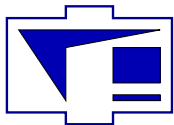


Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова



Физический факультет
Кафедра физики колебаний

И.А. Биленко,
Ю.И. Воронцов,
С.П. Вятчанин

Введение в радиофизику

Москва 2016

Биленко Игорь Антонович, Воронцов Юрий Иванович, Вятчанин Сергей Петрович Введение в радиофизику. М.: Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2016. - 204 стр.

Данное пособие представляет собой развернутый конспект общего курса лекций по радиофизике, читаемых на физическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова. Основой этого предмета был оригинальный курс, разработанный профессорами физического факультета В.Б. Брагинским и А.С. Логгиновым. В нем рассматриваются фундаментальные основы функционирования радиотехнических цепей и передачи сигналов, методы их анализа. Авторы выражают глубокую благодарность профессорам М.Л. Городецкому, Ф.Я. Халили, всему коллективу кафедры физики колебаний физического факультета за активное участие в подготовке и совершенствовании пособия.

Рассчитано на студентов физико-математических специальностей.

Утверждено Ученым советом физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Авторы — сотрудники кафедры физики колебаний физического факультета МГУ

Рецензенты: доктор технических наук, зам. директора ВНИИМС Ф.В.Булыгин, к.ф.-м.н., доцент СПбГУ Г.А.Дружинин.

© Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова 2016

© И.А.Биленко, Ю.И.Воронцов, С.П.Вятчанин, 2016

Оглавление

1	Понятие и представление сигнала	7
1.1	Введение	7
1.2	Сигнал и методы его описания	11
1.2.1	Спектральный анализ	13
1.2.2	Спектры модулированных сигналов	25
1.2.3	Временной метод представления сигнала	29
2	Линейные системы	31
2.1	Преобразование сигнала в линейных системах	31
2.1.1	Условие квазистационарности	31
2.1.2	Простейшие линейные элементы	32
2.1.3	Источник сигнала	35
2.1.4	Метод комплексных амплитуд и спектральный метод	38
2.1.5	Характеристики линейных систем	39
2.1.6	Связь функций $K(\omega)$, $h(t)$, $g(t)$	44
2.2	Воздействие сигналов на линейные R, L, C цепи	47
2.2.1	Воздействие сигнала на простейшие RC и LR цепи	48
2.2.2	Резонанс. Действие электрических сигналов на LRC цепи	52
2.2.3	Добротность	66
2.2.4	Емкостной датчик	68
2.2.5	Связанные контуры	69
2.2.6	Трансформатор	73
2.3	Передача сигналов	75
2.3.1	Модель длинной линии	76
2.3.2	Волноводные системы	83
2.3.3	Дипольная антенна	84
2.3.4	Излучающие системы. Радиоинтерферометрия	88
3	Нелинейные системы	93
3.1	Свойства и методы анализа нелинейных систем	93
3.2	Нелинейный двухполюсник	95
3.3	Электронный транспорт в твердых телах	98
3.4	Диоды и их применение	107
3.4.1	Принцип работы полупроводникового диода	107
3.4.2	Модуляция	110
3.4.3	Получение АМ сигнала	111

3.4.4	Детектирование АМ сигнала	112
3.4.5	Фазовое детектирование	114
3.4.6	Частотное детектирование	116
3.4.7	Синхронное детектирование	117
3.5	Транзисторы и их применение	118
3.5.1	Биполярный транзистор	118
3.5.2	Полевой транзистор	123
3.5.3	Эквивалентные схемы усилителей	126
3.5.4	Обратная связь в усилителях	127
3.5.5	Операционные усилители	130
3.5.6	Полосовые усилители на ОУ.	134
3.6	Генераторы.	135
3.6.1	Стационарные автоколебания	136
3.6.2	RC-генератор	141
3.6.3	Релаксационный генератор	143
3.6.4	Мультивибратор на операционном усилителе	144
3.6.5	Кварцевый генератор	144
4	Шумы в радиофизических системах.	147
4.1	Случайные процессы	147
4.1.1	Основные характеристики случайных процессов.	147
4.1.2	Характеристики стационарного шума.	148
4.1.3	Гауссовы шумы.	149
4.1.4	Спектральная плотность мощности шума	150
4.1.5	Теорема Винера - Хинчина	153
4.1.6	Белый шум	154
4.1.7	Преобразование шумов в линейных цепях.	155
4.2	Основные источники шумов	156
4.2.1	Тепловой шум	156
4.2.2	Дробовой шум	158
4.2.3	Генерационно-рекомбинационный шум	160
4.2.4	Фликер-шум	161
4.3	Шумы в усилителях сигналов	161
5	Цифровые системы	165
5.1	Элементы теории информации	165
5.1.1	Аналоговый, дискретный и цифровой сигнал	165
5.1.2	Теорема Котельникова	166
5.1.3	Дискретное преобразование Фурье	169
5.1.4	Количество информации	172
5.1.5	Передача информации через канал связи	173
5.1.6	Шумы квантования	174
5.1.7	Различные каналы передачи информации	175
5.1.8	Надежность передачи информации	176
5.1.9	Хранение информации	177
5.2	Коды	177
5.3	Основы Булевой алгебры	179

<i>ОГЛАВЛЕНИЕ</i>	5
5.4 Основные логические элементы	182
5.5 ЦАП и АЦП	184
5.6 Основы z-преобразования	188
5.7 Цифровая фильтрация	190
5.8 Понятие об оптимальной фильтрации	194
6 Приложение	199
6.1 Обобщенные функции	199
6.1.1 Дельта-функция и Фурье образ	199
6.1.2 Функция Хевисайда (“ступенька”) и ее Фурье образ	200
6.1.3 Связь между дельта-функцией и функцией Хевисайда	202
Литература	203

Глава 1

Понятие и представление сигнала

1.1 Введение

Этимологически слово “радиофизика” происходит от латинского *radiare* — излучать, испускать лучи. Однако предмет радиофизики гораздо шире, чем излучение радиоволн. Его можно определить как изучение процессов возбуждения, преобразования, распространения, усиления и регистрации электромагнитных сигналов. В общем смысле сигнал — это любой способ передачи информации, однако в радиофизике в качестве сигналов мы будем рассматривать физические величины, изменяющиеся со временем: токи, напряжения, напряженности электрического и магнитного полей.

Основы радиофизики заложены трудами известных естествоиспытателей. Среди них одним из первых должно быть названо имя Майкла Фарадея, самоучки, ставшего профессором Королевского института в 30 лет. В 1831 году он формулирует закон электромагнитной индукции, а в 1832 году высказывает предположение о волновом процессе распространения электромагнитных волн с конечной скоростью. Это предположение, содержащееся в труде “Новые воззрения, подлежащие в настоящее время хранению в запечатанном конверте в архивах Королевского общества”, было обнаружено в этих архивах в 1938 году.

1853 год — Уильям Томсон (лорд Кельвин) исследует явление резонанса в колебательном контуре и устанавливает значение его резонансной частоты.

1873 год — Джеймс Кларк Максвелл в “Трактате об электричестве и магнетизме” предсказывает существование электромагнитных волн в открытом пространстве. В настоящее время его труд характеризует высказывание: “Нет ничего более практичного, чем хорошая теория”.

1887 год — Генрих Герц создает источник электромагнитных волн — вибратор Герца, а в 1888 году экспериментально подтверждает теорию Максвелла, регистрируя существование электромагнитных волн и устанавливая их основные свойства — наличие поляризации, законы отражения и преломления, интерференции. Методы, которые сейчас можно отнести к началам радиолокации, были применены Герцем для установления зависимости интенсивности принимаемого излучения от взаимного расположения металлической печи, находящейся в комнате, где проводились опыты, и приемника излучения. По мнению Г. Герца, все эти результаты обладали малой практической значимостью. Ему удалось произвести и визуализи-

ровать электрические волны, распространяющиеся на прямолинейных проводах и в свободном пространстве. Нередко это были крохотные искорки, отыскиваемые с лупой в затемненной аудитории, которые убедительно подтверждали существование узлов и пучностей электрических волн.

Двенадцать лет спустя в своей вступительной лекции в Лейпциге Больцман сказал, что этот эксперимент “нанес почтенной теории электрического флюида такой удар, от которого она уже не смогла оправиться”.

Чтобы неопровержимо доказать единую сущность световых и электрических волн, Г. Герц последовательно повторил с электромагнитными волнами все основные оптические опыты по изучению отражения, преломления и по определению поляризации. После первых неудач он достиг цели при помощи случайно обнаруженного им способа возбуждения коротких волн. С двумя большими зеркалами — цилиндрами из оцинкованного железа, — используя пучки электромагнитных лучей, он мог вызывать эффект прожекторов, подобный оптическому. При помощи вылитой из твердой смолы диэлектрической призмы 1,5 м высотой и 6 центнеров весом он добился отклонения электромагнитного волнового пучка, соответствующего преломлению световых лучей в стеклянной призме. Наконец, он смог убедиться и в поляризации электрических волн, используя проволочную сетку. Благодаря опытам с электромагнитными волнами стало ясно, что невидимые электрические волны, которые распространяются по проводам и в свободном пространстве со скоростью света, ведут себя так же, как и световые волны. Они различаются только длиной волны, правда, весьма значительно: длины электрических волн в опытах Герца в миллион раз превышали длины световых волн.

Таким образом, единая сущность света и электричества, которую Фарадей предполагал уже в 1845 году, а Максвелл теоретически обосновал в 1862 году, была подтверждена экспериментально. Оптика могла быть теперь включена в электродинамику так же, как акустика давно уже вошла в механику.

1890 год — англичане Э. Бранли и француз О. Лоджи независимо создают детектор электромагнитных волн — когерер, представляющий собой заполненную опилками железа стеклянную трубку с металлическими электродами, сопротивление которой изменялось под действием электромагнитных волн.

1892 — год А. Риги, используя сферический резонатор, демонстрирует генератор электромагнитных волн с длиной волны 20 см.

1888 — 1889 годы — Александр Степанович Попов в публичных лекциях описывает и повторяет опыты Герца и формулирует принципы использования электромагнитных волн для передачи сигналов на расстояние.

7 мая 1895 года — на заседании Русского физико-химического общества А.С. Попов демонстрирует прибор для передачи электромагнитных сигналов на расстояние и говорит о его практической значимости “...как только будет найден источник электромагнитных колебаний, обладающих достаточной энергией”.

1896 год — Гугличелмо Маркони патентует способ передачи сообщений с помощью электромагнитных волн и в 1909 году получает за это Нобелевскую премию вместе с Карлом Фердинандом Брауном (к этому времени А.С. Попов скончался и поэтому уже не мог быть отмечен Нобелевской премией, которая вручается только здравствующим ученым). Стоит заметить, что сам Маркони неоднократно подчеркивал первенство работ А.С. Попова.

В 1900 году устанавливается радиотелеграфная связь между Европой и Америкой. 1904 год — на смену когереру приходит новый детектор электромагнитных волн — вакуумный диод, изобретенный Джоном Флемингом.

1905 год, май — русско-японская война. Русская эскадра Рождественского перехвачена в Цусимском проливе и разгромлена эскадрой адмирала Того, получившего радиосообщение о приближении противника. Используя радиосвязь, японцы сосредоточивали свои силы на решающих направлениях сражения. Это первый пример успешного применения радиосвязи в военных целях.

1905 год — американская компания Quintad Iron Works, Boston создает радиоуправляемую торпеду и . . . продает эту разработку Японии “в силу малого военного значения”.

1906 год — Ли де Форест создает вакуумный триод — первый управляемый вентильный элемент, без которого невозможно создание усилителя.

1913 — 1914 годы — Николай Дмитриевич Папалекси создает ламповый генератор колебаний.

1925 — 1928 годы — адмирал Аксель Иванович Берг создает теорию лампового генератора.

1929 — 1930 годы будущий академик Александр Александрович Андронов создает теорию автоколебательных систем. Под его руководством строятся радиостанции мощностью 100 — 500 кВт.

1932 год — Дмитрий Апполинариевич Рожанский формулирует принцип группировки или фазовой синхронизации электронных пучков, положенный в основу построения генераторов СВЧ колебаний — клистронов, магнетронов и др., а также ускорителей — циклотронов, синхротронов . . . Переход к объемным резонаторам, использование электромагнитных полей для фазировки движущихся заряженных частиц — ускорители, лампы обратной волны, лампы бегущей волны, лазеры на свободных электронах.

1935 год — Юрий Борисович Кобзарев закладывает основы радиолокации. К сожалению, Кобзарев делал ставку на “человеческий фактор” — он предполагал, что приближение цели обнаружит высококвалифицированный радист, слушающий эфир. Радиолокаторы в современном виде были созданы в Англии перед второй мировой войной.

1939 -1940 год — Битва за Англию. Бомбардировки английских городов немецкими самолетами и “оружием возмездия” — ракетами ФАУ-1 и ФАУ-2. В борьбе с ними англичанами впервые были успешно применены только что разработанные радиолокационные средства обнаружения летательных аппаратов — радары. Их сердцем являлся сверхсекретный генератор электромагнитных колебаний сверхвысокой частоты (СВЧ) — магнетрон (в настоящее время он вошел в наши дома как основной элемент микроволновой печи). Появление у англичан ночных истребителей, оснащенных радиолокационным оборудованием, явилось шоком для германских бомбардировщиков.

Клод Шеннон и Норберт Винер в США, создавая системы управления огнем зенитной артиллерии, закладывают основы кибернетики. Созданы первые счетно-решающие машины. Их основным элементом служат электромагнитные реле, на смену которым позже приходят электро-вакуумные диоды и триоды, позволяющие создавать более быстродействующие вычислительные машины. При реализа-

ции атомного проекта “Манхэттен” США используют электронно-вычислительную машину “ЭНИАК”, состоящую из 18 тыс. вакуумных ламп и потребляющую приблизительно 40 КВт электрической мощности.

1925 г. — идея полевого транзистора изложена в пяти(!) патентах на создание твердотельного триода, полученных американцем польского происхождения Лилиенфельдом (Proceeding IEEE, 50 лет изобретения транзистора). Реализация этих идей в то время оказалась невозможной из-за отсутствия понимания (а следовательно, и контроля) процессов, происходящих на поверхности полупроводников, и в силу неразвитости соответствующей технологии.

1947 год — Уильям Шокли, Джон Бардин и Уильям Браттейн в поисках такого твердотельного триода обнаруживают усилительный эффект в полупроводниковой структуре, названной ими биполярным транзистором. В 1956 году эта работа была отмечена Нобелевской премией. По сути она совершила переворот в технике обработки информации. Одновременно и независимо транзистор создают в Германии, но приоритет упущен (они опоздали с публикацией на несколько месяцев!).

Новые идеи и их реализации наращивают темп.

1954 год — Н.Г. Басов, А.М. Прохоров и Ч. Таунс получают Нобелевскую премию за создание генератора микроволнового излучения — мазера.

1959 год — Джон Килби патентует идею создания интегральной полупроводниковой схемы — Нобелевская премия 2000 года.

1960 год — Теодор Мейман создает газовый HeNe лазер — Нобелевская премия 1964 года.

1962 год и далее: туннельный диод Есаки; полупроводниковый GaAs лазер; эффект Ганна; нелинейная оптика; эффект Джозефсона — Нобелевская премия 1973 г.; туннельный микроскоп — Нобелевская премия 1986 г.. Открытие высокотемпературной сверхпроводимости...

Нелинейная оптика, оптическая электроника, интегральная оптика, криоэлектроника — бурное перенесение идей радиофизики в микроволновый и оптический диапазоны.

Развитие идей и методов радиофизики тесно связано с необходимостью развития средств передачи информации:

1. Проводная связь и наземная радиосвязь.
2. Телевидение.
3. Радиолокация.
4. Вычислительная техника.
5. Космическая связь.
6. Интернет, мобильная связь.

Радиофизика также обеспечивает потребности в развитии методов и средств физических измерений. Она позволяет “потрогать” исследуемую систему, используя различные виды взаимодействий, существующих в природе. Ярким примером этого служит возникшая в 80-х годах прошлого столетия область сканирующей зондовой микроскопии, насчитывающая в настоящее время более 20 вариантов

реализации, основанных, в частности, на ван-дер-ваальсовом, кулоновском, магнитном и других взаимодействиях.

Применение радиофизических методов привело не только к уникальным практическим результатам, но и к фундаментальным открытиям, среди которых можно отметить:

1. Открытие нейтрона (плюс все эффекты рождения и взаимодействия элементарных частиц).
2. Реликтовое электромагнитное излучение.
3. Пульсары, рентгеновские звезды, всплески гамма-излучения.
4. Открытие электронного парамагнитного резонанс (ЭПР), ядерного магнитного резонанса (ЯМР), электронного квадрупольного резонанса (ЭКР)...

Среди нобелевских лауреатов, работы которых можно отнести к радиофизике или использованию радиофизических методов, следует отметить следующих ученых:

Г. Маркони	Ч. Таунс	А. Живер	А. Рамси
К. Браун	Н. Басов	Б. Джозефсон	Г. Биннинг
У. Шокли	А. Прохоров	А. Шавлов	Х. Ререр
Дж. Бардин	А. Кастлер	Н. Блумберген	Дж. Тейлор
У. Братейн	Л. Есаки	К. Сибган	Р. Халс

Предмет радиофизики аккумулирует законы, понятия и математический аппарат, разработанные в различных разделах физики и математики. Курс радиофизики на физическом факультете МГУ базируется на курсах "Теория электричества" "Математический анализ" "Линейная алгебра" "Теория функций комплексного переменного". В свою очередь, радиофизические методы применяются в оптике, электродинамике, квантовой механике, а радиофизические модели используются практически во всех областях физики, включая физику твердого тела, биофизику, атомную и ядерную физику.

Радиофизика изучает системы, которые могут быть классифицированы по различным признакам. Это разделение систем на линейные и нелинейные, на сосредоточенные и распределенные. Линейные системы рассматриваются в первой главе, нелинейные — во второй. Практически все разделы описывают сосредоточенные системы, распределенные системы обсуждаются в разделе 2.3.

1.2 Сигнал и методы его описания

Под сигналом в широком смысле понимают любой физический процесс, несущий какую-либо информацию. В радиофизике в качестве сигналов выступают переменные токи, напряжения, электромагнитные волны.

Зависимость параметров сигналов от времени в радиофизике описывается функциями, заданными на ограниченном интервале аргумента, поскольку все реально существующие сигналы имеют начало и конец. Функции должны быть достаточно гладкими, поскольку мгновенное изменение сигнала на практике означает его бесконечную мощность.

По характеру предсказуемости сигналы различают на детерминированные и случайные. Параметры детерминированного сигнала (например, амплитуда, положение во времени) точно известны еще до его регистрации. Такие сигналы описываются соответствующими детерминированными функциями. Реальные сигналы строго детерминированными не бывают. Например, даже у самых стабильных атомных стандартов частоты присутствуют флуктуации амплитуды и фазы. Фундаментальные причины таких флуктуаций будут рассмотрены в разделе 4.1. Тем не менее, на практике, с определенными допущениями, флуктуациями часто можно пренебрегать и считать исследуемый сигнал детерминированным.

В процессе распространения сигналов через любую систему (цепь, устройство или среду) происходит их изменение. Если различные сигналы, проходя через одну и ту же систему, не влияют друг на друга, такая система называется **линейной** (*принцип суперпозиции*). Можно сформулировать иначе: линейная система — это объект, свойства которого под воздействием сигнала не меняются. Идеальная линейная система так же не существует (исключение - вакуум, хотя существуют теории, предсказывающие поляризацию вакуума в сверхсильных электромагнитных полях), однако во многих случаях (как правило, при рассмотрении слабых сигналов) нелинейностью можно пренебречь.

Теоретический анализ преобразования сигналов основан на решении неоднородных дифференциальных уравнений. Линейные цепи описываются линейными уравнениями. Принцип суперпозиции позволяет искать решение путем разложения сложного сигнала на сумму простых составляющих. Математически такое разложение есть применение аппарата Фурье: если некоторая функция $f(t)$ — достаточно гладкая, ее можно представить в виде суммы:

$$f(t) = \frac{1}{\|\varphi\|^2} \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \varphi_n^* \quad (1.1)$$

где φ_n — набор ортогональных базисных функций, C_n - коэффициенты Фурье, $\|\varphi\|$ — норма функций φ_n . Выбор базисных функций зависит от рассматриваемого сигнала и от системы, через которую он проходит. Иногда есть функции, в виде суммы которых легко представить сигнал, иногда известен отклик системы на сигналы определенного вида.

В радиофизике наиболее широкое распространение получили два способа разложения сигналов. Один из них использует в качестве элементарного воздействия гармонические функции, каждая из которых характеризуется амплитудой, фазой и частотой. Любую интегрируемую функцию можно представить в виде интеграла Фурье, взяв в качестве базовых гармонические функции. Математически используют комплексную функцию $A(\omega)e^{i\omega t}$, где $A(\omega)$ в общем случае так же комплексная величина ¹ (напомним формулу Эйлера: $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$). Зная

¹Использование комплексных величин позволяет описывать изменение как амплитуды, так и фазы гармонического сигнала и упрощает анализ.

отклик линейной системы на гармоническую функцию, можно восстановить ее отклик на произвольную функцию. Такой способ представления сигналов называют спектральным.

В другом методе в качестве базисных функций используют функции, которые так же, как и сам сигнал являются функциями времени. Такой способ описания сигнала называют временным. Можно использовать единичные ступеньки (функции скачка, включения) называемые функциями Хевисайда $\mathcal{H}(t)$ (иногда ее обозначают как $\mathbf{1}(t)$). Тогда сигнал можно представить в виде суперпозиции единичных функций, сдвинутых по времени на бесконечно малый интервал, высоту которых определяет скорость изменения сигнала на этом интервале. Отклик линейной системы на единичное воздействие называют переходной характеристикой, а отклик на воздействие сигнала произвольной формы — интегралом суперпозиции или интегралом Дюамеля.

Иногда бывает удобно использовать разложение по дельта-функциям. В этом случае отклик линейной системы на единичное воздействие называют импульсной характеристикой (в теоретической физике ее называют функцией Грина). Более подробно упомянутые способы описания сигнала и его преобразования в линейных системах приведены в разделах 2.1.5 и 2.1.5.

В общем случае можно использовать разложение сигнала по произвольным ортонормированным функциям, например, по полиномам Эрмита-Гаусса, Чебышева, функциям Уолша и др. Мы не будем рассматривать эти возможности, их рассмотрение можно найти в [2].

Естественно, сигналы являются вещественными. Однако для их более компактного математического описания широко используют функции, заданные на бесконечном интервале времени, несущие бесконечную энергию и являющиеся комплексными. Такие формальные представления существенно упрощают решение практических задач.

В этом разделе мы рассматриваем разложение сигнала по гармоническим функциям в ряд и интеграл Фурье.

1.2.1 Спектральный анализ

Ряд Фурье

Если $v(t)$ — “хорошая”² периодическая функция с периодом $T = 2\pi/\omega_0$, то ее можно разложить в ряд Фурье:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)), \quad \text{где} \quad (1.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (1.3)$$

или

²Это означает, что функция $v(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т.е. ее абсолютная величина должна быть интегрируема на отрезке от $-T/2$ до $T/2$. Все реально происходящие процессы описываются именно такими функциями.

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n), \quad \text{где} \quad (1.4)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \text{ctg}\phi_n = \frac{a_n}{b_n}. \quad (1.5)$$

Часто более удобной и компактной является запись ряда Фурье в комплексной форме:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{C}_n e^{in\omega_0 t}, \quad \tilde{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (1.6)$$

Здесь \tilde{C}_n — комплексные амплитуды. Очевидно, что в силу вещественности функции $v(t)$ для комплексных амплитуд \tilde{C}_n должно выполняться равенство $\tilde{C}_n = \tilde{C}_{-n}^*$.

Связь коэффициентов a_n , b_n и c_n с комплексными амплитудами \tilde{C}_n определяется следующим образом:

$$a_n = \tilde{C}_n + \tilde{C}_{-n}, \quad b_n = i(\tilde{C}_n - \tilde{C}_{-n}), \quad a_0 = 2\tilde{C}_0 \quad (1.7)$$

$$\tilde{C}_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad \tilde{C}_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad (1.8)$$

$$\tilde{C}_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = 2|\tilde{C}_n| \quad c_0 = C_0. \quad (1.9)$$

Для комплексной амплитуды \tilde{C}_n можно определить обычным образом ее модуль $|\tilde{C}_n|$ и фазу $\arg(\tilde{C}_n)$ ($\tilde{C}_n \equiv |\tilde{C}_n| e^{i\arg(\tilde{C}_n)}$). В дальнейшем будем называть *спектром* функции $v(t)$ совокупность величин $|\tilde{C}_n|$, $\arg(\tilde{C}_n)$, $\omega_n \equiv n\omega_0 = (2\pi/T)n$.

Обратим внимание на одно принципиальное отличие формулы 1.6 от 1.3. В 1.3 n - номера гармоник — целые положительные числа. Но в 1.6 n принимают и отрицательные значения, не имеющие физического смысла. Дело в том, что при переходе от 1.3 к 1.6 мы неявно выполнили переобозначения индексов суммирования. Рассмотрим подробно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (e^{i(n\omega_0 t + \phi_n)} + e^{-i(n\omega_0 t + \phi_n)}) \quad (1.10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n^* e^{-in\omega_0 t} \quad \text{где} \quad \tilde{C}_n = \frac{1}{2} c_n e^{i\phi_n}. \quad (1.11)$$

Преобразуем вторую сумму, обозначив $m = -n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n^* e^{-in\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^0 \tilde{C}_m e^{im\omega_0 t}. \quad (1.12)$$

Теперь формально можно во второй сумме использовать вместо буквы m букву n , что позволит вместо двух сумм от 0 до ∞ писать одну, от $-\infty$ до ∞ . Но по физическому смыслу номера $-n$ — это номера гармоник n !

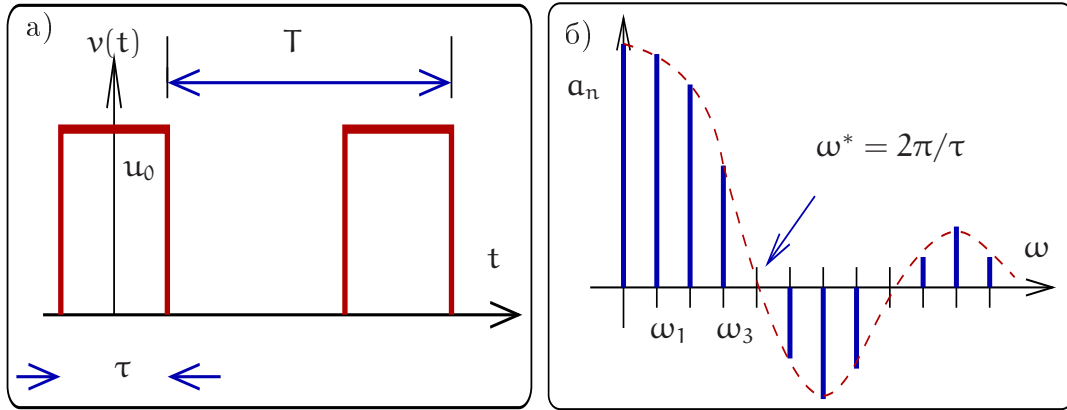


Рис. 1.1: График периодической функции (а) и ее гармоники (б). Характерная частота $\omega^* = 2\pi/\tau$ определяет эффективную ширину спектра сигнала.

Таким образом, составляющие спектра получаемые математически в области отрицательных значений для действительных функций не несут дополнительной информации, спектром амплитуд действительного сигнала будут амплитуды

$$c_n = 2|\tilde{C}_n| \quad (1.13)$$

$$c_0 = C_0. \quad (1.14)$$

Можно представить спектр сигнала на плоскости $|\tilde{C}_n|$, ω как набор точек. Зрительно это не очень удобно, поэтому обычно спектр представляют как набор перпендикуляров, опущенных на ось частот.

