитудно-частотную характеристику и объяснить полученный результат.

Решение

В матричной форме уравнение колебаний имеет вид:

$$\hat{\mathbf{m}}\ddot{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{k}}\mathbf{x} = \mathbf{F}_0 \cdot \exp(jpt), \quad (7.40)$$

где p — частота вынуждающей силы.

Решение уравнения (7.40) будем искать в виде суперпозиции нормальных колебаний:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \cdot \exp(jpt) = \sum_{s=1}^n a_s \mathbf{k}_s \cdot \exp(jpt), \quad (7.41)$$

где коэффициенты a_s подлежат определению. Аналогично разложим вынуждающую силу:

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{s=1}^n f_s \hat{\mathbf{k}}_s, \quad (7.42)$$

где

$$f_s = \frac{\mathbf{k}_s \mathbf{F}_0}{\mathbf{k}_s \hat{\mathbf{k}}_s}. \quad (7.43)$$

Подставим (7.41) и (7.42) в уравнение (7.40) и учтем соотношение (7.12). В результате получим:

$$\sum_{s=1}^n \left(1 - \frac{p^2}{\omega_s^2}\right) a_s \hat{\mathbf{k}}_s = \sum_{s=1}^n f_s \hat{\mathbf{k}}_s. \quad (7.44)$$

Умножим равенство (7.44) скалярно на \mathbf{k}_s и воспользуемся теоремой об ортогональности форм нормальных колебаний. В итоге получим:

$$a_s = \frac{\omega_s^2}{\omega_s^2 - p^2} \cdot f_s, \quad \mathbf{A} = \sum_{s=1}^n \frac{\omega_s^2}{\omega_s^2 - p^2} f_s \mathbf{k}_s. \quad (7.45)$$

Формулы (7.45) дают общее решение задачи о вынужденных колебаниях линейной консервативной системы с n степенями свободы. Из них следует, что можно ожидать резонансного возрастания амплитуды колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственным частотам системы.

Для построения частотной характеристики необходимо получить явные выражения для коэффициентов f_s . Подставив заданный условием задачи вектор \mathbf{F}_0 в формулу (7.43), получим, что все коэффициенты f_s равны нулю, кроме $f_3 = 1/2k$. Это неудивительно, по-

сколько вектор \mathbf{F}_0 соответствует форме \mathbf{k}_3 . Окончательно получим следующее выражение для вектора амплитуд:

$$\mathbf{A} = \frac{\omega_3^2}{2k(\omega_3^2 - p^2)} \mathbf{k}_3. \quad (3.46)$$

Эта формула определяет амплитудно-частотную характеристику системы. Из нее следует, что на любой частоте p форма колебаний имеет вид, показанный на рис. 7.5,в. Второй и четвертый шарик остаются в состоянии покоя, первый и пятый колеблются синфазно с одинаковой амплитудой, а третий шарик колеблется с той же амплитудой, но в противофазе. При $p \rightarrow \omega_3$ амплитуды колебаний стремятся к бесконечности. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что хотя система имеет пять разных собственных частот, но резонанс возникает только на одной частоте ω_3 . Обобщая полученный результат, можно утверждать, что резонанс на s -й частоте будет отсутствовать, когда коэффициент f_s равен нулю, что означает **ортогональность вектора внешней силы s -му собственному колебанию**.

Задачи для самостоятельного решения

Задачи 7.5, а-г. Для одной из колебательных систем, изображенных на рис. 7.10,а-г:

а) получить систему дифференциальных уравнений;

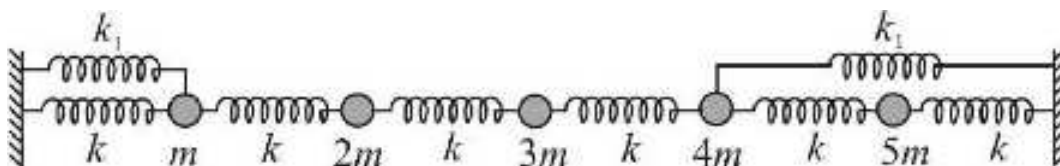


Рис. 7.10,а

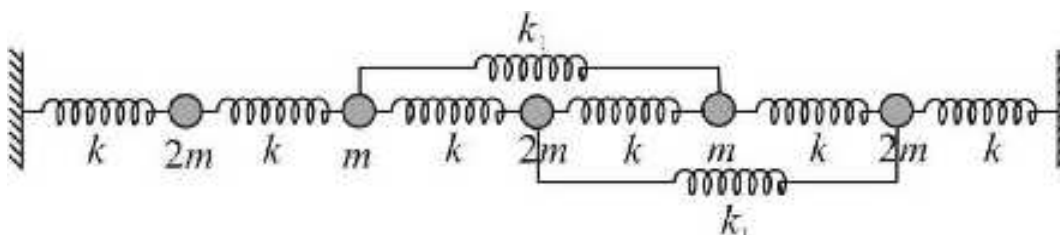


Рис. 7.10,б

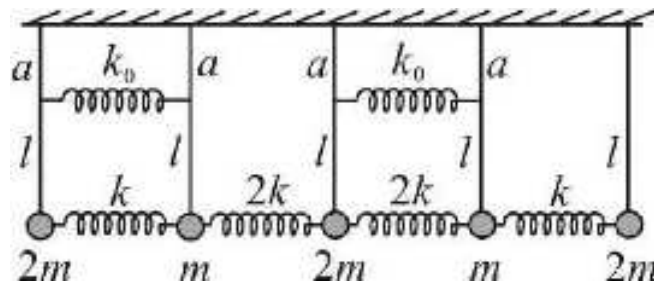


Рис. 7.10,в

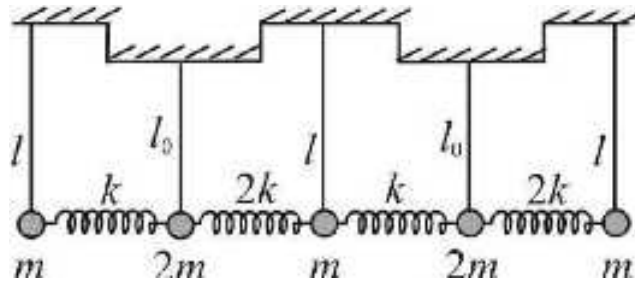


Рис. 7.10,г

- б) записать матрицы упругости $\hat{\mathbf{k}}$ и массы $\hat{\mathbf{m}}$;
 в) найти парциальные частоты.

Задачи 7.6, а-е. Для одной из колебательных систем, изображенных на рис. 7.11, а-е:

- а) записать систему дифференциальных уравнений;
 б) найти матрицы упругости $\hat{\mathbf{k}}$ и массы $\hat{\mathbf{m}}$;
 в) рассчитать парциальные и собственные частоты и формы нормальных колебаний;
 г) показать на графике взаимное расположение парциальных и собственных частот;
 д) изобразить графически формы нормальных колебаний;
 е) на двух примерах проверить ортогональность форм нормальных колебаний.

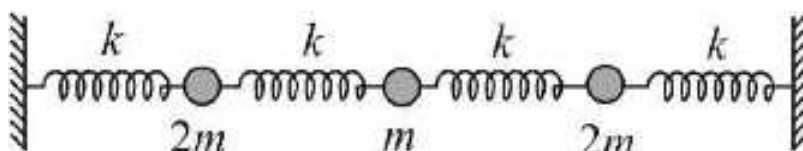


Рис. 7.11,а

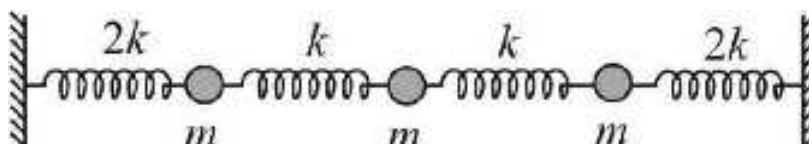


Рис. 7.11,б

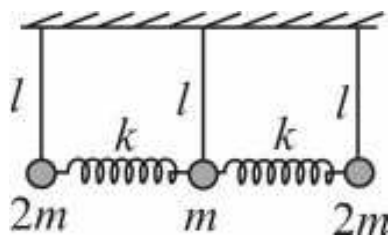


Рис. 7.11,в

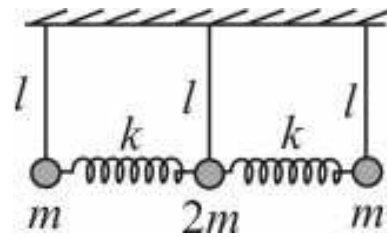


Рис. 7.11,г

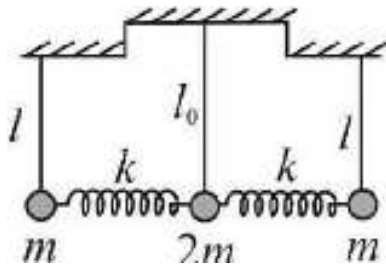


Рис. 7.11,д

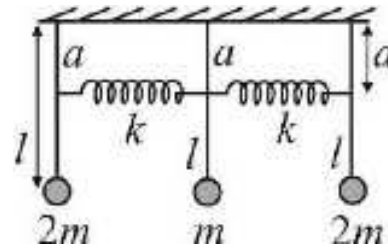


Рис. 7.11,е

Задачи 7.7, а-е. Для одной из колебательных систем, изображенных на рис. 7.11,а-е, найти компоненты вектора внешней силы \mathbf{F}_0 , при которых в системе будет возбуждаться только:

- а) низкочастотное колебание,
- б) высокочастотной колебание.

Задачи 7.8, а-е. Для одной из колебательных систем, изображенных на рис. 7.11,а-е, получить выражения для соотношения амплитуд нормальных колебаний a_s в случае, когда компоненты вектора внешней силы \mathbf{F}_0 равны $\{1, 1, 1\}$. Записать выражение для вектора амплитуд \mathbf{A} .

Задача 7.9. Найти форму третьего нормального колебания системы с тремя степенями свободы, для которой:

$$\hat{\mathbf{m}} = m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\kappa}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\kappa}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.10. Для одномерного кристалла, рассмотренного в задаче 7.3, получить дисперсионные соотношения $\omega_{s1}(s)$ и $\omega_{s2}(s)$ при малых значениях s .

Задача 7.11. Найти собственные частоты и формы нормальных продольных колебаний одномерного кристалла, представляющего собой цепочку из n одинаковых атомов массой m с упругой связью, характеризуемой коэффициентом жесткости k . Построить дисперсионную зависимость $\omega_s(s)$. Оценить максимальную частоту акустических колебаний.

8. КОЛЕБАНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

8.1. Колебания в линейных системах конечной длины

В системах с сосредоточенными элементами имеет место четкое разделение этих элементов: массы и упругости в механических системах или емкости и индуктивности — в электрических системах. В отличие от этого, в **распределенных системах** каждый сколь угодно малый элемент обладает массой и упругостью или емкостью и индуктивностью. Время распространения возмущения от одной части системы до другой сравнимо с периодом колебаний, поэтому колебания в системе происходят в форме волнового процесса. Если система имеет конечные размеры, то волны отражаются от ее границ и интерферируют между собой. Результат интерференции зависит от частоты колебаний, размеров системы и условий на границах. В случае конструктивной интерференции колебания приобретают характер стоячих волн. Это собственные колебания системы, называемые также **модами колебаний**, которые образуют дискретный набор собственных частот.

Колебательные движения в электрических распределенных системах описываются в общем случае уравнениями Максвелла, т.е. уравнениями в частных производных. Однако для таких систем, как двухпроводная, коаксиальная или полосковая линия, с учетом особенностей структуры в них электромагнитного поля, из уравнений Максвелла можно получить более простые соотношения, называемые **телеграфными уравнениями**. Если $I(x, t)$ и $U(x, t)$ — соответственно ток и напряжение в сечении длинной линии с координатой x , то телеграфные уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -RI - L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -GU - C \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (8.1)$$

где R , L , G и C — погонные (т.е. на единицу длины линии) сопротивление, индуктивность, проводимость и емкость линии соответственно. Для линии без потерь справедливы соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (8.3)$$

Объединяя (8.2) и (8.3), получаем **волновое уравнение**:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (8.4)$$

где y — либо ток, либо напряжение, а $V = 1/\sqrt{LC}$ — фазовая скорость электромагнитной волны.

Для случая гармонических волн

$$U = A_1 \exp[j(\omega t - kx)] + A_2 \exp[j(\omega t + kx)], \quad (8.5)$$

$$I = B_1 \exp[j(\omega t - kx)] + B_2 \exp[j(\omega t + kx)], \quad (8.6)$$

где $k = \omega/V$ — волновое число, подстановка (8.5) и (8.6) в уравнения (8.2), (8.3) дает соотношения:

$$A_1 = \rho B_1, \quad A_2 = -\rho B_2. \quad (8.7)$$

Здесь $\rho = \sqrt{L/C}$ — **волновое сопротивление** линии. По физическому смыслу волновое сопротивление представляет собой отношение амплитуд напряжения и тока в волнах одного направления распространения.

Задачи на нахождение собственных колебаний в отрезках длинных линий решаются методом разделения переменных. Решение уравнения (8.4) ищется в виде

$$y(x, t) = \kappa(x)\chi(t), \quad (8.8)$$

где $\kappa(x)$ — форма нормального колебания. Подстановка (8.8) в (8.4) приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2\chi}{dt^2} + \omega^2\chi = 0 \\ \frac{d^2\kappa}{dx^2} + k^2\kappa = 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

решением которых являются гармонические функции. Второе уравнение (уравнение Гельмгольца) представляет собой пространственный аналог первого уравнения (уравнения гармонических колебаний).

