

Линейные системы

Сосредоточенные цепи.

Пусть L — размеры системы, c — скорость света,
 T — характерное время ($T = 1/\nu$).

Условие квазистационарности:

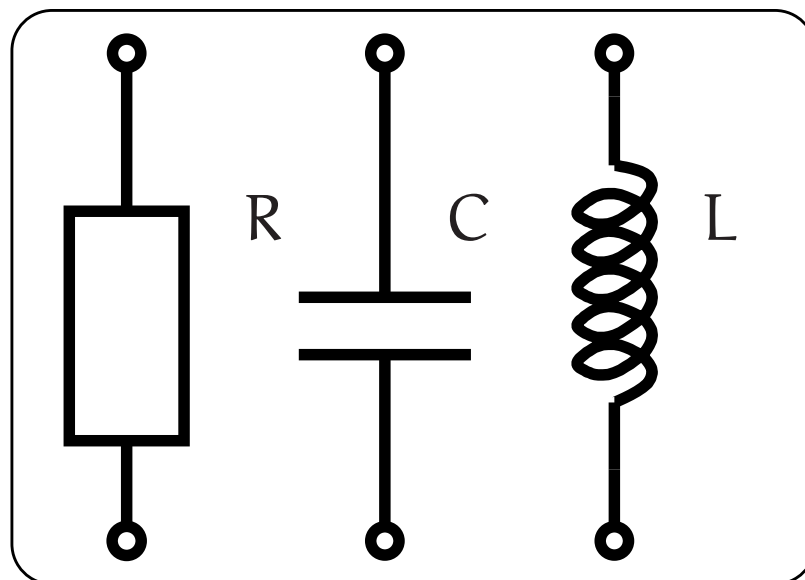
$$\frac{L}{c} \ll T \quad \text{или} \quad \frac{L}{\lambda} \ll 1, \quad \lambda = \frac{c}{\nu}$$

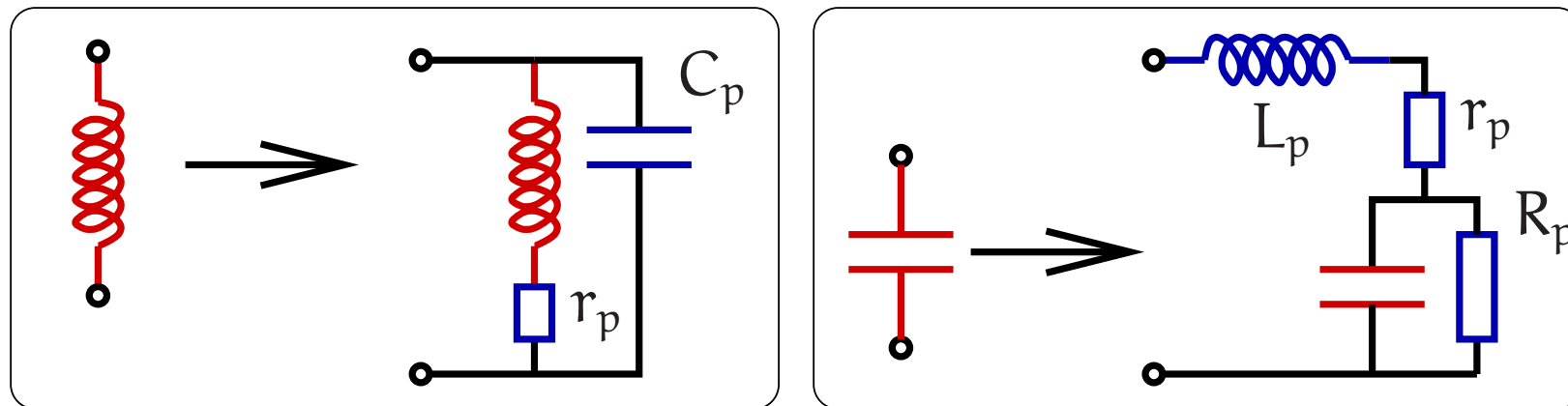
$\lambda \leq L$ — распределенная система.

$\nu = 50$ Гц $\longrightarrow \lambda \simeq 6000$ км (Москва ~ 30 км)

$\nu = 100$ МГц (FM диапазон) $\longrightarrow \lambda \simeq 3$ м

Идеальные сосредоточенные элементы



Простейшие модели,**учитывающие паразитные эффекты.****Линейность:**

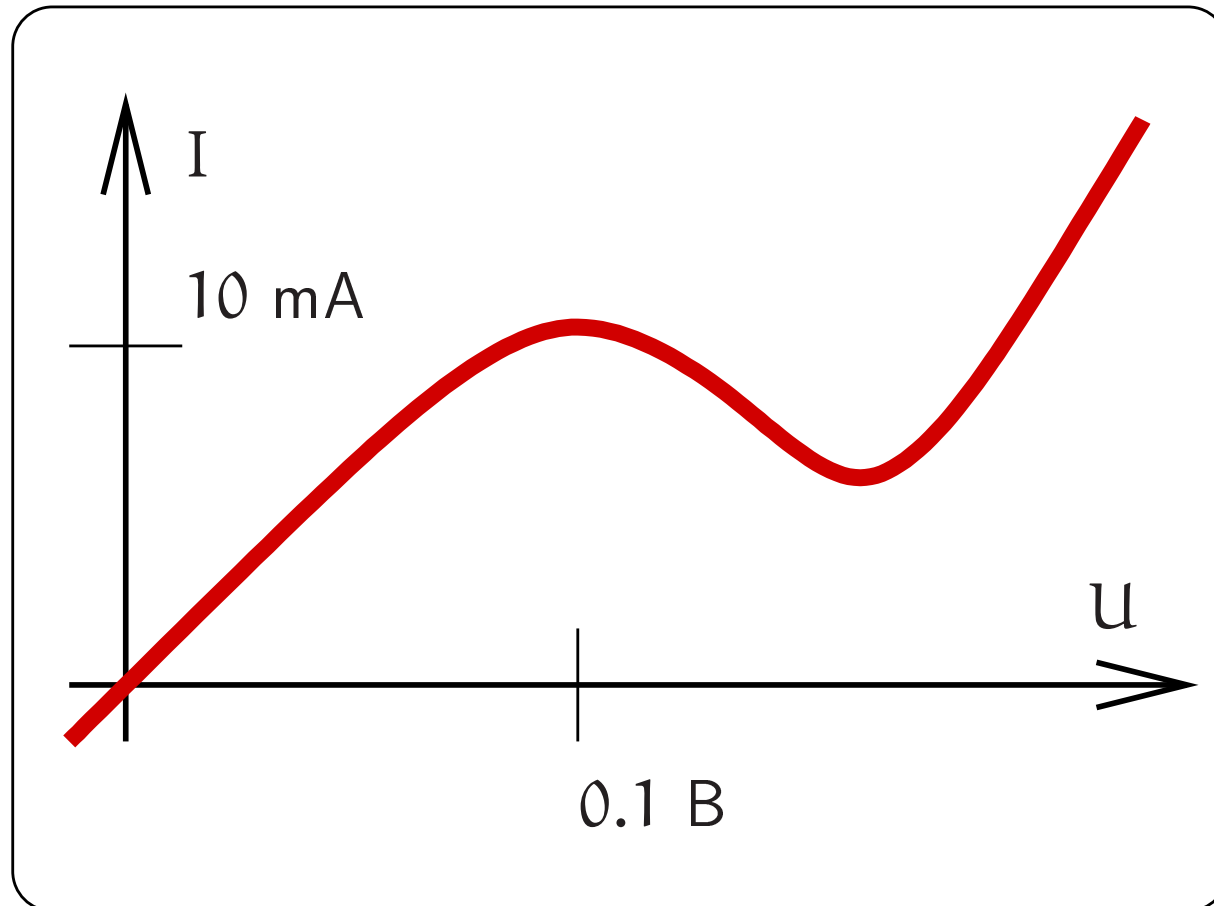
$$\frac{dU}{dI} = R = \text{const}, \quad \frac{d\Phi}{dI} = L = \text{const}, \quad \frac{dQ}{dU} = C = \text{const}.$$