В качестве примера рассмотрим разложение в ряд Фурье периодической функции, состоящей из прямоугольных импульсов амплитуды u_0 и длительности τ , следующих друг за другом с периодом T — см рис. 1.1 а. Нетрудно видеть, что из-за ее четности отличны от нуля будут только коэффициенты a_n , а комплексные амплитуды \tilde{C}_n являются действительными. Они рассчитываются по формуле (1.3):

$$a_n = \frac{2u_0}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(n\omega_0 t) dt = 2u_0 \left(\frac{\tau}{T}\right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi n \tau}{T}\right), \quad (1.15)$$

$$\operatorname{sinc}(x) \equiv \frac{\sin x}{x}, \quad \omega_0 \equiv \Delta\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \quad (1.16)$$

Здесь огибающую описывает функция $\operatorname{sinc}(x)$ — она обычно возникает при Фурье разложениях сигнала прямоугольной формы. На рис. 1.1 б изображен график гармоник Фурье. Расстояние между гармониками по частоте $\Delta\omega$ постоянно и равно $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$. Такой спектр сигнала называют линейчатым эквидистантным. Очевидно, что основная часть спектра лежит в интервале от нуля до первого нуля функции $\operatorname{sinc}(x)$, т.е. $0 \leq \omega < \omega^* = 2\pi/\tau$. Запишем граничную частоту ω^* в виде $\omega^* = n^* \Delta\omega$ и определим число $n^* \equiv \omega^*/\omega_0 = \frac{T}{\tau}$ (формально число n^* может быть не целым). Таким образом в диапазон частот от 0 до ω^* укладывается n^* спектральных интервалов $\Delta\omega$.

Легко видеть, что при увеличении периода T (при фиксированной длительности импульса τ) спектр становится плотнее ($\Delta\omega$ меньше) и в пределе $T \rightarrow \infty$ переходим

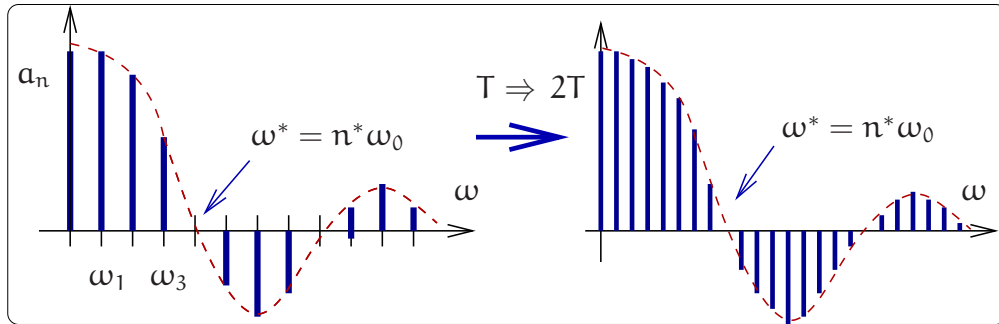


Рис. 1.2: При увеличении в два раза периода T следования прямоугольных импульсов, изображенных на рис. 1.1 — частотный интервал между гармониками уменьшается в два раза (т.к. $\Delta\omega = 2\pi/T$). В пределе $T \rightarrow \infty$ переходим к интегралу Фурье. При этом характерная частота ω^* не изменяется, поскольку зависит только от длительности τ одиночного импульса ($\omega^* = 2\pi/\tau$).

к интегралу Фурье (преобразованию Фурье) — см. рис. 1.2. Подчеркнем, что при этом (т.е. в пределе $T \rightarrow \infty$) характерная частота $\omega^* \equiv 2\pi/T$ не изменяется.

Мерой мощности сигнала является квадрат его значения $u^2(t)$, а мерой энергии — соответствующий интеграл. Полная энергия гармонического сигнала бесконечна (поскольку он не ограничен во времени), но можно определить его энергию за период. Энергия сигнала связана с энергией его гармонических составляющих равенством Парсеваля:

$$W = \int_{-T/2}^{T/2} v^2(t) dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{C}_n|^2 = T \sum_0^{\infty} C_n^2/2. \quad (1.17)$$

Эту теорему нетрудно доказать прямой подстановкой в интеграл по времени разложения (1.4) для $v(t)$ и $v^*(t)$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n \tilde{C}_k^* e^{i\omega_0(n-k)t} dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{C}_n|^2 \quad (1.18)$$

Здесь мы использовали то, что при интегрировании по времени “выживают” только члены с $k = n$.

Для рассмотренного выше примера последовательности прямоугольных импульсов можно показать, что если $n^* \gg 1$, то более 90% энергии спектра приходится на гармоники с номерами $n < n^*$ (или с частотами $\omega < \omega^*$):

$$\sum_{n=1}^{n^*} a_n^2 / \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \simeq 0.9$$

В следующем разделе мы продолжим обсуждение распределение энергии сигнала по спектру — см. формулу (1.38).

Интеграл Фурье

Строго периодически повторяющиеся сигналы являются математической абстракцией. Реальные же сигналы периодическими не являются. Однако, и они могут

быть описаны с помощью того же спектрального подхода, основанного на использовании преобразования Фурье.

Для иллюстрации этого в периодическом процессе $v(t)$ устремим период T к бесконечности. Тогда периодическая функция $v(t)$ превратится в неповторяющуюся функцию $u(t)$. При этом ряд Фурье (1.6) можно записать в виде

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{C}_n e^{in\omega_0 t} \frac{\Delta\omega}{\omega_0}, \quad \text{где} \quad \Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.19)$$

здесь $\Delta\omega$, с одной стороны, частотный интервал между гармониками, с другой — этот интервал равен основной частоте ω_0 гармонического процесса. Таким образом, отношение $\Delta\omega/\omega_0$ тождественно равно единице. Мы ввели его, чтобы в последующем заменить $\Delta\omega \rightarrow d\omega$. В пределе $T \rightarrow \infty$ ряд Фурье превращается в интеграл Фурье

$$\lim_{T \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T \tilde{C}_n e^{i\omega_n t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} T \tilde{C}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (1.20)$$

С другой стороны, достаточно “хорошую”³ функцию $u(t)$ можно разложить в интеграл Фурье:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (1.21)$$

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.22)$$

Здесь малой буквой обозначена функция времени $u(t)$, а прописной — ее Фурье образ $U(\omega)$. Часто в научных статьях и саму функцию, и ее Фурье-образ обозначают одной буквой (т.е. $u(t)$ и $u(\omega)$) и это не приводит к недоразумению, т.к. аргумент (t или ω) однозначно указывает на то, что имеется в виду. Функцию $U(\omega)$ обычно называют спектральной плотностью. Часто встречается обозначение $S(\omega)$ от английского spectrum. Мы будем называть ее также Фурье образом.

Сравнивая (1.20) и (1.21) находим связь между $\tilde{C}(\omega_n)$ и $U(\omega)$:

$$\tilde{C}_n \rightarrow \tilde{C}(\omega) = \frac{U(\omega)}{T}. \quad (1.23)$$

Заметим, что возможны другие варианты определений Фурье преобразования⁴, однако, в радиофизике принято определение (1.21, 1.22). Чтобы не запутаться, в

³ Это означает, что абсолютная величина функции $u(t)$ должна быть интегрируема на интервале от $-\infty$ до ∞ .

⁴ Иногда коэффициент $1/2\pi$ в формулах для преобразования Фурье распределяют иначе, например:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}, \quad U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}.$$

Встречаются и другие варианты.

какой из формул ставить $1/2\pi$, полезно применять мнемоническое правило: $d\omega$ делим на 2π .

В общем случае функция $U(\omega)$ является комплексной функцией частоты. Иногда Фурье образ $U(\omega)$ дополнительно помечают волной над буквой $\tilde{U}(\omega)$ для того, чтобы подчеркнуть эту комплексность. Мы будем полагать, что наличие аргумента ω достаточно ясно указывает на комплексность Фурье образа $U(\omega)$.

Функции $u(t)$ и $U(\omega)$ имеют разные размерности. Так если сигнал $u(t)$ есть напряжение, измеряемое в вольтах, то его спектральная плотность (Фурье образ) $U(\omega)$ имеет размерность В/Гц — это следует из (1.23, 1.22).

Частоту ω называют *угловой* частотой (иногда для нее используют также термин круговая или циклическая частота). Размерность ω — рад/сек. Обычная частота f , измеряемая в Герцах, связана с угловой частотой формулой

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (1.24)$$

В дальнейшем, чтобы избежать путаницы, для обозначения этих частот мы будем использовать разные буквы: f для частоты (Гц) и ω для угловой частоты (рад/сек).

Математически преобразование Фурье определено как для положительных, так и для отрицательных частот. Происхождение отрицательных частот здесь такое же, как и в случае ряда Фурье (см. 1.11). В принципе, можно переписать формулы преобразования Фурье (1.21, 1.22) с интегрированием только по положительным частотам и использованием функций $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ вместо $e^{\pm i\omega t}$, однако, в результате конечные формулы получатся значительно более громоздкими. Поэтому мы будем использовать в основном “традиционное” математическое представление интеграла Фурье с использованием отрицательных частот, помня о том, что всю информацию о действительном сигнале и физический смысл несут положительные частоты.

В качестве продолжения примера предыдущего раздела рассмотрим прямоугольный импульс $u(t)$ амплитуды u_0 и длительности τ :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -\frac{\tau}{2}, \\ u_0 & \text{при } -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{\tau}{2} \end{cases}. \quad (1.25)$$

Это частный случай видеоимпульса (видеоимпульсом в радиофизике называют ограниченную на временном интервале функцию, которая не меняет знак). Используя определение (1.22) и формулу Эйлера можно легко найти Фурье образ

$$\begin{aligned} U(\omega) &= u_0 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{u_0}{-i\omega} (e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}) = \frac{u_0}{\omega} \times 2 \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \\ &= u_0\tau \times \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right), \quad \text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin x}{x} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь мы видим ту же функцию $\text{sinc}(x)$, которая появлялась при рассмотрении последовательности прямоугольных импульсов.

График сигнала (1.25) и его Фурье образа (1.26) представлен на рис. 1.3. Мы видим, что в данном случае Фурье образ $U(\omega)$ является вещественной функцией

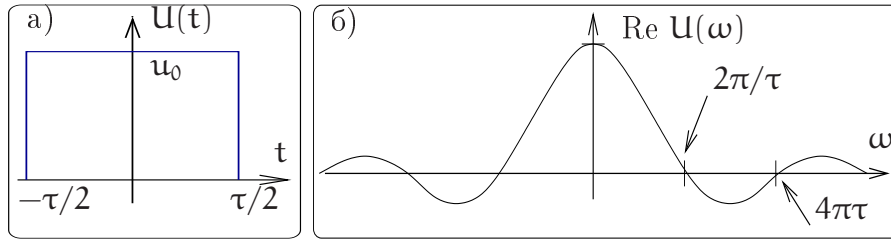


Рис. 1.3: График прямоугольного импульса $u(t)$ (а) и реальная часть его Фурье образа $\text{Re}U(\omega)$ (б) (мнимая часть Фурье образа равна нулю вследствие четности $u(t)$).

(это следствие того, что функция $u(t)$ является четной). Напомним, что в общем случае Фурье образ является комплексной функцией. Обычно приводят графики зависимости модуля $|U(\omega)|$ и фазы $\arg U(\omega)$ от частоты (амплитудный и фазовый спектр). Для рассматриваемого примера эти характеристики приведены на рис. 1.4. При смене знака фаза комплексной функции меняется на π .

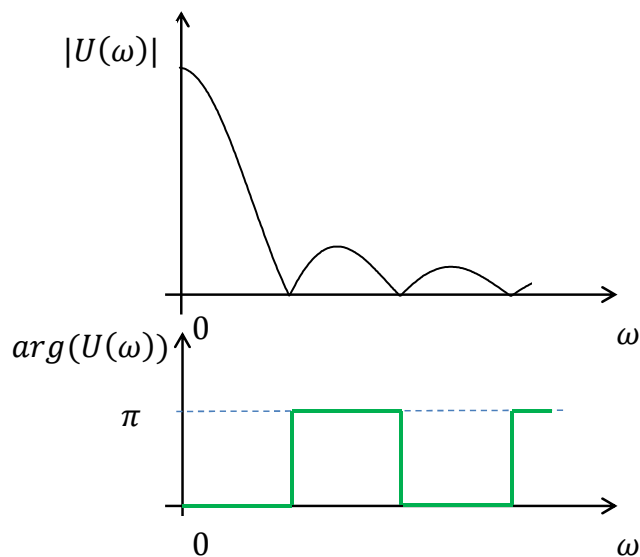


Рис. 1.4: амплитудный (а) и фазовый (б) спектр прямоугольного импульса.

Общие свойства преобразования Фурье

Линейность. Фурье образ суперпозиции сигналов есть суперпозиция Фурье образов:

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \iff U_1(\omega) + U_2(\omega) + U_3(\omega). \quad (1.27)$$

При умножении функции на коэффициент умножается и Фурье:

$$\alpha u(t) \iff \alpha U(\omega), \quad \alpha - \text{const.} \quad (1.28)$$

Вещественность, четность и нечетность. Если функция $u(t)$ вещественна, четна или нечетна, то для ее Фурье образа выполняются следующие свойства:

$$\text{Если } u(t) \text{ вещественна, то } U(-\omega) = U^*(\omega), \quad (1.29)$$

$$\text{Если } u(t) \text{ четная, то } U(-\omega) = U(\omega), \quad (1.30)$$

$$\text{Если } u(t) \text{ нечетная, то } U(-\omega) = -U(\omega). \quad (1.31)$$

Эти свойства следуют просто из определений (1.21, 1.22). Например, если функция $u(t)$ вещественна, то можно записать формальное разложение (1.21) для $u(t)$ и $u^*(t)$ и в последнем разложении поменять порядок интегрирования. Из условия вещественности следует:

$$u(t) = u^*(t), \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} U^*(-\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (1.33)$$

Сравнивая подинтегральные выражения в первом и последнем интеграле получаем формулу (1.29). Свойства (1.30 и 1.31) доказываются аналогично.

Изменение масштаба времени. Если функция $u(t)$ подвергается временной трансформации вида $u(\beta t)$, то ее Фурье образ будет преобразоваться в соответствии с правилом:

$$u(\beta t) \iff \frac{1}{\beta} U\left(\frac{\omega}{\beta}\right), \quad \beta - \text{const}. \quad (1.34)$$

Имеет место очень важное следствие: сжатие сигнала во времени ($\beta > 1$) приводит к увеличению ширины его спектра. Формула (1.34) доказывается прямым вычислением:

$$U_{\beta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\beta t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(\beta t) e^{-i(\omega/\beta)\beta t} \frac{d(\beta t)}{\beta} = \frac{1}{\beta} U\left(\frac{\omega}{\beta}\right),$$

Временная задержка. В силу конечности скорости распространения электромагнитных волн передача сигнала на расстояние происходит с временной задержкой. В пункте приема мы имеем дело с функцией $u(t - \tau)$ (τ — время задержки). При этом Фурье образ сигнала преобразуется по правилу:

$$u(t - \tau) \iff U(\omega) e^{-i\omega\tau}, \quad \tau - \text{const}. \quad (1.35)$$

Действительно, вводя новую переменную интегрирования $y = t - \tau$, получаем:

$$U_{\tau}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(y) e^{-i\omega y} e^{-i\omega\tau} dy = U(\omega) e^{-i\omega\tau}.$$

Фаза каждой гармонической составляющей сдвигается на $(-\omega\tau)$. Рассмотрим одно из важных следствий свойства сдвига по времени и линейности преобразования Фурье на примере последовательности N идентичных импульсов длительности τ (например, прямоугольных вида (1.25)), следующих друг за другом с периодом

повторения T . В этом случае Фурье образ $U_{\Sigma}(\omega)$ такой последовательности можно найти как сумму спектральных плотностей $U(\omega)$ одиночного импульса, сдвинутых во времени на промежуток T . Временная задержка импульса на T приводит к умножению его Фурье образа на $e^{-i\omega T}$. Таким образом, используя (1.27, 1.35), получаем:

$$U_{\Sigma}(\omega) = U(\omega) (1 + e^{-i\omega T} + e^{-2i\omega T} + e^{-3i\omega T} + \dots + e^{-Ni\omega T}). \quad (1.36)$$

Выражение в скобках есть просто сумма геометрической прогрессии, поэтому:

$$\begin{aligned} U_{\Sigma}(\omega) &= U(\omega) \frac{1 - e^{-iN\omega T}}{1 - e^{-i\omega T}} = U(\omega) e^{-i\omega T(N-1)/2} \frac{e^{iN\omega T/2} - e^{-iN\omega T/2}}{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}} = \\ &= U(\omega) e^{-i\omega T(N-1)/2} \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

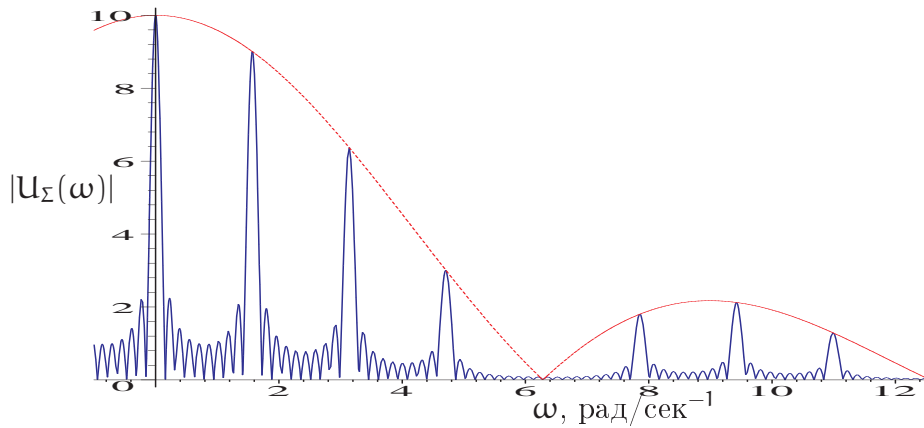


Рис. 1.5: График модуля Фурье преобразования $|U_{\Sigma}(\omega)|$ последовательности из $N = 10$ прямоугольных импульсов длительности $\tau = 1$ с каждым и временем повторения $T = 4$ с. Гладкая пунктирная кривая соответствует модулю Фурье образа одиночного импульса $|U(\omega)|$, умноженному на $N = 10$, она является огибающей $|U_{\Sigma}(\omega)|$.

На рис. 1.5 приведен график зависимости модуля Фурье образа (спектральной плотности) $|U_{\Sigma}(\omega)|$, полученный по формуле (1.37) для частного случая последовательности из $N = 10$ прямоугольных импульсов. Там же приведена огибающая, определяемая Фурье образом одиночного импульса $|U(\omega)|$. По мере увеличения числа импульсов N ширина каждого максимума уменьшается и в пределе $N \rightarrow \infty$ по форме стремится к дельта-функции (длительность уменьшается, величина максимума увеличивается). При этом сплошной спектр одиночного импульса превращается в линейчатый спектр — в пределе $N \rightarrow \infty$ получаем спектр периодического сигнала, а огибающая линейчатого спектра остается подобной спектру одиночного импульса. Причина перехода сплошного спектра в линейчатый заключается в изменении фазы гармонических составляющих каждого одиночного импульса в последовательности. В результате их интерференция может быть конструктивной (амплитуды складываются) или деструктивной (амплитуды вычитаются).

Энергия сигнала. Мощность сигнала пропорциональна квадрату напряжения или тока, поэтому естественно определять энергию сигнала как интеграл по времени от квадрата сигнала. Выясним, как энергия сигнала связана с его Фурье образом (спектральной плотностью). Эту связь определяет теорема, согласно которой

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (1.38)$$

Для ее доказательства один из сомножителей ($u(t) \times u(t)$) в (1.38) представим в виде интеграла Фурье и поменяем порядок интегрирования:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) U(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{i\omega t} dt}_{U^*(\omega)} U(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Формулу (1.38), так же, как и 1.17, называют равенством Парсеваля (радиофизике ее ещё называют теоремой Рейли). Часто ее записывают в виде интеграла по частоте f (см. (1.24)) и интегрируют только по положительным частотам:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = 2 \int_0^{\infty} |U(2\pi f)|^2 df. \quad (1.39)$$

Равенство Парсеваля дает возможность найти величину энергии сигнала в заданной полосе частот. Возвращаясь к примеру (1.25, 1.26), можно рассчитать, какая часть энергии сигнала лежит в полосе $0 < f < 1/\tau$:

$$W_f = 2 \int_0^{1/\tau} |U(2\pi f)|^2 df \simeq 0.9 \times 2 \int_0^{\infty} |U(2\pi f)|^2 df \cong 0.9W_0. \quad (1.40)$$

Это означает, что в данной полосе частот лежит около 90% энергии сигнала. Удвоение полосы частот (т.е. $0 < f < 2/\tau$) добавит к этой величине еще 5%.

Полученный результат чрезвычайно важен для практики. Он позволяет установить связь между значениями длительности сигналов $\Delta\tau$ и шириной полосы частот $\Delta\omega$, необходимой для передачи этих сигналов.

В частности, реализуемая сейчас скорость передачи цифровой информации 40 Гбит/с, требующая полосы частот канала связи в 20 ГГц, осуществляется путем использования импульсных сигналов длительностью $\leq 5 \times 10^{-11} = 50$ пс.

Можно показать, что для любых вещественных сигналов выполняется неравенство, установленное еще лордом Релеем:

$$\Delta\tau \Delta\omega \geq \frac{1}{2}, \quad \iff \quad \Delta\tau \Delta f \geq \frac{1}{8\pi}. \quad (1.41)$$

здесь $\Delta\tau$, $\Delta\omega$, Δf - эффективные значения, определенные соотношениями

$$(\Delta\tau)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} d^2(t) dt}, \quad (\Delta\omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |D(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |D(\omega)|^2 d\omega} \quad (1.42)$$

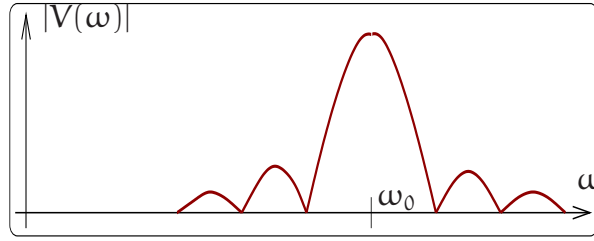


Рис. 1.6: График модуля Фурье образа $|V(\omega)|$ (1.46) для случая, когда огибающая представляет собой прямоугольный импульс (отрицательные частоты не показаны).

Смысл такого определения для эффективной длительности $\Delta\tau$ интуитивно понятен — мы рассматриваем квадрат сигнала $d^2(t)$ как усредняющую функцию, аналогично для ширины спектра $\Delta\omega$ в качестве усредняющей функции используем $|D(\omega)|^2$. Заметим, что формулы (1.42) не являются определением собственно длительности сигнала и ширины спектра. Полезное обсуждение этого вопроса в общем случае приведено в §12 гл. 1 [1].

В качестве полезного примера, для которого неравенство (1.41) превращается в равенство, приведем сигнал колокольной формы, описываемой функцией Гаусса и ее Фурье образ:

$$d(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \exp\left(\frac{-t^2}{2\tau^2}\right), \quad D(\omega) = \exp\left(\frac{-\tau^2\omega^2}{2}\right) \quad (1.43)$$

Сама функция $d(t)$ и ее Фурье образ $D(\omega)$ имеют гауссову форму, т.е. формально неограничены. После элементарных (несколько громоздких) вычислений получаем:

$$\Delta\tau = \frac{\tau}{\sqrt{2}}, \quad \Delta\omega = \frac{1}{\sqrt{2}\tau} \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau\Delta\omega = \frac{1}{2}. \quad (1.44)$$

Мы видим, что для нашего примера неравенство (1.41) превращается в равенство.

Теорема о переносе спектра. Рассматривая спектральное распределение энергии сигнала на примере прямоугольного видеоимпульса, мы показали, что основная доля его энергии лежит в области низких частот. Однако, еще опыты Герца показали, что возбуждение низкочастотных (длинноволновых) сигналов затруднительно. Выход из этой ситуации состоит в передаче *модулированного* сигнала — наложение импульсного сигнала $u(t)$ на гармоническую несущую. Это означает, что сигнал принимает вид $v(t) = u(t) \cos \omega_0 t$ (ω_0 — частота несущей). Фурье образ такого сигнала определяется теоремой о переносе спектра:

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt = \quad (1.45)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) (e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}) dt = \frac{U(\omega - \omega_0)}{2} + \frac{U(\omega + \omega_0)}{2}. \quad (1.46)$$

На рис. 1.6 приведен график модуля Фурье образа $|V(\omega)|$ (1.46) для случая, когда огибающая представляет собой прямоугольный импульс. Мы видим, что спектр

оказался расположенным симметрично относительно частоты несущей ω_0 (см. также ниже рис. 1.8). Использование возможности переноса спектра низкочастотного сигнала в область высоких частот обеспечивает широкое развитие современных средств коммуникаций: радио, телевидение, интернет, мобильный телефон, оптические линии связи.

Теорема о свертке. Сверткой $u * g$ двух функций $u(t)$ и $g(t)$ называют интеграл:

$$u * g = \int_{-\infty}^{\infty} u(t_1) g(t - t_1) dt_1. \quad (1.47)$$

Такие интегралы возникают при описании внешнего воздействия на линейную систему, в частности, при прохождении сигнала через линейный фильтр. Заметим, что свертка есть функция времени и она симметрична относительно перестановки функций: $u * g = g * u$. Теорема о свертке утверждает, что Фурье образ свертки функций $u(t)$ и $g(t)$ есть просто произведение их Фурье образов $U(\omega)$ и $G(\omega)$:

$$u * g \iff U(\omega)G(\omega). \quad (1.48)$$

Для доказательства подставим в определение (1.47) Фурье разложение функции $g(t - t_1)$ и проинтегрируем по dt_1 :

$$u * g = \int \int_{-\infty}^{\infty} u(t_1) G(\omega) e^{i\omega(t-t_1)} \frac{d\omega}{2\pi} dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) G(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Последнее равенство и доказывает теорему.

Дифференцирование и интегрирование сигнала. В процессе обработки сигнала часто требуется найти его производную (чтобы подчеркнуть моменты его резких изменений) или проинтегрировать. Фурье образы при этом преобразуются следующим образом:

$$\frac{du(t)}{dt} \iff i\omega \times U(\omega), \quad (1.49)$$

$$\int u(t) dt \iff \frac{U(\omega)}{i\omega}. \quad (1.50)$$

Доказательства этих соотношений несложны и сводятся к прямому вычислению:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} [i\omega U(\omega)] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \\ \int u(t) dt &= \int \left(\int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{U(\omega)}{i\omega} \right] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned}$$

Дифференцирование сдвигает фазы всех гармонических составляющих на $\pi/2$, а интегрирование - на $-\pi/2$. Таким образом, для дифференцирования сигнала, мы должны создать устройство, действие которого сводится к умножению Фурье образа на $i\omega\tau$ (при интегрировании — к делению на $i\omega\tau$). Здесь мы ввели множитель τ , имеющий размерность [сек], позволяющий сохранить размерности функции и ее производной (интеграла). Приближенное дифференцирование и интегрирование сигнала возможно с использованием простейших RC- или RL-цепочек (см. подробности ниже в разделе 2.2.1).

1.2.2 Спектры модулированных сигналов

В то время, как спектр сигнала, который необходимо передать, может лежать в области низких, например, звуковых (20 Гц — 20 кГц) частот, каналы связи, которые можно использовать (радио, оптические), работают на высоких частотах. Выход из этой ситуации состоит в передаче *модулированных* сигналов. В этом случае спектр сигналов переносится в область высоких частот. При этом передаваемая информация может быть вложена в изменение амплитуды, фазы или частоты высокочастотной несущей. Понятие модуляции электромагнитных колебаний и волн подразумевает медленное, по сравнению с периодом несущего колебания, амплитуды, частоты, фазы или модуляции.

Амплитудно-модулированным называется сигнал, амплитуда которого изменяется *медленно* со временем по сравнению с изменением несущей:

$$u_{AM}(t) = a(t) \cos \omega_0 t, \quad \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} \ll \omega_0.$$

Фазово-модулированным называется сигнал, фаза которого изменяется *медленно* со временем по сравнению с изменением несущей (амплитуда A_0 постоянна):

$$u_{FM}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi(t)), \quad \frac{d\phi(t)}{dt} \ll \omega_0.$$

Частотно-модулированный сигнал является близким к фазово-модулированному. Он определяется как

$$u_{ЧМ}(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \int_{-\infty}^t \Delta\omega(\tau) d\tau\right), \quad |\Delta\omega(\tau)| \ll \omega_0. \quad (1.51)$$

Здесь ω_0 — средняя частота несущей, а $\Delta\omega(t)$ — величина отклонения частоты от среднего значения.

Очевидно, что

$$\frac{d\phi}{dt} = \Delta\omega(t). \quad (1.52)$$

Амплитудно-модулированный сигнал. Амплитудно-модулированный сигнал можно записать в виде $u_{AM}(t) = A_0(1 + u(t)) \cos \omega_0 t$, где A_0 постоянная амплитуда несущей, ω_0 — ее частота, а $u(t)$ — малая и медленная функция ($|u(t)| \ll 1$). Поскольку функцию $u(t)$ всегда можно разложить в ряд Фурье, то простейшим амплитудно-модулированным (АМ) сигналом является сигнал вида (когда мы принимаем во внимание только одну из гармоник функции $u(t)$):

$$u_{AM}(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad \Omega \ll \omega_0, \quad (1.53)$$

$$(1.54)$$

где Ω — частота модуляции, m — коэффициент модуляции⁵.