Общее решение задачи имеет вид:

$$y(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \kappa_s(x) (A_s \cos \omega_s t + B_s \sin \omega_s t) = \sum_{s=1}^{\infty} \kappa_s(x) C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s). \quad (8.10)$$

Константы A_s , B_s или C_s , φ_s находятся из начальных условий:

$$y(x,0) \equiv f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \kappa_s(x) A_s = \sum_{s=1}^{\infty} \kappa_s(x) C_s \cos \varphi_s, \quad (8.11)$$

$$\dot{y}(x,0) \equiv F(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \omega_s \kappa_s(x) B_s = \sum_{s=1}^{\infty} \omega_s \kappa_s(x) C_s \sin \varphi_s. \quad (8.12)$$

Далее надо воспользоваться **теоремой об ортогональности форм нормальных колебаний**:

$$\int_0^l \kappa_r(x) \kappa_s(x) dx = 0, \quad \text{если } r \neq s. \quad (8.13)$$

Здесь через l обозначена длина отрезка длинной линии. Умножив уравнения (8.11), (8.12) на κ_r и проинтегрировав их по длине l , получим:

$$A_s = \int_0^l f(x) \kappa_s(x) dx \Big/ \int_0^l \kappa_s^2(x) dx, \quad B_s = \int_0^l F(x) \kappa_s(x) dx \Big/ \omega_s \int_0^l \kappa_s^2(x) dx. \quad (8.14)$$

Формы нормальных колебаний (моды колебаний) находятся из уравнения Гельмгольца с учетом граничных условий. Именно гра-

ничные условия определяют дискретный вид спектра собственных частот ω_s и постоянных распространения $k_s = \omega_s/V$, выделяя из непрерывного спектра частот ω , удовлетворяющих первому уравнению в системе (8.9), те частоты, при которых происходит конструктивная интерференция волн. В общем случае граничные условия имеют вид:

$$\frac{dk_s}{dx}(0) = \alpha k_s(0), \quad \frac{dk_s}{dx}(l) = -\beta k_s(l). \quad (8.15)$$

Их конкретный вид определяется законом Ома, как будет показано ниже в примерах задач.

Для механических систем типа длинного упругого стержня или упругой струны волновое уравнение имеет стандартный вид (8.4), в котором $y(x)$ характеризует смещение в точке x . Граничные условия

$$y(0, t) = 0, \quad y(l, t) = 0 \quad (8.16)$$

соответствуют закрепленным концам стержня или струны, а граничные условия

$$\frac{dy}{dx}(0, t) = 0, \quad \frac{dy}{dx}(l, t) = 0 \quad (8.17)$$

— свободным концам (деформация на концах равна нулю). Для записи граничных условий в более сложных случаях (например, концов, нагруженных сосредоточенной массой или пружиной) необходимо воспользоваться вторым законом Ньютона.

Задача 8.1

Записать граничные условия для отрезка длинной линии, показанной на рис. 8.1, у которой левый конец разомкнут, а правый нагружен на индуктивность L_0 (или емкость C_0).

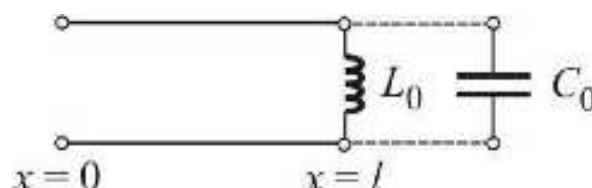


Рис. 8.1

Решение

Если левый конец разомкнут, то ток в этом сечении линии в любой момент времени равен нулю: $I(0, t) = 0$. Подставив это соотношение в уравнение (8.2), получаем $\partial U / \partial x(0, t) = 0$. Для случая, когда правый конец линии нагружен на индуктивность L_0 , можно записать:

$$U_{L_0} = U(l, t) = L_0 \frac{\partial I}{\partial t}(l, t).$$

Используя уравнение (8.2), получаем:

$$U(l, t) = -\frac{L_0}{L} \frac{\partial U}{\partial x}(l, t).$$

Для дальнейшего решения задачи на собственные колебания длинных линий необходимо граничные условия записать через одну переменную. Поэтому окончательно получаем граничные условия в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(l, t) = -\frac{L}{L_0} U(l, t). \quad (8.18)$$

Для варианта емкостной нагрузки на правом конце по той же методике записываем сначала выражение для заряда на конденсаторе:

$$q_{C_0} = q(l, t) = C_0 U(l, t).$$

Продифференцировав это выражение по времени и воспользовавшись уравнением (8.3), получим окончательно граничные условия в виде:

$$I(0, t) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial x}(l, t) = -\frac{C}{C_0} I(l, t). \quad (8.19)$$

Если катушка индуктивности или конденсатор подключены на входе длинной линии, то в соответствующих граничных условиях (8.18) и (8.19) надо изменить знак в правой части. Этот результат можно получить, если обратить ось координат, т.е. сделать замену переменной $\tilde{x} = -x$ и воспользоваться ранее полученными соотношениями (8.18) и (8.19).

Задача 8.2



Рис. 8.2

Для длинной линии, показанной на рис. 8.2, найти собственные частоты и формы нормальных колебаний. Нарисовать формы колебаний для токов и напряжений для первых двух мод.

Решение

Запишем сначала граничные условия, выбрав в качестве независимой переменной напряжение в линии $U(x, t)$:

$$U(0, t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(l, t) = -\frac{L}{L_0} U(l, t). \quad (8.20)$$

Для форм нормальных колебаний κ_s , очевидно, справедливы аналогичные соотношения:

$$\kappa_s(0) = 0, \quad \frac{d\kappa_s}{dx}(l) = -\frac{L}{L_0} \kappa_s(l). \quad (8.21)$$

Решение уравнения Гельмгольца (8.9) ищем в виде:

$$\kappa(x) = M \cos kx + N \sin kx. \quad (8.22)$$

Первое граничное условие дает $M = 0$, а второе —

$$\operatorname{tg}(kl) = -\frac{L_0}{Ll} kl. \quad (8.23)$$

Это трансцендентное уравнение, и его корни качественно можно найти графическим способом. На рис. 8.3 кривыми 1 показана левая часть уравнения, а штриховой прямой 2 представлена правая часть. Пересечения кривых с прямой определяют корни уравнения $k_s l$ и, таким образом, собственные частоты $\omega_s = k_s V$. На рисунке указаны корни уравнения (8.23) для двух первых мод. Можно обратить внимание на то, что ряд собственных частот бесконечен (что естественно, поскольку рассматриваемая система имеет бесконечное число степеней свободы), но частоты располагаются не эквидистантно-

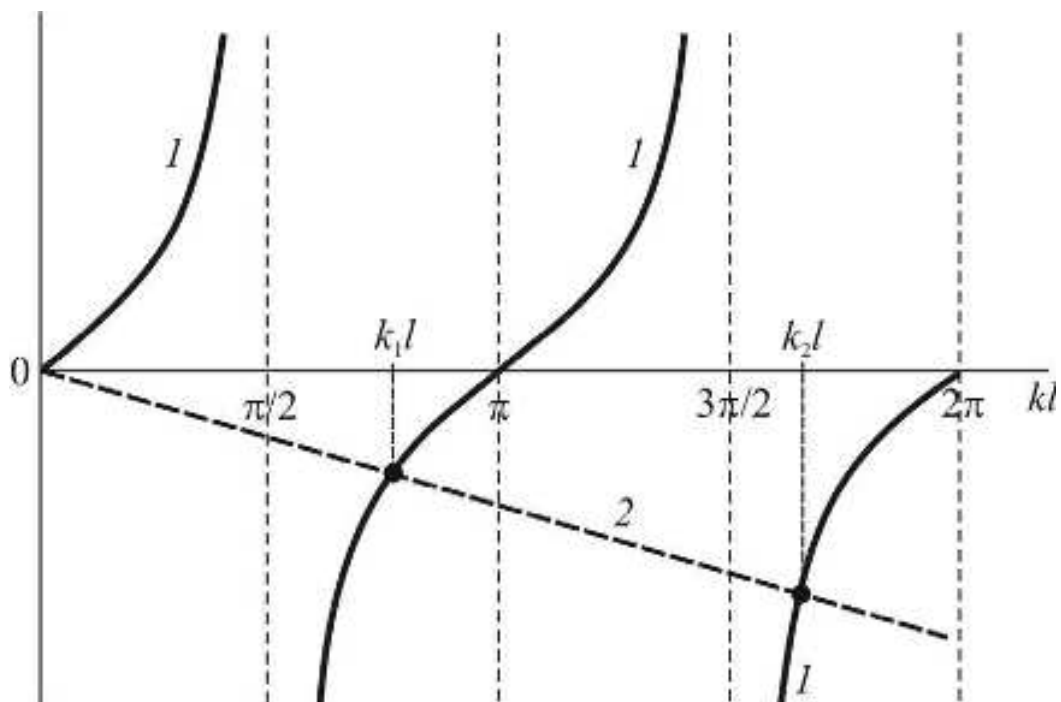


Рис. 8.3

но. При простых граничных условиях (концы линии закорочены или разомкнуты) получается эквидистантный ряд частот.

В соответствии с формулой (8.22) формы нормальных колебаний имеют вид отрезков синусоид: $\kappa_s(x) = N \sin k_s x$. Формы первых двух мод для распределения напряжения показаны на рис. 8.4,а,б, а на рис. 8.4,в,г представлены аналогичные формы для распределения тока.

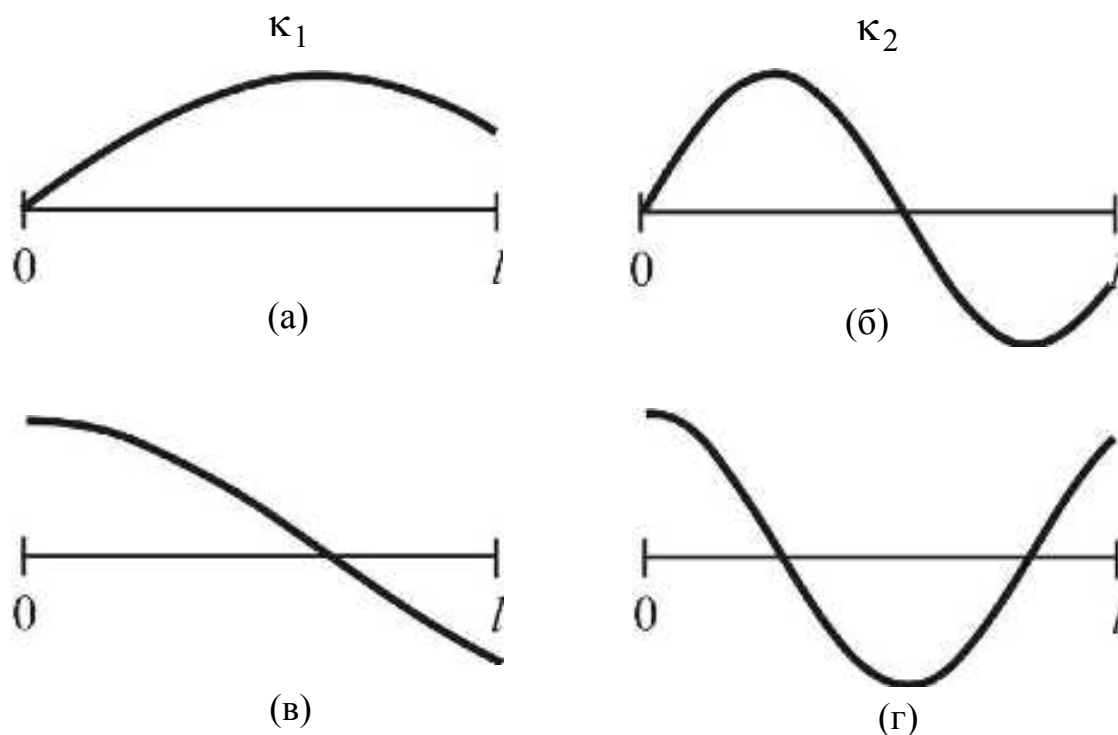


Рис. 8.4

Задача 8.3

Для длинной линии, показанной на рис. 8.5, которая имеет сосредоточенную L_0C_0 -неоднородность в сечении $x = b$, найти собственные частоты и формы нормальных колебаний.

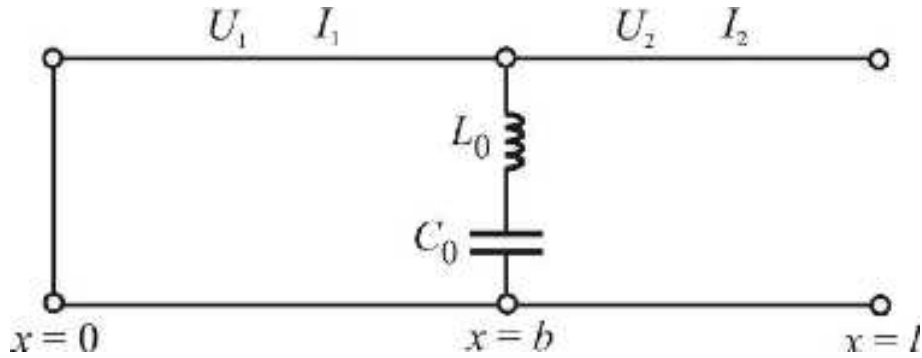


Рис. 8.5

Решение

Особенность колебаний в длинных линиях с неоднородностями состоит в том, что в точке нахождения неоднородности имеет место скачок тока или напряжения. Поэтому при решении такой задачи надо вводить токи и напряжения отдельно для каждого однородного участка линии, а в точке неоднородности записывать **условия сшивки** решений.