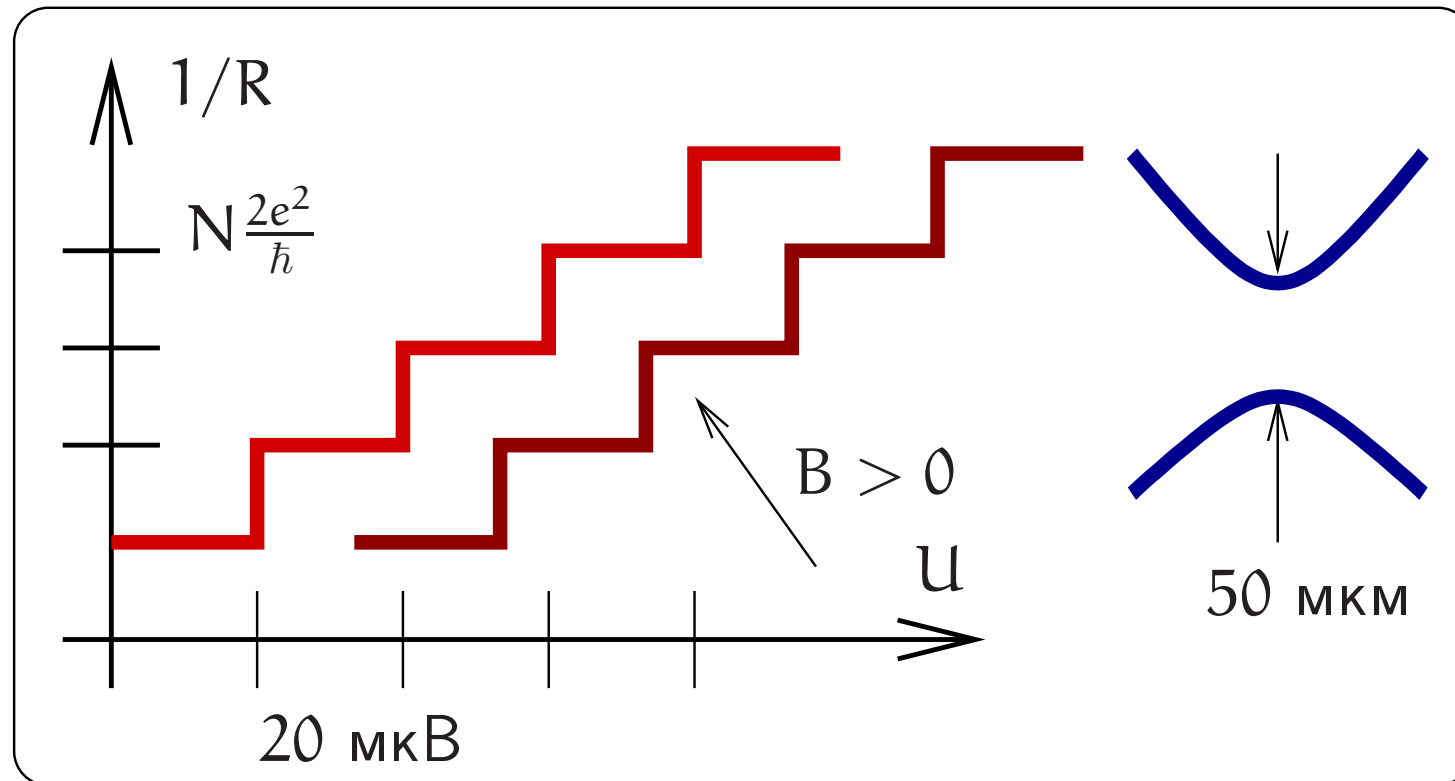
Это справедливо при **малых** I , U , Q , Φ

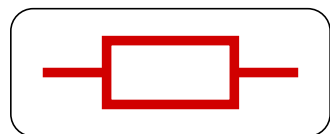
Малость

В каждом случае требуется анализ малости.

Туннельный диод



Мезоскопический контакт

Сопротивление

$$U_R = I_R R, \quad [R] = \text{Ом};$$

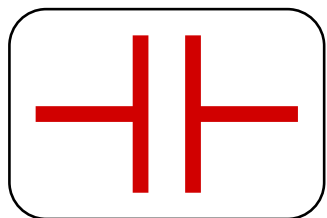
$$G = 1/R, \quad [G] = \text{Сименс}$$

Энергия (в тепло):

$$W_R = \int_0^t I_R^2 R \, dt = \int_0^t \frac{U_R^2}{R} \, dt = \int_0^t I_R U_R \, dt,$$

Мощность:

$$P_R = I_R^2 R = \frac{U_R^2}{R} = U_R I_R$$

Конденсатор

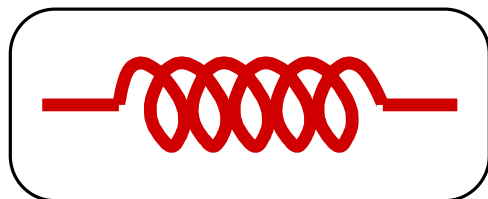
$$Q_C = U_C C, \quad [C] = \text{ф (фарада)},$$

$$I_C = \frac{dq_C}{dt} = C \frac{dU_C}{dt},$$

$$I_C(\omega) = i\omega C \cdot U_C(\omega)$$

Напряжение:
$$U_C = \int_0^t \frac{I_C(\tau)}{C} d\tau + U_C(0),$$

Изменения энергии:
$$W_C = W_C(t) - W_C(0) =$$
$$= \frac{CU_C^2(t)}{2} - \frac{CU_C^2(0)}{2}.$$

Катушка индуктивности

$$\Phi_L = LI_L, \quad [L] = \text{Гн (Генри)},$$

$$U_L = \frac{d\Phi_L}{dt} = L \frac{dI_L}{dt}$$

Частотное предст.: $U_L = i\omega L \cdot I_L(\omega)$

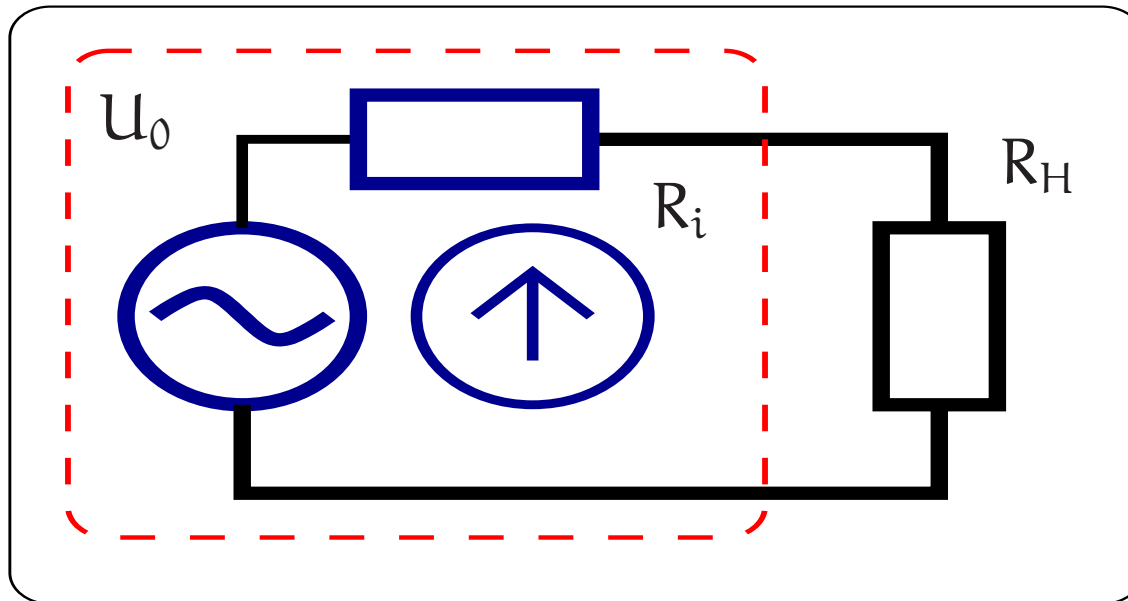
Ток: $I_L = \int_0^t \frac{U_L(\tau)}{L} d\tau + I_L(0),$

Изменения энергии: $W_L = W_L(t) - W_L(0) =$
 $= \frac{LI_L^2(t)}{2} - \frac{LI_L^2(0)}{2}$