⁵Коэффициент модуляции обычно определяют как максимальное отклонение величины (в нашем случае амплитуды) от среднего значения, деленное на это среднее значение:

$$m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}. \quad (1.55)$$

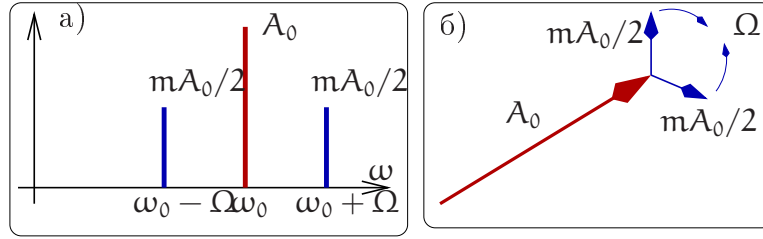


Рис. 1.7: Спектральные составляющие АМ сигнала (а). Векторная диаграмма АМ сигнала (б).

$$u_{\text{AM}}(t) = A_0 \left(\cos \omega_0 t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \right).$$

Производя тригонометрические преобразования, нетрудно найти спектр амплитудно-модулированного сигнала, график которого представлен на рис. 1.7. Мы видим, что АМ сигнал представляет собой просто сумму трех гармонических составляющих.

Известно, что любое колебание можно описать как вектор, вращающийся вокруг начала координат. Тогда проекция этого вектора на горизонтальную ось будет описывать колебание физической величины, например, напряжения. Такое представление называют векторной диаграммой колебания. На рис. 1.7б представлена векторная диаграмма АМ сигнала: вектор \vec{A}_0 основного колебания, вращающийся с частотой ω_0 , и две спектральные составляющие, вращающиеся с частотами $\omega_0 \pm \Omega$. Относительно вектора основного колебания гармоники вращаются с частотами $\pm\Omega$ так, что вектор их суммы всегда направлен вдоль вектора \vec{A}_0 .

В общем случае АМ сигнал может быть представлен в виде:

$$u_{\text{AM}}(t) = u(t) \cos \omega_0 t,$$

где $u(t)$ — медленная огибающая, т.е. верхняя частота ее спектра много меньше несущей частоты ω_0 . Используя теорему о переносе спектра (1.46) можно сразу выписать как Фурье образ АМ сигнала:

$$\begin{aligned} U_{\text{AM}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{AM}}(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) (e^{-i(\omega+\omega_0)t} + e^{-i(\omega-\omega_0)t}) dt = \\ &= \frac{1}{2} (U(\omega + \omega_0) + U(\omega - \omega_0)). \end{aligned}$$

Это иллюстрирует рис. 1.8.

Фазово-модулированный сигнал. Напомним, что фазово-модулированный (ФМ) сигнал определяется как

$$u_{\text{FM}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi(t)), \quad \left| \frac{d\phi}{dt} \right| \ll \omega_0, \quad (1.56)$$

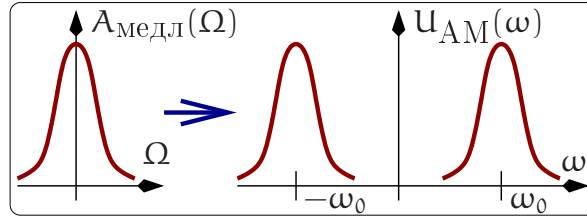


Рис. 1.8: Связь спектра огибающей и спектра АМ сигнала (теорема о переносе спектра)

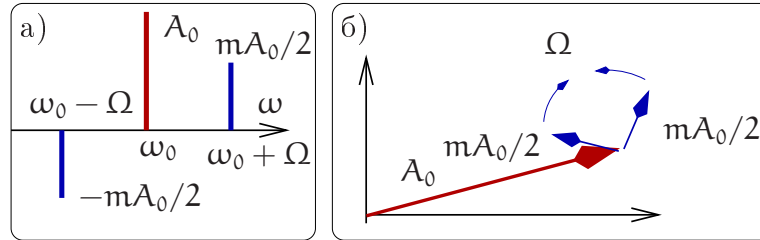


Рис. 1.9: Спектр (а) и векторная диаграмма (б) ФМ сигнала с учетом только линейного по m приближения.

где последнее неравенство означает, что фаза ФМ сигнала меняется медленно.

Рассмотрим простейший пример ФМ сигнала, когда фаза $\phi(t)$ медленно меняется по гармоническому закону:

$$u_{\text{ФМ}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \underbrace{m \sin \Omega t}_{\psi(t)}), \quad \Omega \ll \omega_0, \quad (1.57)$$

здесь m — коэффициент фазовой модуляции.

Покажем, что спектр ФМ сигнала (1.57) шире спектра аналогичного АМ сигнала (1.53) и содержит не только составляющие $\omega \pm \Omega$, но и комбинационные частоты $\omega \pm 2\Omega$, $\omega \pm 3\Omega$ Для начала рассмотрим случай малого коэффициента модуляции: $m \ll 1$. Выражение (1.57) разложим по тригонометрическим формулам

$$u_{\text{ФМ}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) \cos(m \sin \Omega t) - \sin(\omega_0 t) \sin(m \sin \Omega t). \quad (1.58)$$

Теперь разложим синусы и косинусы в ряд по m , удерживая только члены $\sim m$ и $\sim m^2$, т.е.:

$$\cos(m \sin \Omega t) \simeq 1 - \frac{m^2}{2} \sin^2 \Omega t, \quad \sin(m \sin \Omega t) \simeq m \sin \Omega t \quad (1.59)$$

, и подставим в (1.58):

$$\begin{aligned} u_{\text{ФМ}}(t) &\simeq A_0 \left(\cos \omega_0 t - m \sin \Omega t \sin \omega_0 t - \frac{m^2}{2} \cos \omega_0 t \sin^2 \Omega t \right) = \\ &= A_0 \left(\left[1 - \frac{m^2}{4} \right] \cos \omega_0 t + \frac{m}{2} [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{8} [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] \right). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Очевидно, что в линейном по m приближении ФМ сигнал представляет собой сумму трех гармонических составляющих и его спектр представлен на рис. 1.9. Там же представлена векторная диаграмма (справа): вектор \vec{A}_0 основного колебания вращается с частотой ω_0 и две спектральные составляющие, вращающиеся с частотами $\omega_0 \pm \Omega$. Относительно вектора основного колебания гармоники вращаются с частотами $\pm \Omega$ так, что вектор их суммы всегда перпендикулярен вектору \vec{A}_0 .

Однако, из разложения (1.60) также следует, что в приближении, учитывающем члены $\sim m^2$, в спектре фазово-модулированного сигнала появляются гармоники $\omega_0 \pm 2\Omega$. Аналогично, можно показать, что учет членов $\sim m^3$ приведет к появлению гармоник $\omega_0 \pm 3\Omega$ и т.д. Таким образом мы приходим к выводу, что спектр ФМ сигнала шире спектра АМ сигнала, поскольку он дополнительно содержит гармоники $\omega_0 \pm 2\Omega$, $\omega_0 \pm 3\Omega \dots$

Для строгого рассмотрения, справедливого для любой величины индекса модуляции m , воспользуемся формулой, известной из теории Бесселевых функций (см. например [6]):

$$e^{im \sin \Omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{ik\Omega t}, \quad (1.61)$$

где $J_k(m)$ — функция Бесселя k -ого порядка от аргумента m . Подставим ее в выражение, представляющее сигнал (1.57) в комплексной форме:

$$\tilde{u}_{\text{ФМ}}(t) = A_0 e^{i\omega_0 t + im \sin \Omega t} = A_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) e^{ik\Omega t} \quad (1.62)$$

Из последнего равенства следует, что в спектре ФМ сигнала присутствует бесконечное число гармонических составляющих с частотами $\omega_0 \pm k\Omega$ (k — целое), а их амплитуды равны $J_k(m)$. С увеличением коэффициента модуляции m энергетический вклад гармоник с номерами $|k| > 2$ растет. Можно показать, что при большом индексе модуляции (т.е. при $m \gg 1$) ширина спектра ФМ сигнала (1.57) равна приблизительно $\Delta\omega = 2m\Omega$ — в отличие от случая АМ сигнала, чья ширина спектра всегда равна $\Delta\omega = 2\Omega$.

На рис. 1.10 представлены спектры фазово-модулированного сигнала с коэффициентами модуляции $m = 1$ и $m = 10$. Видно, что ширина спектра фазово-модулированного сигнала растет с увеличением коэффициента модуляции. Несимметричность спектра ФМ-сигнала связана с тем, что для нечетных гармоник выполняется равенство $J_{-2k-1}(m) = -J_{2k+1}(m)$, тогда как для четных справедливо $J_{-2k}(m) = J_{2k}(m)$.

Частотно-модулированный сигнал. В общем случае частотно-модулированный сигнал предполагает изменение частоты по закону $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t)$, где $\Delta\omega(t)$ — величина отклонения частоты от среднего значения ω_0 . Поскольку мгновенное значение фазы $\phi(t)$ гармонического сигнала, стоящее под знаком синуса или косинуса, связано с частотой очевидным соотношением $\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$, то общий вид частотно-модулированного сигнала есть:

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = A \cos \left(\int_{t_0}^t \omega(t') dt' \right) = A \cos \left(\omega_0 t + \int_{t_0}^t \Delta\omega(t') dt' + \phi_0 \right). \quad (1.63)$$

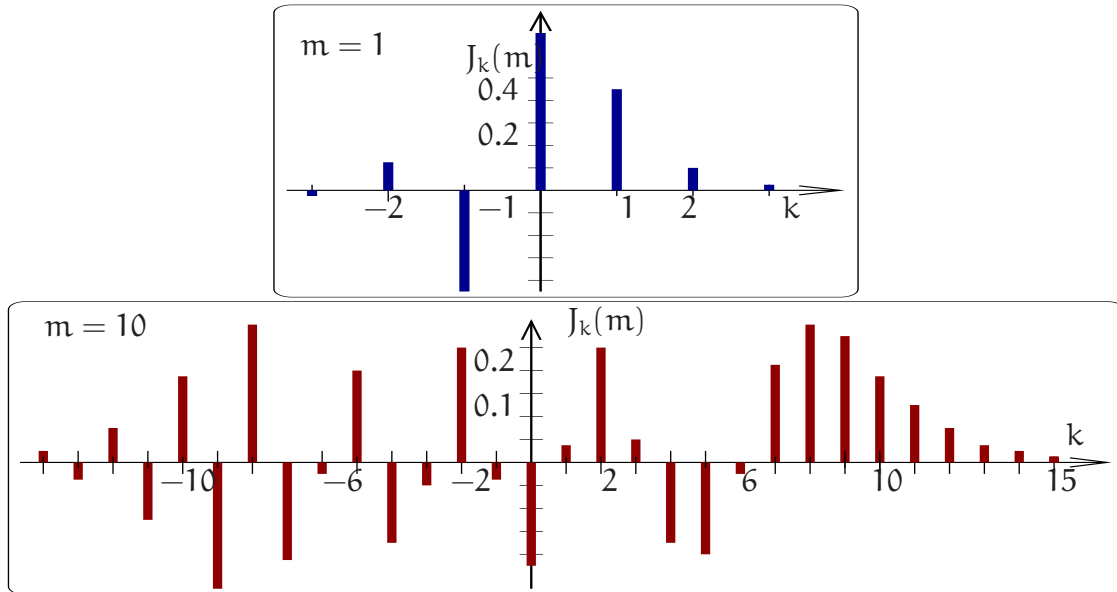


Рис. 1.10: Спектры фазово-модулированного сигнала с коэффициентом модуляции $m = 1$ (вверху) и $m = 10$ (внизу).

Для простейшего случая частотно-модулированного сигнала $\Delta\omega(t) = \Delta_0 \cos \Omega t$ (Δ_0 — постоянная) имеем:

$$u_{\text{ЧМ}} = A_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta_0}{\Omega} \sin \Omega t + \phi_0 \right). \quad (1.64)$$

При выполнении условия $\frac{\Delta_0}{\Omega} > 1$ имеет место широкополосная ЧМ, при обратном неравенстве $\frac{\Delta_0}{\Omega} < 1$ — узкополосная ЧМ.

Из сравнения (1.64) и (1.57) видно, что ФМ и частотно-модулированный (ЧМ) сигнал сводятся один к другому. Это справедливо при гармонической ФМ или ЧМ модуляции. Однако для произвольного закона модуляции вообще говоря это не так и надо пользоваться уравнением (1.52).

1.2.3 Временной метод представления сигнала

При решении ряда задач спектральный (частотный) способ описания сигнала оказывается не столь удобен, как временной, суть которого состоит в разложении сигнала по ступенчатым функциям. Такой способ представления был впервые рассмотрен Лапласом, а нашел широкое практическое применение благодаря работам Хевисайда. Именно благодаря развитому им методу анализа линейных электрических цепей функция единичного скачка

$$1(t) \equiv \mathcal{H}(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{если } t > 0, \\ 1/2 & \text{если } t = 0, \\ 0 & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

получила название функции Хевисайда и обозначение $\mathcal{H}(t)$. График этой функции приведен на рис. 1.11 а).

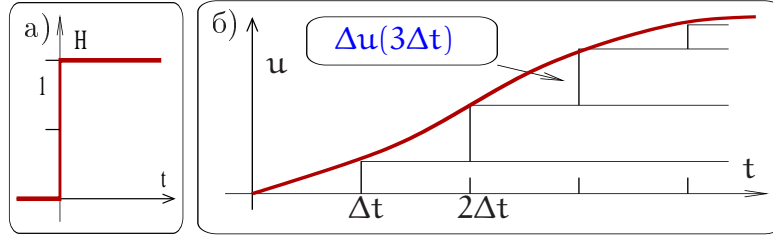


Рис. 1.11: Ступенчатая функция Хевисайда (а). Иллюстрация разложения по функциям Хевисайда (б).

На графике функции разделим ось времени на равные отрезки длительности Δt и заменим гладкую функцию ступенчатой, как это показано на рис. 1.11б. Значение функции в момент времени t равно сумме всех ступенек в предшествующие моменты времени. Из рис. 1.11 видно, что, при малых значениях Δt , высота этих ступенек равна $\frac{du(t)}{dt} \cdot \Delta t$. При $\Delta t \rightarrow 0$ получаем:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \mathcal{H}(t - \tau) d\tau, \quad (1.65)$$

Таким образом, $u(t)$ можно представить в виде суперпозиции ступенчатых функций (приведенный выше пример иллюстрирует это) или, что то же самое, функции Хевисайда $\mathcal{H}(t - \tau)$ образуют полный набор и по ним можно разложить любую дифференцируемую функцию.

Бесконечность в нижнем пределе интегрирования (1.65) означает, что исходная функция $u(t)$ может быть отлична от нуля при $t \rightarrow -\infty$ (например, $\sin at/t$ или $e^{-at^2/2}$). Однако, реальный сигнал имеет время начала, которое мы обозначим t_0 . В этом случае формула (1.65) переписывается:

$$u(t) = \int_{t_0}^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \mathcal{H}(t - \tau) d\tau, \quad \text{при } u(t < t_0) = 0. \quad (1.66)$$

Другим примером временного представления сигнала является его разложение по дельта-функциям. Дельта-функция $\delta(t)$ является обобщенной функцией, см. Приложение 6.1. Одно из свойств дельта-функции состоит в то, что:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.67)$$

Однако формально данное уравнение представляет собой разложение исходной функции $u(t)$, по дельта-функциям, причем образ $u(\tau)$ совпадает с самой функцией $u(\tau)$ (замена t на τ здесь, как и раньше, нужна только для того, чтобы выделить переменную интегрирования).

На первый взгляд разложение (1.67) кажется несколько искусственным, однако, использование дельта функции, как элементарного “кирпичика” очень полезно ибо оно соответствует “ударному” воздействию (воздействию очень короткого импульса). Зная реакцию линейной системы на один такой “удар”, можно рассчитать и реакцию системы на произвольное воздействие, используя принцип суперпозиции.

Глава 2

Линейные системы

2.1 Преобразование сигнала в линейных системах

Линейными называют системы, параметры которых не зависят от величины воздействия, и поэтому их отклик прямо пропорционален силе воздействия. Процессы преобразования сигнала в линейных системах описываются линейными дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями. Линейные системы подразделяют на сосредоточенные и распределенные. Граница между ними определяется условием квазистационарности.

2.1.1 Условие квазистационарности

Пусть L — характерные размеры системы (радиофизического устройства), c — скорость света, T — характерное время изменения состояния системы ($T = 1/f$, f — частота). Тогда при выполнении условия:

$$\frac{L}{c} \ll T \quad \text{или} \quad \frac{L}{\lambda} \ll 1, \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad (2.1)$$

можно обоснованно считать, что электромагнитное поле во всех частях системы меняется синхронно, т.е. можно не учитывать запаздывание, связанное с временем распространения электро-магнитной (э.м.) волны. В этом случае систему считают квазистационарной, а условие (2.1) называют условием квазистационарности.

Если выполняется обратное неравенство

$$\lambda \leq L \quad (2.2)$$

то системы называют распределенными. В распределенных системах мгновенные значения токов и напряжений в разных точках отличны друг от друга в силу разности фаз, определяемых временем распространения э.м. волны.

Приведем пример: частоте переменного тока в электрической сети $f = 50$ Гц соответствует длина волны $\lambda \simeq 6000$ км. Диаметр города Москвы ~ 30 км — значительно меньше этой величины. Даже для линии электропередачи от Москвы до Санкт-Петербурга (600 км) условие квазистационарности (2.1) выполняется и эту линию можно рассматривать как сосредоточенную.

Другой пример: частоте $f = 1$ ГГц (10^9 Гц, диапазон мобильной связи) соответствует длина волны $\lambda \simeq 30$ см. В этом случае размеры приемника оказываются сравнимыми с длиной волны и условие квазистационарности (2.1) может быть не выполнено.

2.1.2 Простейшие линейные элементы

При выполнении условия квазистационарности правомерно использование понятий идеальных сосредоточенных элементов: емкости C , сопротивления R и индуктивности L (рис. 2.1), составляющих полный набор пассивных линейных элементов, используемых в радиофизике. (Мы говорим об идеальных линейных элементах R , C , L , хотя в реальности это лишь приближение — см. ниже.)

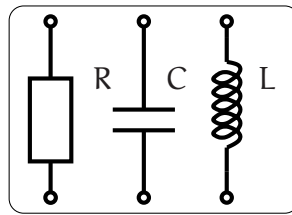


Рис. 2.1: Идеальные линейные сосредоточенные элементы: емкость C , сопротивление R и индуктивность L

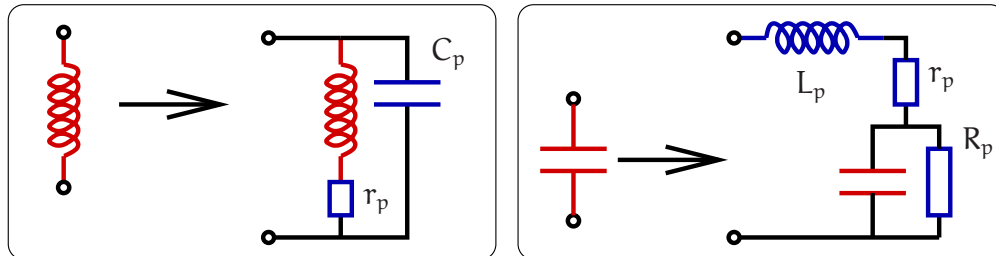


Рис. 2.2: Простейшие модели, учитывающие паразитные параметры сосредоточенных элементов. C_p — суммарная межвитковая емкость катушки индуктивности, r_p — сопротивление проводов, L_p — индуктивность подводящих проводов, R_p — сопротивление утечки.

Условие линейности этих элементов можно сформулировать следующим образом:

$$\frac{dU}{dI} = R = \text{const}, \quad (2.3)$$

$$\frac{d\Phi}{dI} = L = \text{const}, \quad (2.4)$$

$$\frac{dQ}{dU} = C = \text{const}. \quad (2.5)$$

Только в этом случае отклик систем, содержащих такие элементы, *линейно пропорционален* воздействию. Например, ток I пропорционален напряжению U : $I = U/R$, поток Φ пропорционален току I : $\Phi = LI$.

В действительности реальные емкости (конденсаторы), сопротивления (резисторы) и индуктивности (катушки) обладают так называемыми паразитными параметрами, которые необходимо учитывать при работе на высоких частотах. Они могут быть учтены в простейших *линейных* моделях, эквивалентные схемы которых приведены на рис. 2.2.

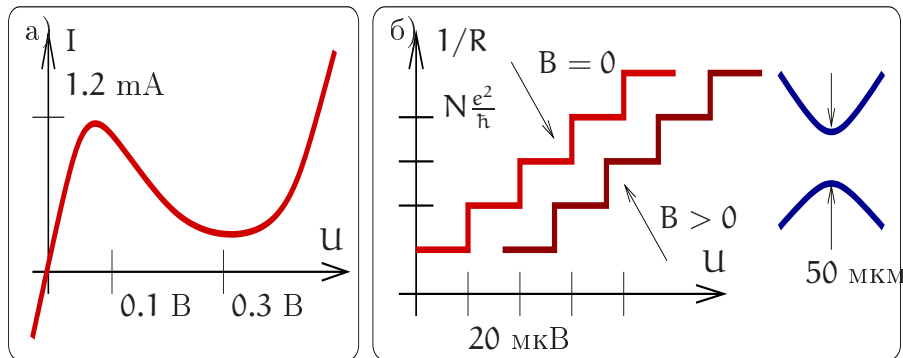


Рис. 2.3: а) вольтамперная характеристика туннельного диода; б) квантовые скачки проводимости между двумя позолоченными контактами в вакууме при комнатной температуре (N — целое), кривая проводимости сдвигается при приложении магнитного поля B параллельно контакту.

Ясно, что условия (2.3, 2.4, 2.5) справедливы лишь при *малых* величинах I , U , Q , Φ . При росте воздействия различные нелинейные эффекты нарушают эту связь. Следует подчеркнуть, что условие малости воздействия в каждом случае требует отдельного рассмотрения. Например, на рис. 2.3а приведена типичная вольтамперная характеристика (ВАХ) туннельного диода. Видно, что условие линейности выполняется для него лишь на начальном участке характеристики при токах $I < 1$ мА и напряжении $U < 0.05$ В. При токе $I \simeq 1$ мА ВАХ заметно нелинейна. Другой, более яркий пример приведен на рис. 2.3б. Он демонстрирует скачкообразное изменение (квантование) проводимости между двумя близко расположенными позолоченными электродами, находящимися в вакууме при комнатной температуре, в зависимости от напряжения, приложенного к электродам. При изменении напряжения на электродах на величину $\simeq 20$ мкВ проводимость меняется на величину e^2/h (e — заряд электрона, h — постоянная Планка). Приведенные примеры далеко не исчерпывают многообразие элементов, используемых в радиофизике.

Пусть условия квазистационарности и линейности выполнены и можно пользоваться моделями сосредоточенных элементов. Напомним их свойства.

Для сопротивления R справедлив закон Ома:

$$U_R = I_R R, \quad [R] = \text{Ом}; \quad G = 1/R, \quad [G] = \text{Сименс},$$

здесь I_R — ток, текущий через сопротивление, U_R — падение напряжения, G — проводимость. Рассеиваемая в тепло энергия W_R и мощность P_R равны

$$W_R = \int_0^t I_R^2 R dt = \int_0^t \frac{U_R^2}{R} dt = \int_0^t I_R U_R dt,$$

$$P_R = I_R^2 R = \frac{U_R^2}{R} = U_R I_R.$$

Благодаря свойству рассеивать энергию сопротивление R называют диссипативным элементом.

Для емкости C справедливо соотношение:

$$q_C = U_C C, \quad [C] = \Phi \text{ (Фарад)}, \quad I_C = \frac{dq_C}{dt} = C \frac{dU_C}{dt},$$

здесь q_C , I_C и U_C — соответственно заряд, ток и напряжение на емкости. Напряжение на конденсаторе и изменение энергии W_C , запасенной в емкости, равны

$$U_C = \int_0^t \frac{I_C(t)}{C} dt + U_C(0),$$

$$W_C = W_C(t) - W_C(0) = \frac{CU_C^2(t)}{2} - \frac{CU_C^2(0)}{2},$$

где $U_C(0)$ — начальное напряжение на емкости, $W_C(0)$ — начальная энергия, запасенная в емкости. Конденсатор накапливает или отдает энергию, но не рассеивает ее в тепло. Поэтому конденсатор называют энергоемким или реактивным элементом.

Для индуктивности L имеем определение:

$$\Phi_L = LI_L, \quad [L] = \text{Гн (Генри)},$$

Здесь Φ_L , I_L и U_L — соответственно магнитный поток и ток, текущий через катушку. Связь между напряжением U_L на индуктивности и током I_L определяется законом электромагнитной индукции:

$$I_L = \frac{1}{L} \int_0^t U_L(t) d\tau + I_L(0),$$

где $I_L(0)$ — начальное значение тока, протекающего через катушку. Изменение энергии W_L , запасаемой в индуктивности, равно

$$W_L = W_L(t) - W_L(0) = \frac{LI_L^2(t)}{2} - \frac{LI_L^2(0)}{2},$$

где $W_L(0)$ — начальная энергия, запасенная в катушке индуктивности. Индуктивность накапливает или отдает энергию, но не рассеивает ее в тепло. Поэтому индуктивность (как и конденсатор) называют энергоемким или реактивным элементом.

2.1.3 Источник сигнала

На первом этапе нас будет интересовать реакция линейной пассивной системы (т.е. системы, составленной из линейных сопротивлений, емкостей и индуктивностей и не содержащей внутренних источников энергии) на внешнее воздействие. Под воздействием мы будем понимать подачу (включение) на “вход” системы сигнала — напряжения или тока, поступающих от внешнего источника.

Из курса общей физики известно, что любой источник может быть представлен либо в виде генератора напряжения, либо в виде генератора тока. Эти понятия широко используют как в радиофизике, так в электротехнике. На рис. 2.4 показаны часто встречающиеся условные обозначения генератора напряжения и генератора тока. На рис. 2.4а генератор напряжения (обведен пунктиром), нагружен на сопротивление R_H . Генератор напряжения характеризуется величиной эдс U_0 и внутренним сопротивлением R_i . Очевидно, что для представленной схемы справедливы соотношения:

$$U_0 = I(R_i + R_H), \quad U_{R_H} = U_0 \frac{R_H}{R_i + R_H}.$$

Если $R_i \ll R_H$, то практически все напряжение генератора приложено к сопротивлению нагрузки R_H . Понятием генератора напряжения удобно пользоваться в случае, когда внутреннее сопротивление источника напряжения мало, т.е. $R_i \ll R_H$. Элемент, изображенный кружком, является идеальным генератором напряжения. Он задает эдс U_0 и обладает нулевым внутренним сопротивлением. Реально существующее внутреннее сопротивление генератора напряжения представлено величиной R_i . Генератор напряжения отдает в нагрузку мощность $P = I^2 R_H = U_0^2 R_H / (R_i + R_H)^2$, которая нелинейно зависит от сопротивления нагрузки R_H . Легко показать, что эта мощность максимальна при $R_H = R_i$.

На рисунке 2.4б показана схема генератора тока (обведен пунктиром), нагруженного на сопротивление R_H . Для этой схемы:

$$U_{R_H} = \frac{I_0}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_H}} = I_0 \frac{R_i R_H}{R_i + R_H}, \quad I_{R_H} = \frac{I_0 R_i}{R_H + R_i},$$

Если $R_i \gg R_H$, то $I_{R_H} \gg I_{R_i}$.

Следовательно, понятием генератора тока удобно пользоваться, когда его внутреннее сопротивление велико: $R_i \gg R_H$. Элемент, изображенный кружком на рис. 2.4б, является идеальным источником тока и задает ток I_0 , который разделяется между токами, текущими через внутреннее сопротивление R_i и сопротивление нагрузки R_H .

Следует подчеркнуть, что разделение генератора напряжения на идеальный генератор и внутреннее сопротивление R_i есть абстракция, удобная для расчетов. Реальный источник невозможно разделить на эти два элемента. Также условно и разделение генератора тока на идеальный генератор тока (кружок на рисунке 2.4б) и внутреннее сопротивление R_i . Точка А на обоих рисунках 2.4 физически не доступна. Однако, внутреннее сопротивление есть реальная физическая величина, которая может быть измерена экспериментально при подключении сопротивления нагрузки и измерении напряжения на нагрузке и протекающего через нее тока.