Следуя сказанному, введем ток I_1 и напряжение U_1 для левого участка линии ($0 \leq x \leq b$) и аналогично I_2 и U_2 — для правого ($b \leq x \leq l$). Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$U_1(0, t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (8.24)$$

Для сечения $x = b$ можно записать уравнения Кирхгофа:

$$U_1(b, t) = U_2(b, t), \quad (8.25)$$

$$I_1(b, t) = I_2(b, t) + I(t), \quad \text{или} \quad -\frac{1}{L} \frac{\partial U_1}{\partial x}(b, t) = -\frac{1}{L} \frac{\partial U_2}{\partial x}(b, t) + \frac{dI}{dt}, \quad (8.26)$$

$$U_1(b, t) = L_0 \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C_0} \int I dt, \quad \text{или} \quad \frac{\partial U_1}{\partial t}(b, t) = L_0 \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C_0} I, \quad (8.27)$$

где $I(t)$ — ток через цепочку L_0C_0 . Разделим переменные x и t , положив

$$U_1(x, t) = \kappa_1(x) \exp(j\omega t), \quad U_2(x, t) = \kappa_2(x) \exp(j\omega t), \quad I(t) = I_0 \exp(j\omega t). \quad (8.28)$$

Подставив (8.28) в уравнения (8.25)—(8.27), получим систему из трех алгебраических уравнений, из которой найдем два условия сшивания решений в сечении $x = b$:

$$\kappa_1(b) = \kappa_2(b), \quad \alpha \left[\frac{d\kappa_2}{dx}(b) - \frac{d\kappa_1}{dx}(b) \right] = -\kappa_1(b), \quad (8.29)$$

где

$$\alpha = \frac{L_0}{L} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C_0}. \quad (8.30)$$

Подстановка гармонического решения вида (8.22) в граничные условия (8.24) дает следующие выражения для функций $\kappa_1(x)$ и $\kappa_2(x)$:

$$\kappa_1(x) = A \sin kx, \quad \kappa_2(x) = B \frac{\cos[k(l-x)]}{\cos kl}. \quad (8.31)$$

Далее, для упрощения выкладок, рассмотрим случай $b = l/2$. Из первого условия сшивания (8.29) получаем, что

$$\frac{A}{B} = \frac{\operatorname{ctg}(kl/2)}{\cos kl}. \quad (8.32)$$

Второе условие сшивания дает уравнение для определения собственных частот:

$$\operatorname{tg}(kl) = 2\alpha k = \frac{2L_0}{Ll} \left(\frac{k_0^2 l^2}{k^2 l^2} - 1 \right) kl, \quad (8.33)$$

где $k_0 = \omega_0/V$. Рис. 8.6 иллюстрирует графический метод решения уравнения (8.33). Как и на рис. 8.3, здесь кривыми 1 представлена левая часть уравнения, а штриховой кривой 2 — правая часть. Численный расчет выполнен для варианта $Ll = L_0$, $k_0 l = \pi$. В этом случае $k_1 l = 0.47\pi$, $k_2 l = \pi$, $k_3 l = 1.56\pi$ и т.д. Таким образом, формы нормальных колебаний имеют вид:

$$\kappa_{1s}(x) = \frac{B \operatorname{ctg}(k_s l / 2)}{\cos k_s l} \sin k_s x, \quad \kappa_{2s}(x) = \frac{B}{\cos k_s l} \cos[k_s(l-x)], \quad (8.34)$$

где коэффициент B находится из начальных условий.

На рис. 8.7 сплошными кривыми изображены формы нормальных колебаний для первой (а,в) и второй (б,г) моды. Расчет выполнен по формулам (8.34). Графики (а,б) показывают формы распределения напряжения, а графики (в,г) — соответствующие формы распределе-

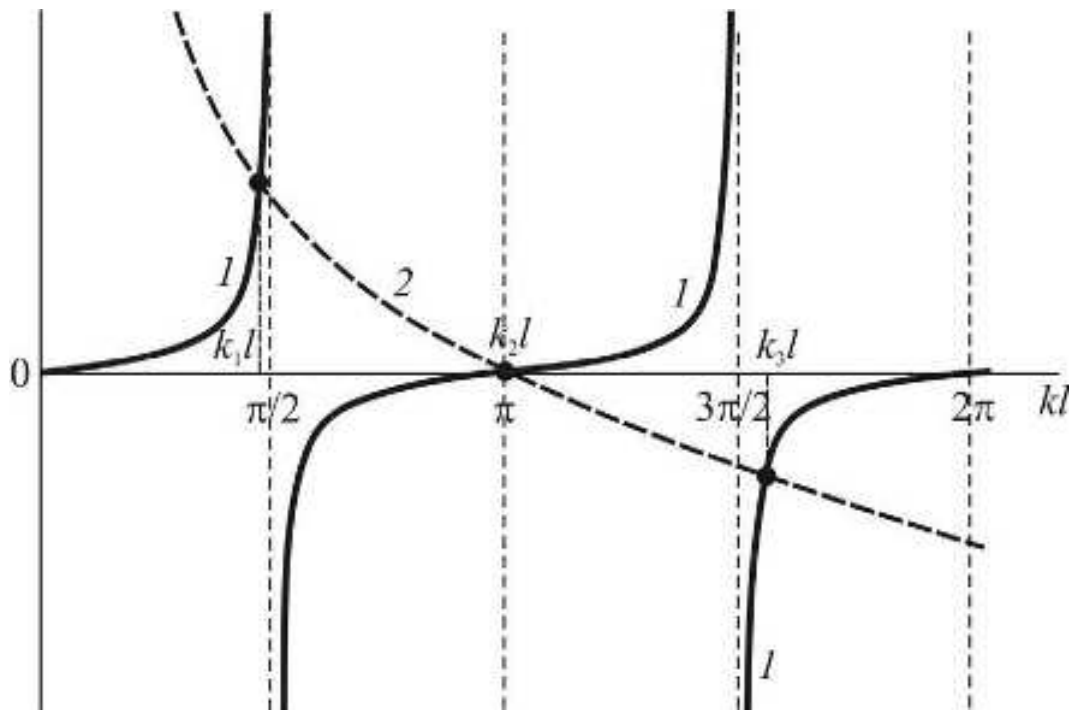


Рис. 8.6

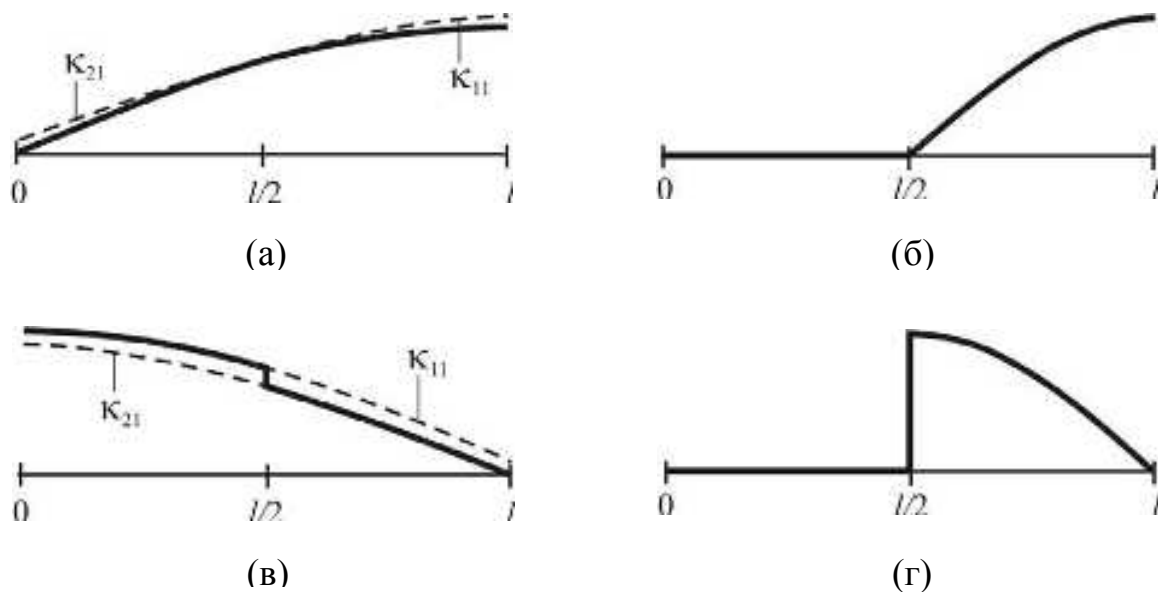


Рис. 8.7

ния тока. Каждая кривая представляет собой совокупность двух отрезков синусоид, сшитых в точке $x = l/2$. В соответствии с условиями сшивания (8.29), кривые для напряжений непрерывны, но имеют излом в точке $x = l/2$, тогда как кривые для токов имеют здесь скачок на величину тока, ответвляемого в цепочку L_0C_0 . Расчетные параметры выбраны таким образом, что собственная частота длинной линии ω_2 оказалась равной собственной частоте ω_0 последовательного контура L_0C_0 . Импеданс контура на этой частоте равен нулю, т.е. контур шунтирует линию в точке $x = l/2$. Вследствие этого напряжение и ток в левой половине линии равны нулю (нулевая мода отрезка однородной линии, закороченной на обоих концах), а в правой половине линии распределение напряжения и тока такие, как у отрезка линии, закороченного на левом конце и разомкнутого на правом конце.

Задача 8.4

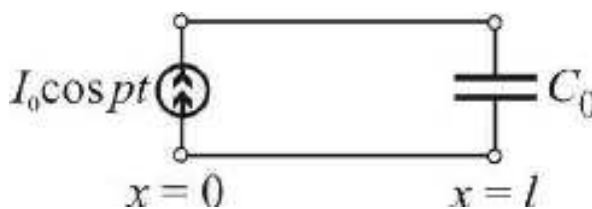


Рис. 8.8

Отрезок однородной длинной линии возбуждается генератором тока, включенным на ее левом конце (рис. 8.8). Нагрузкой линии является конденсатор, подключенный к ее правому концу. Исследовать вынужденные колебания в такой системе.

Решение

Задачу удобно решать, задав соответствующие граничные условия:

$$I(0, t) = I_0 \exp(jpt), \quad \frac{\partial I}{\partial x}(l, t) = -\frac{C}{C_0} I(l, t), \quad (8.35)$$

где p — частота генератора. Решение ищем в виде гармонических колебаний с частотой вынуждающей силы:

$$I(x, t) = \kappa(x) \exp(jpt). \quad (8.36)$$

Здесь функция $\kappa(x)$ описывает распределение амплитуды тока вдоль линии. Подставив это выражение в волновое уравнение (8.4), получим:

$$\frac{\partial^2 \kappa}{\partial x^2} + k^2 \kappa = 0, \quad (8.37)$$

где $k = p/V$. Полагая

$$\kappa(x) = M \cos kx + N \sin kx, \quad (8.38)$$

из граничных условий (8.35) получаем соотношения:

$$M = I_0, \quad N = I_0 \frac{k \sin kl - (C/C_0) \cos kl}{k \cos kl + (C/C_0) \sin kl}. \quad (8.39)$$

Таким образом, решение задачи имеет вид:

$$\kappa(x) = I_0 \frac{k \cos[k(l-x)] + (C/C_0) \sin[k(l-x)]}{k \cos kl + (C/C_0) \sin kl}. \quad (8.40)$$

Отметим, что длинная линия, разомкнутая на левом конце и нагруженная на конденсатор C_0 на правом конце, имеет собственные частоты, определяемые уравнением

$$k_s \cos k_s l + \frac{C}{C_0} \sin k_s l = 0. \quad (8.41)$$

Поэтому при непрерывном изменении частоты p в системе будут наблюдаться резонансы на частотах $\omega_s = k_s V$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.5. Для длинной линии с потерями, описываемой телеграфными уравнениями в форме (8.1), получить дисперсионные характеристики: зависимость скорости распространения и коэффициента затухания от частоты.

Задачи 8.6, а-е. Для одной из распределенных систем, показанных на рис. 8.9, а-е:

- а) записать граничные условия;
- б) найти собственные частоты и формы нормальных колебаний;
- в) нарисовать формы двух первых нормальных колебаний для токов и напряжений;
- г) показать, как они изменятся при замене C_0 на $2C_0$ (или L_0 на $2L_0$).

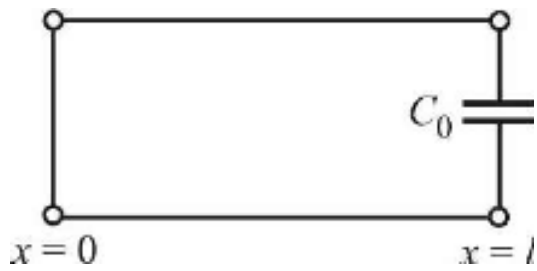


Рис. 8.9,а

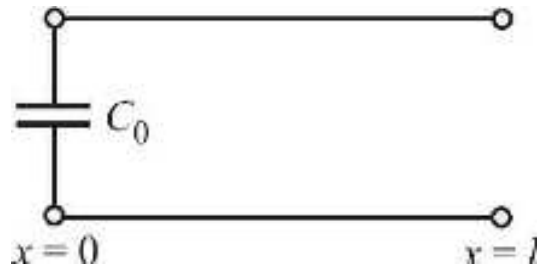


Рис. 8.9,б

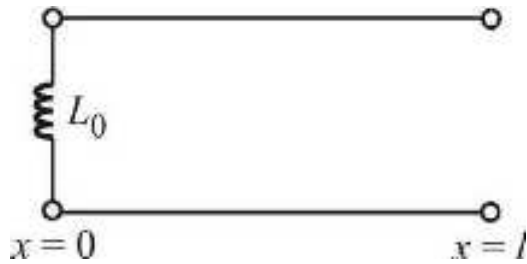


Рис. 8.9,в

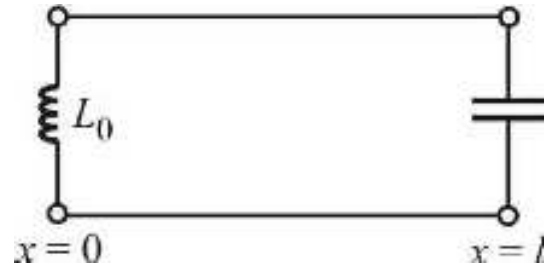


Рис. 8.9,г

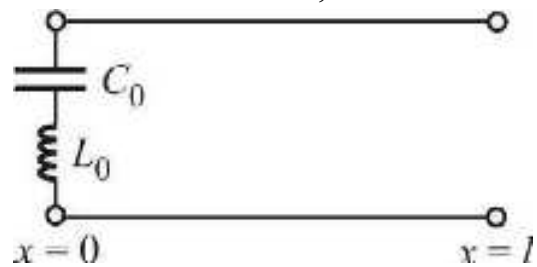


Рис. 8.9,д

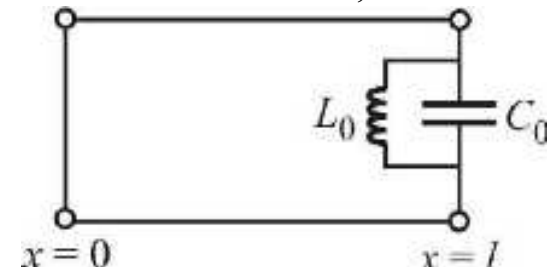


Рис. 8.9,е

Задачи 8.7, а-г. Упругий однородный стержень, изображенный на рис. 8.10,а-г, может совершать продольные колебания в горизонтальном направлении. Для одного из представленных на рисунке вариантов:

- записать граничные условия;
- найти собственные частоты и формы нормальных колебаний;
- нарисовать формы двух первых нормальных колебаний для смещений и деформаций.