Источники сигнала**Генератор напряжения:**

$$U_0 = I(R_i + R_H), \quad U_{R_H} = U_0 \frac{R_H}{R_i + R_H}$$

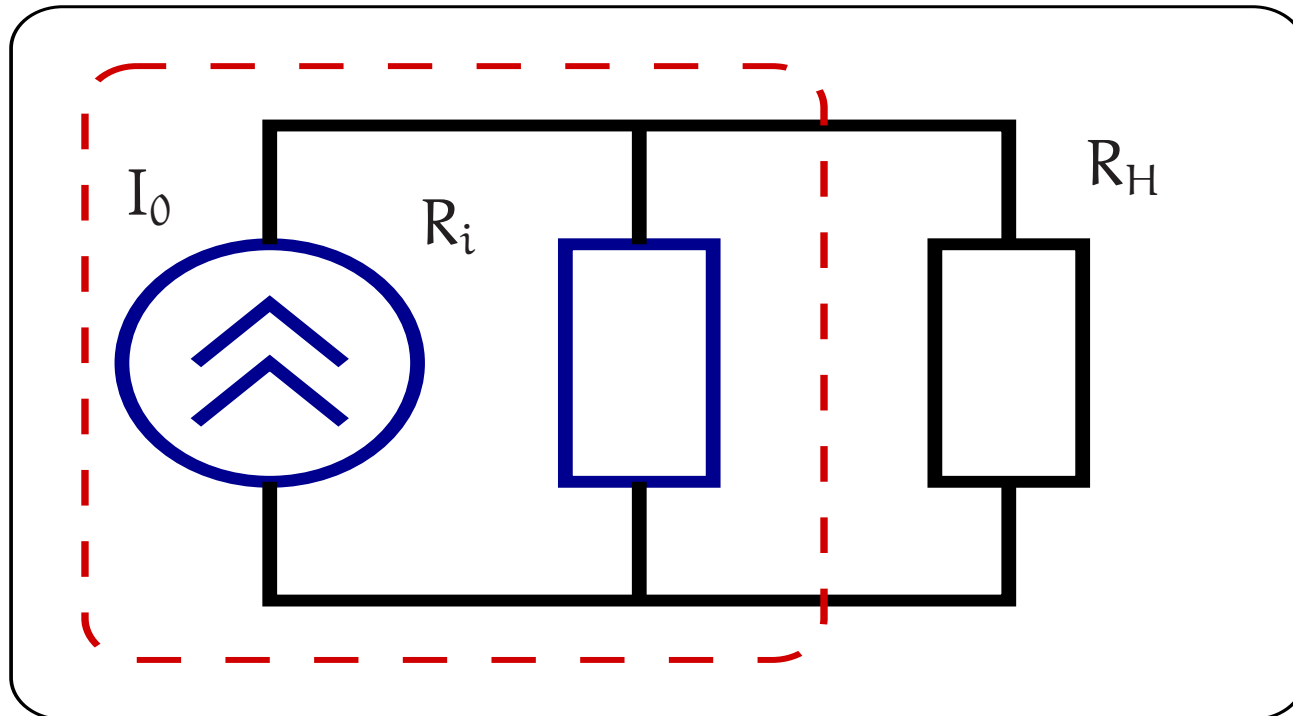
$$U_{R_H} \gg U_{R_i} \quad \text{если } R_i \ll R_H$$

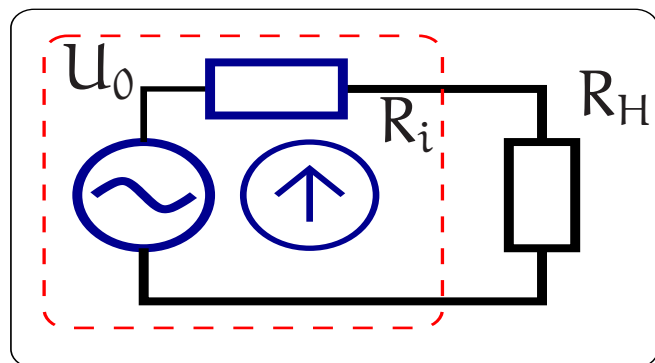


Генератор тока:

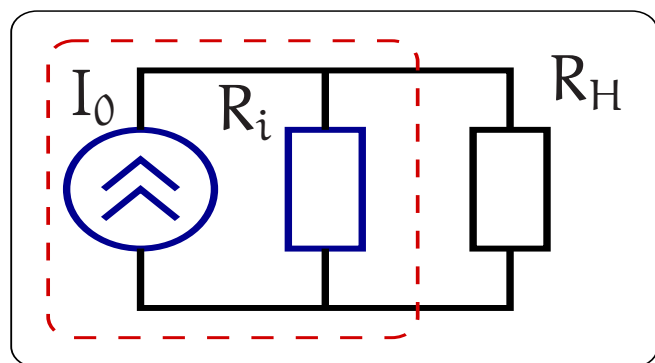
$$I_0 = I_{RH} + I_{R_i}, \quad I_{RH} = \frac{I_0 R_i}{R_i + R_H}, \quad I_{R_i} = \frac{I_0 R_H}{R_i + R_H},$$

$I_{RH} \gg I_{R_i}$ если $R_i \gg R_H$

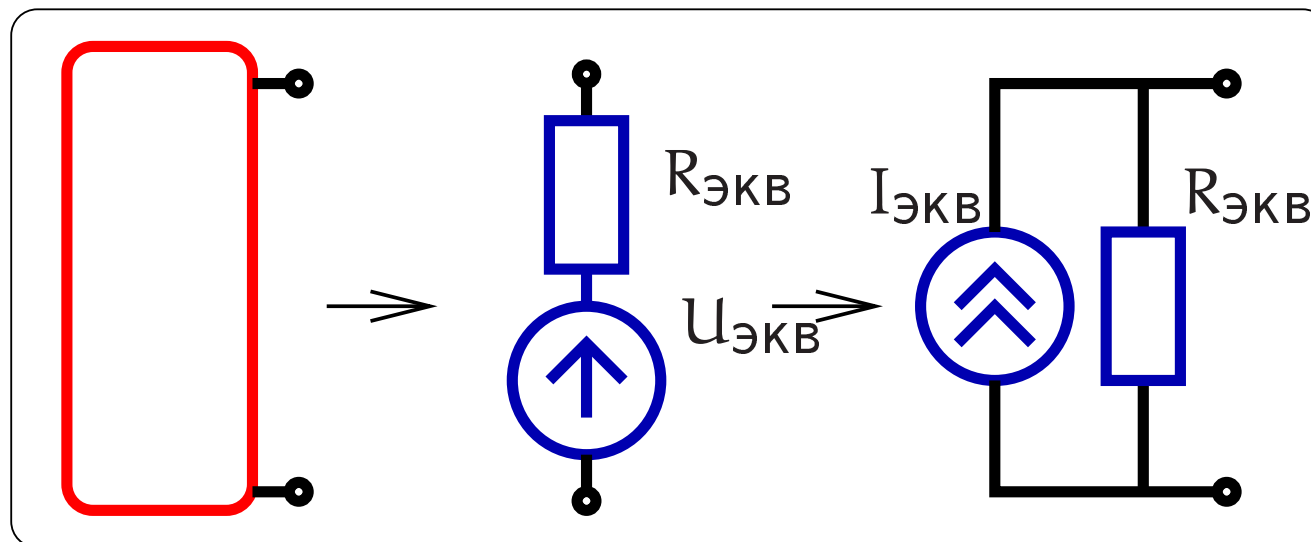


Сравним

$$U_{R_H} = U_0 \frac{R_H}{R_i + R_H}$$



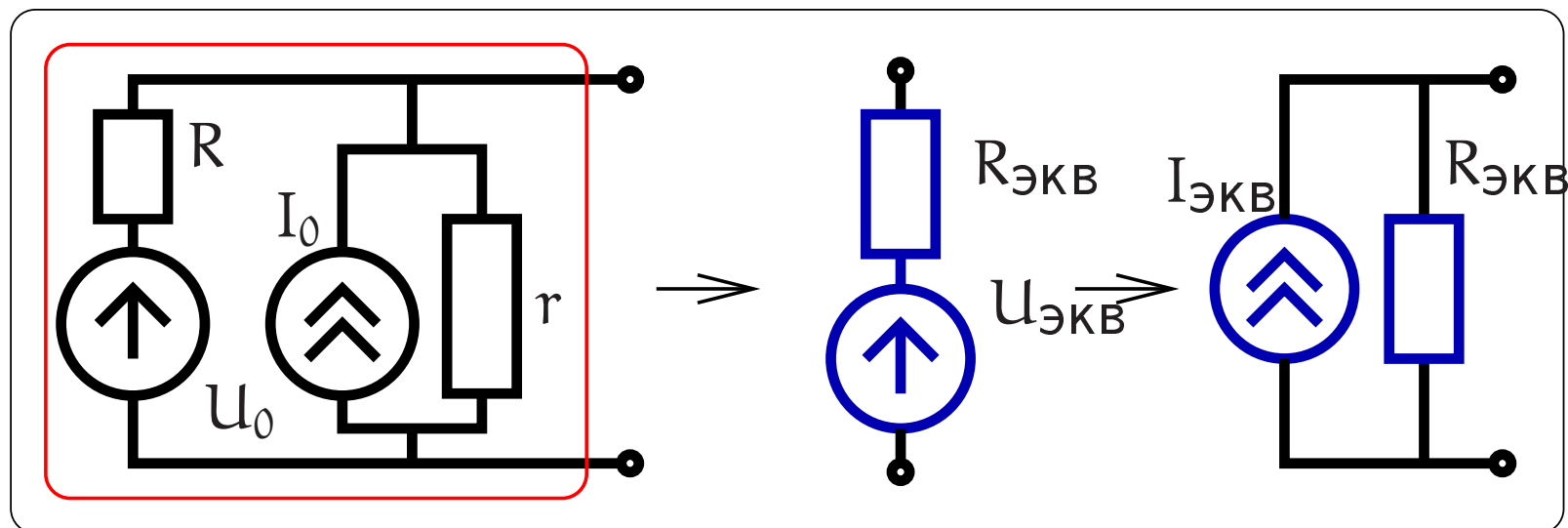
$$I_{R_H} = \frac{I_0 R_i}{R_i + R_H},$$
$$\Rightarrow U_{R_H} = I_0 R_i \frac{R_H}{R_i + R_H}$$