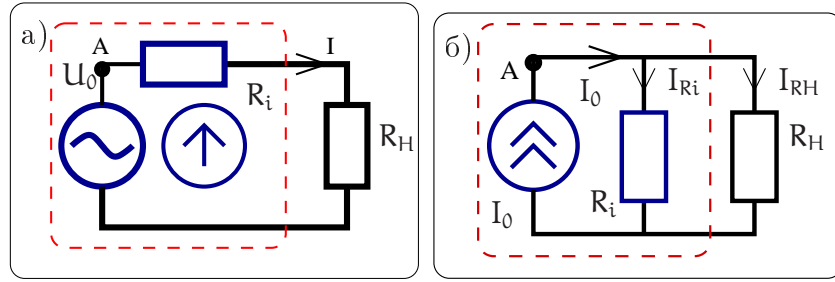


Рис. 2.4: а) генератор напряжения (обведен пунктиром) нагруженный на сопротивление R_H , для генератора напряжения используют два символа — стрелку или волну; б) генератор тока (обведен пунктиром) нагруженный на сопротивление R_H обозначают двумя стрелками, направление которых указывает направление протекания тока.

В зависимости от условий задачи один и тот же источник может быть представлен как источник напряжения или как источник тока. Для перехода от одного представления к другому или для сведения сложного устройства к генератору тока или напряжения используют теорему об эквивалентном генераторе (дается без доказательства). Суть ее состоит в том, что любое активное (т.е. содержащее внутренний источник электрической энергии) устройство может быть представлено либо генератором напряжения, либо генератором тока.

Теорема об эквивалентном генераторе

Для рассмотрения этой широко используемой на практике теоремы введем понятие устройства, называемого “черным ящиком” с двумя клеммами, к которым можно подключать различные нагрузки и проводить электрические измерения. Черный ящик активен, т.е. содержит источник электрической энергии — генератор, а также линейные диссипативные и реактивные элементы, соединенные произвольным образом. Теорема об эквивалентном генераторе утверждает, что такой черный ящик может быть представлен как эквивалентный генератор тока с параметрами $I_{\text{ЭКВ}}$ и $R_{\text{ЭКВ}}$ или как эквивалентный генератор напряжения с параметрами $U_{\text{ЭКВ}}$ и $R_{\text{ЭКВ}}$.

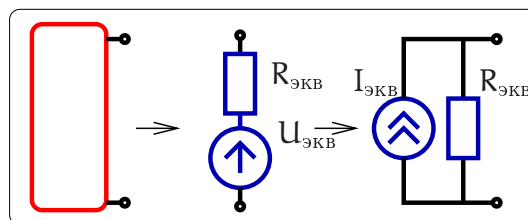


Рис. 2.5: Применение теоремы об эквивалентном генераторе.

$$U_{\text{ЭКВ}} = U_{\text{ХХ}}, \quad (2.6)$$

$$I_{\text{ЭКВ}} = I_{\text{КЗ}}, \quad (2.7)$$

$$R_{\text{экв } U} = R_{\text{экв } I} = \frac{U_{xx}}{I_{\text{кз}}}. \quad (2.8)$$

Здесь U_{xx} — напряжение на разомкнутых клеммах черного ящика (режим холостого хода), $I_{\text{кз}}$ — ток через соединенные друг с другом клеммы (режим короткого замыкания).

Заметим, что сопротивления эквивалентных генераторов тока и напряжения совпадают: $R_{\text{экв } U} = R_{\text{экв } I}$.

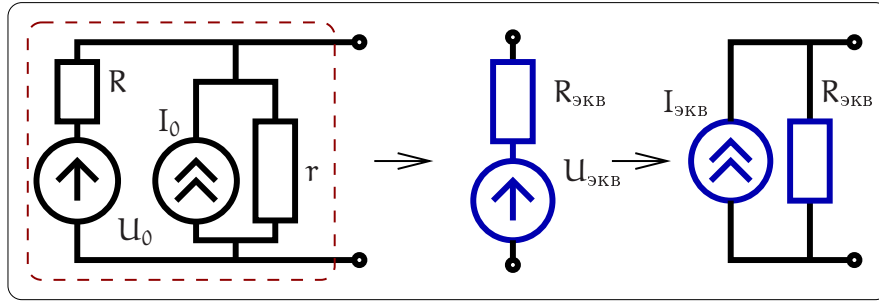


Рис. 2.6: Пример для расчета эквивалентного генератора.

Рассмотрим, например, определение эквивалентных параметров для схемы, изображенной на рис. 2.6. Используя теорему об эквивалентном генераторе, нетрудно найти, что обведенную пунктиром часть схемы можно представить как эквивалентным генератором напряжения, так и эквивалентным генератором тока с параметрами, которые определяются напряжением холостого хода и током короткого замыкания:

$$U_{xx} = U_0 \frac{r}{r+R} + I_0 \frac{rR}{r+R}, \quad I_{\text{кз}} = I_0 + \frac{U_0}{R},$$

$$R_{\text{экв}} = \frac{U_{xx}}{I_{\text{кз}}} = \frac{Rr}{R+r}.$$

Здесь мы использовали принцип суперпозиции, рассчитывая напряжение холостого хода U_{xx} как сумму напряжений, создаваемых независимо действующими генераторами U_0 и I_0 . В частности, рассчитывая напряжение холостого хода U_{xx} , создаваемого генератором напряжения U_0 , мы мысленно “выключаем” генератор тока I_0 — это означает разрыв в точке I_0 , поскольку формально идеальный генератор тока обладает бесконечным сопротивлением. А рассчитывая напряжение холостого хода U_{xx} , создаваемого генератором тока I_0 , мы “выключаем” генератор напряжения U_0 , заменяя его проводником с нулевым сопротивлением (поскольку формально идеальный генератор напряжения обладает нулевым внутренним сопротивлением).

Принцип суперпозиции, справедливый для линейных стационарных систем, формулируется следующим образом:

Если в цепи есть несколько источников тока или напряжения, то можно найти отклик системы на каждый источник в отдельности. Полный отклик системы в

целом будет равен сумме отдельно рассчитанных откликов. (Каждый источник “не мешает” и “не помогает” другому, а работает независимо)¹.

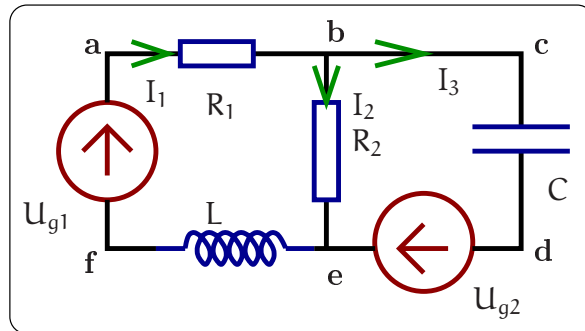


Рис. 2.7: Пример для демонстрации правила Кирхгофа.

Целью анализа линейной системы является расчет токов или напряжений, возникающих в системе под действием внешних источников. В общем случае эта система описывается системой линейных дифференциальных (или интегро-дифференциальных) уравнений с постоянными коэффициентами для токов и (или) напряжений. Такие системы называются линейными и стационарными². Для получения этих уравнений используют известные правила Кирхгофа. Задача простая, но громоздкая. Например, для нахождения токов, текущих в схеме на рис. 2.7, необходимо записать следующие уравнения для контуров (abef) и (bcde):

$$\begin{aligned} (\text{abef}) : \quad U_{g1} &= I_1 R_1 + I_2 R_2 + L \frac{dI_1}{dt}, \\ (\text{bcde}) : \quad U_{g2} &= \int_{-\infty}^t \frac{I_3(\tau)}{C} d\tau - I_2 R_2, \\ I_1 &= I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Решение системы линейных интегро-дифференциальных уравнений известно. Чтобы избежать трудоемких вычислений применяют различные методы, среди которых наиболее распространенным является метод комплексных амплитуд, позволяющий заменить интегро-дифференциальные уравнения на алгебраические.

2.1.4 Метод комплексных амплитуд и спектральный метод

Пусть в цепи действует источник гармонического напряжения $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ или тока $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$. Тогда установившиеся значения токов или напряжений будут изменяться с частотой внешнего воздействия, но отличаться по фазе. Для расчета амплитуд и фаз установившихся колебаний применяют символический метод или метод комплексных амплитуд.

¹Строго говоря, принцип суперпозиции справедлив и для линейной нестационарной системы.

² Если коэффициенты линейной системы уравнений зависят от времени, то такие системы называются линейными и нестационарными. В принципе все реальные системы нестационарны — ее параметры медленно меняются со временем (“старение”). Однако в данном разделе мы этим пренебрегаем и рассматриваем только стационарный случай.

Перед его изложением напомним некоторые формулы из теории комплексных чисел:

$$Z = a + ib = |Z| e^{i\phi}, \quad |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \arg(Z) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z}, \quad (2.9)$$

$$\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{если } Z \neq 0$$

(ϕ не определено, если $Z = 0$),

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (\text{теорема Эйлера}). \quad (2.10)$$

В силу этого любую функцию, зависящую от времени по гармоническому закону, можно представить как действительную часть комплексной величины, представленной в экспоненциальной форме:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} (u_0 e^{i(\omega t + \phi)}) = \operatorname{Re} (u_0 e^{i\phi} e^{i\omega t}) = \operatorname{Re} (\mathcal{A} e^{i\omega t}), \quad \mathcal{A} = u_0 e^{i\phi}.$$

Здесь амплитуда напряжения (действительная величина) обозначена как u_0 , комплексная амплитуда обозначена рукописной буквой \mathcal{A} , знак Re обозначает действительную часть комплексного числа. Обычно в методе комплексных амплитуд обозначение Re опускают, помня о том, что в окончательном результате надо взять действительную часть. Тогда операции дифференцирования или интегрирования гармонической функции, представленной в комплексном виде, сводятся к операциям умножения и деления:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow u(t) = \mathcal{A} e^{i\omega t} \quad (2.11)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = -\omega u_0 \sin(\omega t + \phi) \longrightarrow \frac{du(t)}{dt} = i\omega \mathcal{A} e^{i\omega t} \quad (2.12)$$

$$\int u(t) dt = \frac{u_0}{\omega} \sin(\omega t + \phi) \longrightarrow \int u(t) dt = \frac{\mathcal{A}}{i\omega} e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

Подчеркнем, что метод комплексных амплитуд близок спектральному методу, т.е. может быть использован при рассмотрении задач о воздействии сигнала произвольной формы на линейную систему. Действительно, все токи и напряжения можно представить в виде интеграла Фурье, знакомому нам по предыдущей главе. Тогда входное напряжение можно записать в виде:

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.14)$$

Анализируя воздействие на систему каждой гармоники $U_{\text{вх}}(\omega) e^{i\omega t}$ и используя принцип суперпозиции, можно найти выходное напряжение (отклик системы)

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вых}}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (2.15)$$

2.1.5 Характеристики линейных систем

Цель анализа линейных систем заключается в нахождении их отклика на внешнее воздействие. Рассмотрим линейную систему, состоящую из произвольной комбинации пассивных линейных элементов, изображенную прямоугольником на рис. 2.8.

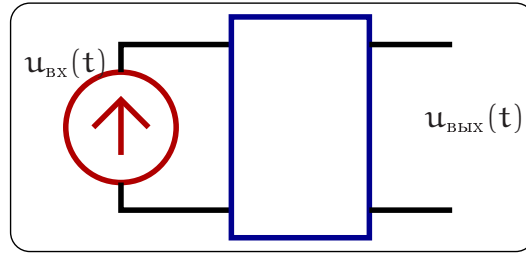


Рис. 2.8: Прямоугольником обозначена цепь, содержащая произвольную комбинацию пассивных линейных элементов. На ее входе действует идеальный генератор напряжения $u_{\text{вх}}(t)$ (с нулевым внутренним сопротивлением), на выходе регистрируется выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t)$.

В этой системе можно условно выделить “вход” и “выход” — такие цепи называют четырехполюсниками. Пусть на вход четырехполюсника поступает напряжение $u_{\text{вх}}(t)$, на выходе регистрируется отклик $u_{\text{вых}}(t)$, а нас интересует установление связи между величинами $u_{\text{вх}}(t)$ и $u_{\text{вых}}(t)$. Источником напряжения является идеальный генератор напряжения $u_{\text{вх}}$, изображенный на рис. 2.8 — по определению его внутреннее сопротивление $R_i = 0$. Выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t)$ измеряется прибором с бесконечным входным сопротивлением.

Для нахождения отклика линейной системы на произвольное воздействие используют различные характеристики, устанавливающие однозначное соответствие между входным и выходным сигналами (это могут быть токи и напряжения). Наиболее распространенными являются коэффициент передачи системы, ее переходная и импульсная характеристики.

Коэффициент передачи $K(\omega)$

Понятие коэффициента передачи используют при частотном (спектральном) способе описания линейных радиофизических систем. Входное и выходное напряжения можно представить в виде интеграла Фурье (2.14, 2.15) и определить коэффициент передачи цепи $K(\omega)$ как

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)} = |K(\omega)|e^{i \arg K(\omega)}. \quad (2.16)$$

Поскольку амплитуды $U_{\text{вых}}(\omega)$ и $U_{\text{вх}}(\omega)$ комплексны, то и коэффициент передачи $K(\omega)$ (2.16) является комплексной функцией, связывающей амплитуды входного и выходного напряжения. В этом случае его называют коэффициентом передачи по напряжению и обозначают $K_U(\omega)$. Аналогично, коэффициент передачи системы по току $K_I(\omega)$:

$$K_I(\omega) = \frac{I_{\text{вых}}(\omega)}{I_{\text{вх}}(\omega)}, \quad (2.17)$$

где $I_{\text{вх}}(\omega)$ и $I_{\text{вых}}(\omega)$ — комплексные амплитуды токов, текущих во входной и выходной цепях четырехполюсника.

Коэффициент передачи по напряжению показывает отношение установившегося гармонического напряжения на выходе системы к напряжению на ее входе. Это означает, что генератор гармонического напряжения начал действовать давно, переходные процессы в системе затухли, и остались только вынужденные колебания. Модуль $|K(\omega)|$ и аргумент $\arg K(\omega)$ коэффициента передачи по напряжению имеют ясный физический смысл — модуль равен отношению амплитуд выходного и входного напряжений на частоте ω (амплитудно-частотная характеристика или АЧХ), а аргумент $\arg K(\omega)$ — разности их фаз (фазово-частотная характеристика или ФЧХ). Иногда АЧХ измеряют в децибелах по формуле

$$N = 20 \log |U_{\text{вых}}(\omega)/U_{\text{вх}}(\omega)|. \quad (2.18)$$

Важно помнить, что при спектральном описании, использующем комплексные величины, нетрудно перейти к действительным величинам. Пусть на систему, описываемую комплексным коэффициентом передачи $K(\omega)$, действует источник напряжения $u_{\text{вх}}(t) = u_0 \cos \omega t$ (u_0 — амплитуда, действительная величина). Тогда установившиеся колебания напряжения на выходе рассчитываются очевидным образом:

$$u_{\text{вх}}(t) = \text{Re} (u_0 e^{i\omega t}), \quad u_{\text{вых}}(t) = \text{Re} (K(\omega)u_0 e^{i\omega t}) = |K(\omega)| u_0 \cos [\omega t + \arg K(\omega)]. \quad (2.19)$$

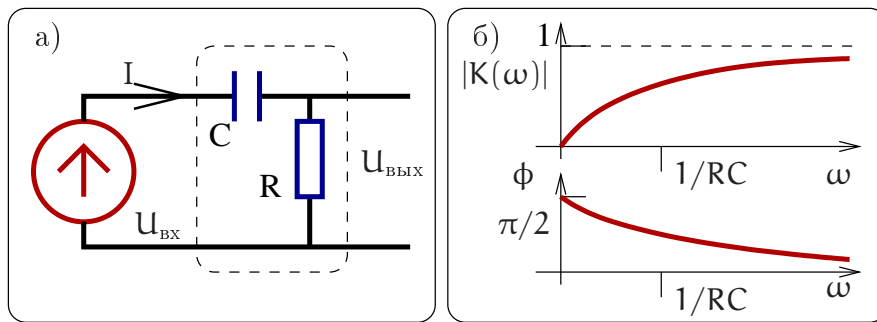


Рис. 2.9: Пример для расчета коэффициента передачи, $\phi = \arg K(\omega)$

Пример. Рассчитаем коэффициент передачи RC-цепочки, изображенной на рис. 2.9а. Запишем уравнение Кирхгофа, учитывая, что через все элементы цепочки течет один и тот же ток $I(\omega)$ (напомним, что выходное напряжение измеряется прибором (например, вольтметром) с бесконечным входным сопротивлением):

$$U_{\text{вх}}(\omega) = I(\omega) \left(R + \frac{1}{i\omega C} \right), \quad U_{\text{вых}} = I(\omega) R, \quad (2.20)$$

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} = \frac{i\omega\tau^*}{1 + i\omega\tau^*}, \quad \tau^* = RC, \quad (2.20)$$

$$|K(\omega)| = \frac{\omega\tau^*}{\sqrt{1 + (\omega\tau^*)^2}}, \quad \arg K(\omega) = \arctg \frac{1}{\omega\tau^*} = \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega\tau^*). \quad (2.21)$$

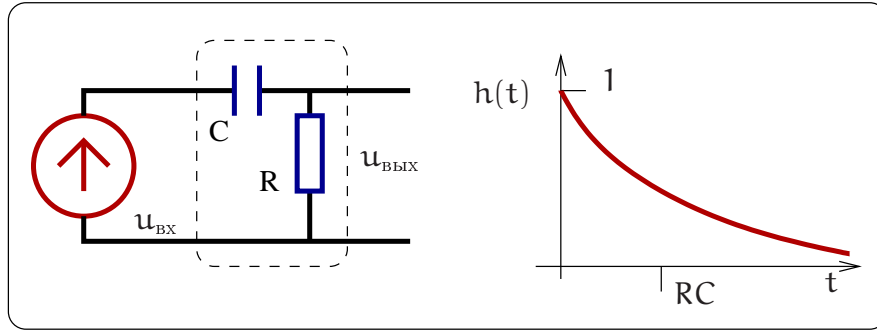


Рис. 2.10: Переходная функция для RC-цепочки.

Здесь постоянная времени τ^* , характеризует процесс релаксации RC-цепочки (она показывает, за какое время напряжение на конденсаторе C при его разрядке через сопротивление R , проходящем по закону $\sim e^{-t/\tau^*}$, уменьшается в e раз). В формуле (2.21) для $\arg K(\omega)$ (см. определение аргумента (2.9)) мы привели две формы записи: первая получена прямым вычислением фазы комплексного числа $K(\omega)$ (деление числителя и знаменателя на $i\omega\tau^*$ и вычисление фазы знаменателя), вторая — как разность фаз числителя и знаменателя (2.20). Графики АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 2.9б.

Переходная характеристика $h(t)$

При решении некоторых задач удобным оказывается временной способ представления сигнала. В разделе 1.2.3 (1.65, 1.66) мы показали, что любую функцию (в том числе и входное напряжение $u_{\text{вх}}(t)$) можно представить как суперпозицию ступенчатых функций Хевисайда $\mathcal{H}(t)$ (рис. 1.11а):

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_{t_0}^t \frac{du_{\text{вх}}(\tau)}{d\tau} \mathcal{H}(t - \tau) d\tau, \quad \text{при } u(t < t_0) = 0. \quad (2.22)$$

Здесь t_0 время начала действия сигнала.

Введем *переходную характеристику* $h(t)$ как реакцию линейной системы на входное воздействие вида $\mathcal{H}(t)$ при условии, что все токи и напряжения в системе до воздействия равны нулю. Тогда выходное напряжение может быть представлено в виде суперпозиции (интеграла) по функциям $h(t)$

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{t_0}^t \frac{du_{\text{вх}}(\tau)}{d\tau} h(t - \tau) d\tau, \quad \text{при } u(t < t_0) = 0, \quad (2.23)$$

Пример. Для RC-цепочки, изображенной на рис. 2.10, можно рассчитать переходную характеристику, записав уравнения Кирхгофа и решая дифференциальное уравнение для заряда $q(t)$ на конденсаторе:

$$u_{\text{вх}}(t) = RI(t) + \int_{-\infty}^t \frac{I(t)}{C} dt = R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C},$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^t \frac{u_{\text{вх}}(\tau)}{R} e^{-(t-\tau)/\tau^*} d\tau, \quad \tau^* = RC. \quad (2.24)$$

Подставляя в качестве входного напряжения ступенчатую функцию $u_{\text{вх}} = u_0 \mathcal{H}(t)$ (здесь u_0 — постоянная, имеющая размерность напряжения и характеризующая высоту ступеньки), находим выражения для заряда и выходного напряжения (при нулевом начальном условии $q(0) = 0$):

$$u_{\text{вх}}(\tau) = u_0 \mathcal{H}(\tau), \quad \Rightarrow \quad q(t) = C u_0 (1 - e^{-t/\tau^*}) \mathcal{H}(t), \quad (2.25)$$

$$u_{\text{вых}}(t) = RI(t) = R \frac{dq(t)}{dt} = u_0 e^{-t/\tau^*} \mathcal{H}(t), \quad (2.26)$$

а переходную характеристику находим как отношение выходного напряжения к высоте ступеньки на входе

$$h(t) \equiv \frac{u_{\text{вых}}(t)}{u_0} = e^{-t/\tau^*} \mathcal{H}(t). \quad (2.27)$$

Здесь функция $\mathcal{H}(t)$ учитывает отсутствие сигнала при $t < 0$: $h(t < 0) = 0$ (т.е. соблюдение принципа причинности).

Импульсная характеристика

Как было показано в разделе 1.2.3, любую функцию можно представить в виде суперпозиции дельта-функций (1.67):

$$u_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Импульсную характеристику (функцию) $g(t)$ определяют как отклик системы на дельта-функцию. Тогда выходное напряжение $u_{\text{вых}}(t)$ естественно представить в виде суперпозиции по импульсным функциям $g(t)$:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{вх}}(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (2.28)$$

Импульсная характеристика $g(t)$ описывает реакцию линейной системы на воздействие в виде дельта-функции $\delta(t)$, т.е. на “удар” — подачу на вход короткого импульса напряжения или тока (длительность импульса много меньше времени релаксации системы). Для наглядности дельта-функцию удобно представлять в виде прямоугольной функции, помня, что ее длительность Δ много меньше характерных времен четырехполюстника.

Заметим, что в верхнем пределе интеграла (2.28) можно поставить t , поскольку импульсная функция $g(t - \tau)$ равна нулю при $\tau > t$ (принцип причинности).

Поскольку производная по времени от функции Хевисайда равна дельта-функции (см. Приложение 6.1), то в силу линейности системы импульсная характеристика есть производная от переходной:

$$\delta(t) = \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt}, \quad \Rightarrow \quad g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (2.29)$$

В качестве примера опять рассмотрим RC-цепочку на рис. 2.10. Дифференцируя (2.24) и подставляя $u_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$, находим:

$$u_{\text{вых}}(t) \equiv R \frac{dq(t)}{dt} = u_{\text{вх}}(t) - \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(\tau) e^{-(t-\tau)/RC} \frac{d\tau}{RC},$$

$$g(t) = \delta(t) - \frac{\mathcal{H}(t)}{RC} e^{-t/RC}.$$

(При дифференцировании интеграла (2.24) по времени мы должны продифференцировать его сначала по верхнему пределу интегрирования, а потом еще и подинтегральную функцию.) Поскольку дельта-функцию сложно изобразить графически, мы приводим на рис. 2.11 реакцию RC цепочки на короткий прямоугольный импульс, причем его длительность Δ много меньше времени релаксации τ^*) — это “почти” импульсная характеристика.

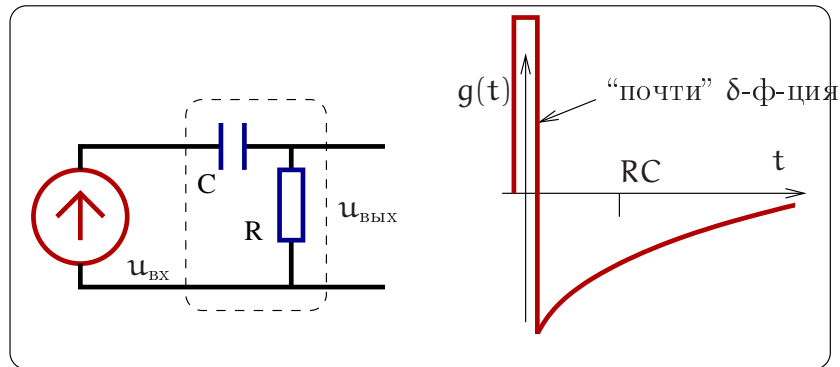


Рис. 2.11: Напряжение на выходе RC цепочки после воздействия короткого прямоугольного импульса (“почти” импульсная характеристика).

Появление дельта-функции на выходе рассматриваемой системы имеет физический смысл. Действительно, δ -импульс обладает постоянной спектральной плотностью в бесконечной полосе частот, образуя, говоря математическим языком, “суперконтинуум”, а импеданс конденсатора на высоких частотах стремится к нулю. Поэтому короткий импульс напряжения (дельта-функция) появляется на сопротивлении (выходе системы). Однако, в то же время (“по пути”) импульс заряжает конденсатор, и последующий экспоненциальный хвост описывает его разряд.

2.1.6 Связь функций $K(\omega)$, $h(t)$, $g(t)$

Поскольку одно и то же физическое устройство можно характеризовать любой из функций $K(\omega)$, $h(t)$, $g(t)$, то эти функции должны быть связаны между собой. Наличие связи между коэффициентом $K(\omega)$ и переходной характеристикой $h(t)$ имеет важное прикладное значение. В частности, измерение зависимости $K(\omega)$ широкополосных систем требует набора генераторов гармонических колебаний, в общем случае покрывающих диапазон от единиц Гц до сотен ГГц. Кроме того, измерение $K(\omega)$ довольно трудоемко — надо подать на вход гармонический сигнал определенной частоты, дождаться, когда все переходные процессы закончатся и

измерить амплитуду и фазу напряжения на выходе, затем повторить то же самое для другой (близкой) частоты и так далее. Снятие же переходной характеристики проще — после подачи на вход ступеньки надо лишь записать зависимость напряжения на выходе от времени. А по измеренной переходной характеристике легко численно рассчитать коэффициент передачи.

Действительно, между характеристиками $K(\omega)$, $h(t)$, $g(t)$ существуют следующие соотношения:

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.30)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (2.31)$$

$$h(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{i\omega + \epsilon} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (2.32)$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (2.33)$$

Докажем формулы (2.30 - 2.33). Сначала рассмотрим случай, когда на вход анализируемой системы подается дельта-функция. Откликом системы, по определению, будет импульсная функция $g(t)$. С другой стороны, отклик системы можно выразить через интеграл от коэффициента передачи, приняв во внимание, что Фурье образ дельта-функции есть единица (см. приложение 6.1):

$$\begin{aligned} u_{\text{вх}}(t) &= \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \Rightarrow U_{\text{вх}}(\omega) = 1, \\ u_{\text{вых}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) g(t - \tau) d\tau = g(t). \end{aligned}$$

Это значит, что функция передачи $K(\omega)$ и импульсная характеристика $g(t)$ связаны преобразованием Фурье. Таким образом, мы доказали формулу (2.31). Производя обратное преобразование Фурье получаем соотношение (2.30).

Выведем формулу (2.32). Для этого на вход подадим ступеньку и найдем ее Фурье-образ. Формально функция Хевисайда не удовлетворяет условию интегрируемости на бесконечной прямой (что требуется для разложения в ряд Фурье), и поэтому рассмотрим “заваленную на бесконечности” ступеньку. Для нее можно рассчитать Фурье преобразование в смысле предельного перехода:

$$\begin{aligned} u_{\text{вх}} &= \mathcal{H}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{-\epsilon t}, \quad t > 0, \\ \mathcal{H}(\omega) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(i\omega + \epsilon)\tau} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i\omega + \epsilon}, \\ u_{\text{вых}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{K(\omega)}{i\omega + \epsilon} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \equiv h(t). \end{aligned}$$

Эти соотношения удобно использовать при решении конкретных задач. Смысл введения бесконечно малой ϵ пояснен в Приложении 6.1. Заметим, что в формуле (2.32) предел при $\epsilon \rightarrow 0$ надо брать *после* взятия интеграла.