Рис. 8.10,а



Рис. 8.10,б



Рис. 8.10,в



Рис. 8.10,г

Задачи 8.8, а-е. Для одной из распределенных систем на рис. 8.11,а-е, имеющих сосредоточенную неоднородность в сечении $x = l/2$, найти собственные частоты и формы нормальных колебаний. Нарисовать формы двух первых нормальных колебаний для токов и напряжений.

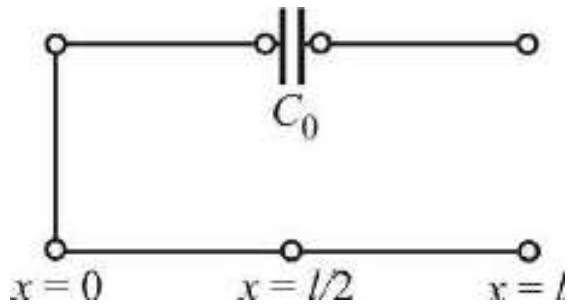


Рис. 8.11,а

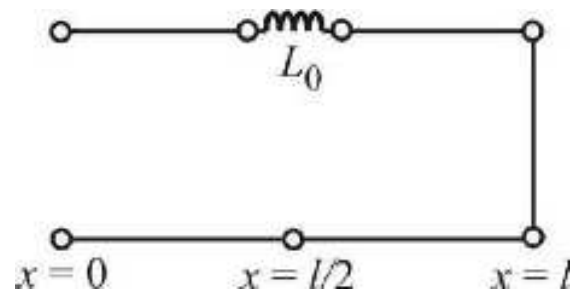


Рис. 8.11,б

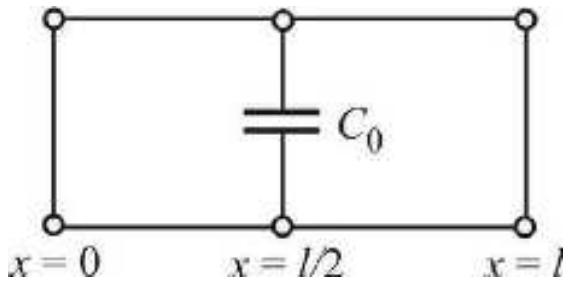


Рис. 8.11,в

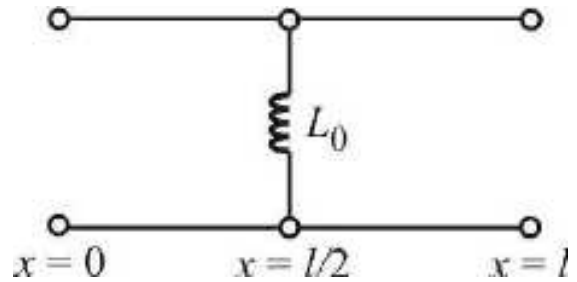


Рис. 8.11,г

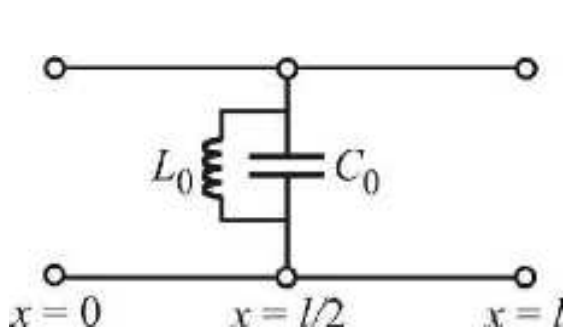


Рис. 8.11,д

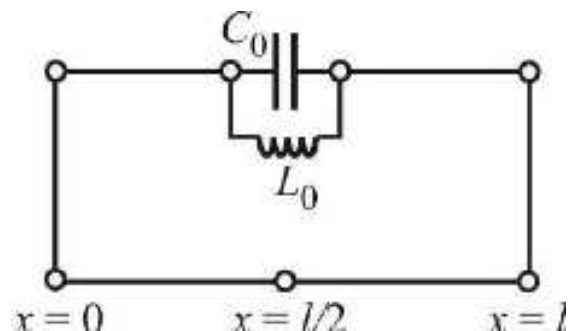


Рис. 8.11,е

Задачи 8.9, а,б. Закрепленная на концах струна имеет сосредоточенную неоднородность в сечении $x = l/2$ (рис. 8.12). Для одного из показанных на рисунках вариантов найти собственные частоты и формы нормальных колебаний. Нарисовать формы двух первых нормальных колебаний для смещений и деформаций.

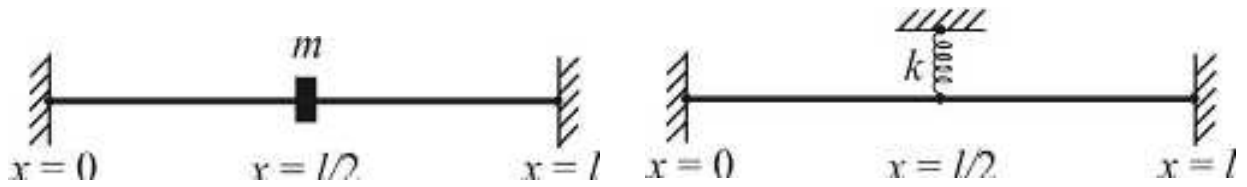


Рис. 8.12,а

Рис. 8.12,б

Задачи 8.10, а-г. Для одной из распределенных систем на рис. 8.13,а-г, получить выражения для распределения амплитуды тока и напряжения вдоль длинной линии. Проанализировать зависимость амплитуды колебаний от частоты генератора p .

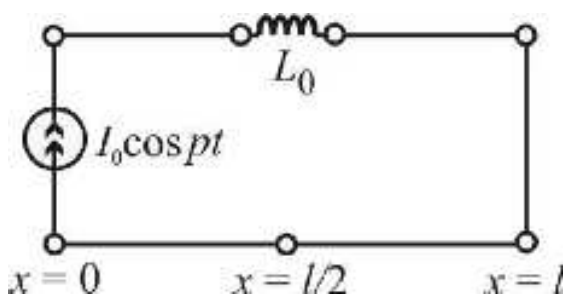


Рис. 8.13,в

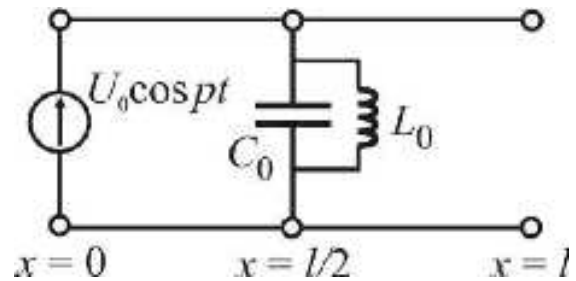


Рис. 8.13,г

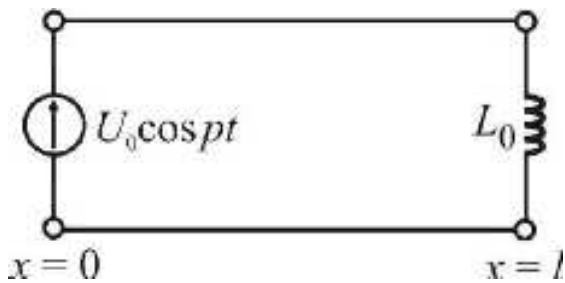


Рис. 8.13,а

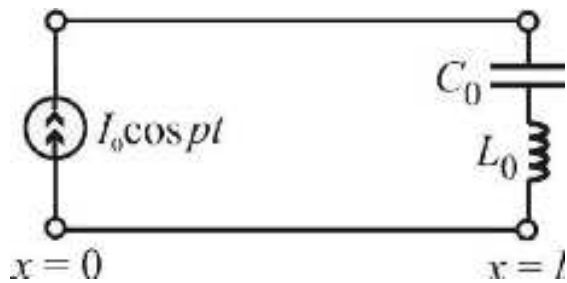


Рис. 8.13,б

Задача 8.11. На рис. 8.14 показана схема оптического направленного ответвителя, используемого в оптоэлектронике для разветвления оптических каналов передачи информации. Такой ответвитель представляет собой два оптических канальных волновода a и b , изготовленных на общей диэлектрической подложке, которые на определенном участке длиной l проходят близко друг от друга. На этом участке поле одной волноводной моды проникает в другой волновод, как показано кривыми 1 и 2 . Благодаря этому возникает связь между модами, приводящая к перекачке световой мощности из одного волно-

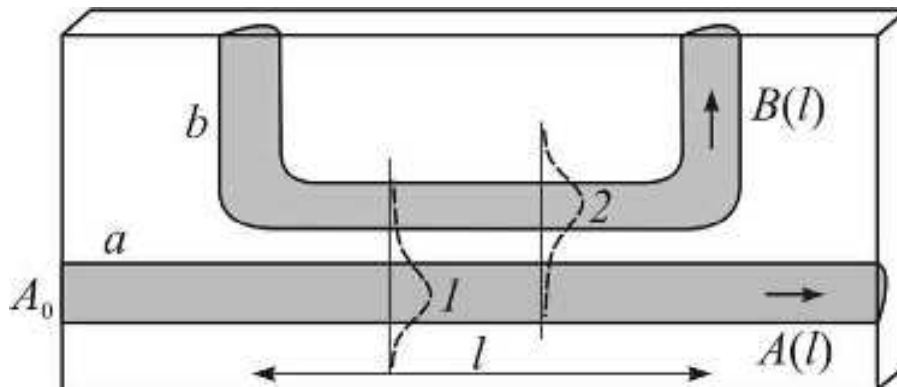


Рис. 8.14

вода в другой. Коэффициент связи α пропорционален интегралу перекрытия волноводных мод. Ясно, что он тем больше, чем меньше расстояние между волноводами. Эффективность взаимодействия мод определяется также коэффициентом расстройки $\delta = (k_a - k_b)/2$, где k_a и k_b — постоянные распространения мод a и b . Взаимодействие мод описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dx} = \alpha B \exp(-2j\delta x) \\ \frac{dB}{dx} = -\alpha A \exp(2j\delta x) \end{cases}$$

Полагая, что на входе присутствует только мода a с амплитудой A_0 , получить выражения для амплитуд мод на выходе $A(l)$ и $B(l)$, а также для коэффициента ответвления мощности $\eta = |B(l)|^2 / A_0^2$. Построить график зависимости $\eta(\alpha l)$ для двух вариантов: $\delta = 0$ (фазовый синхронизм волноводных мод) и $\delta l = \pi/4$.

8.2. Распределенные автоколебательные системы

В данном разделе представлены задачи, посвященные колебательным процессам в таких распределенных автоколебательных системах, как лазеры, более конкретно, — газовых лазерах типа гелий-неонового лазера. В большинстве случаев лазер состоит из двух обращенных друг к другу отражающих поверхностей (зеркал), представляющих собой интерферометр Фабри-Перо, между которыми располагается активное вещество. Зеркала обеспечивают положи-

тельную обратную связь, заставляя часть оптического излучения повторно проходить через активное вещество. Образованный зеркалами оптический резонатор в значительной степени определяет основные свойства генерируемого излучения: монохроматичность, направленность и мощность. Активная среда гелий-неонового лазера характеризуется малым усилением света: на длине волны $\lambda = 0.63$ мкм коэффициент усиления составляет всего лишь $4 \div 6\%$ на метр длины. Поэтому коэффициенты отражения зеркал должны быть близки к единице. В такой ситуации можно с хорошей степенью точности считать, что при генерации внутри резонатора устанавливается режим стоячих световых волн. Однако, в отличие от выше рассмотренных задач, моды лазера характеризуются очень большим индексом s . Например, для лазера с длиной резонатора $l = 1$ м получаем $s = 2l/\lambda_s \approx 3 \cdot 10^6$.

Анализ работы лазера обычно проводится в полуклассическом приближении: поляризация среды, определяющая отрицательное сопротивление, описывается на квантовом языке, тогда как электромагнитное поле описывается классическими уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (8.42)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (8.43)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}. \quad (8.44)$$

В приближении плоских линейно поляризованных волн (в газовых лазерах поляризация часто задается прозрачными пластинками, располагаемыми внутри резонатора под углом Брюстера), объединяя уравнения (8.42)—(8.44), можно получить:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (8.45)$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — скорость света в вакууме. Это волновое уравнение для среды с потерями, описываемыми удельной электропроводностью σ , и с распределенной вынуждающей силой, определяемой наведенной электрической поляризацией $P(x, t)$.

В резонаторе Фабри-Перо устойчивая картина светового поля в виде стоячих волн возникает, когда по длине резонатора укладывается целое число полуволн. Собственными функциями краевой задачи являются формы вида $\sin(\pi s x/l)$, удовлетворяющие граничным условиям

$$E(0,t) = 0, \quad E(l,t) = 0. \quad (8.46)$$

Учитывая это, разложим функции $E(x,t)$ и $P(x,t)$ в ряд по собственным функциям резонатора:

$$E(x,t) = \sum_s E_s(t) \sin \frac{\pi s x}{l}, \quad P(x,t) = \sum_s P_s(t) \sin \frac{\pi s x}{l}, \quad (8.47)$$

где коэффициенты разложения P_s рассчитываются, исходя из известной функции $P(x,t)$, по формуле (8.14):

$$P_s(t) = \frac{2}{l} \int_0^l P(x,t) \sin \left(\frac{\pi s x}{l} \right) dx. \quad (8.48)$$

Подставив (8.47) в волновое уравнение (8.45) и воспользовавшись свойством ортогональности собственных функций краевой задачи (8.13), получим:

$$\frac{d^2 E_s}{dt^2} + \frac{\omega_s}{Q_s} \frac{dE_s}{dt} + \Omega_s^2 E_s = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{d^2 P_s}{dt^2}. \quad (8.49)$$

Здесь введены обозначения: ω_s — частота s -й генерируемой моды, $Q_s = \epsilon_0 \omega_s / \sigma$ — добротность этой моды, $\Omega_s = \pi s c / l$ — собственные частоты интерферометра Фабри-Перо.