Теорема об эквивалентном генераторе

$$U_{\text{ЭКВ}} = U_{\text{ХХ}}, \quad I_{\text{ЭКВ}} = I_{\text{КЗ}}, \quad R_{\text{ЭКВ}} = \frac{U_{\text{ХХ}}}{I_{\text{КЗ}}}$$

Принцип суперпозиции справедлив
только в линейных системах !

Пример



$$U_{\text{xx}} = U_0 \frac{r}{r+R} + I_0 \frac{rR}{r+R}, \quad I_{\text{кз}} = I_0 + \frac{U_0}{R},$$

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{U_{\text{xx}}}{I_{\text{кз}}} = \frac{Rr}{R+r}$$

Анализ линейных систем

В общем случае анализ линейной системы сводится к решению системы **линейных** дифференциальных (или интегро-дифференциальных) уравнений с **постоянными** коэффициентами по правилам Кирхгофа. Задача простая, но громоздкая.

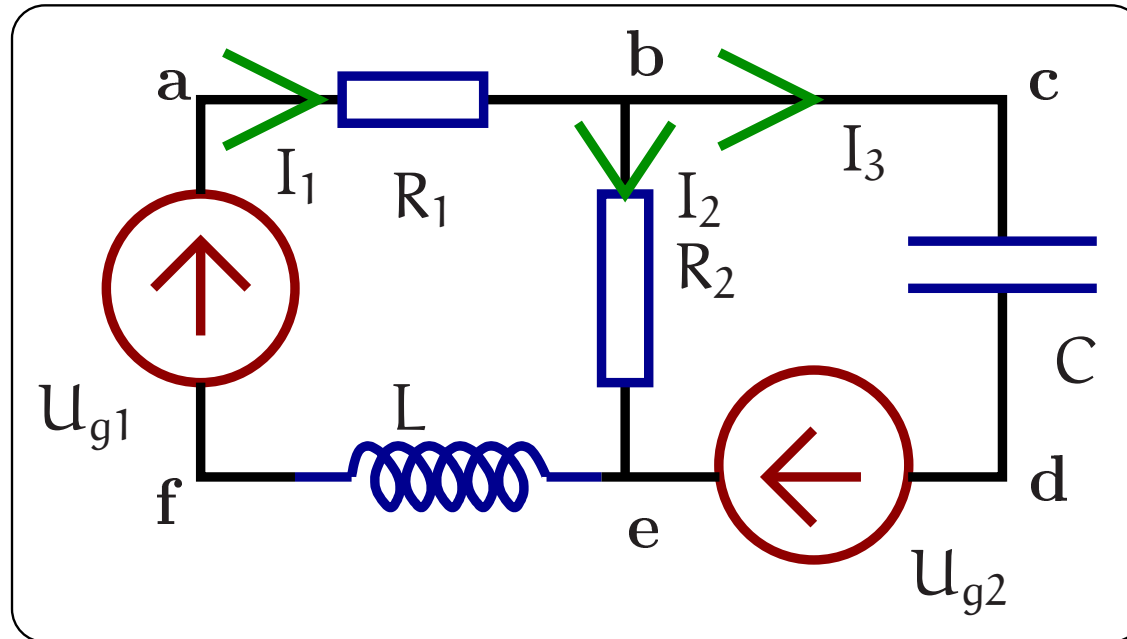
Для таких систем (вспомним математику) справедлив **принцип суперпозиции**

Принцип суперпозиции : *Если в цепи есть несколько источников тока или напряжения, то можно рассчитать отклик системы на каждый источник отдельно. Тогда отклик системы в целом будет просто равен сумме отдельно рассчитанных откликов.*

(Каждый источник “не мешает” и “не помогает” другому, а работает независимо).

Метод комплексных амплитуд — замена интегро-дифференциальных уравнений на алгебраические.

Пример (правила Кирхгофа):

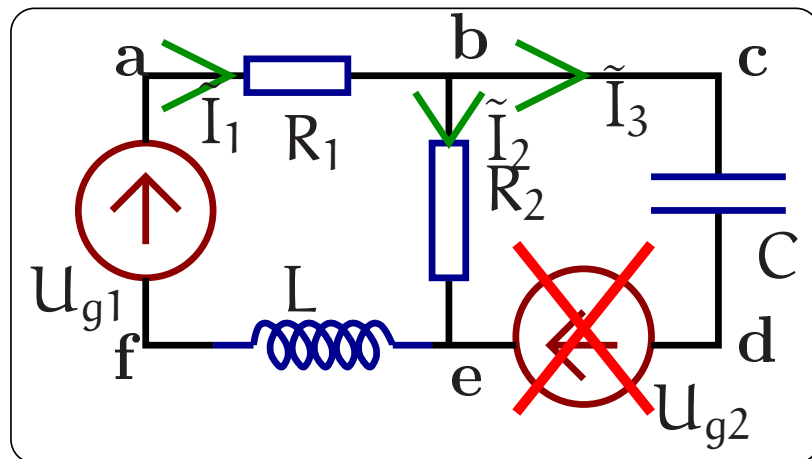


$$\text{Контур abefa: } U_{g1} = I_1 R_1 + I_2 R_2 + i\omega L I_1,$$

$$\text{Контур bcdeb: } U_{g2} = \frac{I_3}{i\omega C} - I_2 R_2,$$

$$\text{Узел b: } I_1 = I_2 + I_3$$

Пример (принцип суперпозиции):



$$U_{g1} = \tilde{I}_1 \left(R_1 + i\omega L + \frac{R_2 \frac{1}{i\omega C}}{R_2 + \frac{1}{i\omega C}} \right),$$

$$\tilde{I}_2 R_2 = \frac{\tilde{I}_1 R_2}{i\omega C \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C} \right)} \Rightarrow \text{Узел b: } \tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3,$$

Аналогично для токов \hat{I}_1 , \hat{I}_2 , \hat{I}_3 , вызванных U_{g2} .

Затем токи сложить (!)

Метод комплексных амплитуд

Пусть в цепи действуют источники
(напряжения или тока) на одной частоте

$$e_n = \tilde{E}_n \cos(\omega t + \phi_n), \quad i_n = \tilde{I}_n \cos(\omega t + \bar{\phi}_n) \quad (1)$$

Тогда **установившиеся** токи и напряжения будут иметь ту же частоту, но разные фазы.

Важно: все переходные процессы затухли.

Напоминание из ТФКП:

$$Z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\varphi}, \quad \varphi = \arg(Z) = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right),$$
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (\text{теорема Эйлера}).$$

Представим напряжение в виде:

$$\begin{aligned} U(t) &= |A| \cos(\omega t + \phi) = \Re(|A| e^{i(\omega t + \phi)}) = \\ &= \Re(|A| e^{i\phi} e^{i\omega t}) = \Re(\mathcal{A} e^{i\omega t}), \\ \mathcal{A} &= |A| e^{i\phi}, \quad \text{— комплексная амплитуда} \end{aligned}$$

Разложение сигнала по гармоническим составляющим

Интеграл Фурье:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{\text{ВХ}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$\tilde{u}_{\text{ВХ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВХ}}(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_{\text{ВЫХ}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$\tilde{u}_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ВЫХ}}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

В чем “удовольствие” от разложения в интеграл Фурье?