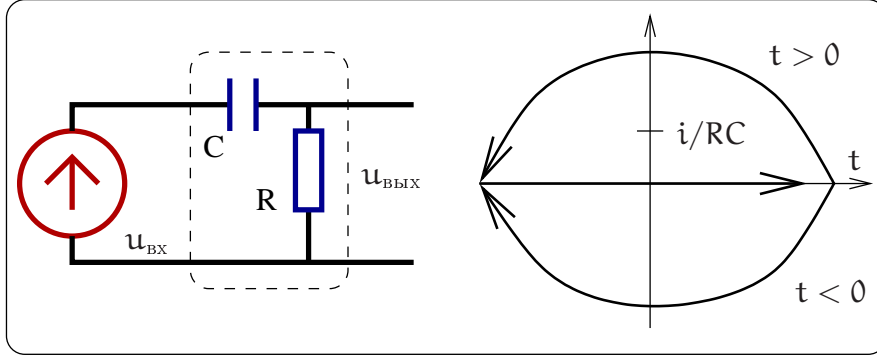


Рис. 2.12: Расчет переходной характеристики RC цепи.

Проиллюстрируем применение соотношений (2.30, 2.31, 2.32, 2.33) для RC цепочки, изображенной на рис. 2.12. Коэффициент передачи этой цепочки был найден ранее (2.20). Воспользовавшись формулами (2.32, 2.33), нетрудно получить:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i\omega + \epsilon} \frac{i\omega\tau^*}{1 + i\omega\tau^*} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^* e^{i\omega t}}{(1 + i\omega\tau^*)} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{i(\omega - i/\tau^*)} \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= 2\pi i \text{ Выч}_{\omega=i/\tau^*} \left(\frac{e^{i\omega t}}{2\pi i(\omega - i/\tau^*)} \right) = \mathcal{H}(t) e^{-t/\tau^*}. \end{aligned}$$

Здесь интеграл берется с помощью вычетов. При $t > 0$ контур замыкается через верхнюю полушлясность, а при $t < 0$ — через нижнюю полушлясность. В последнем случае ($t < 0$) интеграл равен нулю³, т.к. полюсы функции лежат в верхней полушлясности.

Заметим, что формулой (2.31) формально нельзя воспользоваться для нашего примера, т.к. функция $K(\omega)$ не удовлетворяет лемме Жордана — не стремится к нулю при $\omega \rightarrow \pm\infty$. Однако это препятствие можно формально обойти следующим образом:

$$K(\omega) = \frac{i\omega\tau^*}{1 + i\omega\tau^*} = 1 - \frac{1}{1 + i\omega\tau^*}, \quad (2.34)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + i\omega\tau^*} \right) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \delta(t) - \frac{\mathcal{H}(t)}{\tau^*} e^{-t/\tau^*}. \quad (2.35)$$

Здесь мы воспользовались формальным разложением Фурье для дельта-функции (см. Приложение 6.1).

Этот же результат можно получить иначе, используя формулу (2.33):

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{\mathcal{H}(t)}{RC} e^{-t/RC}. \quad (2.36)$$

Напомним, что можно получить функции $h(t)$ и $g(t)$ напрямую, не прибегая к формулам (2.31, 2.32). Для этого надо написать интегро-дифференциальное уравнение, описывающее нашу цепочку, и решить его (см. примеры выше).

³ Это обстоятельство записано в окончательной формуле с помощью функции Хевисайда $\mathcal{H}(t)$.

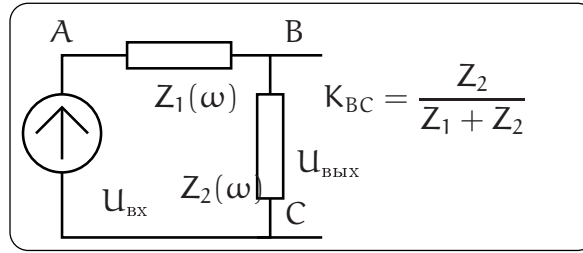


Рис. 2.13: Пример линейного четырехполюсника.

Очевидно, что последний способ более громоздкий, однако физически более наглядный. Решение же с помощью вычетов более коротко и даже кажется более изящным. Однако при его использовании легко допустить ошибку, поэтому им стоит пользоваться, если только есть уверенность в достаточной математической подготовке.

2.2 Воздействие сигналов на линейные R, L, C цепи

Множество линейных четырехполюсников, составляемых из элементов R, L, C, в конечном итоге сводится к эквивалентной схеме, изображенной на рис. 2.13, где $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ есть импедансы цепочек, составленные из простейших элементов R, L, C. Пусть мы интересуемся напряжением U_{BC} на импедансе Z_2 , тогда очевидно, что коэффициент передачи четырехполюсника будет равен $K_{BC}(\omega) = Z_2 / (Z_1 + Z_2)$. Возможна ситуация, когда требуется найти напряжение U_{AB} на импедансе Z_1 , и тогда коэффициент передачи будет равен $K_{AB} = Z_1 / (Z_1 + Z_2)$.

При использовании таких четырехполюсников обычно возникают задачи сохранения или целенаправленного изменения спектра входного сигнала. Напомним, что при воздействии сигнала на линейную систему в ее отклике присутствуют только спектральные составляющие тех же частот, что и во входном сигнале, новые спектральные составляющие не появляются. Результат такого воздействия может преследовать две цели: а) сохранение амплитудных и фазовых соотношений между гармоническими составляющими сигнала при его усилении или ослаблении; б) целенаправленное изменение амплитудно-фазовых соотношений, приводящее к изменению формы сигнала, подчеркиванию (или сглаживанию) особенностей его временного поведения, часто это называют фильтрацией сигнала. В математике такие возможности реализуются путем дифференцирования или интегрирования заданной функции.

Наиболее часто в радиофизике используют цепи, включающие R, C или R, L элементы. Особую роль играют цепи, включающие все три пассивных элемента: R, L, C. Иногда роль этих элементов играют ранее отмеченные “паразитные” параметры реальных сопротивлений, индуктивностей и емкостей (см. раздел 2.1.1).

Итак, в общем случае мы должны решить задачу о прохождении сигнала через линейную цепь, описываемую коэффициентом передачи $K_{AB} = Z_1 / (Z_1 + Z_2)$ или $K_{BC}(\omega) = Z_2 / (Z_1 + Z_2)$. Постановка задачи в общем случае малопродуктивна. Более целесообразно конкретизировать ее, считая, что существующие линейные

элементы могут быть включены, как показано на рис. 2.14.

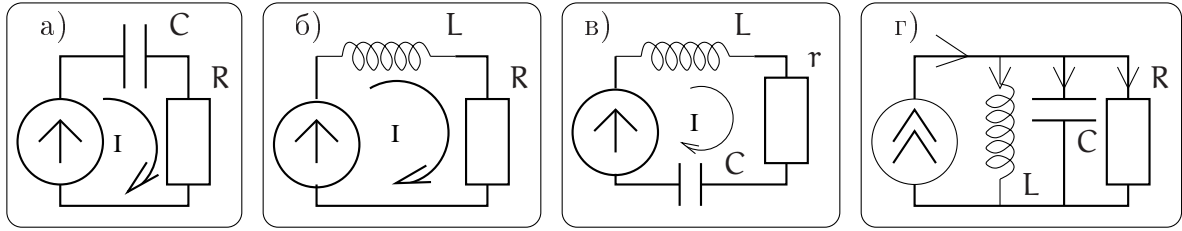


Рис. 2.14: Наиболее часто встречающиеся цепочки, состоящие из R, L, C.

Тогда откликом системы на входное воздействие могут служить:

- в случае а) — ток $I(t)$ или напряжения $U_C(t)$, $U_R(t)$;
- в случае б) — ток $I(t)$ или напряжения $U_L(t)$, $U_R(t)$;
- в случае в) — ток $I(t)$ или напряжения U_r , $U_C(t)$, $U_L(t)$;
- в случае г) — напряжение $U(t)$ или токи I_R , $I_C(t)$, $I_L(t)$;

2.2.1 Воздействие сигнала на простейшие RC и LR цепи

В этом разделе мы рассмотрим цепочки, изображенные на рис. 2.14а и 2.14б. Резонансные цепочки, изображенные на рис. 2.14в и 2.14г будут рассмотрены в следующем разделе.

Начнем с рассмотрения цепи на рис. 2.14а. Нетрудно записать коэффициенты передачи K_R и K_C для этой цепи (индекс R или C определяет элемент, на котором регистрируется выходное напряжение)

$$K_R = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega\tau^*}{1 + i\omega\tau^*}, \quad K_C = \frac{1}{i\omega C (R + \frac{1}{i\omega C})} = \frac{1}{1 + i\omega\tau^*}, \quad \tau^* = RC, \quad (2.37)$$

где τ^* — уже знакомая нам постоянная времени. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) (отношение амплитуд выходного и входного напряжений) этих цепочек равны

$$|K_R| = \frac{\omega\tau^*}{\sqrt{1 + (\omega\tau^*)^2}}, \quad |K_C| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau^*)^2}}, \quad (2.38)$$

а фазово-частотные (ФЧХ) характеристики —

$$\arg(K_R(\omega)) = \arctg \frac{1}{\omega\tau^*} = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega\tau^*, \quad \arg(K_C(\omega)) = -\arctg \omega\tau^*. \quad (2.39)$$

Графики этих зависимостей приведены на рис. 2.15. Они наглядно демонстрируют изменение амплитудных и фазовых соотношений между гармоническими составляющими сигнала после прохождения через RC цепь.

Сказанное справедливо и для анализа RL цепи на рис. 2.14б. Действительно, нетрудно найти соответствующие коэффициенты передачи K_L , K_R (напряжение снимается с индуктивности или сопротивления соответственно):

$$K_R(\omega) = \frac{R}{R + i\omega L} = \frac{1}{1 + i\omega\tau^*}, \quad K_L(\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{i\omega\tau^*}{1 + i\omega\tau^*}, \quad \tau^* \equiv \frac{L}{R}. \quad (2.40)$$

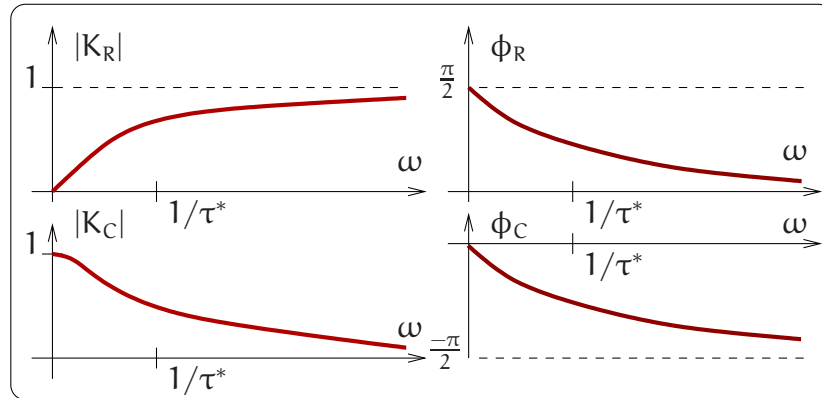


Рис. 2.15: Графики амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик для RC цепочек.

Эти формулы по своей структуре совпадают с формулами (2.37) для RC цепочек с единственным исключением: постоянная времени для них определяется как $\tau^* = L/R$. Действительно, формула для K_R (2.37) формально совпадает с формулой для K_L (2.40), а формула для K_C (2.37) — с K_R (2.40).

Таким образом, RC и RL цепи меняют фазовые и амплитудные соотношения между спектральными компонентами сигнала.

Условия неискаженной передачи сигнала

Возникает естественный вопрос о возможности получения на выходе произвольного четырехполюсника сигнала неискаженной формы. Формально это сводится к одновременному выполнению следующих условий:

$$|K(\omega)| = \text{const}, \quad \arg K(\omega) = -\omega\tau_0, \quad \tau_0 = \text{const} \quad (2.41)$$

в полосе частот, необходимой для воспроизведения сигнала (условие для $\arg K(\omega)$ означает возможную задержку сигнала на время τ_0). Как было показано в разделе 1.2.1, эти условия обеспечивают сохранение амплитудных и фазовых соотношений между формирующими его гармоническими составляющими, т.е. неискаженную передачу сигнала.

Простейшие RC и RL цепи как частотные фильтры

RC и RL цепи могут применяться для целенаправленного изменения соотношения между спектральными компонентами выходного сигнала. Из АЧХ цепочек, приведенных на рис. 2.15, следует, что эти цепочки можно применять как простейшие фильтры. Действительно, коэффициент передачи K_R (2.37) соответствует фильтру верхних частот: низкие частоты ($\omega \ll 1/\tau^*$) подавляются, тогда как высокие частоты ($\omega \gg 1/\tau^*$) проходят практически без искажений. Такие фильтры характеризуют граничной частотой $\omega_{гр}$, при которой коэффициент передачи уменьшается в $\sqrt{2}$ по сравнению с максимальным (на языке децибелл (2.18) — $\simeq 3$ Дб). Нетрудно видеть, что для коэффициента передачи $K_R(\omega)$ $\omega_{гр} = 1/\tau^*$. Аналогично коэффициент передачи K_C (2.37) соответствует фильтру нижних частот: высокие частоты

$\omega \ll 1/\tau^*$ подавляются, тогда как низкие ($\omega \gg 1/\tau^*$) проходят практически без искажений. При этом характерная частота остается такой же $\omega_{\text{гр}} = 1/\tau^*$.

Физический смысл фильтрующих свойств RC цепочек прозрачен: на низких частотах ($\omega\tau^* \ll 1$) импеданс емкости по модулю значительно больше сопротивления ($|1/i\omega C| \gg R$) и практически все напряжение "падает" на емкости. Именно поэтому на низких частотах коэффициенты передачи $|K_R| \ll 1$, $|K_C| \simeq 1$. Наоборот, на высоких частотах ($\omega\tau^* \gg 1$) импеданс емкости по модулю значительно меньше сопротивления ($|1/i\omega C| \ll R$), что и объясняет поведение коэффициентов передачи на этих частотах (т.е. $|K_R| \simeq 1$, $|K_C| \ll 1$).

Очевидно, что сказанное справедливо и для RL цепочек на рис. 2.14б.

Простейшие RC и RL цепочки как дифференцирующие и интегрирующие цепи

Ранее при рассмотрении основ спектрального анализа в разделе 1.2.1 было показано, что спектры интеграла и производной сигнала связаны со спектром сигнала через множитель $i\omega$ (см. соотношения (1.49, 1.50)). Это означает, что создав цепь с коэффициентом передачи $K(\omega) = i\omega\tau^*$ можно осуществлять дифференцирование входного сигнала, а цепь с коэффициентом передачи $K = 1/i\omega\tau^*$ будет интегрировать входной сигнал.

Легко видеть, что если отклик RC цепочки снимать с сопротивления R (коэффициент передачи равен K_R (2.37)), то при условии $\omega\tau^* \ll 1$ можно осуществить приближенное дифференцирование входного сигнала. Если же выходное напряжение снимать с емкости C (коэффициент передачи K_C), то при $\omega\tau^* \gg 1$ мы будем иметь приближенное интегрирование сигнала:

$$K_R(\omega) = \frac{i\omega\tau^*}{1 + i\omega\tau^*} \simeq i\omega\tau^*, \quad \text{если } \omega\tau^* \ll 1, \quad (2.42)$$

$$K_C(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau^*} \simeq \frac{1}{i\omega\tau^*}, \quad \text{если } \omega\tau^* \gg 1. \quad (2.43)$$

Очевидно, что эти утверждения справедливы и для RL цепочек с заменой $K_R \rightarrow K_L$ и $K_C \rightarrow K_R$ в соответствии с формулами (2.40). Каков же физический смысл возможности использования RC и RL цепей для дифференцирования и интегрирования сигнала? Рассмотрим действие этих цепей, используя временное представление. Пусть прямоугольный видеоимпульс (см. определение на стр. 18) длительности $\tau_{\text{имп}}$, изображенный на рис. 2.16, подается на вход RC цепи (конденсатор первоначально разряжен: $u_C(0) = 0$). Импульс представляет собой суперпозицию двух ступенчатых функций Хевисайда разной полярности, сдвинутых на время $\tau_{\text{имп}}$ друг относительно друга: $u(t) = u_0(\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t - \tau_{\text{имп}}))$. Чисто формальный подход позволяет найти производную прямоугольного импульса — это две разнополярные дельта-функции: $du(t)/dt = u_0(\delta(t) - \delta(t - \tau_{\text{имп}}))$. Для нахождения напряжения $u_R(t)$ на сопротивлении воспользуемся принципом суперпозиции и уже вычисленной нами переходной характеристикой (2.27):

$$u_R(t) = u_0 (\mathcal{H}(t) e^{-t/\tau^*} - \mathcal{H}(t - \tau_{\text{имп}}) e^{-(t-\tau_{\text{имп}})/\tau^*}). \quad (2.44)$$

Первый член описывает реакцию цепи на ступенчатую функцию, которая имеет ясный физический смысл. Действительно, при подаче на вход цепи ступеньки

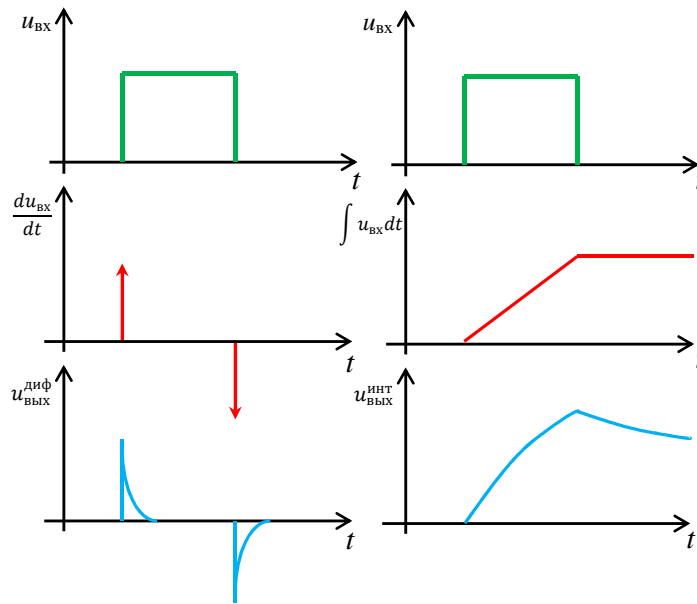


Рис. 2.16: Дифференцирование и интегрирование прямоугольного импульса RC цепочкой. Вторая строчка изображает математически продифференцированный и проинтегрированный сигналы (красные стрелки изображают дельта-функции). Третья строчка изображает напряжения на выходе дифференцирующей и интегрирующей цепочек.

напряжение на конденсаторе равно нулю и все напряжение падает на сопротивлении. С течением времени конденсатор заряжается, ток уменьшается и напряжение на сопротивлении тоже уменьшается. При $t \rightarrow \infty$ напряжение на конденсаторе сравнивается с входным напряжением, а напряжение на сопротивлении становится равным нулю. Второй член в (2.44) описывает реакцию цепочки по окончании действия прямоугольного импульса. Зарядившийся конденсатор отдает заряд (напомним, что по определению генератор напряжения имеет нулевое внутреннее сопротивление), вызывая протекание тока в противоположном (по отношению к исходному) направлении — выходное напряжение на сопротивлении меняет знак. Очевидно, что скорость переходных процессов характеризуется постоянной времени τ^* . Также очевидно, что при $\tau_{\text{имп}} \gg \tau^*$ процессы заряда и разряда конденсатора занимают относительно малый промежуток времени и график зависимости напряжения u_R от времени будет иметь вид, похожий на график производной — см. рис. 2.16 внизу слева. Таким образом, при регистрации напряжения на сопротивлении RC цепи условие $\tau_{\text{имп}} \gg \tau^*$ соответствует приближенному дифференцированию сигнала.

Теперь рассмотрим случай, когда мы регистрируем напряжение $u_C(t)$ на емкости той же цепочки. Напомним, что сумма напряжений на сопротивлении и емкости равна входному: $u_{\text{вх}}(t) = u_R(t) + u_C(t)$, поэтому, используя (2.44), мы можем сразу написать выражение для напряжения на емкости:

$$u_C(t) = u_0 \left(\mathcal{H}(t) \left[1 - e^{-t/\tau^*} \right] - \mathcal{H}(t - \tau_{\text{имп}}) \left[1 - e^{-(t-\tau_{\text{имп}})/\tau^*} \right] \right). \quad (2.45)$$

Накопление заряда на емкости и его разрядка идут по экспоненциальному зако-

ну с тем же характерным временем τ^* . Рассмотрим случай большой постоянной времени: $\tau^* \gg \tau_{\text{имп}}$. Тогда экспоненты в (2.45) можно разложить в ряд:

$$u_C(t) \simeq u_0 \left(\mathcal{H}(t) \frac{t}{\tau^*} - \mathcal{H}(t - \tau_{\text{имп}}) \frac{t - \tau_{\text{имп}}}{\tau^*} \right). \quad (2.46)$$

Нетрудно заметить, что это соответствует интегралу от входного сигнала, график которого изображен на рис. 2.16 в середине справа. Точное решение приведено на рис. 2.16 внизу справа. Таким образом, при регистрации напряжения на сопротивлении RC цепочки условие $\tau_{\text{имп}} \ll \tau^*$ соответствует приближенному интегрированию сигнала.

Изложенный подход несколько формален. Поэтому для наглядности мы вернемся “к истокам”. Уравнение для RC цепочки может быть записано через напряжение u_C . Действительно, протекающий ток равен $I = C du_C(t)/dt$, а входное напряжение равно сумме $u_C + IR$. В результате получаем:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_{\text{вх}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau^*} = \frac{u_{\text{вх}}}{\tau^*}. \quad (2.47)$$

При большой постоянной времени вторым членом в уравнении (2.47) можно пренебречь по сравнению с первым и мы сразу получаем, что выходное напряжение (т.е. u_C) приблизительно пропорционально интегралу от входного напряжения. Это будет справедливо при постоянной времени много больше времени импульса: $\tau^* \gg \tau_{\text{имп}}$.

Приведенное рассмотрение справедливо и для RL цепей (рис. 2.14б). Надо только помнить, что в этих цепочках постоянная времени $\tau^* = L/R$ равна характерному времени установления тока через катушку индуктивности. Очевидно, что при $RC = L/R$ частотные характеристики цепей будут идентичны.

В общем случае возможность интегрирования или дифференцирования сигналов определяет положение граничной частоты коэффициента передачи RL или RC цепей относительно верхней частоты спектра входного сигнала $\omega_{\text{верх}} = 2\pi/\tau_{\text{имп}}$. Под граничной частотой коэффициента передачи $K(\omega)$ мы будем подразумевать частоту $\omega_{\text{гр}}$, на которой модуль коэффициента передачи цепи по напряжению достигает величины $|K_{\text{max}}|/\sqrt{2}$. Для интегрирования сигнала необходимо обеспечить выполнение условия $\omega_{\text{гр}} \ll \omega_{\text{верх}}$, а для дифференцирования — $\omega_{\text{гр}} \gg \omega_{\text{верх}}$. Это означает увеличение энергетического вклада низкочастотных составляющих спектра сигнала в случае его интегрирования и увеличение вклада высокочастотных составляющих в случае его дифференцирования.

2.2.2 Резонанс. Действие электрических сигналов на LRC цепи

В предыдущем разделе мы рассмотрели характеристики простейших RC и LR цепей. В общем случае схема четырехполюсника представлена на рис. 2.13, где комплексные импедансы $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ могут быть составлены произвольным образом из пассивных элементов L, C, R. Например, это могут быть резонансные контуры, представляющие собой частотно-избирательные системы.

Взаимодействие электрических сигналов с системами, содержащими одновременно L, C и R элементы, имеет в радиофизике особое значение. Связано это с тем, что каждый из элементов L и C, называемый реактивным, обладает свойством запасать электрическую энергию. При этом импеданс катушки индуктивности L прямо пропорционален частоте гармонического колебания тока или напряжения, а импеданс конденсатора C обратно пропорционален частоте. Каждый из этих элементов вносит сдвиг фазы между протекающим через него током и падающим на нем напряжением. Это легко установить, используя соотношения

$$I_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_L = L \frac{du_L}{dt}. \quad (2.48)$$

Возможны два простейших способа включения реактивных L и C элементов: последовательное и параллельное. В первом случае (рис. 2.14 в) все элементы объединены общим током $I(t)$, возникающим в цепи под действием генератора гармонического напряжения. Очевидно, что при заданных значениях L и C существует частота ω_0 , на которой модули импедансов этих элементов оказываются равными. Из этого следует, что $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а падения напряжения на этих элементах находятся в противофазе. Это означает, что мнимая часть импеданса цепи обращается в ноль. Импеданс становится действительным и равным r. В результате этого амплитуда тока в цепи может возрасти многократно, ограничиваясь величиной u_0/r (u_0 есть амплитуда генератора напряжения). Такое явление, возникающее при последовательном включении L, C и r элементов, называют *резонансом напряжений*, что подразумевает взаимную компенсацию падений напряжений на реактивных L и C элементах.

При параллельном включении L, C и R элементов (рис. 2.14 г) общим для них является падение напряжения, противофазными же оказываются токи, протекающие через реактивные элементы и на частоте ω_0 компенсирующие друг друга. Величины этих токов, как будет показано ниже, могут многократно превышать амплитуду тока, задаваемого генератором, питающим цепь. Описываемое явление носит название *резонанса токов*. В этом случае импеданс контура становится действительным и определяется величиной сопротивления R, которое в ряде случаев может быть достаточно большим.

Особенности частотной зависимости импедансов цепей, содержащих L, C и R элементы, лежат в основе создания частотно-избирательных (селективных) устройств. Они обеспечивают как прием сигналов с заданными спектральным составом, так и создание многообразных селективных измерительных систем. Эти же устройства при условии компенсации потерь, вносимых диссипативными элементами, позволяют генерировать незатухающие колебания в диапазоне частот, определяемом реактивными элементами. В силу принципиальной важности резонансных явлений в природе и радиофизике в частности, остановимся более подробно на их анализе применительно к электрическим сигналам и системам.

Свободные колебания в последовательном контуре

Рассмотрим свободные колебания в контуре на рис. 2.17, обладающем начальным запасом энергии, запасенной в конденсаторе, заряженном до напряжения u_0 . Колебания в контуре возникают в результате замыкания цепи и описывающее их

уравнение можно представить как

$$u_L + u_R + u_C = 0, \quad L \frac{dI}{dt} + rI + \frac{q}{C} = 0, \quad I = \frac{dq}{dt}.$$

Вводя коэффициент затухания δ и резонансную частоту ω_0 , приводим это уравнение к каноническому виду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad \delta = \frac{r}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (2.49)$$

Записывая заряд в комплексном виде $q = Ae^{i\omega t}$, подставляем в (2.49) и получаем характеристическое уравнение:

$$-\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2\delta i\omega Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = 0, \quad \text{или} \\ \omega^2 - 2\delta i\omega - \omega_0^2 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения и выписываем решение в виде:

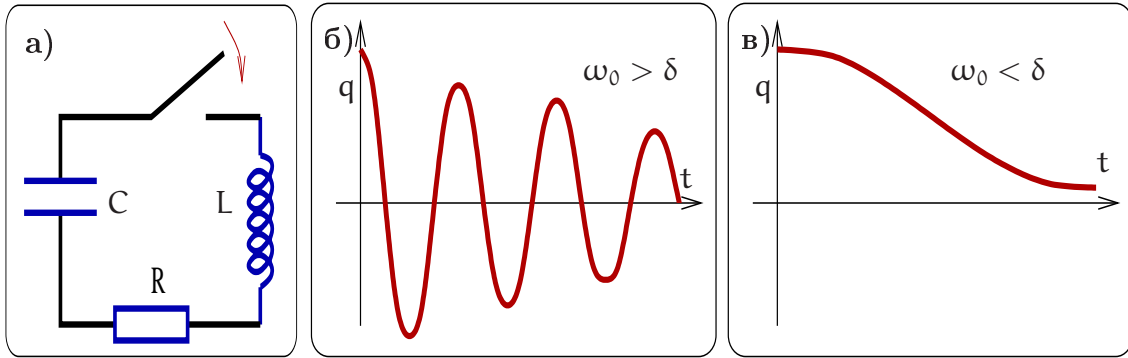


Рис. 2.17: Последовательный контур. Первоначально конденсатор заряжен до напряжения u_0 . После замыкания ключа в контуре развиваются свободные колебания, изображенные на графиках справа.

$$\omega_{1,2} = i\delta \pm \Omega_0, \quad \Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (2.50)$$

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\Omega_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\Omega_0 t}. \quad (2.51)$$

Чтобы найти коэффициенты A_1 , A_2 используем начальные условия, которые мы выберем в виде $q(0) = Cu_0$, $\dot{q}(0) = 0$:

$$q(0) = Cu_0 \Rightarrow A_1 + A_2 = Cu_0, \quad (2.52)$$

$$\dot{q}(0) = 0 \Rightarrow -\delta(A_1 + A_2) + i\Omega_0(A_1 - A_2) = 0. \quad (2.53)$$

Разрешив эту систему относительно A_1 , A_2 , выписываем решение для $q(t)$, используя условие малого и большого затухания δ

$$q(t) = Cu_0 e^{-\delta t} \left(\cos \Omega_0 t + \frac{\delta}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t \right), \quad \text{если } \delta < \omega_0, \quad (2.54)$$

$$q(t) = C u_0 e^{-\delta t} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right), \quad \text{если } \delta > \omega_0. \quad (2.55)$$

Полученные решения показывают, что в зависимости от диссипации энергии в контуре, вызванной наличием сопротивления r , изменение во времени заряда на конденсаторе, а следовательно, и тока в цепи, может носить колебательный ($\delta < \omega_0$, рис. 2.17 б) или релаксационный ($\delta > \omega_0$, рис. 2.17 в) характер. При изменении начальных условий вид решения также претерпевает изменения. Для радиофизики наиболее интересен колебательный случай.