Поскольку время переходных процессов в лазере намного больше периода колебаний, то при анализе можно использовать метод медленно меняющихся амплитуд, положив:

$$E_s(t) = A_s(t) \cos[\omega_s t + \varphi_s(t)], \quad (8.50)$$

$$P_s(t) = C_s(t) \cos[\omega_s t + \varphi_s(t)] + S_s(t) \sin[\omega_s t + \varphi_s(t)], \quad (8.51)$$

где A_s , C_s , S_s и φ_s — медленно меняющиеся амплитуды и фазы. В результате можно получить укороченные уравнения следующего вида:

$$\frac{dA_s}{dt} = \left(\alpha_{0s} - \frac{\omega_s}{2Q_s} \right) A_s - \beta_s A_s^3 - \sum_{r \neq s} \gamma_{sr} A_s A_r^2, \quad (8.52)$$

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = -\omega_s + \Omega_s + \delta_s + \mu A_s^2 + \sum_{r \neq s} \eta_{sr} A_r^2. \quad (8.53)$$

По своей структуре формулы (8.52) и (8.53) аналогичны уравнениям, описывающим колебания в двухконтурном генераторе с индуктивной связью (п. 6.3). Параметр α_{0s} представляет собой коэффициент усиления активной среды на s -й моде колебаний для малого сигнала; он аналогичен дифференциальной крутизне S_0 полевого транзистора. Слагаемое $\omega_s/2Q_s$ описывает потери на s -й моде. Введя коэффициент $\alpha_s \equiv \alpha_{0s} - \omega_s/2Q_s$, определяющий превышение усиления над потерями, можно записать условие самовозбуждения s -й моды в виде $\alpha_s > 0$. Коэффициенты β_s характеризуют нелинейность активной среды; они показывают уменьшение инверсной населенности, обусловленное насыщением активной среды при большой интенсивности излучения. В двухконтурном генераторе этот эффект описывается коэффициентом S_2 . Параметры γ_{sr} являются коэффициентами связи между модами; они определяют уменьшение инверсной населенности s -й моды, вызванное генерацией r -й моды, т.е. эффект конкуренции мод. Из (8.53) следует, что частота генерации ω_s отличается от собственной частоты резонатора Ω_s на величину $\delta_s + \mu A_s^2 + \sum_{r \neq s} \eta_{sr} A_r^2$.

Коэффициент δ_s описывает эффект подтягивания частоты генерации к максимуму контура усиления активной среды, а коэффициенты μ и η_{sr} характеризуют нелинейное влияние амплитуды как собственной, так и соседних мод.

Задача 8.12

Построить фазовый портрет распределенной автоколебательной системы, описываемой системой укороченных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \alpha_1 A_1 - \beta_1 A_1^3 - \gamma_{12} A_1 A_2^2 \\ \frac{dA_2}{dt} = \alpha_2 A_2 - \beta_2 A_2^3 - \gamma_{21} A_2 A_1^2 \end{cases} \quad (8.54)$$

Решение

Сравнивая (8.54) с (8.52), видим, что в рассматриваемой системе реализуется двухмодовый режим генерации с амплитудами мод A_1 и A_2 . Введем величины $X = A_1^2$ и $Y = A_2^2$, представляющие собой интенсивности этих мод. Тогда

$$\frac{dX}{dt} = 2A_1 \frac{dA_1}{dt}, \quad \frac{dY}{dt} = 2A_2 \frac{dA_2}{dt}. \quad (8.55)$$

В новых переменных система (8.54) приобретет вид:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = 2X(\alpha_1 - \beta_1 X - \gamma_{12} Y) \\ \frac{dY}{dt} = 2Y(\alpha_2 - \beta_2 Y - \gamma_{21} X) \end{cases} \quad (8.56)$$

Исследуем поведение системы на фазовой плоскости переменных X - Y (рис. 8.15). Поделив второе уравнение (8.56) на первое, получим выражение

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y (\alpha_2 - \beta_2 Y - \gamma_{21} X)}{X (\alpha_1 - \beta_1 X - \gamma_{12} Y)}, \quad (8.57)$$

из которого следует, что на фазовой плоскости прямые, описываемые уравнениями

$$\alpha_1 - \beta_1 X - \gamma_{12} Y = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_2 - \beta_2 Y - \gamma_{21} X = 0, \quad (8.58)$$

являются изоклинами соответственно вертикальных и горизонтальных касательных к фазовым траекториям. На рис. 8.15 эти прямые обозначены цифрами 1 и 2 соответственно. Рисками на прямых показаны касательные.

Из (8.56) следует, что в системе возможны четыре стационарных состояния, когда $dX/dt = 0$ и $dY/dt = 0$:

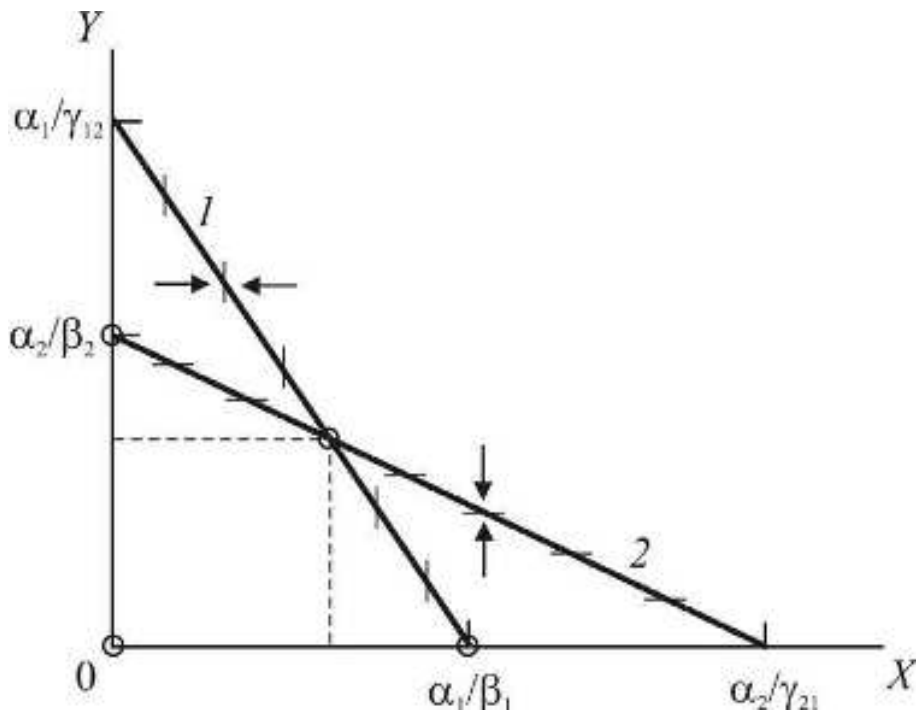


Рис. 8.15

- 1) $X = 0$ и $Y = 0$ — в системе нет генерации;
- 2) $X = 0$ и $Y = \alpha_2/\beta_2$ — генерируется только мода № 2;
- 3) $Y = 0$ и $X = \alpha_1/\beta_1$ — генерируется только мода № 1;
- 4) $X = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\gamma_{12}}{\beta_1\beta_2 - \gamma_{12}\gamma_{21}}$ и $Y = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\gamma_{21}}{\beta_1\beta_2 - \gamma_{12}\gamma_{21}}$ — генерируются обе моды.

Стационарные состояния отмечены на рисунке кружочками.

Для построения фазовых траекторий необходимо также отметить (это следует из выражения (8.57)), что во всей области правее прямой 1 производная $dY/dX < 0$. Это означает, что точка фазовой траектории движется справа налево. Аналогично во всей области левее прямой 1 производная $dY/dX > 0$, что означает движение изображающей точки слева направо. Эти тенденции показаны на рисунке горизонтальными стрелками. Рассуждая точно так же, можно сделать вывод, что в области выше прямой 2 изображающие точки движутся вниз, а в области ниже прямой 2 — вверх, как показано вертикальными стрелками.

Все эти соображения позволяют качественно построить фазовый портрет системы. На рис. 4.16 фазовые траектории изображены

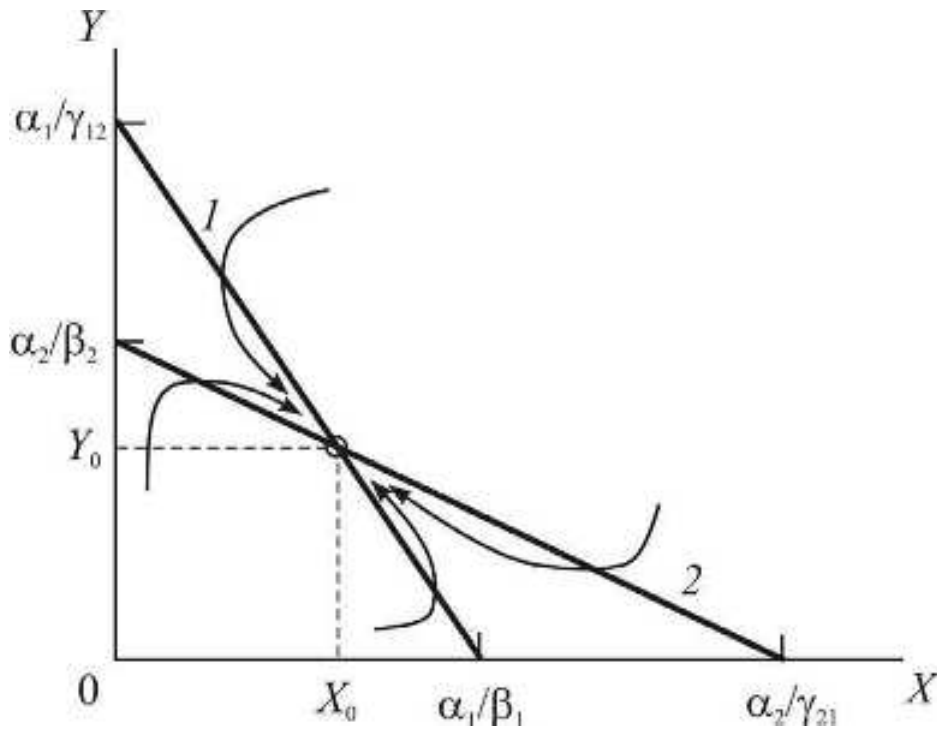


Рис. 8.16

криволинейными стрелками. Видно, что все они сходятся в точку пересечения прямых 1 и 2, которая является устойчивым узлом. Таким образом, в системе реализуется двухмодовый режим генерации с интенсивностями мод

$$X_0 = \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \gamma_{12}}{\beta_1 \beta_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}} \quad \text{и} \quad Y_0 = \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \gamma_{21}}{\beta_1 \beta_2 - \gamma_{12} \gamma_{21}}. \quad (8.59)$$

Необходимыми условиями для этого варианта являются близкие значения коэффициентов усиления ($\alpha_1 \approx \alpha_2$), а также

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_{12}} > \frac{\alpha_2}{\beta_2} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_{21}} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}. \quad (8.60)$$

Объединяя формулы (8.60), получаем условие

$$\beta_1 \beta_2 > \gamma_{12} \gamma_{21}, \quad (8.61)$$

означающее *слабую связь* между модами.

В случае *сильной связи*:

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_{12}} < \frac{\alpha_2}{\beta_2} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_2}{\gamma_{21}} < \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \text{т.е.} \quad \beta_1 \beta_2 > \gamma_{12} \gamma_{21} \quad (8.62)$$

ситуация складывается совсем иначе. Фазовый портрет для этого варианта представлен на рис. 8.17. График показывает, что в зависимости от предыстории (начального состояния системы) в системе может генерироваться либо мода № 1 с интенсивностью $X_0 = \alpha_1/\beta_1$, либо мода № 2 с интенсивностью $Y_0 = \alpha_2/\beta_2$. Таким образом, система в данном варианте демонстрирует эффект *затягивания*, обусловленный конкуренцией мод. Штриховой прямой на рисунке показана сепаратриса, разделяющая фазовую плоскость на две области.

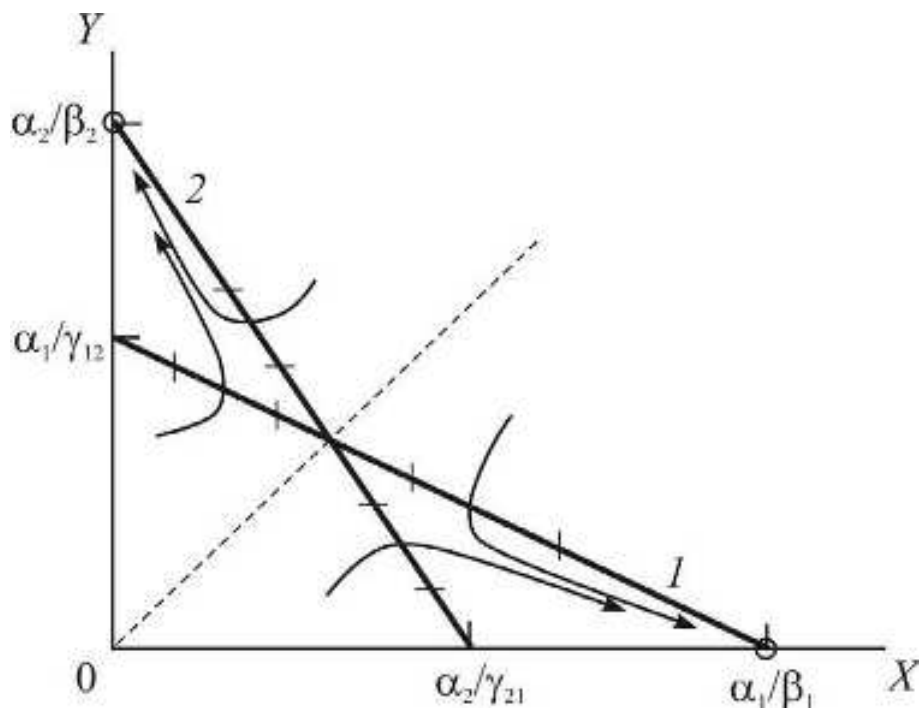


Рис. 8.17

Наконец, возможен и третий вариант, когда усиление для одной из мод много больше усиления для другой моды. Например, если

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_{12}} > \frac{\alpha_2}{\beta_2} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\gamma_{21}}. \quad (8.63)$$

то получается фазовый портрет, показанный на рис. 8.18. В этом случае генерируется только мода № 1 с интенсивностью $X_0 = \alpha_1/\beta_1$.