Свойства разложения Фурье

$$f(t) = A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow f(t) = \Re(\mathcal{A}e^{i\omega t}), \quad (\mathcal{A} = |A|e^{i\phi})$$

$$\frac{df(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \Re(i\omega \mathcal{A}e^{i\omega t})$$

$$\int f(t) dt = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \int f(t) dt = \Re\left(\frac{\mathcal{A}}{i\omega} e^{i\omega t}\right)$$

Дифф. и интегр. \Rightarrow умножение и деление

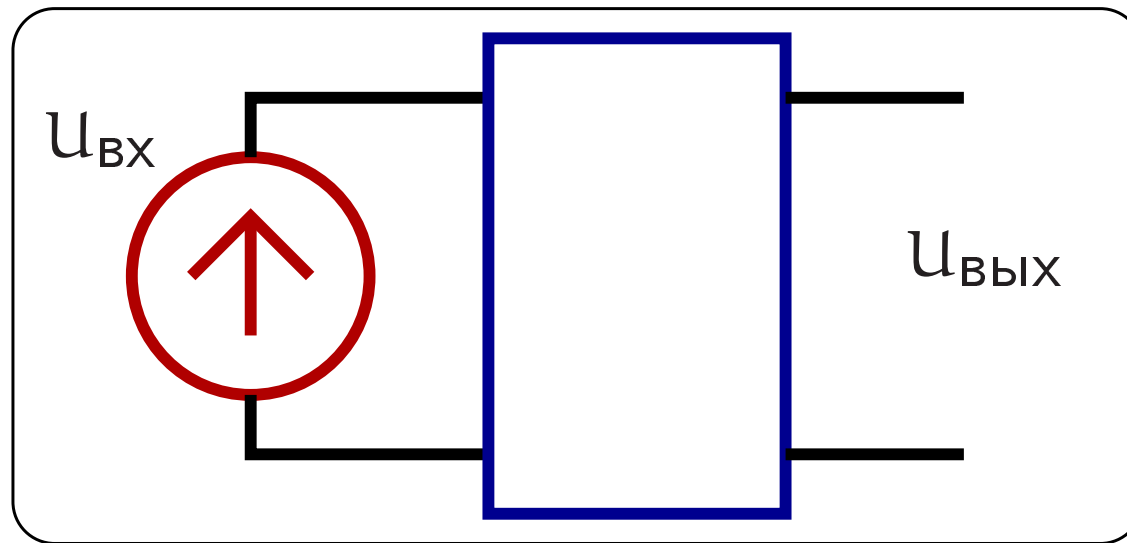
Свёртка

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau) u_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau) u_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau \right] dt = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} \chi(t - \tau) dt}_{\chi(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} u_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau}_{u_{\text{ВХ}}(\omega)} = \\ &= \chi(\omega) u_{\text{ВХ}}(\omega) \end{aligned}$$

Опять интегр. \Rightarrow умножение (!)

Характеристики линейных цепей



Примем, что генератор напряжения $U_{ВХ}$ имеет **нулевое** внутреннее сопротивление.

Нас интересует связь между $U_{ВХ}$ и $U_{ВЫХ}$.

1. Разложение по гармоникам

Ряд Фурье:

$$u_{\text{ВХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_{\text{ВХ}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

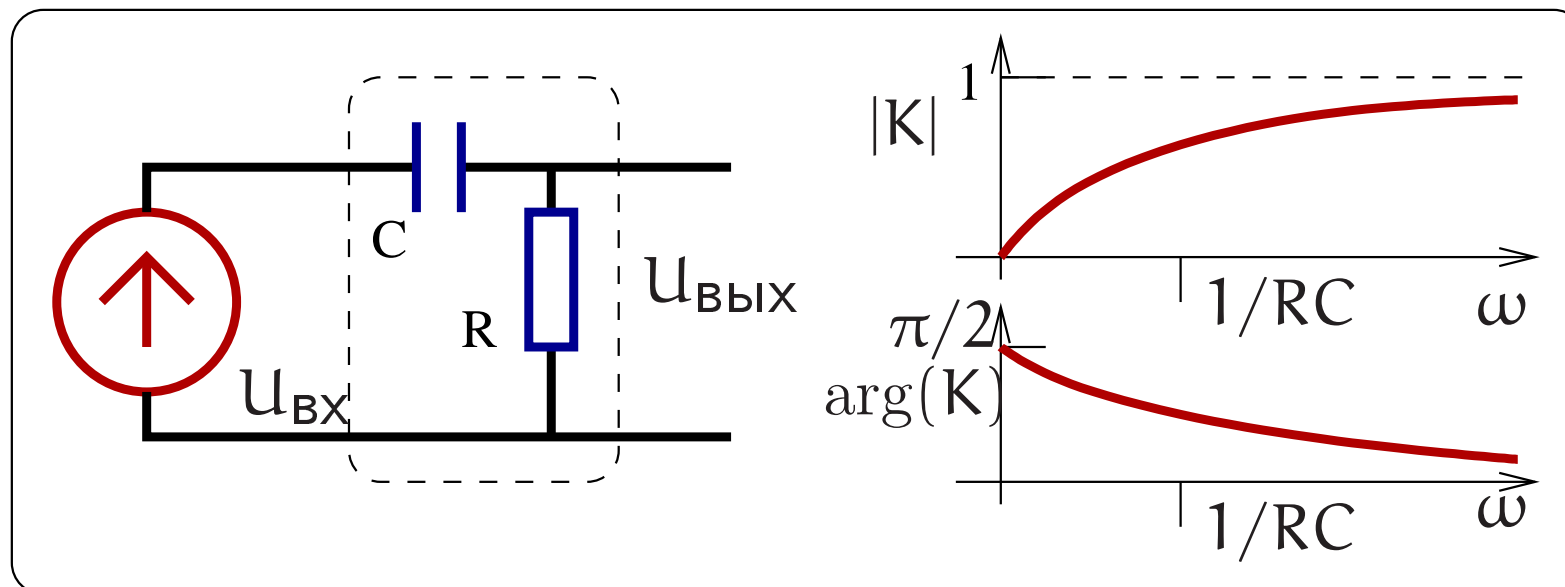
Коэффициент передачи:

$$K(\omega) = \frac{\bar{u}_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{\bar{u}_{\text{ВХ}}(\omega)} \text{ — комплексная величина,}$$

$|K(\omega)|$ — **АЧХ** (амплитудно-частотная характеристика),

$\arg K(\omega)$ — **ФЧХ** (фазово-частотная характеристика).

Пример:



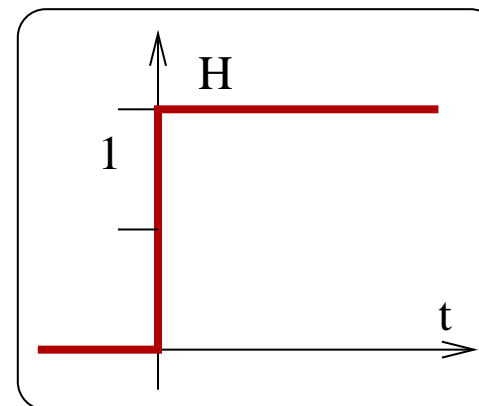
$$K(\omega) = \frac{IR}{I(R + \frac{1}{i\omega C})} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC},$$

$$|K(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \arg K(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\omega RC)$$

2. Разложение по ступенчатым функциям

$$\mathcal{H}(t) \equiv \mathbf{1}(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{если } t > 0, \\ 1/2 & \text{если } t = 0, \\ 0 & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

$$\partial_t \mathcal{H}(t) = \delta(t)$$

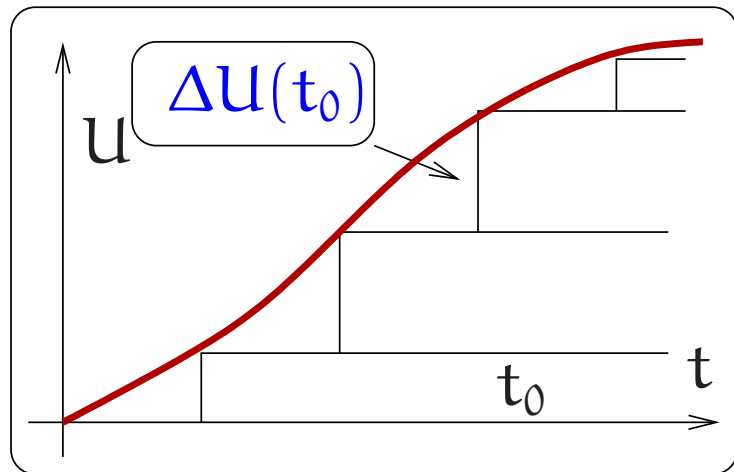


$$U_{\text{ВХ}}(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{U}_{\text{ВХ}}(\tau) \mathcal{H}(t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{U}_{\text{ВХ}}(\tau) \mathbf{h}(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

$\mathbf{h}(t)$ — переходная характеристика.