Последовательный контур. Переходная характеристика

Внешнее воздействие на колебательный контур можно реализовывать двумя способами: подключать к контуру в момент времени $t = 0$ источник постоянного напряжения (подача единичной ступеньки) или подключать контур к генератору гармонического напряжения. В первом случае откликом системы является переходная характеристика $h(t)$, под которой можно подразумевать изменение тока в цепи или изменение напряжения на одном из ее элементов L, C или r . В случае гармонического воздействия основной интерес представляют частотные зависимости амплитуды установившихся колебаний тех же величин — тока в цепи или напряжения на элементах L, C или r .

Найдем переходную характеристику контура (рис. 2.18), считая, что в начальный момент времени $t = 0$ в контуре начинает действовать генератор постоянного напряжения u_0 (с нулевым внутренним сопротивлением), а откликом служит заряд $q(t)$ на конденсаторе. Имеем дифференциальное уравнение с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q &= \frac{u_0}{L}, \\ q(0) = 0, \quad \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай малого затухания $\delta \ll \omega_0$. Решение ищем в виде:

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\Omega_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\Omega_0 t} + C u_0.$$

Постоянные A_1, A_2 находим из начальных условий и затем выписываем решение:

$$\begin{aligned} q(0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 &= -C u_0, \quad \dot{q}(0) = 0 \Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{\delta C u_0}{i\Omega_0}, \\ q(t) &= C u_0 - C u_0 e^{-\delta t} \left(\cos \Omega_0 t + \frac{\delta}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t \right), \quad \Omega_0^2 = \omega_0^2 - \delta^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Это соответствует затухающим колебаниям вокруг нового положения равновесия (переходные процессы), как показано на графике на рис. 2.18 б. Этот результат можно обобщить — на рис. 2.18 в представлен график реакции контура на ступенчатое уменьшение э.д.с.

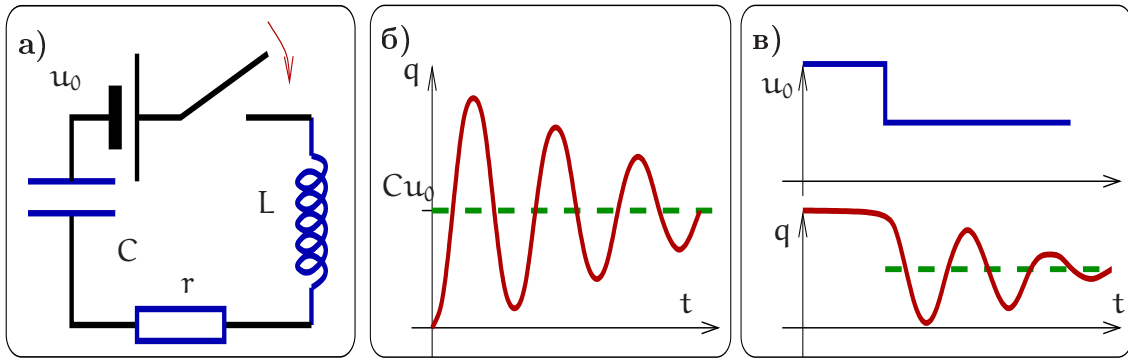


Рис. 2.18: Последовательный колебательный контур, возбуждаемый источником постоянного напряжения.

Теперь, чтобы получить переходную характеристику как реакцию на единичную ступеньку, мы должны вычислить напряжение на конденсаторе и поделить на высоту ступеньки:

$$h(t) = \frac{q(t)}{C} / u_0 = 1 - e^{-\delta t} \left(\cos \Omega_0 t + \frac{\delta}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t \right). \quad (2.57)$$

Последовательный контур. Гармоническое воздействие

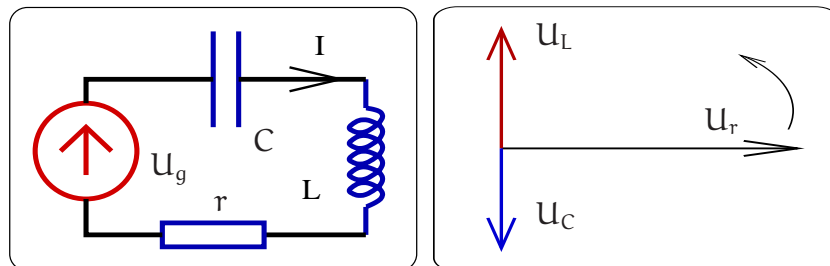


Рис. 2.19: Слева: последовательный колебательный контур, возбуждаемый источником переменного напряжения. Справа: фазовая диаграмма напряжений в последовательном контуре.

Рассмотрим вынужденные колебания в последовательном контуре, изображенном на рис. 2.19. Будем рассматривать случай установившихся колебаний, когда после включения источника напряжения прошло достаточно много времени $t \gg 1/\delta$, все переходные процессы закончились, и под действием генератора напряжения установились вынужденные колебания. Напряжение генератора запишем в комплексной форме $U_g(t) = U_0 e^{i\omega t}$. Тогда для их описания запишем уравнение Кирхгофа

$$u_L + u_r + u_C = U_g(t) = U_0 e^{i\omega t}, \quad I_L = I_r = I_C = \mathcal{I} e^{i\omega t}. \quad (2.58)$$

Выбрав в качестве переменной комплексную амплитуду тока \mathcal{I} , охватывающего все элементы контура, выписываем напряжения u_C на емкости, u_r на сопротивлении

и u_L на индуктивности

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{1}{C} \int I_C dt = \frac{1}{i\omega C} \mathcal{I} e^{i\omega t}, \\ u_R &= r \mathcal{I} e^{i\omega t}, \\ u_L &= L \frac{dI_L}{dt} = i\omega L \mathcal{I} e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

подставляем их в исходное уравнение (2.58) и находим комплексную амплитуду тока \mathcal{I}

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{I} \left(\frac{1}{i\omega C} + r + i\omega L \right), \\ \mathcal{I}(\omega) &= \frac{\mathcal{U}_0}{r + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{\mathcal{U}_0}{Z(\omega)}. \end{aligned}$$

Выражение для импеданса $Z(\omega)$ последовательно контура записываем в обозначениях, принятых в радиофизике:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= r + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = r + i\rho\xi = \rho \left(\frac{1}{Q} + i\xi \right), \quad (2.59) \\ \text{где } \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \xi = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right), \end{aligned}$$

где ω_0 — резонансная частота, ρ — характеристическое сопротивление контура, Q — добротность контура, ξ — нормированная расстройка. Смысл введенных обозначений в том, что они являются универсальными, поскольку их удобно использовать и для параллельного контура, для объемного резонатора (СВЧ или оптического).

Полученное выражение для импеданса позволяет найти АЧХ и ФЧХ (модуль и фазу) тока \mathcal{I}

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{\mathcal{U}_0 e^{i\varphi_I}}{r\sqrt{1 + Q^2\xi^2}}, \quad |\mathcal{I}(\omega)| = \frac{\mathcal{U}_0}{r\sqrt{1 + Q^2\xi^2}}, \quad (2.60)$$

$$\varphi_I = \arg(\mathcal{I}(\omega)) = \arctg \left(-\frac{\rho}{r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) = \arctg(-Q\xi). \quad (2.61)$$

Найдя ток, протекающий в контуре, нетрудно определить частотную зависимость амплитуд напряжений на сопротивлении, индуктивности и емкости:

$$u_R(\omega) = r\mathcal{I} = \frac{\mathcal{U}_0 e^{i\varphi_R}}{\sqrt{1 + Q^2\xi^2}}, \quad \varphi_R = \varphi_I, \quad (2.62)$$

$$u_L(\omega) = i\omega L \mathcal{I} = \frac{\omega Q \mathcal{U}_0 e^{i\varphi_L}}{\omega_0 \sqrt{1 + Q^2\xi^2}}, \quad \varphi_L = \varphi_I + \frac{\pi}{2}, \quad (2.63)$$

$$u_C(\omega) = \frac{\mathcal{I}}{i\omega C} = \frac{\omega_0 Q \mathcal{U}_0 e^{i\varphi_C}}{\omega \sqrt{1 + Q^2\xi^2}}, \quad \varphi_C = \varphi_I - \frac{\pi}{2}. \quad (2.64)$$

При резонансе $\omega = \omega_0$ (или $\xi = 0$) ток через контур максимален:

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \mathcal{I}(\omega)_{\max} = \frac{\mathcal{U}_0}{r}.$$

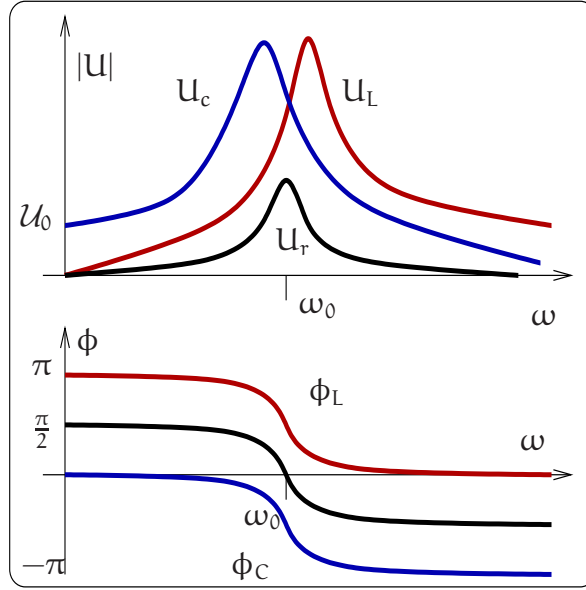


Рис. 2.20: Зависимость амплитуды (вверху) и фазы (внизу) вынужденных колебаний на емкости, сопротивлении и индуктивности.

При этом напряжения на индуктивности и емкости соответственно равны:

$$U_L = i\omega_0 L \frac{U_g}{r} e^{i\omega t} = Q U_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}, \quad (2.65)$$

$$U_C = \frac{1}{i\omega_0 C} \frac{U_g}{r} e^{i\omega t} = Q U_0 e^{i(\omega t - \pi/2)}. \quad (2.66)$$

Полученные формулы показывают, что при резонансе фазы напряжений на реактивных элементах противоположны, и эти напряжения компенсируют друг друга. Сами же напряжения могут в Q раз превышать напряжение генератора входного воздействия. Выраженный резонанс имеет место при условии большой добротности $Q \gg 1$ (или $\rho \gg r$).

Заметим, что при резонансной частоте ω_0 напряжения на емкости или на индуктивности не максимальны. Детальный анализ частотных зависимостей (2.63 и 2.64) позволяет установить, что амплитуда колебаний напряжения U_L на индуктивности достигает своего максимального значения при частоте ω_L , а амплитуда U_C — на частоте ω_C :

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}}, \quad \omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (2.67)$$

Частоты ω_C , ω_L близки к ω_0 для высокодобротного контура (их относительная разница $\sim 1/Q^2$). Графики модулей амплитуд напряжения на емкости, сопротивлении и индуктивности представлены на рис. 2.20 вверху. На том же рисунке внизу представлена зависимость фазы колебаний от частоты. Мы видим, что амплитудные зависимости имеют резонансный характер (приведенные графики соответствуют случаю $Q \gg 1$).

Остановимся на физическом содержании понятия добротности колебательной системы — фундаментального понятия, широко используемого в радиофизике (подробное обсуждение различных определений добротности см. ниже в разделе 2.2.3). Найдем отношение энергии, запасаемой в последовательном колебательном контуре, к энергии потерь, теряемой в контуре за период колебаний:

$$2\pi \frac{W_{\text{запас}}}{W_{\text{потери за период}}} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{\rho}{r} = Q, \quad (2.68)$$

$$W_{\text{запас}} = \frac{L|I|^2}{2}, \quad W_{\text{потери за период}} = \int_0^{2\pi/\omega_0} |I|^2 r \cos^2 \omega_0 t \, dt = \frac{r|I|^2}{2} \times \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.69)$$

Полученное соотношение раскрывает физический смысл понятия добротность и связывает его с ранее формально введенными определениями, характеризующими степень возрастания напряжения на реактивных элементах контура при резонансе. Появление множителя 2π перед отношением энергий естественно, поскольку в этом определении используется понятие круговой частоты $\omega = 2\pi f$, а не циклической f (измеряемой в Гц).

Одним из важных свойств последовательного колебательного контура является то, что его импеданс на частоте резонанса становится минимальным (по модулю) и действительным. Это непосредственно следует из определения импеданса (2.59). Действительно, $|Z| = \sqrt{r^2 + \rho^2 \xi^2}$ и при резонансе (т.е. $\xi = 0$) получаем $Z = r$, а вдали от резонанса (когда $r \ll \rho|\xi|$) импеданс возрастает и приближенно равен $|Z| \simeq \rho|\xi|$.

Описанные свойства последовательного контура позволяет использовать его в качестве селективного элемента, позволяющего выделить узкий спектральный диапазон частот вблизи резонансной частоты. Этот диапазон принято характеризовать полосой пропускания $\Delta\omega$, определяемой граничными частотами ω_1 и ω_2 ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$), на которых амплитуда колебаний напряжения на любом элементе контура уменьшается до значения в $\sqrt{2}$ меньше максимального, что соответствует уменьшению мощности в два раза. Для определения этих частот положим в (2.60)

$$\mathcal{I}_{\sqrt{2}}(\omega) = \frac{\mathcal{I}_{\max}(\omega)}{\sqrt{2}}, \quad \Rightarrow \quad Q^2 \xi^2 = 1, \quad \text{или} \quad r^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2. \quad (2.70)$$

Решая уравнение (2.70) относительно частоты ω , находим

$$Q \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{1,2} \simeq \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q},$$

$$Q \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 \simeq Q\omega_0, \quad \omega_2 \simeq \frac{\omega_0}{Q}.$$

В случае малой добротности частоты ω_1 и ω_2 сильно различаются. Однако, наиболее интересен случай большой добротности $\Delta\omega = \omega_0/Q$. Увеличение добротности ведет к уменьшению полосы пропускания, а уменьшение добротности к расширению полосы. Таким образом, добротность контура можно найти как путем использования найденных ранее соотношений, связывающих ее значение с параметрами контура, так и из вида резонансной кривой как $Q = \omega_0/\Delta\omega$. Последний способ используется в исследовательской практике наиболее часто.

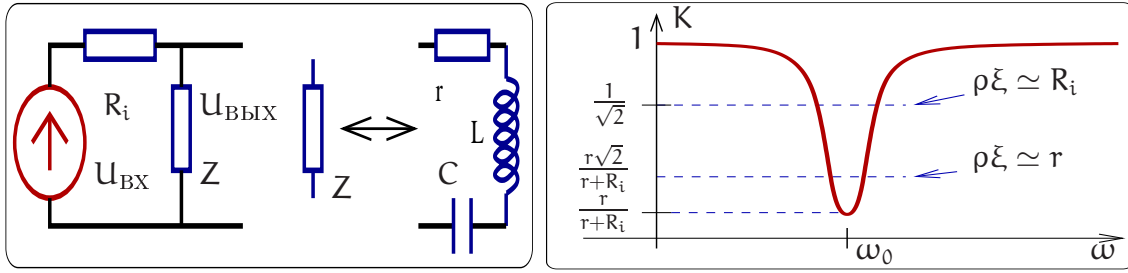


Рис. 2.21: Слева: схема фильтра-пробки. Справа: его амплитудно-частотная характеристика.

Пример: фильтр-пробка. Одним из примеров практического использования свойств последовательного колебательного контура является заграждающий фильтр или фильтр-пробка, схема которого представлена на рис. 2.21. Он образован активным сопротивлением R_i и импедансом $Z(\omega)$ последовательного контура. Откликом такой системы является напряжение, возникающее на $Z(\omega)$ при воздействии сигнала, поступающего от генератора. Коэффициент передачи такой системы имеет вид:

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{U_{\text{ВХ}}(\omega)} = \frac{Z}{R_i + Z} = \frac{r + i\rho\xi}{R_i + r + i\rho\xi}, \quad (2.71)$$

Пусть выполнено сильное неравенство:

$$r \ll R_i \ll \rho. \quad (2.72)$$

Тогда коэффициент передачи будет много меньше единицы при малом импедансе контура ($|Z| \simeq r \ll R_i$ вблизи резонанса) и наоборот — стремится к 1 вдали резонанса $|Z| > \rho$:

$$\begin{aligned} R_i \gg |Z(\omega)|, & \Rightarrow K(\omega) \rightarrow \frac{r}{R_i} \ll 1, \\ R_i \ll |Z(\omega)|, & \Rightarrow K(\omega) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

График коэффициента передачи описываемого фильтра представлен на рис. 2.21. Полоса пропускания находится из условия $K(\omega) = 1/\sqrt{2}$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{\rho}{R_i}, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{1}{Q_{\text{нагр}}}, \quad Q_{\text{нагр}} = \frac{R_i}{\rho} \gg 1,$$

здесь $Q_{\text{нагр}}$ — добротность нагруженного контура. Для получения высокой селективности такой системы необходимо выполнить условие $Q_{\text{нагр}} \gg 1$.

Пример: полосовой фильтр. В качестве другого примера рассмотрим резонансный контур, включенный во входную цепь радиоприемного устройства и позволяющий выделить сигнал радиостанции путем настройки контура с помощью конденсатора переменной емкости (рис. 2.22а). Напряжение на конденсаторе управляет током, протекающим через транзистор, обеспечивая усиление сигнала. Потери в контуре обусловлены собственным сопротивлением контура r , сопротивлением, вносимым антенной, и входным сопротивлением транзистора. Обозначив вносимые в контур потери как R_i , рассмотрим эквивалентную схему контура

(рис. 2.22б). Примем, что выполнено неравенство $\rho \gg r$, R_i (т.е. импеданс контура имеет резонансный характер). Записываем коэффициент передачи:

$$K_C(\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{U_{\text{ВХ}}(\omega)} = \frac{1/i\omega C}{Z + R_i} = \frac{1}{i\omega C(R_i + r + i\rho\xi)} = \frac{Q_{\text{нагр}} \omega_0}{i\omega(1 + iQ_{\text{нагр}} \xi)},$$

$$Q_{\text{нагр}} = \frac{\rho}{(R_i + r)} \gg 1.$$

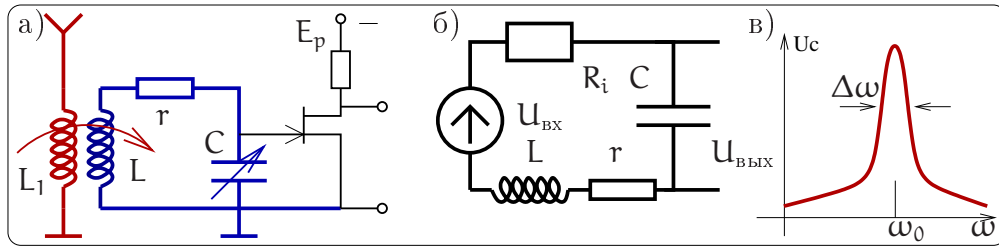


Рис. 2.22: а) Пример полосового фильтра в радиоприемном устройстве. б) Эквивалентная схема полосового фильтра. в) Его частотная характеристика.

Очевидно, что максимальное значение коэффициента передачи определяет нагруженная добротность $Q_{\text{нагр}}$. В резонансе ($\omega = \omega_0$)⁴

$$|K(\omega_0)| = Q_{\text{нагр}} \gg 1.$$

Тогда как вдали от резонанса ($\omega \ll \omega_0$, $\omega \gg \omega_0$)

$$|K(\omega)| \simeq \frac{\omega_0}{\omega|\xi|} \ll 1.$$

Ширина полосы фильтра определяется из условия “ $\sqrt{2}$ ”, т.е. $|K(\omega_0 \pm \Delta\omega)| = |K|_{\text{max}}/\sqrt{2}$, что соответствует $Q_{\text{нагр}}^2 \xi^2 = 1$. Таким образом, ширина полосы определяется нагруженной добротностью:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{R_i + r}{\rho} = \frac{1}{Q_{\text{нагр}}}, \quad Q_{\text{нагр}} \gg 1.$$

Принцип дуальности линейных цепей

Сформулируем принцип дуальности линейных систем: любое утверждение остается в силе если *одновременно* заменить:

$$I \iff U, \tag{2.73a}$$

$$L \iff C, \tag{2.73b}$$

$$R \iff G, \tag{2.73c}$$

$$\text{параллельное соединение} \iff \text{последовательное соединение}, \tag{2.73d}$$

$$\text{генератор напряжения} \iff \text{генератор тока}, \tag{2.73e}$$

$$\text{режим КЗ} \iff \text{режим ХХ} \tag{2.73f}$$

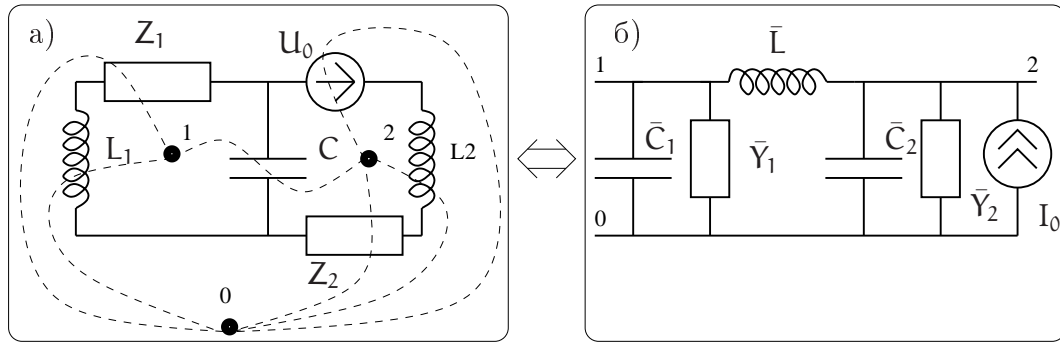


Рис. 2.23: Пример для иллюстрации принципа дуальности.

Существует удобное правило, устанавливающее соответствие между самой схемой и дуальной к ней. Пусть дана схема, изображенная на рис. 2.23а. В каждом контуре поставим точку, в нашем случае это точки 1 и 2. Кроме этого, надо поставить одну точку вне схемы — точка 0. Теперь будем последовательно соединять точки, проводя линии через каждый элемент. На дуальной схеме тоже поставим точки 0, 1, 2 и будем соединять их так, чтобы каждой линии на рис. 2.23а соответствовал элемент по правилу дуальности (2.73). На рис. 2.23б приведена получившаяся дуальная схема. Ее элементы рассчитываются по правилу (2.73):

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{Z_1}, \quad \bar{Y}_2 = \frac{1}{Z_2}, \quad (2.74)$$

$$i\omega\bar{L} = \frac{1}{i\omega C}, \quad \frac{1}{i\omega\bar{C}_1} = i\omega L_1, \quad \frac{1}{i\omega\bar{C}_2} = i\omega L_2. \quad (2.75)$$

Параллельный контур

Проведенное выше рассмотрение свойств последовательного колебательного контура позволило установить, что его импеданс на частоте резонанса становится минимальным и действительным. Возможность получения максимального сопротивления контура реализуется при параллельном включении реактивных элементов благодаря явлению резонанса токов. Для описания этого явления рассмотрим схему на рис. 2.24.

При анализе свойств параллельного контура можно идти двумя путями. Первый состоит в применении рассмотренного в предыдущем разделе 2.2.2 принципа дуальности или взаимного соответствия линейных электрических цепей и использовании результатов рассмотрения явления резонанса в последовательном контуре. Использование принципа дуальности сводит задачу к аккуратному переписыванию ранее полученных формул и физическому осмыслению результатов их использования. Мы будем использовать традиционный способ, в основе которого лежит составление и решение уравнения Кирхгофа для токов.

Общий ток $I = I_0 e^{i\omega t}$ задается идеальным генератором тока, величина которого

⁴Строго говоря максимум коэффициента передачи достигается на частоте, отличной от ω_0 — см. (2.67). Однако для интересующего нас случая большой добротности $Q_{\text{нагр}}$ это отличие не существенно: $(\omega_0 - \omega_C)/\omega_0 \simeq 1/4Q_{\text{нагр}}^2$.

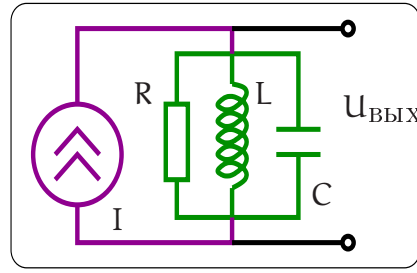


Рис. 2.24: Параллельный колебательный контур.

не зависит от сопротивления нагрузки. Общим для элементов параллельного контура является падение напряжения на его элементах, что делает целесообразным представление токов, протекающих через L , C , и R элементы как функции приложенного напряжения. Отметим, что величина R в основном определена входным сопротивлением устройства, на входе которого стоит параллельный колебательный контур. Опять будем рассматривать случай установившихся колебаний.

Сумма комплексных амплитуд токов через сопротивление I_R , через индуктивность I_L и емкость I_C равна комплексной амплитуде тока генератора:

$$I_R + I_L + I_C = I_0. \quad (2.76)$$

В качестве переменной удобно выбрать амплитуду выходного напряжения $U_{\text{ВЫХ}}$, через которое выражаем токи и подставляем в (2.76):

$$I_R = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{R}, \quad I_L = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{i\omega L}, \quad I_C = i\omega C U_{\text{ВЫХ}}, \quad (2.77)$$

$$U_{\text{ВЫХ}} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C \right) \equiv \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{Z(\omega)} = I_0. \quad (2.78)$$

Перепишем импеданс параллельного контура в общепринятом виде

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{Q} + i\xi \right), \quad (2.79)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{R}{\rho}, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Здесь введены знакомые нам характеристическое сопротивление ρ , расстройка ξ и добротность Q . Зависимость импеданса от частоты имеет резонансный характер. На рис. 2.25 представлена зависимость модуля импеданса параллельного контура от частоты. Определяя ширину полосы по принятому в радиофизике критерию “ $1/\sqrt{2}$ ”, получаем условие: $\xi Q = 1$. Для предельных случаев большой и малой добротностей получаем:

$$\text{При } Q \gg 1: \quad \omega_{1,2} \simeq \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q},$$

$$\text{При } Q \ll 1: \quad \omega_1 \simeq Q\omega_0, \quad \omega_2 \simeq \frac{\omega_0}{Q}.$$

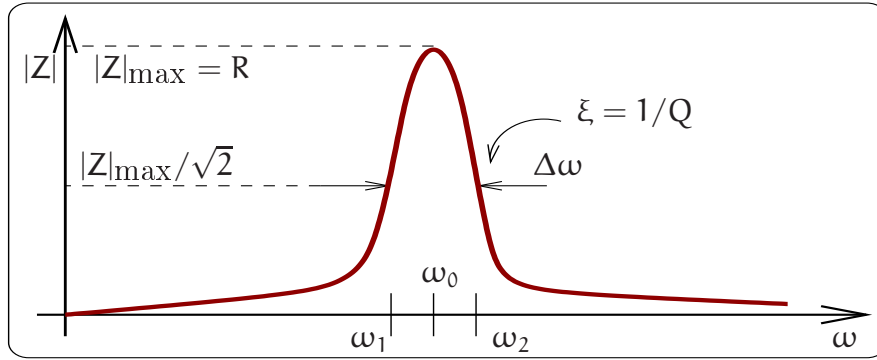


Рис. 2.25: Зависимость модуля импеданса параллельного контура от частоты.