Отметим, что в газовых лазерах, вследствие малой нелинейности газовой среды, связь между модами, как правило, слабая. Поэтому при достаточно большом коэффициенте усиления активной среды

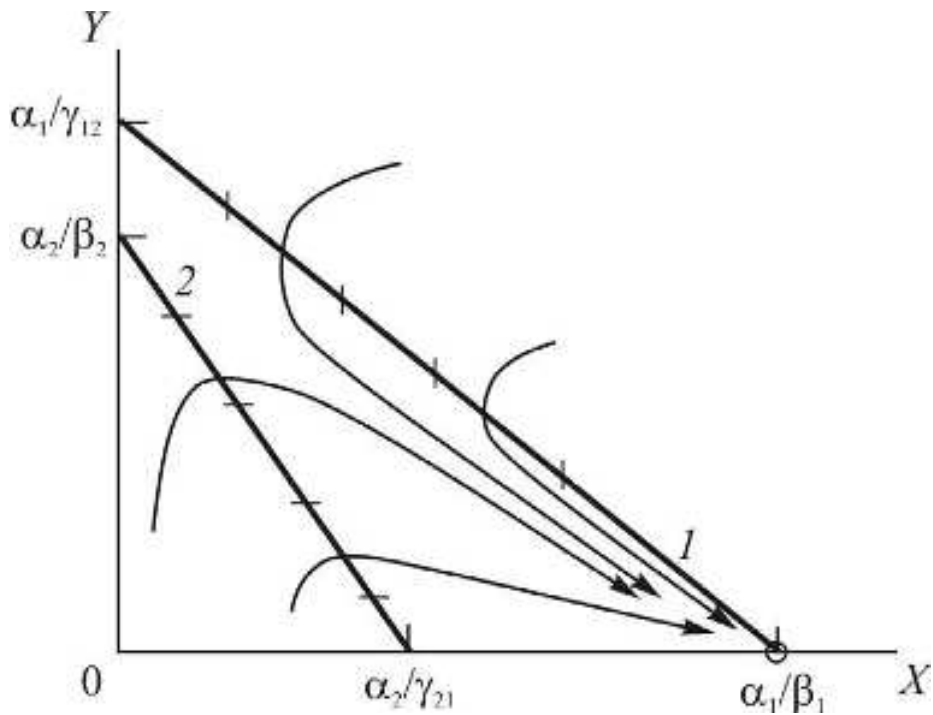


Рис. 8.18

(большой накачке) одновременно может генерироваться несколько или даже много мод.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.13. В предположении слабой связи между модами получить выражения для пороговых значений коэффициентов усиления α_{0s} и стационарных значений интенсивностей A_s^2 .

Задача 8.14. Для распределенной автоколебательной системы, описываемой системой укороченных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = \alpha_1 A_1 - \beta_1 A_1^3 - \gamma_{12} A_1 A_2^2 - \gamma_{13} A_1 A_3^2 \\ \frac{dA_2}{dt} = \alpha_2 A_2 - \beta_2 A_2^3 - \gamma_{21} A_2 A_1^2 - \gamma_{23} A_2 A_3^2 \\ \frac{dA_3}{dt} = \alpha_3 A_3 - \beta_3 A_3^3 - \gamma_{31} A_3 A_1^2 - \gamma_{32} A_3 A_2^2 \end{cases}$$

найти стационарные значения интенсивностей в предположении одномодового, двухмодового и трехмодового режимов генерации.

Задача 8.15, а-г. Построить фазовый портрет распределенной автоколебательной системы, описываемой одной из следующих систем укороченных уравнений для нормированных амплитуд:

$$а) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = 0.5A_1 - 0.25A_1^3 - 0.5A_1A_2^2 \\ \frac{dA_2}{dt} = A_2 - 0.25A_2^3 - 0.8A_1^2A_2 \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = A_1 - 0.25A_1^3 - 0.5A_1A_2^2 \\ \frac{dA_2}{dt} = A_2 - 0.5A_2^3 - 0.3A_1^2A_2 \end{cases}$$

$$в) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = A_1 - 0.5A_1^3 - 0.3A_1A_2^2 \\ \frac{dA_2}{dt} = A_2 - 0.25A_2^3 - 0.3A_1^2A_2 \end{cases}$$

$$г) \quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = 0.5A_1 - 0.25A_1^3 - 0.5A_1A_2^2 \\ \frac{dA_2}{dt} = A_2 - 0.25A_2^3 - 0.8A_1^2A_2 \end{cases}$$

Найти стационарные значения интенсивностей генерируемых мод.

Задача 8.16. Ширина контура усиления гелий-неонового лазера равна $1.5 \cdot 10^9$ Гц, длина волны излучения — 632.8 нм, длина оптического резонатора — 1 м. Оценить длительность генерируемых импульсов и частоту их повторения при активной синхронизации мод.

Задача 8.17. Ширина контура усиления гелий-неонового лазера равна $1.5 \cdot 10^9$ Гц, длина волны излучения — 1.15 мкм, длина оптического резонатора — 0.5 м. Оценить длительность генерируемых импульсов и частоту их повторения при активной синхронизации мод.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

$$1.2. \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{2MR}}.$$

$$1.3. \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg(R+l)}{\frac{3}{2}MR^2 + ml^2}}$$

$$1.4. \quad \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \cos \alpha_0\right) \cos \alpha_0}.$$

1.5. Если $ka^2 > mgl$, то имеется единственное устойчивое положение равновесия, в котором $\varphi = 0$. В этом случае

$$\omega = \sqrt{\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}}.$$

Если $ka^2 < mgl$, то имеется три положения равновесия: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_{2,3} = \pm\alpha$, где $\pm\alpha$ — ненулевые корни уравнения

$$ka^2 \varphi - mgl \sin \varphi = 0,$$

причем положение $\varphi = 0$ неустойчиво, а состояния системы, в которых $\varphi = \pm\alpha$ устойчивы. Частоты $\omega_{2,3}$ малых колебаний в этих состояниях равны

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l} \cos \alpha}.$$

$$1.6. \quad \omega_{2,3} = \sqrt{\frac{g}{l} \sin \alpha}.$$

1.8. Если $\omega_0^2 > \delta^2$, то $\varphi = \frac{v_0}{\omega l} e^{-\delta t} \sin \omega t$,

$$\text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \delta = \frac{h}{2m}.$$

Если $\omega_0^2 < \delta^2$, то $\varphi = \frac{v_0}{l\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} e^{-\delta t} \operatorname{sh}\left(t\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)$.

1.9. $x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_0 \cos \omega_0 t$; $x_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} x_0 \cos \omega_0 t$, где $\omega_0^2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$.

1.11. $\varphi = \Phi_0 \cos(pt + \psi)$, где $\Phi_0 = \frac{kaX_0}{ml^2} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}$,

$\psi = -\operatorname{arctg} \frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2}$. Здесь $\omega_0^2 = \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{ml^2}$, $\delta = \frac{h}{2m}$, h — коэффициент вязкого трения.

1.12. а) $z = \rho Q p^2$, где: $\rho = \omega_0(L_1 + L_2)$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C_2}}$;

$Q = \frac{\omega_0(L_1 + L_2)}{R_1 + R_2}$; $p = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$.

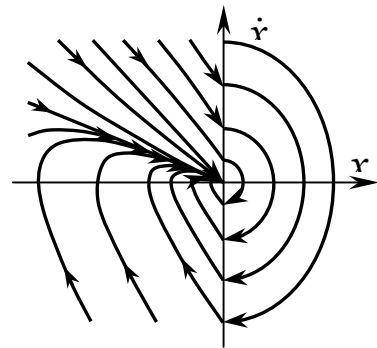
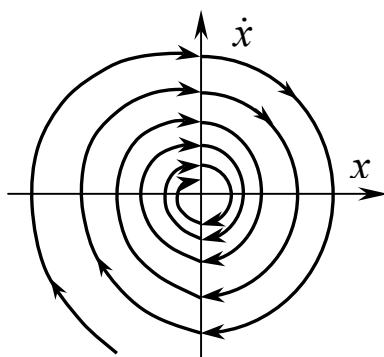
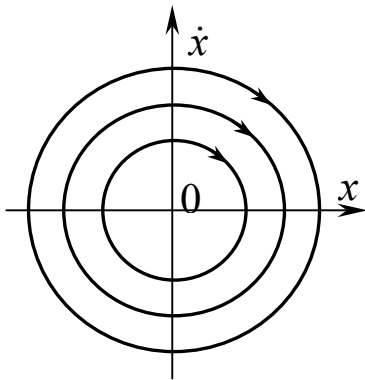
б) $z = \rho Q p^2$, где: $\rho = \frac{1}{\omega_0 C}$; $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$; $Q = \frac{1}{\omega_0 C (R_1 + R_2)}$; $p = \frac{C}{C_2}$.

2.4. $R = 0$

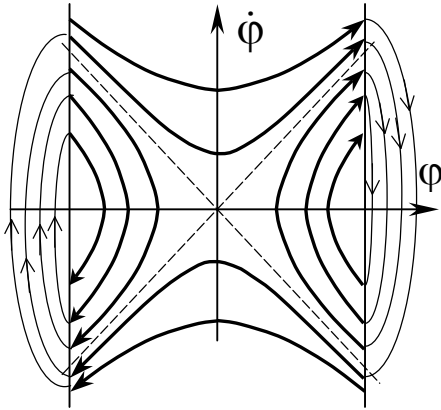
$R < 2\sqrt{L/C}$

$R > 2\sqrt{L/C}$

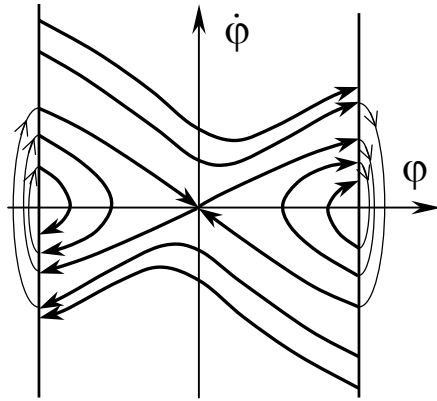


2.5.

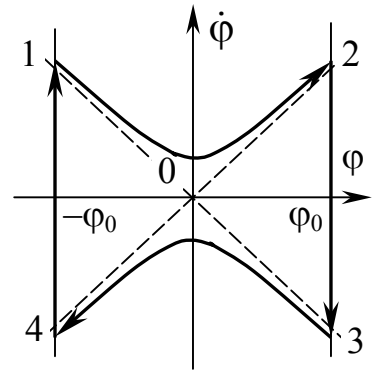
1)



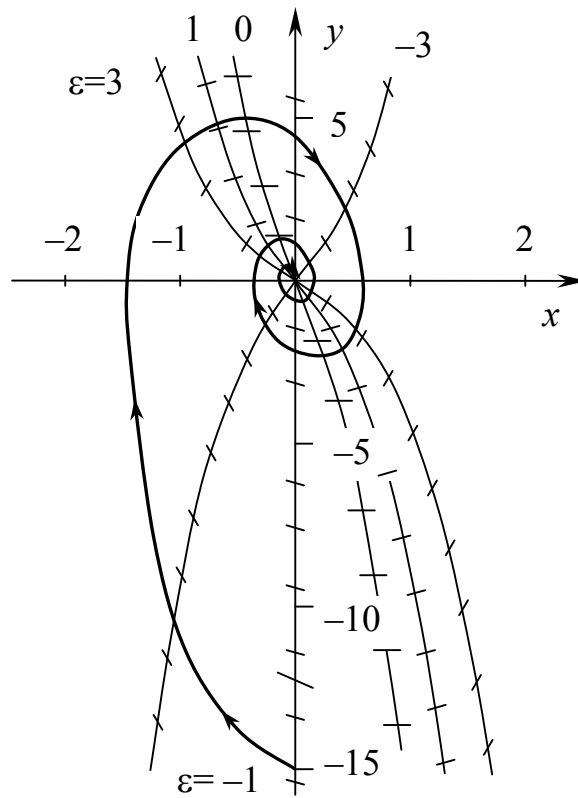
2)



3)

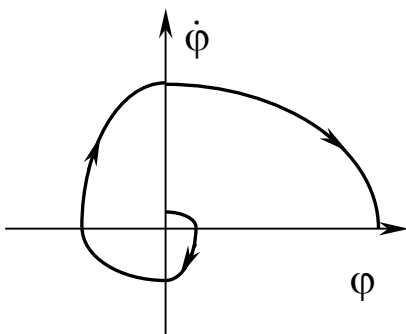


2.6.

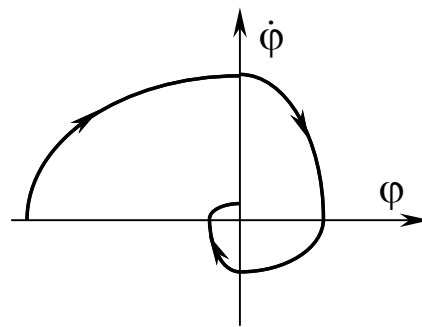


2.7.