Образ \tilde{U} разложения по ступенькам $\mathcal{H}(t)$: $\tilde{U}(t) = \partial_t U(t)$



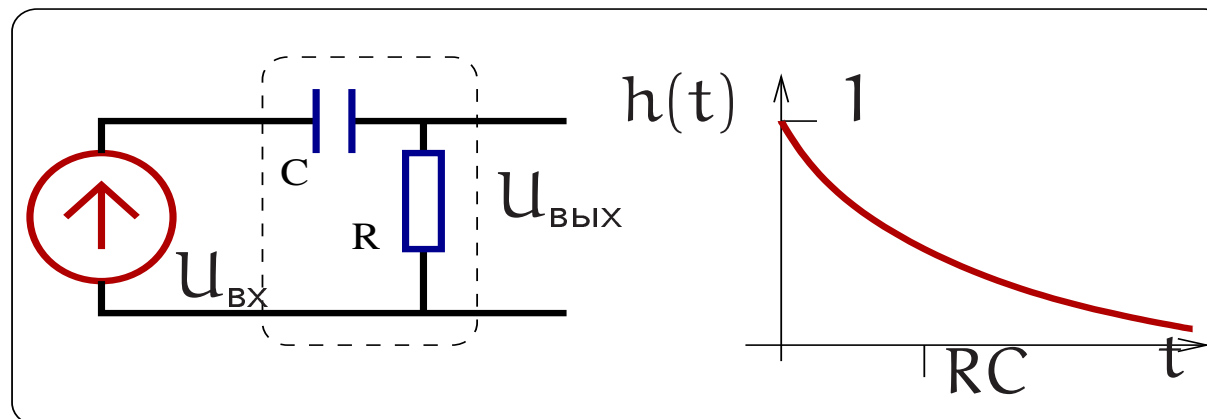
$$\Delta U(t_0) = U'(t) dt \times \mathcal{H}(t - t_0),$$

$$\tilde{U}_{\text{ВХ}}(t) = \partial_t U_{\text{ВХ}}(t),$$

Покажем это строго,
дифференцируя (2):

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{ВХ}}(t)}{dt} &= \partial_t \left(\int_{-\infty}^t \tilde{U}_{\text{ВХ}}(\tau) \mathcal{H}(t - \tau) d\tau \right) = \\ &= \tilde{U}_{\text{ВХ}}(t) \mathcal{H}(0) + \int_{-\infty}^t \tilde{U}_{\text{ВХ}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \\ &= \tilde{U}_{\text{ВХ}}(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \tilde{U}_{\text{ВХ}}(t) \end{aligned}$$

Пример:



$$U_{ВХ}(t) = RI(t) + \int_{-\infty}^t \frac{I(\tau)}{C} d\tau = R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} \quad (4)$$

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{U_{ВХ}(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau, \quad U_{ВХ}(\tau) = \mathcal{H}(\tau),$$

$$Q(t) = C (1 - e^{-t/RC}) \mathcal{H}(t), \quad (5)$$

$$U_{ВЫХ} = RI(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} = e^{-t/RC} \mathcal{H}(t), \quad (6)$$

Более формально выводим (6):

$$U_{\text{ВЫХ}} = R \partial_t Q = U_{\text{ВХ}}(t) - \int_{-\infty}^t U_{\text{ВХ}}(\tau) \partial_\tau (e^{-(t-\tau)/RC}) d\tau,$$

По частям:

$$\begin{aligned} &= U_{\text{ВХ}}(t) - U_{\text{ВХ}}(t) + \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)/RC} \partial_\tau U_{\text{ВХ}}(\tau) d\tau, \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{dU_{\text{ВХ}}(\tau)}{d\tau} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau \Rightarrow e^{-t/RC} \mathcal{H}(t), \end{aligned}$$

Здесь подставлено $U_{\text{ВХ}}(\tau) = \mathcal{H}(\tau)$:

$$h(t) = \mathcal{H}(t) e^{-t/RC}, \quad \frac{d\mathcal{H}(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau).$$

3. Разложение по δ -функциям (функция Грина)

$$U_{\text{ВХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{U}_{\text{ВХ}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau, \quad \boxed{\check{U}_{\text{ВХ}}(\tau) = U_{\text{ВХ}}(\tau)}$$

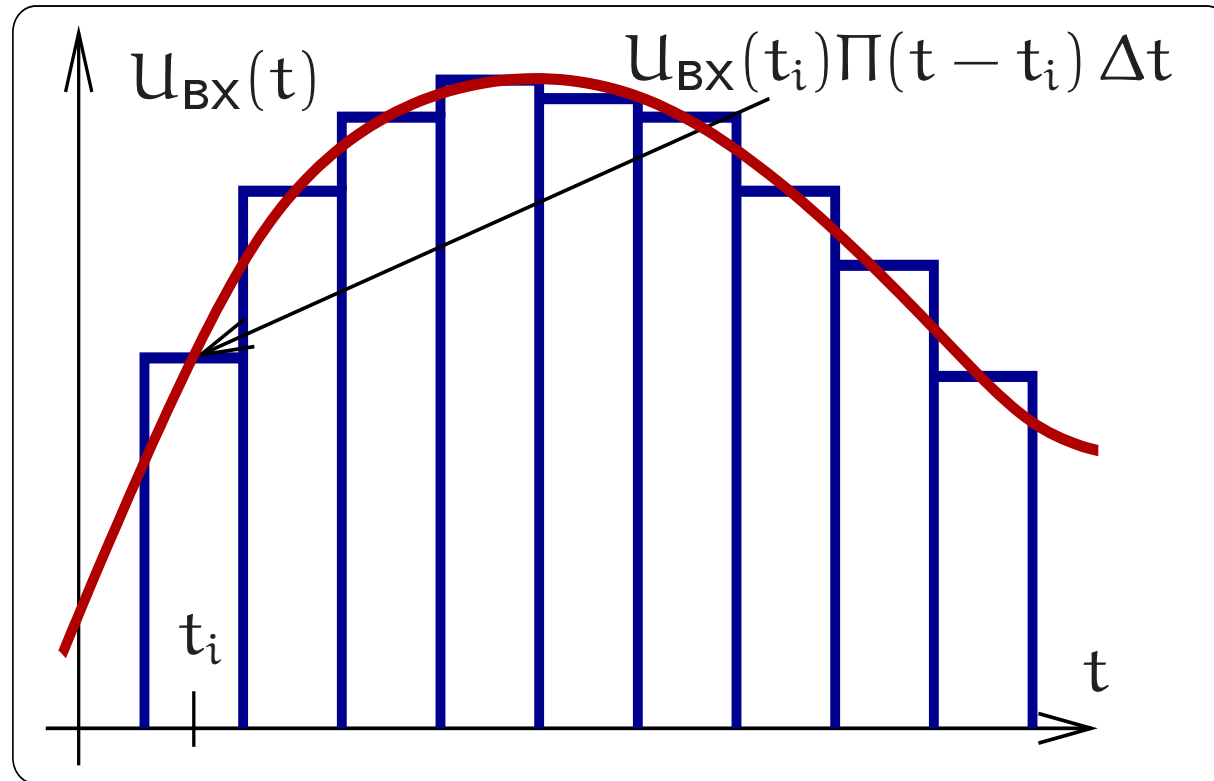
$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{U}_{\text{ВХ}}(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Импульсная характеристика $g(t)$ — отклик на δ -функцию

Связь g и h : поскольку

$$\frac{d\mathcal{H}(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g(\tau) = \frac{dh(\tau)}{d\tau}} \quad (7)$$

Образ $\check{U}_{ВХ}$ разложения по δ -импульсам: $\check{U}_{ВХ}(t) = U_{ВХ}(t)$



$$U_{ВХ} \simeq \sum_i U_{ВХ}(t_i)\Pi(t - t_i) \Delta t \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} U_{ВХ}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