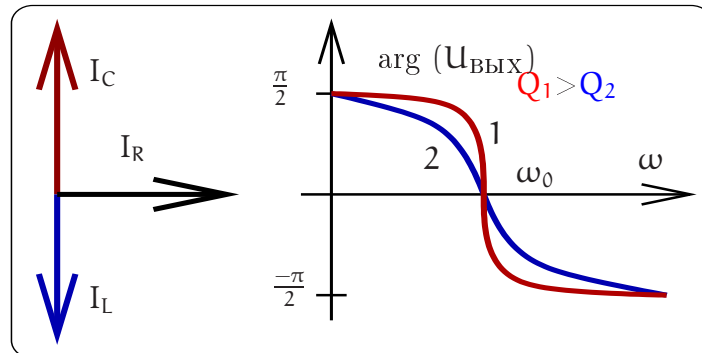
Используя формулу (2.79) для импеданса выписываем выражение для комплексной амплитуды выходного напряжения

$$U_{\text{ВЫХ}} = I_0 Z(\omega) = \frac{I_0 \rho Q}{1 + i\xi Q}, \quad I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (2.80)$$

и для комплексных амплитуд токов:

$$I_R = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{R} = \frac{I_0}{1 + iQ\xi}, \quad I_L = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{i\omega L} = \frac{-i\omega_0}{\omega} \frac{Q I_0}{1 + iQ\xi}, \quad I_C = i\omega C U_{\text{ВЫХ}} = \frac{i\omega}{\omega_0} \frac{Q I_0}{1 + iQ\xi}.$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (2.76) для амплитуд токов выполняется. Полезно сравнить эти формулы с аналогичными формулами для последовательного контура — они переходят друг в друг по принципу дуальности.

Рис. 2.26: Векторная диаграмма токов и график $\arg(U_{\text{ВЫХ}})$ для резонанса в параллельном контуре.

При резонансе $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ напряжение на контуре максимально и равно

$$U_{\text{ВЫХ}}(\omega_0) = I_0 R,$$

ток через сопротивление равен $I_R = I_0$, а токи через реактивные элементы L и C равны

$$I_L(\omega_0) = \frac{I_0 R}{i\omega_0 L} = -iQI_0 = QI_0 e^{-i\pi/2}, \quad I_C(\omega_0) = i\omega_0 C I_0 R = iQI_0 = QI_0 e^{i\pi/2}.$$

Токи $I_L(\omega_0)$ и $I_C(\omega_0)$ равны по модулю и противоположны по знаку — сумма их равна нулю (см. векторную диаграмму и график $\arg(U_{\text{вых}})$ на рис. 2.26). Это явление называется резонансом токов. При этом абсолютные величины токов через реактивные элементы больше тока I_R через сопротивление в Q раз.

Частотная селективность параллельного (как и последовательного) контура определяется его добротностью. Следует подчеркнуть, что связь добротности Q с параметрами контура для параллельного контура и для последовательного контура различна (ср. (2.59) и (2.79)). Установление этих связей позволяет ответить на вопрос, при каком соотношении параметров последовательного и параллельного контуров их селективные свойства (добротности) оказываются равными. Это равенство эквивалентно условию $Q_{\text{парал}} = Q_{\text{послед}}$ или $\rho^2 = rR$, что позволяет легко пересчитывать потери последовательного контура в потери параллельного и наоборот. Подчеркнем, что физический смысл добротности не изменяется — см. раздел 2.2.3.

Добротность колебательных контуров радиочастотного диапазона обычно невелики и лежат в пределах $50 \div 300$. По этой причине в высокоселективных системах, требующих высокой добротности, используют кварцевые резонаторы.

Кварцевые резонаторы

Механическое усилие, приложенное к кристаллу кварца, вызывает появление на его поверхности электрических зарядов и, наоборот, приложенное электрическое напряжение вызывает в кварце механическую деформацию. Эти явления носят название прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта (*пьезо* (греч.) — давя). Пьезоэлектрический эффект обнаруживается в ряде кристаллов и керамических материалах. Пьезоэффект в кристаллическом кварце изучен наиболее полно [5].

При приложении переменного напряжения к электродам, нанесенным на поверхности пластины, вырезанной вдоль определенных кристаллографических направлений кристалла кварца, в ней возникают механические колебания, резонансная частота которых определяется размерами пластины. На этой частоте происходит эффективное преобразование энергии механических колебаний в энергию электрических и наоборот. В самом кристалле рассеивается малая доля энергии, благодаря чему резонансная кривая обладает чрезвычайно малой полосой пропускания, и добротность Q кварцевых резонаторов достигает величины $10^4 \dots 10^5$. Максимальная частота механических колебаний кварцевых резонаторов ограничена толщиной пластин (которая в свою очередь ограничена механической прочностью кварца) и достигает 100 МГц. Механические и электрические свойства кварца слабо зависят от температуры. Благодаря этому, кварцевые резонаторы широко используют для создания высокостабильных селективных систем.

При расчете электрических цепей кварцевый резонатор может быть представлен эквивалентным колебательным контуром (рис. 2.27). Его образуют последовательно соединенные динамические сопротивление r_d , индуктивность L_d и емкость C_d , которые определяются в основном размерами пластины и характеристиками среза кристалла кварца. Параллельно им включен шунтирующий конденсатор C_0 , учитывающий емкость электродов, возбуждающих механические колебания пластины, емкость держателя и емкость элементов, нагружающих резонатор.

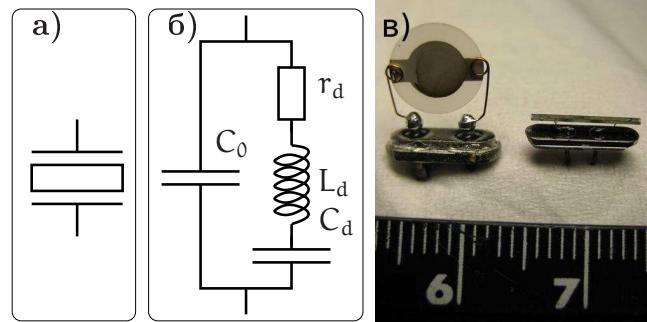


Рис. 2.27: а) Условное обозначение кварцевого резонатора. б) Его эквивалентная схема: C_0 — шунтирующая емкость, динамическое сопротивление r_d , индуктивность L_d и емкость C_d . в) Внешний вид кварцевого резонатора (для масштаба рядом снята линейка).

Легко показать, что эквивалентную схему кварцевого резонатора характеризуют две резонансные частоты: частота f_1 последовательного резонанса, возникающего при равенстве модулей импедансов динамических реактивных элементов L_d и C_d , и частота f_2 параллельного резонанса, наступающего при равенстве модулей реактивных сопротивлений параллельных ветвей эквивалентного колебательного контура:

$$2\pi f_1 = \frac{1}{\sqrt{L_d C_d}}, \quad 2\pi f_2 = \frac{1}{\sqrt{L_d C_d}} \sqrt{1 + \frac{C_d}{C_0}}. \quad (2.81)$$

Значения динамических параметров контура могут быть найдены путем измерения добротности $Q_{\text{посл}} = \frac{1}{r_d} \sqrt{\frac{L_d}{C_d}}$, частоты колебаний f_1 и декремента затухания $\delta = \frac{r_d}{L_d}$ колебаний в кварцевом резонаторе, возбуждаемом на частоте последовательного резонанса.

Численные значения динамических эквивалентных параметров r_d , L_d , C_d обусловлены механическими колебаниями кварцевой пластины и зависят от геометрии пластин и от среза кристалла. Динамические параметры лежат в диапазонах: $L_d = 10^{-3} \dots 10^5$ Гн; $r_d = 10^{-2} \dots 10^2$ кОм; $C_d = 10^{-13} \dots 10^{-5}$ Ф; $C_0 = 10^{-2} \dots 10^2$ пФ. Это дает возможность создавать резонаторы, работающие в диапазоне частот от 4 кГц до 100 МГц. Частоты f_1 и f_2 близки между собой и при $C_0/C_d \simeq 2 \times 10^3$ отличаются на 0,25%.

На частоте f_1 последовательного резонанса сопротивление кварцевого резонатора чисто активно и мало, на частоте f_2 — велико и может быть найдено как $\rho^2/r_d = L_d/(C_d r_d)$. В интервале частот между f_1 и f_2 эквивалентное сопротивление резонатора имеет индуктивный характер.

2.2.3 Добротность

Понятие добротности является важной характеристикой резонаторов. Во многих экспериментах максимальная величина добротности является ключевым параметром. Сначала вспомним различные определения добротности Q :

$$Q = \frac{2\pi \times (\text{Запасенная энергия})}{\text{Энергия потерь за период}}, \quad (2.82)$$

Таблица 2.1: Примеры добротностей различных резонаторов

Вид резонатора	Добротность	Частотный диапазон
Обычный LC контур при комнатной температуре	$Q \simeq 50 \dots 300$	$f = 10^5 \dots 10^8$ Гц
Кварцевый резонатор при комнатной температуре	$Q \simeq 10^4 \dots 10^5$	$f = 10^6 \dots 10^8$ Гц
СВЧ резонатор при комнатной температуре	$Q \simeq 50 \dots 10^5$	$f = 10^9 \dots 10^{12}$ Гц
Сверхпроводящий СВЧ резонатор $T < 4^\circ\text{K}$	$Q \simeq 10^6 \dots 10^{10}$	$f = 10^9 \dots 10^{12}$ Гц
Рекорд (сверхпроводящий резонатор)	$Q \simeq 5 \times 10^{11}$	($T = 1.3$ К)
Рекорд (диэл. резонатор на эффекте полного внутреннего отражения)	$Q \simeq 1.5 \times 10^9$	(сапфир, $T = 4$ К)
Оптические микрорезонаторы	$Q \simeq 3 \times 10^9$	(пл. кварц, $f \sim 10^{15}$ Гц)
Оптические микрорезонаторы	$Q \simeq 10^{10}$	(CaF_2 , $f \sim 10^{15}$ Гц)

$$Q = \frac{\omega_0 \tau^*}{2}, \quad \tau^* = \begin{cases} 2L/r & \text{(последовательный контур),} \\ 2RC & \text{(параллельный контур),} \end{cases} \quad (2.83)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad \Delta\omega = \frac{2}{\tau^*} \quad (2.84)$$

Здесь τ^* есть время релаксации в контуре — амплитуда A свободных колебаний в контуре уменьшается по закону $A \sim e^{-t/\tau^*}$.

В таблице 2.1 приведены типичные и рекордные значения добротностей резонаторов различного типа. Добротность колебательных контуров радиочастотного диапазона ограничивается главным образом потерями на нагрев проводников катушек индуктивности. Добротность кварцевых резонаторов лежит в пределах $10^4 \dots 10^5$, примерно такой же добротностью при комнатной температуре могут обладать объемные металлические СВЧ резонаторы: $Q = 50 \dots 10^5$, их добротность увеличивается при улучшении полировки поверхности резонатора, контактирующего с электромагнитным полем. Для сверхпроводящих СВЧ резонаторов, обычно сделанных из ниобия и работающих при гелиевых температурах $< 4\text{K}$, добротность может быть значительно больше: $Q = 10^6 \dots 10^{10}$, рекордное полученное значение $Q \simeq 5 \times 10^{11}$. Недостатком таких резонаторов является деградация их поверхности.

Перспективными являются диэлектрические резонаторы в СВЧ диапазоне (сапфир, плавленый кварц) и в оптике (плавленый кварц) — на эффекте полного внутреннего отражения. В отличие от сверхпроводящих СВЧ резонаторов, параметры которых довольно быстро деградируют из-за процессов старения поверхности, диэлектрические резонаторы на эффекте полного внутреннего отражения (см. рис. 2.28) демонстрируют лучшую долговременную стабильность.

В диэлектрических резонаторах на сапфире продемонстрирована зависимость

$Q \sim 1/\Gamma^5$, соответствующая уровню фундаментальных потерь в кристаллическом сапфире, вызванных нелинейным фотон-фононным взаимодействием.

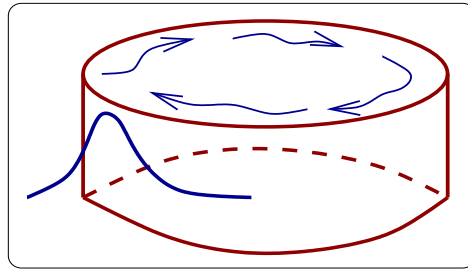


Рис. 2.28: Диэлектрический резонатор на эффекте полного внутреннего отражения. Волна распространяется вдоль внешней стенки резонатора, отражаясь от нее.

2.2.4 Емкостной датчик

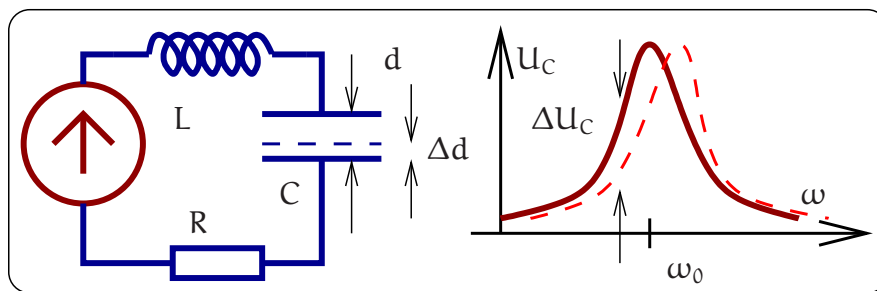


Рис. 2.29: Схема емкостного датчика.

Явление резонанса в высокочастотных электрических системах используется в различных прецизионных измерителях, в частности, в высокоточных емкостных датчиках малых механических смещений. Рассмотрим кратко принцип работы емкостного датчика.

Пусть одна из пластин конденсатора прикреплена к подвижной пробной массе, смещение которой мы хотим измерять. Конденсатор с подвижной пластиной входит в состав резонансного контура. Генератор гармонических колебаний настраивается на склон резонансной кривой контура частоты ω_0 и добротности Q — см. рис. 2.29. Тогда изменение расстояния d между пластинами конденсатора (которое и измеряется) на величину Δd приведет к изменению собственной частоты контура, а следовательно, — к сдвигу резонансной кривой. Это в свою очередь приведет к изменению напряжения U_C на конденсаторе на величину ΔU_C , которое может быть измерено. Если смещения пластин достаточно малы (т.е. $\Delta d/d \ll 1/Q$) и медленны (т.е. средняя частота Ω смещений значительно меньше ширины полосы резонатора: $\Omega \ll \omega_0/Q$), то связь между ΔU_C и Δd имеет вид

$$\frac{\Delta U_C}{U_C} = \frac{Q}{2} \frac{\Delta d}{d}.$$

Чтобы оценить, какую величину Δd можно измерить, зададим следующие параметры:

$$Q = 200, \quad \frac{\Delta U_C}{U_C} = 1 \times 10^{-5}, \quad d = 1 \times 10^{-2} \text{ см.}$$

Тогда $\Delta d = 1 \times 10^{-9}$ см.

Экспериментально с помощью радиочастотного емкостного датчика было достигнуто разрешение $\Delta d = 6 \times 10^{-17}$ см при $Q = 5 \times 10^4$, $d = 3 \times 10^{-4}$ см и времени измерения $\tau = 1$ сек (МГУ)⁵.

Предельная точность измерения смещения определяется флуктуациями в контуре. Если единственный источник флуктуаций — тепловые (найквистовы) флуктуации напряжения, то минимальное смещение определяется формулой (см. раздел 4)

$$\Delta d \simeq \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{\kappa_B T}{W \tau}},$$

где κ_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, W — мощность, рассеиваемая в контуре.

2.2.5 Связанные контуры

Рассмотренные селективные системы — последовательный и параллельный колебательные контуры при большой добротности могут выделять спектральные интервалы шириной в единицы герц. В то же время сообщения, передаваемые радио- и телевизионными станциями требуют для своего неискаженного воспроизведения полосы пропускания в десятки и тысячи килогерц. Для выполнения этих требований, как было показано ранее, можно уменьшить добротность селективной системы, но при этом упадет ее избирательность — склоны резонансной кривой станут более пологими, и близкорасположенные по несущей частоте источники информации начнут интерферировать благодаря наложению спектров сигналов. Актуальной становится задача создания селективной системы, обладающей “П”-образной амплитудно-частотной характеристикой. Для решения этой задачи используют системы связанных контуров, подобных представленной на рис. 2.30 и называемых полосовыми фильтрами.

Для простоты рассмотрим селективные свойства системы рис. 2.30. Будем рассматривать установившиеся колебания. На входе фильтра включен генератор гармонического напряжения $u_{\text{вх}}(t)$, возбуждающий ток $i_1(t)$ в первом контуре. Возбуждение тока $i_2(t)$ во втором контуре происходит благодаря возникновению эдс самоиндукции, наводимой во втором контуре током $i_1(t)$ при наличии индуктивной связи между катушками, характеризуемой коэффициентом M . Откликом системы на внешнее воздействие является напряжение на конденсаторе C_2 , равное $u_{\text{вых}}(t)$.

⁵Подчеркнем, что это разрешение $\Delta d = 6 \times 10^{-17}$ см *много меньше* размеров атома (да и размеров ядра атома). Здесь нет противоречия, поскольку в описанных опытах, во-первых, измерялось относительное (а не абсолютное) смещение. Во-вторых, смещение было усреднено по площади около 1 см, на которой помещается большое количество атомов $\simeq 10^{16}$. Кроме того, атомы колеблются с частотой порядка дебаевской $\simeq 10^{12}$ Гц и при измерении происходит еще усреднение по времени.

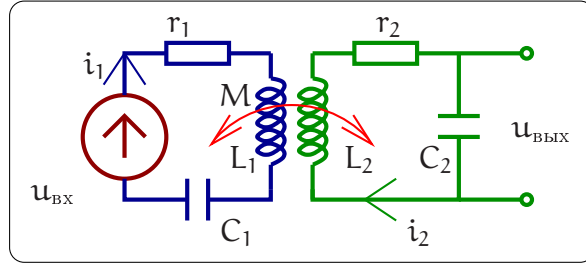


Рис. 2.30: Схема двух связанных контуров.

Тогда для токов i_1 , i_2 в каждом из контуров можно записать уравнения:

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + r_1 i_1(t) + \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt + M \frac{di_2(t)}{dt} = u_{\text{вх}}(t), \quad (2.85)$$

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + r_2 i_2(t) + \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt + M \frac{di_1(t)}{dt} = 0. \quad (2.86)$$

Переходя к комплексным амплитудам I_1 , I_2 , U_0 , преобразуем систему (2.85, 2.86) дифференциальных уравнений в систему линейных:

$$I_1 \left(i\omega L_1 + r_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \right) + i\omega M I_2 = U_0,$$

$$I_2 \left(i\omega L_2 + r_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right) + i\omega M I_1 = 0.$$

Упростим задачу, полагая, что в реальных системах часто используют одинаковые контуры: $L_1 = L_2 = L$, $C_1 = C_2 = C$, $r_1 = r_2 = r$. Введем традиционные обозначения

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{r}, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}, \quad (2.87)$$

где ω_0 – резонансная частота, ρ – характеристическое сопротивление, Q – добротность, ξ – расстройка не связанных контуров. Теперь можно переписать систему (2.87, 2.87) в компактном виде:

$$(r + i\rho\xi)I_1 + i\omega M I_2 = U_0, \quad (2.88)$$

$$i\omega M I_1 + (r + i\rho\xi)I_2 = 0. \quad (2.89)$$

Решим полученную систему относительно I_1

$$I_1 = \frac{U_0}{r + i\rho\xi + \frac{M^2\omega^2}{r + i\rho\xi}} = \frac{U_0}{r + \frac{rM^2\omega^2}{r^2 + (\rho\xi)^2} + i \left(\rho\xi - \frac{M^2\omega^2 \rho\xi}{r^2 + (\rho\xi)^2} \right)}. \quad (2.90)$$

Во втором равенстве мы выделили действительную и мнимую часть в знаменателе. Теперь, зная частотные свойства уединенного первого контура, легко определить, какие изменения селективных свойств первого контура происходят при его связи

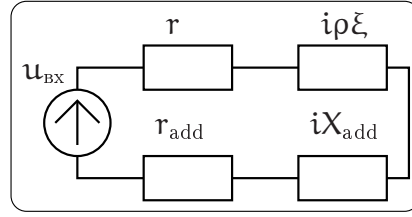


Рис. 2.31: Наличие связанного второго контура приводит к внесению в первый дополнительное сопротивление потерь r_{add} и реактивного сопротивления X_{add} , определяемых формулами (2.91).

со вторым контуром. Из выражения (2.90) видим, что наличие связанного второго контура приводит к внесению дополнительного сопротивления потерь r_{add} и реактивного сопротивления X_{add} :

$$r_{\text{add}} = \frac{r M^2 \omega^2}{r^2 + (\rho \xi)^2}, \quad X_{\text{add}} = \frac{M^2 \omega^2 \rho \xi}{r^2 + (\rho \xi)^2}. \quad (2.91)$$

Таким образом, эквивалентная схема входного контура, связанного со вторым контуром, принимает вид рис. 2.31. Очевидно, что подобная трансформация диссипативных и реактивных свойств имеет место и во втором контуре.

Исследуем селективные свойства нагруженного контура, полагая мнимую часть знаменателя в (2.90) равной нулю, что соответствует условию резонанса в системе. При этом будем считать, что потери, связанные с наличием сопротивления r , пренебрежимо малы (т.е. $r = 0$). Одно из решений полученного уравнения тривиально ($\xi = 0$) и соответствует резонансной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Два других могут быть найдены из условия $(\rho \xi)^2 - (M\omega)^2 = 0$, приводимого к виду

$$(1 - \chi^2) \omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4 = 0, \quad \chi = \frac{M}{L}. \quad (2.92)$$

Здесь безразмерный коэффициент связи χ характеризует сцепление магнитных потоков катушек индуктивности. Решая это квадратное уравнение, получаем $\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2/(1 \pm \chi)$, $\omega_2 = \omega_0^2/(1 - \chi)$, что означает расщепление собственных частот колебаний в контуре при наличии связи.

Вернемся к исходной задаче — нахождению отклика системы связанных контуров на гармоническое воздействие, рассматривая в качестве отклика напряжение на конденсатора в цепи второго контура. Тогда коэффициент передачи этой системы примет вид

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{вых}}(\omega)}{U_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{I_2}{i\omega C U_0} \quad (2.93)$$

Решая систему (3.16, 3.17) относительно комплексной амплитуды тока I_2 , получаем

$$I_2 = \frac{i\omega M U_0}{(\omega M)^2 + (r + i\rho \xi)^2}, \quad \Rightarrow \quad K(\omega) = \frac{\rho M \omega_0}{M^2 \omega^2 + (r + i\rho \xi)^2}. \quad (2.94)$$

В последнем равенстве использовано соотношение $C = 1/(\rho \omega_0)$.

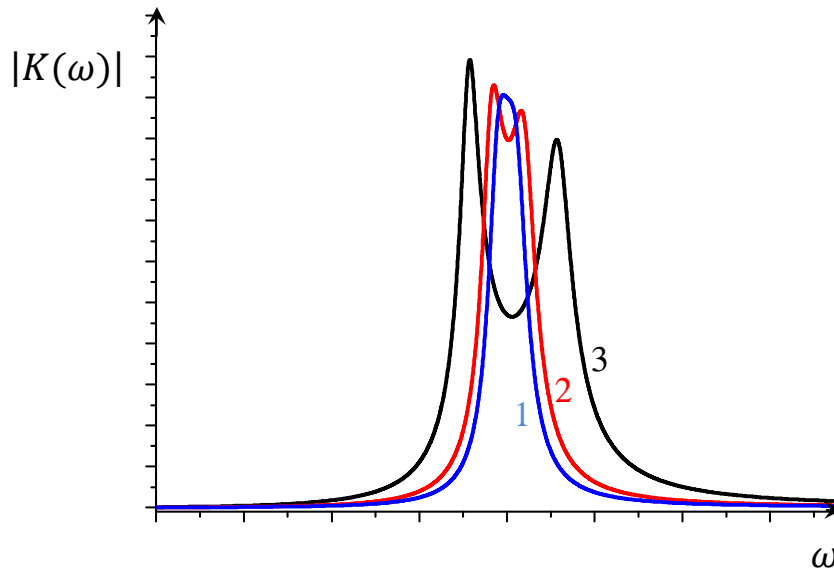


Рис. 2.32: Зависимость модуля коэффициента передачи по напряжению от частоты в связанных контурах при $Q = 20$ и различных значениях коэффициента связи: 1: $\chi = 0.05$, 2: $\chi = 0.08$, 3: $\chi = 0.2$.

Дальнейший анализ будем вести в предположении высокой добротности ($Q \gg 1$) рассматриваемых контуров, что позволяет считать $M^2\omega^2 \simeq M^2\omega_0^2$ в знаменателе (2.94). Тогда можно переписать коэффициент передачи системы через добротность Q и введенный в (2.92) коэффициент связи $\chi = M/L$ в следующем виде:

$$K(\omega) = \frac{\chi Q^2}{(\chi Q)^2 + (1 + iQ\xi)^2} \quad (2.95)$$

Для исследования зависимости коэффициента передачи от частоты расписываем квадрат модуля знаменателя в (2.95) и ищем его экстремумы по переменной ξ , приравнивая производную нулю:

$$\begin{aligned} N &= (\chi^2 Q^2 + 1 - \xi^2 Q^2)^2 + 4\xi^2 Q^2, \\ \frac{dN}{d\xi} &= 4\xi Q^2 (1 - \chi^2 Q^2 + \xi^2 Q^2) = 0, \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\text{Корни (2.96): } \xi_1 = 0, \quad \xi_{2,3}^2 = \chi^2 - \frac{1}{Q^2}. \quad (2.97)$$

Отсюда сразу видно, что при $\chi Q < 1$ коэффициент передачи $K(\omega)$ имеет один экстремум, а при $\chi Q > 1$ — три экстремума. При достаточно большой связи ($Q\chi > 1$) происходит расщепление собственных частот колебаний и образование провала между максимумами резонансных кривых, что позволяет контролировать форму АЧХ связанных контуров — см. рис. 2.32.

Отмеченные закономерности и механизм взаимодействия связанных контуров лежат в основе создания фильтров, обладающих П - образной зависимостью $|K(\omega)|$.

Приведенная АЧХ демонстрирует возможности селекции спектральных составляющих в выбранной полосе частот с практически одинаковым коэффициентом передачи.

Расщепление собственных частот взаимодействующих колебательных систем — колебательных контуров, кварцевых и других резонаторов имеет свои аналоги в оптическом диапазоне и квантовомеханических системах. Таким аналогом может служить расщепление энергетических уровней электронных оболочек изолированных атомов при их сближении. Расщепление имеет место как результат обменного взаимодействия атомов, что является причиной превращения изолированных энергетических уровней электронов в энергетические зоны при периодическом повторении атомов, образующих кристаллическую решетку. Это явление лежит в основе механизма проводимости в металлах, полупроводниках, диэлектриках.

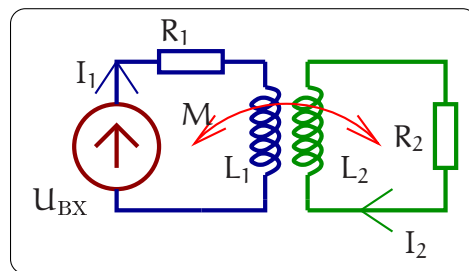


Рис. 2.33: Схема трансформатора

2.2.6 Трансформатор

Использование трансформаторов в радиофизических системах, как правило, преследует цель повышения напряжения или тока в нагрузке. Трансформатор так же преобразует сопротивление нагрузки, что важно для согласования источника и приемника сигнала (см. далее в разделах, посвященных длинным линиям (2.3.1) и шумам (4.1)).

Уравнения, лежащие в основе описания работы трансформатора (см. рис. 2.33) являются упрощенным вариантом системы уравнений (3.16, 3.17), в которых реактивный параметр $C \rightarrow \infty$:

$$(R_1 + i\omega L_1)I_1 + i\omega M I_2 = U_0, \quad (2.98)$$

$$+i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2)I_2 = 0. \quad (2.99)$$

Здесь R_1 учитывает внутреннее сопротивление источника сигнала, R_2 — сопротивление нагрузки, в общем случае ее импеданс. Сопротивлением обмоток трансформатора, равно как и паразитными межвитковыми емкостями обмоток, в первом приближении можно пренебречь.

Для эффективной работы трансформатора потери в сердечнике и поля рассеяния должны быть пренебрежимо малы (коэффициент взаимной индукции M максимален). Кроме того, индуктивное сопротивление в каждом контуре должно быть

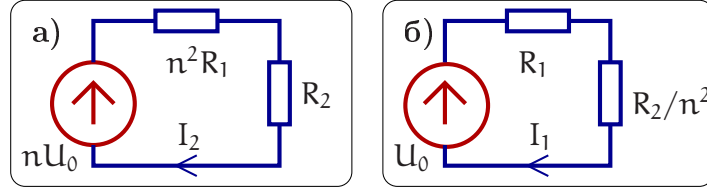


Рис. 2.34: Две эквивалентные схемы трансформатора, приведенные к выходу (а) и ко входу (б).