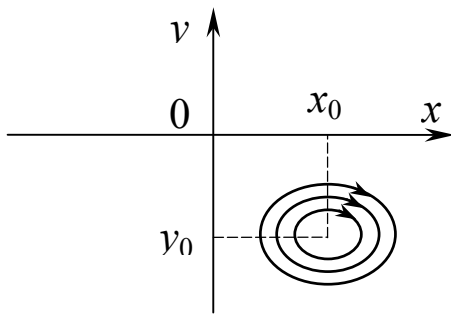
a)



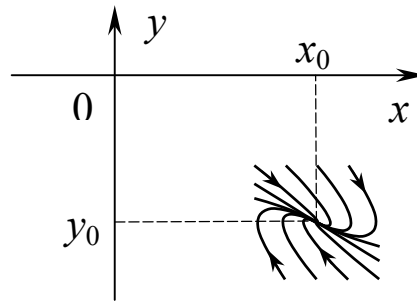
b)



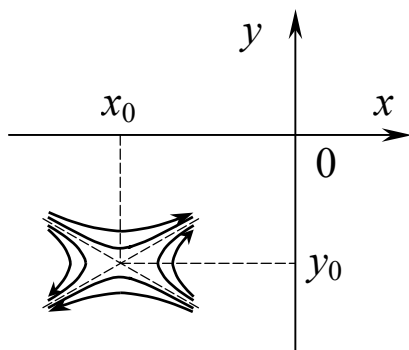
2.8. 1) $y_0 = -E; \quad x_0 = -\frac{D}{C} = \frac{D}{|C|}$



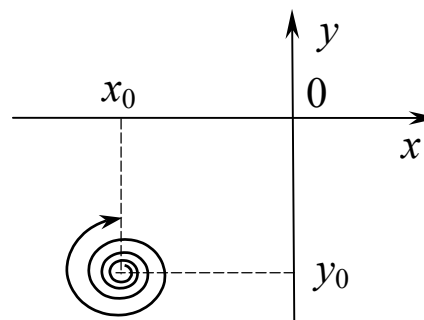
4) $y_0 = -E; \quad x_0 = \frac{|B|E + D}{|C|}$



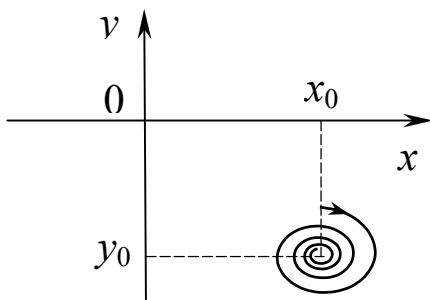
2) $y_0 = -E; \quad x_0 = -\frac{D}{C}$



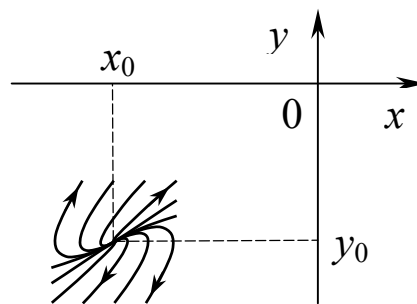
5) $y_0 = -E; \quad x_0 = \frac{-BE + D}{|C|}$



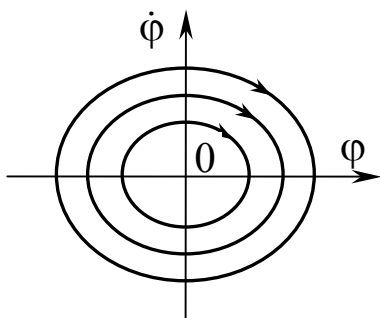
3) $y_0 = -E; \quad x_0 = \frac{|B|E + D}{|C|}$



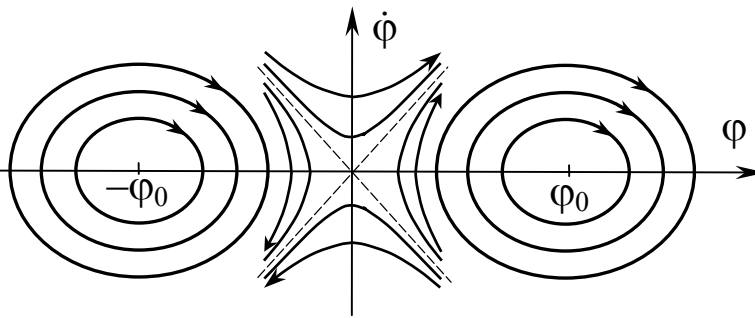
6) $y_0 = -E; \quad x_0 = \frac{-BE + D}{|C|}$



2.9. $ka^2 > mgl:$



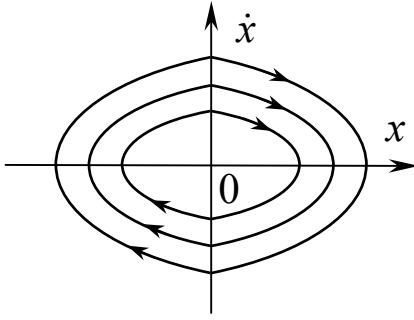
$ka^2 < mgl:$



Здесь φ_0 — наименьший ненулевой положительный корень уравнения

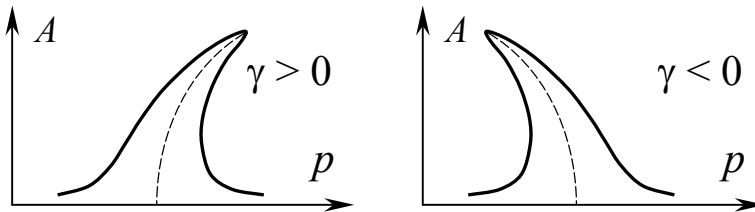
$$ka^2\varphi - mgl \sin \varphi = 0$$

2.10.



2.12. $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \gamma a^2 \right)$, где a — амплитуда колебаний заряда.

$$2.13. A^2 = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{m} A^2 - p^2 \right)^2 + 4\delta^2 p^2}}.$$



2.14. 0,43%; 33°.

$$2.15. T_{\text{прибл}} = \sqrt{\frac{2\pi^3 A}{g \sin 2\alpha}}; \quad T_{\text{точен}} = 8 \sqrt{\frac{A}{g \sin 2\alpha}}.$$

Здесь A — амплитуда колебаний вдоль оси Ox .

$$\frac{T_{\text{точен}} - T_{\text{прибл}}}{T_{\text{точен}}} = 1,8\%.$$

$$2.16. \omega_{\text{прибл}} \cong \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l}{\pi A} \right)}; \quad \omega_{\text{точен}} = \frac{\sqrt{k/m}}{1 + \frac{l}{\pi A}} \approx \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{l}{\pi A} \right)}.$$

$$3.3. \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} = \left(1 + \frac{\Delta l}{l} \right)^{-\frac{3}{4}} - 1.$$

$$3.6. \quad \frac{2\Delta l}{l} \geq \frac{\pi}{Q}.$$

$$3.7. \quad \frac{2\Delta F}{F} \geq \frac{\pi}{Q}.$$

$$3.9. \quad m_{\text{мин}} = \frac{2}{Q}; \quad |\xi| \leq \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{Q^2}}; \quad A = \frac{1}{\omega\beta_0} \left[Q \sqrt{\frac{m^2}{4} - \xi^2} - 1 \right].$$

Здесь $Q = \frac{\omega L}{R_0}$.

$$3.10. \quad m \geq \frac{2}{Q}; \quad |\xi| \leq \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{Q^2}}.$$

$$3.11. \quad m \geq 2\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{Q^2}}; \quad |\xi| \leq \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{1}{Q^2}}; \quad m_{\text{мин}} = \frac{2}{Q}.$$

$$4.2. \quad \text{Условие возбуждения: } \alpha_0 < 0; \quad |\alpha_0| > \frac{1}{R}.$$

Стационарный режим: $A_1 = 0$; $A_2 = \sqrt{-\frac{4}{3\gamma_0} \left(\frac{1}{R} + \alpha_0 \right)}$, где $\gamma = \frac{3\gamma_0}{\omega C}$.

Стационарный режим с $A_2 \neq 0$ устойчив, если выполнено условие возбуждения.

$$4.3. \quad \text{Условие возбуждения: } \alpha > h; \quad A_{\text{стац}} = \sqrt{\frac{4m(\alpha - h)}{3k\gamma}}. \quad \text{Режим с } A_{\text{стац}} \neq 0 \text{ устойчив, если выполнено условие возбуждения.}$$

$$4.4. \quad \text{Условие возбуждения: } \alpha > hl^2; \quad A_{\text{стац}} = \sqrt{\frac{4(\alpha - hl^2)l}{3\gamma g}}.$$

$$4.5. \quad \text{Условие возбуждения: } S_0 > \frac{RC}{M}; \quad A_{\text{стац}} = \sqrt{\frac{S_0 - \frac{RC}{M}}{\frac{3}{4}S_1}}. \quad \text{Режим с } A_{\text{стац}} \neq 0 \text{ устойчив, если выполнено условие возбуждения.}$$

5.6,г. $\omega_1^2 g/l \approx 0.55 g/l$, $\omega_2^2 \approx 5.45 g/l$, $\kappa_1 = 1.11$, $\kappa_2 = -0.11$.

5.7,а. Начальные условия: $\phi_1(0) = A_0$, $\phi_2(0) = A_0\kappa_1$, $\dot{\phi}_1(0) = 0$, $\dot{\phi}_2(0) = 0$, где $\kappa_1 \approx 2.85$.

5.10,а. $\omega_1^2 = 1/3LC$, $\omega_2^2 = 1/LC$, $\kappa_1 = -\kappa_2 = 1$.

5.10,б. $\omega_1^2 = 3/5LC$, $\omega_2^2 = 1/LC$, $\kappa_1 = -\kappa_2 = 1$.

5.10,в. $\omega_1^2 \approx 0.36/LC$, $\omega_2^2 \approx 1.39/LC$.

5.16. 1) $\omega_1^2 \approx 0,77 g/l$, $\omega_2^2 \approx 1,43 g/l$, $\kappa_1 = -\kappa_2 = \sqrt{11}$, $v_1 = v_2$. Время полной перекачки энергии $\tau \approx 9.87\sqrt{l/g}$.

2) $\omega_1^2 \approx 0,71 g/l$, $\omega_2^2 \approx 1,69 g/l$, $\kappa_1 = -\kappa_2 = \sqrt{6}$, $v_1 = v_2$. Время полной перекачки энергии $\tau \approx 6.88\sqrt{l/g}$; уменьшится в 1,43 раза.

5.18. 1) Ключ замкнут: $\omega_1^2 = [L(C + 2C_1)]^{-1}$, $\omega_2^2 = (LC)^{-1}$, $\kappa_1 = -\kappa_2 = 1$, $v_1 = v_2$. Время полной перекачки энергии $\tau = \pi C\sqrt{LC}/C_1$.

2) Ключ разомкнут: $\omega_1^2 = [L(C + C_1)]^{-1}$, $\omega_2^2 = (LC)^{-1}$, $\kappa_1 = -\kappa_2 = 1$, $v_1 = v_2$. Время полной перекачки энергии $\tau = 2\pi C\sqrt{LC}/C_1$; увеличится в 2 раза.

5.19. 1) Ключ замкнут: $\omega_1^2 = (LC)^{-1}$, $\omega_2^2 = (2L + L_1)/LL_1C$, $\kappa_1 = -\kappa_2 = 1$, $v_1 = v_2$. Время полной перекачки энергии $\tau = \pi L_1\sqrt{LC}/L$.

2) Ключ разомкнут: $\omega_1^2 = (LC)^{-1}$, $\omega_2^2 = (L + L_1)/LL_1C$, $\kappa_1 = -\kappa_2 = 1$, $v_1 = v_2$. Время полной перекачки энергии $\tau = 2\pi L_1\sqrt{LC}/L$; увеличится в 2 раза.

$$\mathbf{6.2.} \quad K_P = \frac{A_H^2}{A_{H\text{кр}}^2} \left(1 - \frac{A_H^2}{A_{H\text{кр}}^2} \right)^{-2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

$$\mathbf{6.3.} \quad K_P^{(2)}/K_P^{(1)} = \omega_2/\omega_1.$$

$$\mathbf{6.4.} \quad A_{H\text{опт}}^2 = (\alpha^2 R_1 R_2 \omega_1 \omega_2)^{-1}; \quad A_{2\text{опт}}^2 = I_0^2 R_1 R_2 \omega_2 / 4\omega_1; \quad K_{P\text{max}} = \omega_2/\omega_1.$$

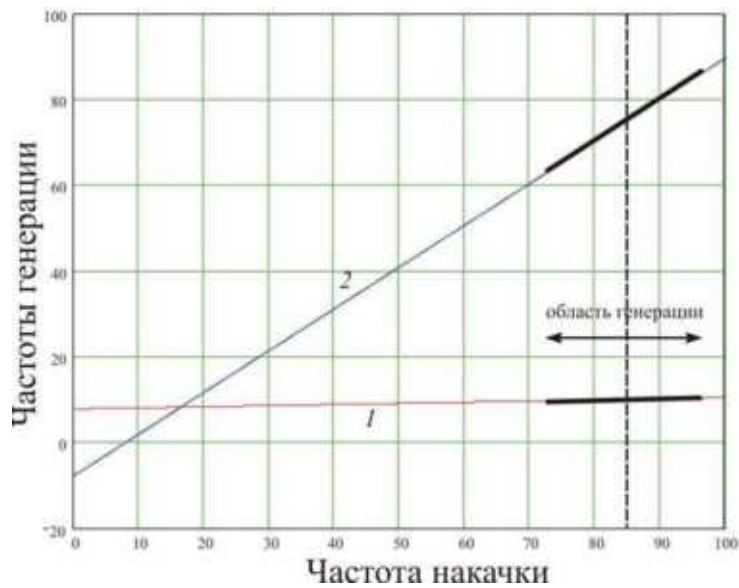
6.5. $K_P^{(1)} = 105$; $K_P^{(2)} = 8.4$; $\delta f_1 = 0.2$ МГц.