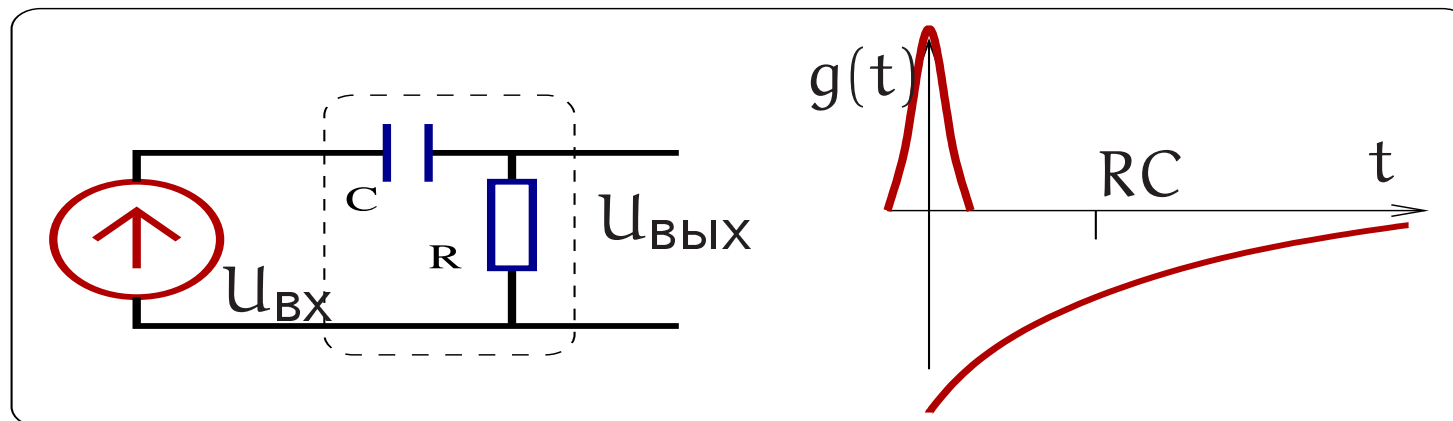
Представления δ -функции

$$\Pi_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{если } |t| \leq \Delta/2, \\ 0 & \text{если } |t| > \Delta/2 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{\Delta}(t) dt = 1$$

$$D(t, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\alpha^2}\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} D(t, \alpha) dt = 1,$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_{\Delta}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} D(t, \alpha)$$

Наш пример:



Дифференцирую (5) и подставляю $U_{ВХ}(t) = \delta(t)$:

$$Q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{U_{ВХ}(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau \quad (5),$$

$$U_{ВЫХ}(t) \equiv R \frac{dQ(t)}{dt} = U_{ВХ}(t) - \int_{-\infty}^t U_{ВХ}(\tau) e^{-(t-\tau)/RC} \frac{d\tau}{RC},$$

$$g(t) = \delta(t) - \frac{\mathcal{H}(t)}{RC} e^{-t/RC}.$$

Связь функций: $K(\omega)$, $h(t)$, $g(t)$

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (8)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (9)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{i\omega + \epsilon} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \epsilon \rightarrow \mathbf{0}, (10)$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (11)$$

Выведем формулы (8) и (9): Пусть $U_{ВХ}(t) = \delta(t)$.

Тогда

$$U_{ВХ}(t) = \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \text{т.е. } U_{ВХ}(\omega) = 1$$

$$\begin{aligned} U_{ВЫХ}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{U_{ВХ}(\omega)}_1 K(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{U_{ВХ}(\tau)}_{\delta(\tau)} g(t - \tau) d\tau = g(t). \end{aligned}$$

Выведем формулу (10):

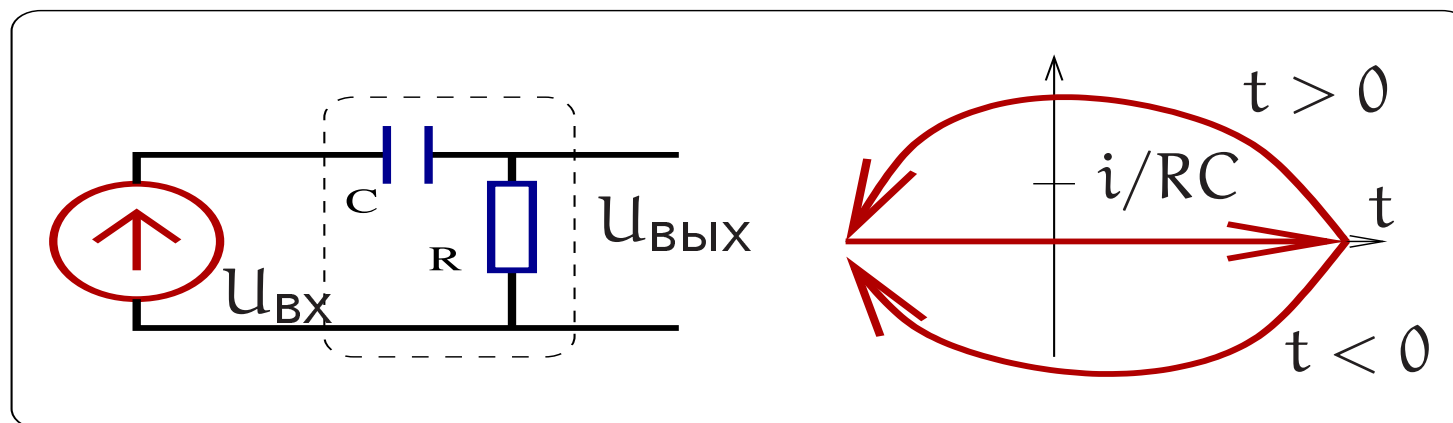
Формально $\mathcal{H}(t)$ не имеет Фурье представления, поскольку не интегрируема в беск. пределах.

$$U_{\text{ВХ}} = \mathcal{H}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon t}, \quad t > 0,$$

$$\mathcal{H}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(i\omega + \epsilon)\tau} d\tau = \frac{1}{i\omega + \epsilon} = U_{\text{ВХ}}(\omega),$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \int \underbrace{\frac{1}{i\omega + \epsilon}}_{U_{\text{ВХ}}(\omega)} K(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = h(t)$$

Наш пример:



$$K(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}, \quad (12)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega + \epsilon} \frac{i\omega RC}{(1 + i\omega RC)} \frac{d\omega}{2\pi} = \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{RC e^{i\omega t}}{(1 + i\omega RC)} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i(\omega - i/RC)} \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= 2\pi i \text{ Выч}(\omega = i/RC) = \mathcal{H}(t) e^{-t/RC}. \end{aligned} \quad (14)$$

Наш пример. Ищем $g(t)$:

$$K(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} = 1 - \frac{1}{1 + i\omega RC}, \quad (15)$$

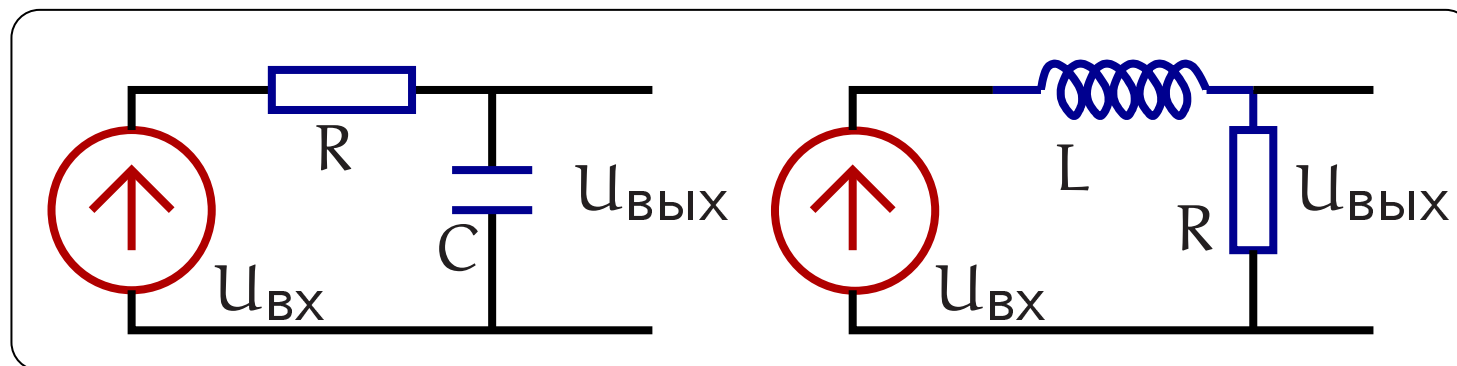
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + i\omega RC} \right) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \quad (16)$$

$$= \delta(t) - \frac{\mathcal{H}(t)}{RC} e^{-t/RC}, \quad (17)$$

Иначе, (18)

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{\mathcal{H}(t)}{RC} e^{-t/RC}. \quad (19)$$

Другие примеры:



$$K_{RC}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}, \quad K_{LR}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega L/R},$$

$$K(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau^*}, \quad \tau^* = RC = \frac{L}{R},$$

τ^* — время релаксации цепочки.

Вычисляем переходную и импульсную характеристики:

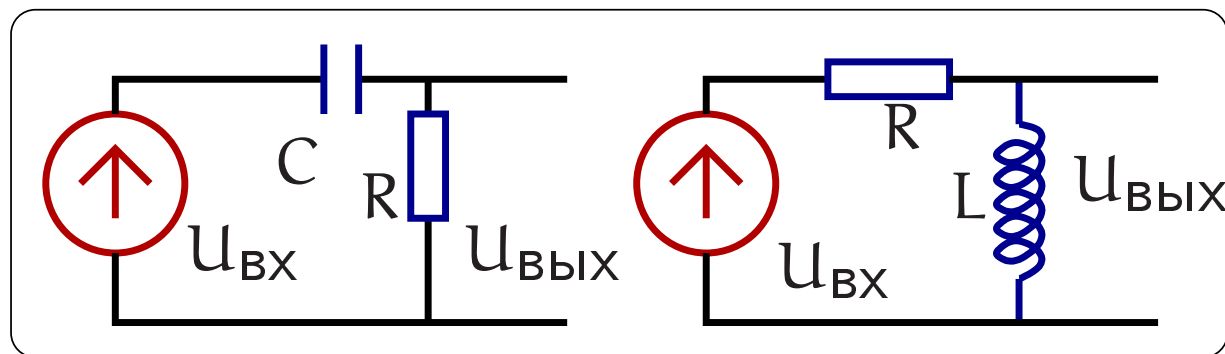
$$\begin{aligned}
 h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega + \epsilon)(1 + i\omega\tau^*)} \frac{d\omega}{2\pi} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left(\frac{1}{i(\omega - i\epsilon)} - \frac{1}{i(\omega - i/\tau^*)} \right) \frac{d\omega}{2\pi} = \\
 &= \mathcal{H}(t) (1 - e^{-t/\tau^*}),
 \end{aligned}$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau^*} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\mathcal{H}(t)}{\tau^*} e^{-t/\tau^*},$$

Иначе:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \underbrace{\frac{d\mathcal{H}(t)}{dt}}_{\delta(t)} \underbrace{(1 - e^{-t/\tau^*})}_{=0 \text{ при } t=0} + \frac{\mathcal{H}(t)}{\tau^*} e^{-t/\tau^*}.$$

Дифференцирующая цепочка



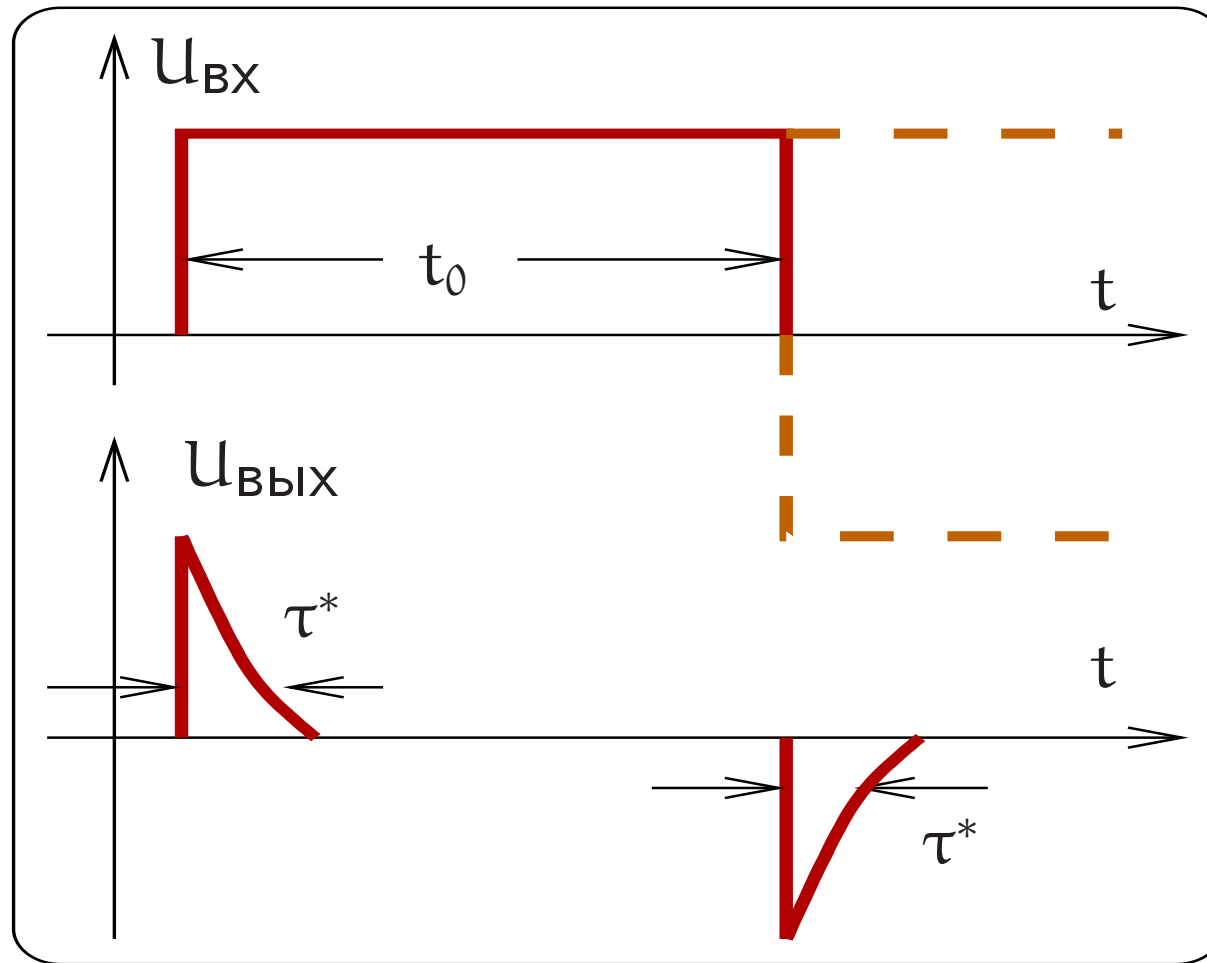
$$K(\omega) = \frac{i\omega\tau^*}{1 + i\omega\tau^*}, \quad \tau^* = RC = \frac{L}{R},$$

$$h(t) = \mathcal{H}(t) e^{-t/\tau^*}, \quad g(t) = \delta(t) - \mathcal{H}(t) e^{-t/\tau^*}.$$

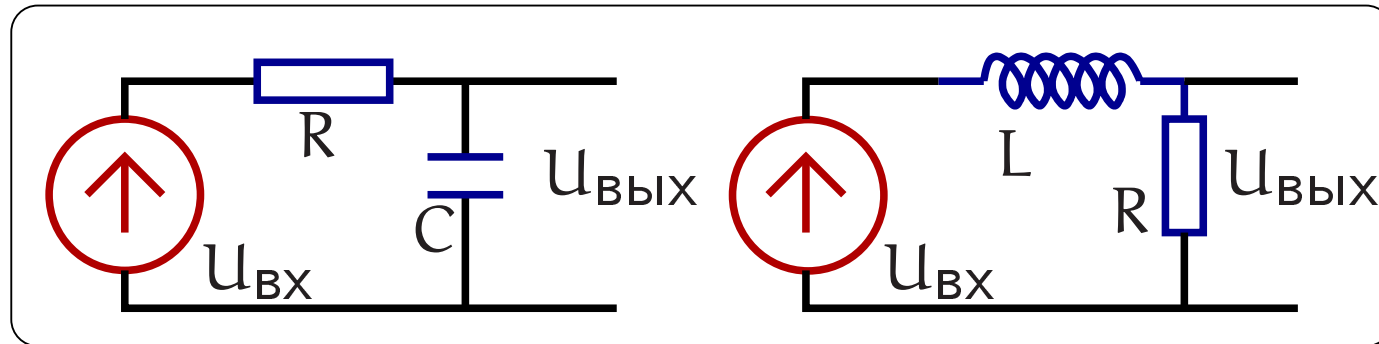
Условия “дифференцируемости”:

$$\omega\tau^* \ll 1, \quad t_{\text{хар}} \gg \tau^*$$

Дифференцирование прямоугольного импульса



Интегрирующая цепочка



$$K(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau^*}, \quad \tau^* = RC = \frac{L}{R},$$

$$h(t) = \mathcal{H}(t) (1 - e^{-t/\tau^*}), \quad g(t) = \frac{\mathcal{H}(t)}{\tau^*} e^{-t/\tau^*}.$$

Условия "интегрируемости":

$$\omega\tau^* \gg 1, \quad t_{\text{хар}} \ll \tau^*$$

Пример: интегрирование прямоугольного импульса