6.6. $K_{P_{opt}}^{(2)} = 7$; $\delta f_{1opt} = 2$ МГц.

6.7. $K_P^{(1)} = 74$; $K_P^{(2)} = 258$; $\delta f_1 = 0.12$ МГц.

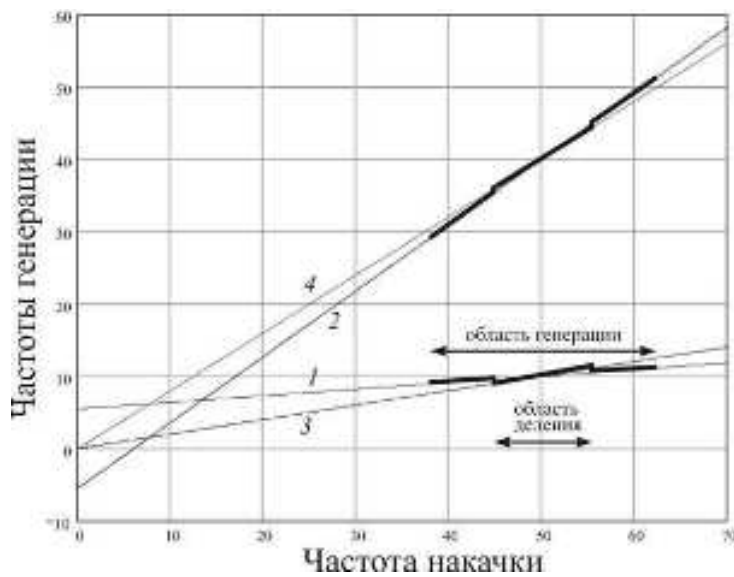
6.8. $K_{P_{opt}}^{(2)} = 6.7$; $\delta f_{1opt} = 30$ МГц.

6.10.



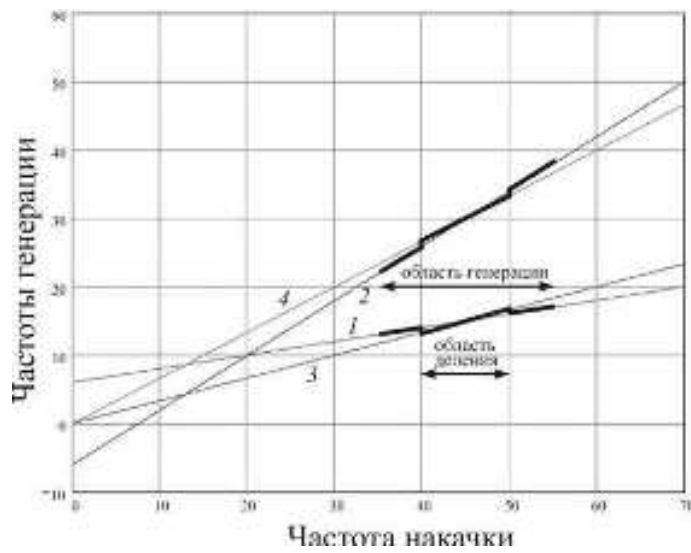
Коэффициенты стабилизации частоты: $S_1 = 38.5$, $S_2 = 1.03$.
 $P_2 = 112.5$ мВт, $P_H = 127.5$ мВт.

6.11.



$P_1 = 12.5$ мВт, $P_H = 62.5$ мВт.

6.12.



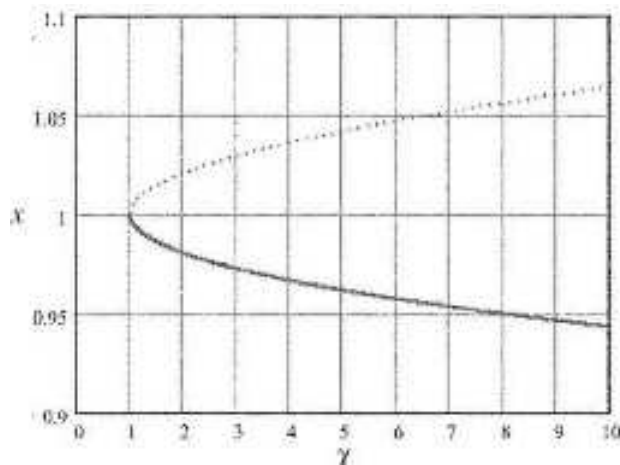
$P_1 = 66.7 \text{ мВт}, P_2 = 133.3 \text{ мВт}.$

6.13.



$P_1 = 40 \text{ мВт}, P_2 = 360 \text{ мВт}.$

6.18. Введем $x \equiv \omega^2/v^2$.



$$6.25. \quad A^2 = \frac{4}{S_2} \left[S_0 - \frac{1}{Mv} \left(\frac{1}{Q_1} + \alpha_1 \alpha_2 Q_2 \right) \right];$$

$$B^2 = \frac{4}{S_2} \alpha_2^2 Q_2^2 \left[S_0 - \frac{1}{Mv} \left(\frac{1}{Q_1} + \alpha_1 \alpha_2 Q_2 \right) \right].$$

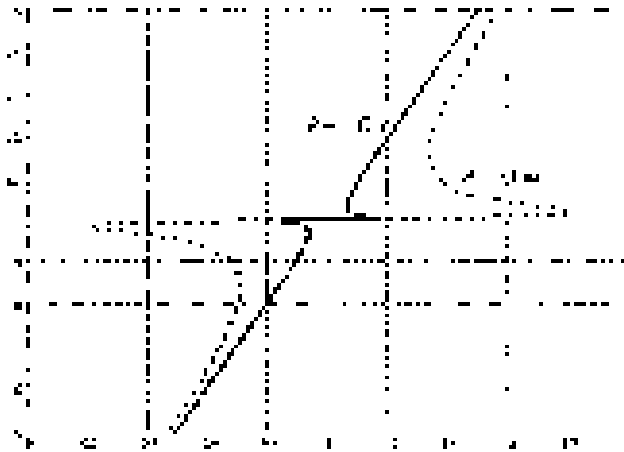
Гашение автоколебаний при

$$S_0 = \frac{1}{Mv} \left(\frac{1}{Q_1} + \alpha_1 \alpha_2 Q_2 \right) \quad \text{и} \quad Q_2^* = \frac{Mv}{\alpha_1 \alpha_2} \left(S_0 - \frac{1}{Mv Q_1} \right).$$

$$A_m^2 = \frac{4}{3S_2} \left(S_0 - \frac{1}{Mv Q_1} \right), \quad B_m^2 = \frac{4}{9} A_m^2 \alpha_2^2 Q_2^{*2} \quad \text{при} \quad Q_{2m} = (2/3) Q_2^*.$$

$$6.30. \quad S = 1 + \frac{L_2}{L_1} \left(\frac{R}{R + R_2} \right)^2, \quad S_{\max} = 1 + \frac{L_2}{L_1}.$$

6.31. $S = dv_1/d\omega = 101$ для обоих значений сопротивлений.



$$7.6.a. \quad \omega_1^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m};$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 + \sqrt{5} & 0 & -1 - \sqrt{5} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.6.b. \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 3 \frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = 4 \frac{k}{m}; \quad \kappa = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.6.b. \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{2m} + \frac{g}{l}, \quad \omega_3^2 = \frac{5k}{2m} + \frac{g}{l}; \quad \kappa = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.6,г. $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$, $\omega_2^2 = \frac{k}{m} + \frac{g}{l}$, $\omega_3^2 = 2\frac{k}{m} + \frac{g}{l}$; $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.10. $\omega_{s1} \approx \frac{\pi s}{2n+1} \sqrt{\frac{2k}{M+m}}$; $\omega_{s2} \approx \sqrt{\frac{2k(M+m)}{Mm}}$.

8.6,а. Уравнение для определения собственных частот: $\operatorname{tg}kl = \frac{Cl}{C_0} \frac{1}{kl}$.

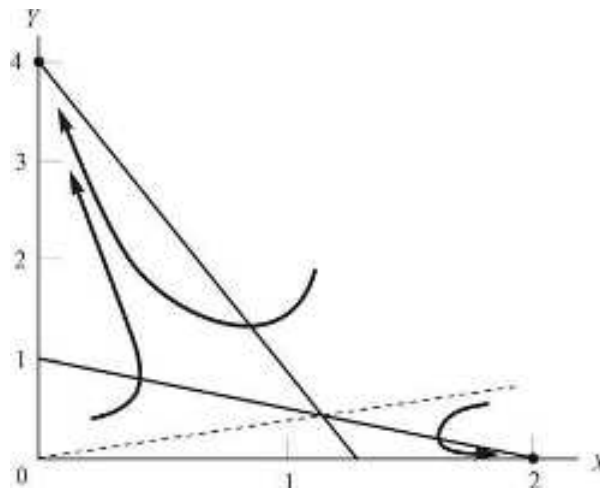
Первая мода: $0 < k_1l < \pi/2$, вторая мода: $\pi < k_2l < 3\pi/2$.

8.6,в. Уравнение для определения собственных частот: $\operatorname{tg}kl = \frac{Ll}{L_0} \frac{1}{kl}$.

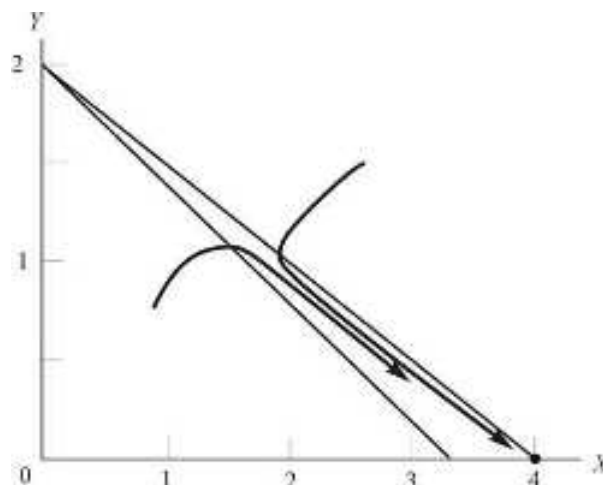
Первая мода: $0 < k_1l < \pi/2$, вторая мода: $\pi < k_2l < 3\pi/2$.

8.11. $\eta = \alpha^2 l^2 \operatorname{sinc}^2 \left[\left(\sqrt{\alpha^2 + \delta^2} \right) l / \pi \right]$, где $\operatorname{sinc}(x) \equiv \sin \pi x / \pi x$.

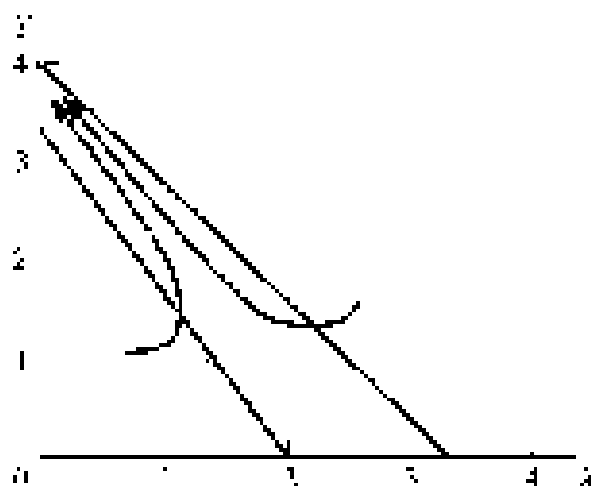
8.15,а.



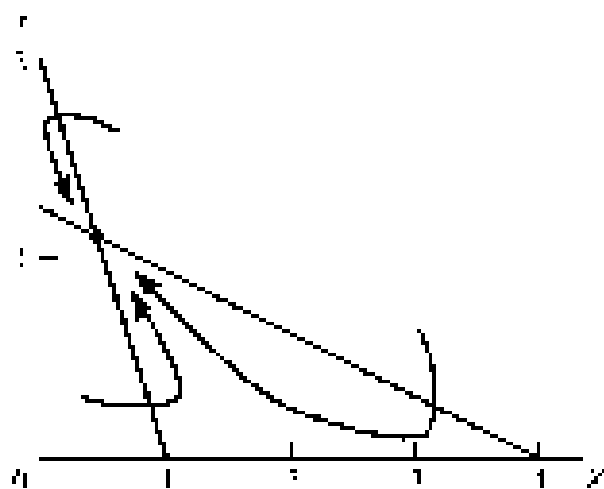
8.15,б.



8.15,в.



8.15,г.



ЛИТЕРАТУРА

1. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1988. — 392 с.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. — СПб. и др.: Изд. Лань, 2005. — 437 с.
4. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики. — М.; Ижевск, РХД, 2004. — 351с.
5. В.П.Кандидов, Л.Н.Капцов, А.А.Харламов Решение и анализ задач линейной теории колебаний. — под ред. В.В.Мигулина. — М., Изд. Моск. ун-та, 1976. — 272 с.

Сборник задач по теории колебаний под ред. Постникова Л. В. и Королева В. И. — М., Наука, 1978. — 272 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	1
1. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	2
1.1. Нахождение частоты свободных колебаний системы с одной степенью свободы	2
1.2. Свободные колебания при заданных начальных условиях	8
1.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы	11
2. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИ- НЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ..	17
2.1. Качественный анализ собственных движений нели- нейной системы в фазовом пространстве	18
2.2. Слабо нелинейные системы с малыми потерями энергии. Метод гармонического баланса	30
3. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.	34
3.1. Адиабатически медленное изменение параметров сис- темы. Адиабатические инварианты	34
3.2. Изменение параметров с частотой, соизмеримой с час- тотой собственных колебаний системы	38
4. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	48
4.1. Автоколебательные системы с высокочастотным ко- лебательным элементом	48
5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	54

6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	82
6.1. Двухконтурные параметрические усилители	82
6.2. Двухконтурный параметрический генератор	88
6.3. Двухконтурный LC-генератор с реактивной связью	96
6.4. Двухконтурный LC-генератор с резистивной связью	105
7. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С n СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ	110
8. КОЛЕБАНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ	128
8.1. Колебания в линейных системах конечной длины	128
8.2. Распределенные автоколебательные системы	143
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ	153
ЛИТЕРАТУРА	165