значительно больше активного ($R_1 \ll \omega L_1$, $R_2 \ll \omega L_2$). Это условия штатной работы трансформатора:

$$M^2 \simeq L_1 L_2, \quad R_1 \ll \omega L_1, \quad R_2 \ll \omega L_2. \quad (2.100)$$

Используя эти условия, и вводя отношение количества витков обмоток трансформатора n , получаем из уравнения (2.99):

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{M}{L_2 - iR_2/\omega} \simeq \frac{M}{L_2} = \frac{1}{n}, \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}, \quad (2.101)$$

$$\frac{U_{12}}{U_{11}} = \frac{I_2 L_2}{I_1 L_1} \simeq n. \quad (2.102)$$

Таким образом, увеличение напряжения во вторичной обмотке в n раз сопровождается уменьшением тока в ней в n раз. Величина n называется коэффициентом трансформации.

Мы видим, что выполнение равенства $U_1 I_1 = U_2 I_2$ можно трактовать как равенство мощностей $P_1 = P_2$ в первичной и вторичной цепях. Это действительно так, токи и напряжения колеблются практически в фазе. Хотя на первый взгляд это странно, ведь в трансформаторе большие индуктивности $\omega L_i \gg R_i$, а при больших индуктивностях напряжение и ток сдвинуты на $\pi/2$. Однако, их влияние на разницу фаз практически компенсируется за счет большой взаимоиנדукции M , что подтверждается расчетом — см. формулы (2.105, 2.106) ниже.

Для расчета токов I_1 и I_2 в первичной и вторичной цепях решаем систему (2.98, 2.99) по правилу Крамера, учитывая условия штатной работы трансформатора (2.100):

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + M^2 \omega^2 = \omega^2(M^2 - L_1 L_2) + i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1) + R_1 R_2 \simeq \\ &\simeq i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1), \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\Delta_2 = iM\omega U_0, \quad \Delta_1 = U_0(R_2 + i\omega L_2) \simeq iL_2 \omega U_0 \quad (2.104)$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\mathcal{D}} \simeq \frac{MU_0}{L_1 R_2 + L_2 R_1} = \frac{\frac{MU_0}{L_1}}{\frac{R_1 L_2}{L_1} + R_2} = \boxed{\frac{nU_0}{R_2 + n^2 R_1}}, \quad (2.105)$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\mathcal{D}} \simeq \frac{L_2 U_0}{L_1 R_2 + L_2 R_1} = \boxed{\frac{U_0}{\frac{R_2}{n^2} + R_1}} \quad (2.106)$$

Из выражений (2.105) и (2.106) следует, что трансформатор на рис. 2.98 может быть представлен двумя эквивалентными схемами, изображенными на рис. 2.34.

Можно сказать, что схема (а) приведена к выходу — она показывает, какой эквивалентный генератор действует во вторичной цепи с сопротивлением R_2 . Тогда схему (б) можно назвать приведенной ко входу — по ней видно, как сопротивление R_2 пересчитывается в эквивалентное сопротивление в первичной цепи генератора U_0 .

Из (2.105) мы можем рассчитать напряжение $U_2 = I_2 R_2$ на нагрузке во вторичной цепи и вычислить коэффициент передачи по напряжению K :

$$K \equiv \frac{I_2 R_2}{U_0} = \frac{n R_2}{R_2 + n^2 R_1} \quad (2.107)$$

Мы видим, что коэффициент передачи равен коэффициенту трансформации ($K \simeq n$) лишь при достаточно малом сопротивлении в первичной цепи, т.е. при $R_2 \gg n^2 R_1$.

Целью работы трансформатора является передача по возможности большей мощности P_2 , которая выделяется на сопротивлении R_2 во вторичной цепи. В заключение полезно выписать два выражения для мощности P_2 , соответствующие двум эквивалентным схемам на рис. 2.34:

$$P_2 = \frac{I_2^2 R_2}{2} \simeq \frac{(n U_0)^2 R_2}{2(n^2 R_1 + R_2)^2} \quad \text{— схема (а),}$$

$$P_2 = \frac{U_0^2 \times \frac{R_2}{n^2}}{2 \left(R_1 + \frac{R_2}{n^2}\right)^2} \quad \text{— схема (б).}$$

Очевидно, что оба выражения эквивалентны.

2.3 Передача сигналов

Одной из основных задач радиофизики является передача сигнала (т.е. физические способы доставки сигнала, несущего информацию). Различают два способа передачи: а) направленная передача через волноводные системы различного типа (телеграфные, телефонные провода, коаксиальные кабели, диэлектрические (включая оптические) волноводы и пр.) и б) передача с помощью возбуждения электромагнитных волн. Исторически первой такой системой был оптический телеграф (конец 18 в.), позже начал работать электромагнитный телеграф, впервые созданный российским ученым Павлом Львовичем Шиллингом в 1832 году (публичная демонстрация работы аппарата состоялась на квартире Шиллинга 21 октября 1832 г.). Павел Шиллинг также разработал оригинальный код, в котором каждой букве алфавита соответствовала определенная комбинация символов, которая могла проявляться черными и белыми кружками на телеграфном аппарате. Впоследствии электромагнитный телеграф был построен в Германии — Карлом Гауссом и Вильгельмом Вебером (1833), в Великобритании — Куком и Уитстоном (1837), а в США электромагнитный телеграф запатентовал Самюэль Морзе в 1837 (он же предложил и азбуку Морзе). 7 мая 1895 г. на заседании Русского физико-химического общества Александр Степанович Попов демонстрирует прибор для передачи электромагнитных сигналов на расстояние и тем самым открывает эпоху радио — передачу сигнала через возбуждение электромагнитного излучения.

В 1896 году Гуглиелмо Маркони патентует способ передачи сообщений с помощью электромагнитных волн и в 1909 году получает за это Нобелевскую премию вместе с Карлом Фердинандом Брауном (к этому времени А.С. Попов скончался). Сам Маркони неоднократно подчеркивал первенство работ А.С. Попова.

Изобретение электромагнитного телеграфа привело к созданию теории распространения сигнала по телеграфным проводам. В 1887 г. Оливер Хевисайд предложил модель длинной линии и записал телеграфные уравнения. Позже оказалось, что многие другие волноводные системы (коаксиальные линии, металлические диэлектрические волноводы) могут быть описаны на языке длинных линий. Поэтому мы начнем рассмотрение передачи сигналов с модели длинной линии.

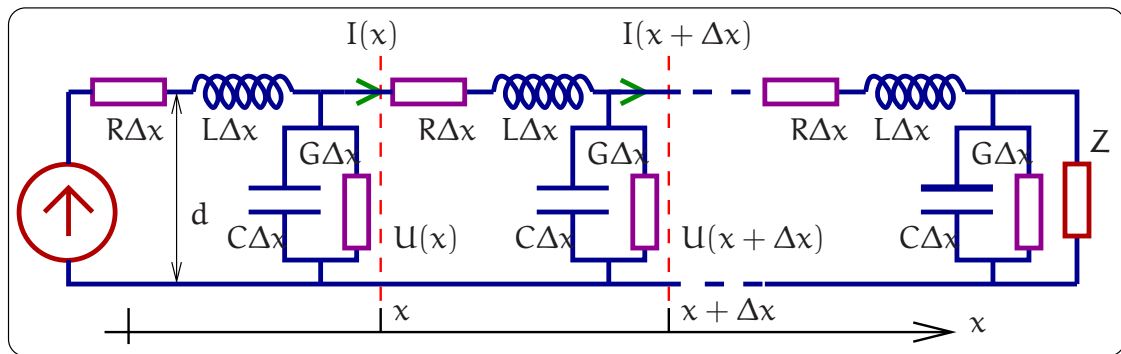


Рис. 2.35: Модель длинной линии. Генератор напряжения, являющийся источником сигнала, связан с сопротивлением нагрузки Z двумя длинными параллельными проводами, которые и представляют собой модель длинной линии. Эти провода обладают погонными емкостью C и индуктивностью L , кроме того, надо учитывать погонное сопротивление проводов R и проводимость утечки G .

2.3.1 Модель длинной линии

Длинная линия представляет собой два параллельных провода, расстояние d между которыми мало по сравнению с длиной волны $\lambda = c/v$, а длина может быть сколь угодно большой. Условие малости расстояния между проводами $d \ll \lambda$ (иногда его называют условием “поперечной квазистационарности”) позволяет ввести характеристики длинной линии: погонную индуктивность L [Гн/м], погонную емкость C [Ф/м], погонное сопротивление R [Ом/м] и сопротивление утечки, характеризующее погонной проводимостью G [Сименс/м]. Можно мысленно представить длинную линию состоящей из элементарных L , C , R , G цепочек длины $\Delta x \ll \lambda$, показанных на рис. 2.35). Распространение волн в длинной линии описывается телеграфными уравнениями, к выводу которых мы переходим.

Телеграфные уравнения

Найдем изменение тока на отрезке Δx . Для этого запишем уравнение Кирхгофа, связывающее ток $I(x)$ и $I(x + \Delta x)$ (кол-во заряда, “оседающего” на отрезке Δx за

единицу времени):

$$I(x + \Delta x) = I(x) - C\Delta x \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - G\Delta x U(x, t).$$

Заменяя разность токов с помощью производной и устремляя длину элементарной цепочки к нулю ($\Delta x \rightarrow 0$), получаем уравнение для изменения тока вдоль линии

$$\begin{aligned} -\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta x &= C\Delta x \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + G\Delta x U(x, t), \\ \Rightarrow \boxed{-\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = C \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + G U(x, t).} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Теперь найдем изменение напряжения на элементарной ячейке длиной линии. Для этого запишем уравнение Кирхгофа, обходя контур одной ячейки (изменение напряжения на ячейке Δx равно падению напряжения на индуктивности $L \Delta x$ и на сопротивлении $R \Delta x$):

$$0 = U(x + \Delta x) - U(x) + L\Delta x \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R\Delta x I.$$

Заменяя разность напряжений через производную и устремляя $\Delta x \rightarrow 0$, получаем уравнение для изменения напряжения вдоль линии

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta x &= L\Delta x \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R\Delta x I(x, t), \\ \Rightarrow \boxed{-\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R I(x, t).} \end{aligned} \quad (2.109)$$

Уравнения (2.108 и 2.109) называются телеграфными уравнениями и полностью описывают распространение волн в длинной линии.

Модель длинной линии без потерь

Последние члены в уравнениях (2.108, 2.109) описывают диссипацию (потери энергии). Для простоты примем, что диссипация отсутствует, т.е. $R = 0$, $G = 0$. Тогда, беря комбинацию производной уравнения (2.108) по времени и производной уравнения (2.109) по координате, получаем волновое уравнение:

$$L \frac{\partial}{\partial t} \times (2.108) - \frac{\partial}{\partial x} \times (2.109) \Rightarrow \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}, \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2.110)$$

где v_0 — скорость распространения волны. Как известно, решения волнового уравнения записываются в виде

$$U(x, t) = F_1(t - x/v_0) + F_2(t + x/v_0), \quad (2.111)$$

Здесь F_1 и F_2 произвольные функции. Решение $U_+(x, t) = F_1(t - x/v_0)$ соответствует волне напряжения (произвольной формы) бегущей слева направо, в сторону увеличения координаты x . Решение $U_-(x, t) = F_2(t + x/v_0)$ соответствует волне,

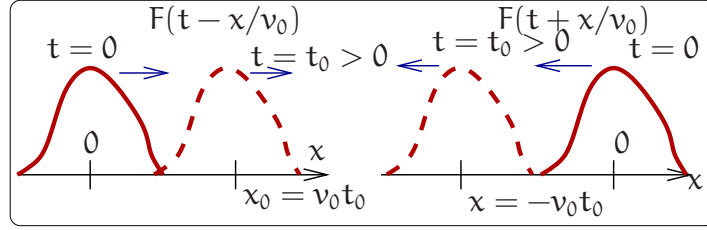


Рис. 2.36: Волны, бегущие вперед и назад.

распространяющейся справа налево, в сторону уменьшения координаты x . Это поясняет Рис. 2.36.

Подставляя (2.111) в телеграфные уравнения (2.108 и 2.109) получим выражения для волны тока I_+ , бегущей вперед и волны тока I_- , бегущей назад:

$$I(x, t) = I_+(x, t) + I_-(x, t) = \frac{U_+(x, t)}{\rho} - \frac{U_-(x, t)}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.112)$$

$$I_+(x, t) = \frac{U_+(x, t)}{\rho}, \quad I_-(x, t) = \frac{-U_-(x, t)}{\rho} \quad (2.113)$$

(постоянный член в уравнении (2.112) мы опускаем⁶). Здесь $\rho = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — волновое сопротивление. Его физический смысл очевиден из (2.112): волновое сопротивление определяет связь между, например, амплитудами тока и напряжения в бегущей волне.

Определим мгновенную мощность W в сечении с координатой x как произведение напряжения и тока:

$$W \equiv [U_+(x, t) + U_-(x, t)][I_+(x, t) + I_-(x, t)] = \quad (2.114)$$

$$= \frac{1}{\rho}[U_+(x, t) + U_-(x, t)][U_+(x, t) - U_-(x, t)] = \frac{U_+^2(x, t)}{\rho} - \frac{U_-^2(x, t)}{\rho}. \quad (2.115)$$

Очевидно, что полная мощность в заданной точке линии является суммой мощностей волн, распространяющихся по встречным направлениям. Знак “-” перед последним членом ($-U_-^2(x, t)/\rho$) в последнем уравнении показывает, что мощность волны $U_-(x, t)$ переносится в направлении убывания x .

Гармонические волны в длинной линии

Рассмотрим распространение гармонических волн в линии без потерь, записывая напряжения и токи в комплексной форме, т.е. $U, I \sim e^{i\omega t}$. Тогда напряжение и ток можно записать как сумму волн, бегущих направо и налево:

$$U(x, t) = U_+ e^{i\omega t - ikx} + U_- e^{i\omega t + ikx}, \quad (2.116)$$

⁶ Этот постоянный член в (2.112) формально возникает после интегрирования телеграфных уравнений для получения (2.112). Физически он соответствует постоянному току, протекающему по бесконечной линии (он, естественно, не создает напряжения в линии без потерь). Аналогично в длинной линии может быть постоянное напряжение. Очевидно, что физического смысла эти постоянные ток и напряжение не имеют и мы их рассматривать не будем.

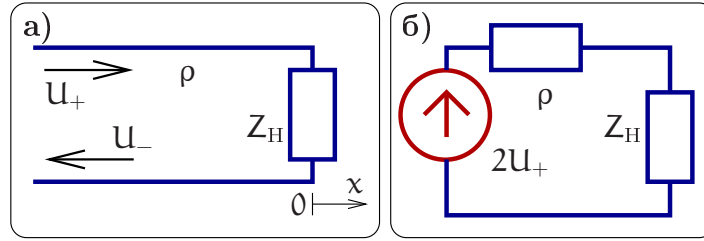


Рис. 2.37: а) К задаче об отражении волны от конца линии с волновым сопротивлением ρ , нагруженной на элемент Z_H . б) Эквивалентная схема для расчета тока через Z_H .

$$I(x, t) = \frac{1}{\rho} (\mathbf{U}_+ e^{i\omega t - ikx} - \mathbf{U}_- e^{i\omega t + ikx}). \quad (2.117)$$

Здесь \mathbf{U}_+ и \mathbf{U}_- — комплексные амплитуды, $k = \omega/v_0$ — волновой вектор. Естественно, физическому напряжению в точке x_0 в момент времени t_0 соответствует величина

$$\mathbf{U}_{\text{phys}}(x_0, t_0) = \text{Re} (\mathbf{U}_+ e^{i\omega t_0 - ikx_0} + \mathbf{U}_- e^{i\omega t_0 + ikx_0}).$$

Гармонические волны, бегущие вправо и влево, имеют амплитуды $|\mathbf{U}_+|$, $|\mathbf{U}_-|$ соответственно, а их фазы определяются аргументами комплексных амплитуд \mathbf{U}_+ , \mathbf{U}_- .

Используя формулу (2.115) можно найти среднюю мощность W_{cp} , проходящую через сечение с координатой x :

$$W_{\text{cp}} \equiv \langle W \rangle = \frac{|\mathbf{U}_+|^2}{2\rho} - \frac{|\mathbf{U}_-|^2}{2\rho}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по времени, в результате которого появляются двойки в знаменателях.

Везде далее множитель $e^{i\omega t}$ будем опускать, считая что в линии установились стационарные волны.

Отражение от нагруженного конца линии. В бесконечной однородной линии волны, распространяющиеся вправо и влево никак не связаны друг с другом. Связь между ними появляется при отражении от неоднородности. Рассмотрим в качестве примера задачу об отражении гармонической волны амплитуды \mathbf{U}_+ , распространяющейся направо, от конца длинной линии, нагруженной на элемент, имеющей импеданс $Z_H(\omega)$ (см. рис. 2.37а). Для простоты совместим начало координат $x = 0$ с концом линии. В результате отражения в линии будет присутствовать как падающая волна амплитуды \mathbf{U}_+ , так и отраженная амплитуды \mathbf{U}_- , распространяющаяся налево. В зависимости от соотношения между волновым сопротивлением ρ и импедансом нагрузки Z_H могут реализоваться различные режимы отражения. Нас будет интересовать отношение амплитуд падающей (\mathbf{U}_+) и отраженной (\mathbf{U}_-) волн, характеризуемое комплексным коэффициентом отражения $R(\omega) = \mathbf{U}_-/\mathbf{U}_+$ по напряжению. Записывая напряжение $\mathbf{U}(0)$ на импедансе $Z_H(\omega)$ (в точке с координатой $x = 0$) и ток $I(0)$ через него, получаем с использованием (2.116, 2.117):

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_+ + \mathbf{U}_-, \quad I(0) = \frac{\mathbf{U}_+ - \mathbf{U}_-}{\rho}, \quad \mathbf{U}(0) = I(0) Z_H(\omega), \quad (2.118)$$

$$\frac{U(0)}{I(0)} = \rho \frac{U_+ + U_-}{U_+ - U_-} = Z_H(\omega), \quad \Rightarrow R(\omega) \equiv \frac{U_-}{U_+} = \frac{Z_H(\omega) - \rho}{Z_H(\omega) + \rho}. \quad (2.119)$$

Полученное соотношение позволяет рассмотреть три предельных случая, легко реализуемых на практике.

1. Наиболее важным для практики является случай $Z_H = \rho$. В этом случае отраженная волна отсутствует ($U_- = 0$) и вся мощность падающей волны поглощается в нагрузке. Это условие называется условием согласования. Если импеданс Z_H частотно зависим, то согласование возможно только на определенной частоте.
2. $Z_H \rightarrow \infty$: отражение от разомкнутого конца длинной линии. В этом случае $U_- = U_+$, $R = 1$. Напряжение на конце линии равно $2U_+$ (а ток равен нулю).
3. $Z_H = 0$: отражение от короткозамкнутого конца длинной линии. В этом случае амплитуды падающей и отраженной волн в противофазе $U_- = -U_+$ ($R = -1$) и напряжение на конце линии равно нулю, а токи $I_- = I_+$ и ток на конце линии равен $2U_+/\rho$.

При отражении от нагруженного конца линии при неполном согласовании (т.е. $|R(\omega)| \neq 0$) образуются стоячие волны. Запишем суммарное напряжение в точке с координатой x :

$$U(x, t) = U_+ e^{i(\omega t - kx)} + U_- e^{i(\omega t + kx)} = U_+ e^{i\omega t} (e^{-ikx} + R(\omega) e^{ikx}). \quad (2.120)$$

В частном случае разомкнутого конца линии коэффициент отражения $R = 1$ получаем стоячую волну

$$U(x, t) = U_+ e^{i\omega t} 2 \cos kx. \quad (2.121)$$

В общем случае $0 < |R(\omega)| < 1$ получаем сумму стоячей и бегущей волн.

Продолжим обсуждение задачи на рис. 2.37а. Найдем ток через импеданс $Z_H(\omega)$ при условии, что из бесконечности набегают гармоническая волна амплитуды U_+ . Из уравнений (2.118) получаем:

$$U(0) + I(0)\rho = 2U_+, \quad \Rightarrow I(0) = \frac{2U_+}{\rho + Z_H(\omega)}. \quad (2.122)$$

Из последней формулы следует, что при расчете тока $I(0)$ (и напряжения $U(0)$) можно пользоваться эквивалентной схемой на рис. 2.37 с эквивалентным генератором напряжения амплитуды $2U_+$ и сосредоточенными сопротивлениями ρ и Z .

Импеданс нагруженного отрезка длинной линии. Важной задачей, имеющей широкое прикладное значение, является нахождение эквивалентного импеданса $Z_{\text{вх}}$ отрезка линии длины ℓ , нагруженной на импеданс Z (см. рис. 2.38). По определению входной импеданс $Z_{\text{вх}}$ отрезка линии есть отношение комплексной амплитуды напряжения $U(0)$ к комплексной амплитуде тока $I(0)$ на входе линии:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U(0, t)}{I(0, t)} = \frac{U_+(0) + U_-(0)}{U_+(0) - U_-(0)} \rho. \quad (2.123)$$

Здесь мы учли, что напряжение и ток на входе линии можно представить как сумму токов и напряжений волн, бегущих в разные стороны. Выражаем амплитуду $U_-(0)$ через амплитуду $U_+(0)$, фазовый набег и коэффициент R отражения по напряжению:

$$U_-(\ell) = RU_+(\ell), \quad U_-(\ell) = U_-(0)e^{ik\ell}, \quad U_+(\ell) = U_+(0)e^{-ik\ell}, \quad \Rightarrow \quad U_-(0) = RU_+(0)e^{2ik\ell}$$

, здесь $k = \omega/v_0$, v_0 — скорость волны. Подставляя найденное значение $U_-(0)$ в (2.123), находим входной импеданс $Z_{\text{вх}}$:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1 + Re^{-2ik\ell}}{1 - Re^{-2ik\ell}} \rho. \quad (2.124)$$

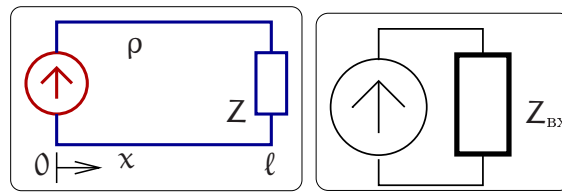


Рис. 2.38: К задаче о входном сопротивлении отрезка линии длины ℓ , нагруженной на импеданс Z , находящийся в конце отрезка линии. Слева — эквивалентная схема

Частные случаи.

1) $R = 0$ (это возможно, если $Z = \rho$). В этом случае $Z_{\text{вх}} = \rho$ (вся мощность волны поглощается нагрузкой).

2) $R = 1$ (т.е. $Z = \infty$, разомкнутый отрезок длинной линии). В этом случае $Z_{\text{вх}} = -i\rho \operatorname{ctg} k\ell$ (см. график на рис. 2.39). Следовательно, разомкнутый на конце отрезок линии длиной $\ell = (2n + 1)\lambda/4$ имеет нулевое входное сопротивление ($\lambda = 2\pi/k$ — длина волны). Зависимость $Z_{\text{вх}}$ от частоты вблизи этих точек подобна зависимости от частоты сопротивления последовательного LC контура. Вблизи частот, соответствующих $\ell = n\lambda/2$ (где $|Z_{\text{вх}}| \rightarrow \infty$), разомкнутый отрезок ведет себя подобно параллельному LC контуру.

3) $R = -1$ (т.е. $Z = 0$, короткозамкнутый отрезок длинной линии). В этом случае $Z_{\text{вх}} = i\rho \operatorname{tg} k\ell$ (см. график на рис. 2.39). Следовательно, короткозамкнутый отрезок длиной $\ell = (2n + 1)\lambda/4$ имеет бесконечное входное сопротивление подобно параллельному LC контуру. Вблизи $\ell = n\lambda/2$ короткозамкнутый отрезок подобен последовательному LC контуру.

Резонансный характер зависимости входного сопротивления отрезка линии от частоты дает возможность использовать отрезки линии в качестве частотно избирательных элементов радиотехнических схем. В отличие от сосредоточенных LC контуров распределенные резонаторы имеют множество резонансных частот.

4) Полуволновый ($\ell = n\lambda/2$ или $k\ell = n\pi$) отрезок линии имеет входное сопротивление, равное сопротивлению его нагрузки: $Z_{\text{вх}} = Z$.

5) Входное сопротивление четвертьволнового отрезка (т.е. $\ell = (2n + 1)\lambda/4$ или $k\ell = (2n + 1)\pi/2$) равно $Z_{\text{вх}} = \rho^2/Z$. Следовательно, входное сопротивление четвертьволнового отрезка при заданной нагрузке можно изменять за счет изменения

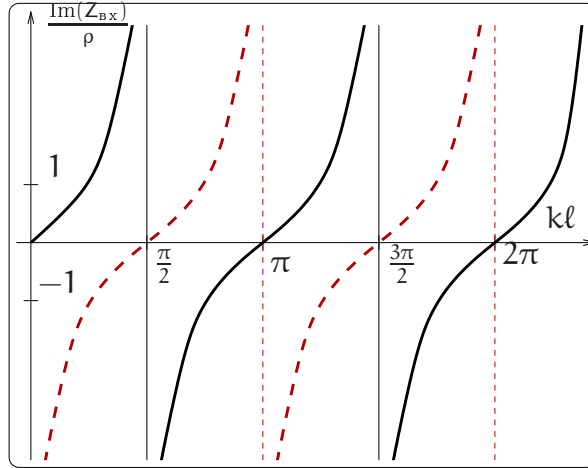


Рис. 2.39: Зависимость входного сопротивления отрезка идеальной линии от длины ℓ : сплошная линия — для короткозамкнутого отрезка, пунктирная — для разомкнутого отрезка.

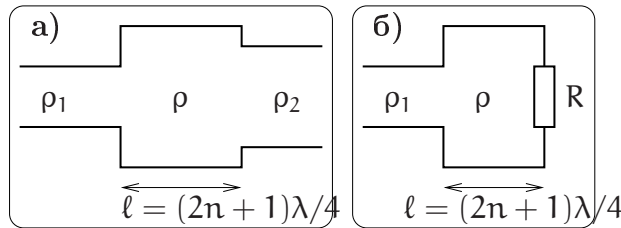


Рис. 2.40: Использование четвертьволнового отрезка линии: а) для согласования двух различных линий выбирается волновое сопротивление отрезка равным $\rho = \sqrt{\rho_1 \rho_2}$, б) для согласования линии нагрузкой выбирается $\rho = \sqrt{\rho_1 R}$.

волнового сопротивления отрезка. Это свойство четвертьволнового отрезка линии используется для согласования двух линий, различающихся волновыми сопротивлениями, или для согласования линии с нагрузкой (рис. 2.40 а, б).

Гармонические волны в линии с потерями

Для длинной линии с диссипацией (случай, когда погонные сопротивление и проводимость не равны нулю, $G, R \neq 0$) будем по-прежнему записывать напряжение и ток в виде

$$U = U(x)e^{i\omega t}, \quad I = I(x)e^{i\omega t}.$$

Подставляя эти выражения в телеграфные уравнения (2.108 и 2.109), получаем уравнение:

$$-\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \gamma^2 U(x) = 0, \quad \text{где} \quad (2.125)$$

$$\gamma^2 = (R + i\omega L)(G + i\omega C), \quad \gamma = \alpha + ik. \quad (2.126)$$

Здесь γ называется постоянной распространения (комплексная величина), α - коэффициент затухания, k - волновое число. В линии с потерями оно в общем случае

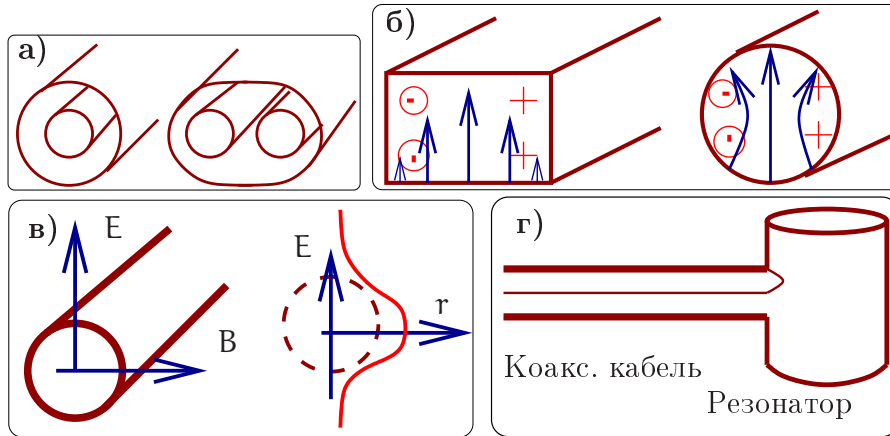


Рис. 2.41: Примеры волноводных систем: а) кабельные линии (слева коаксиальный кабель); б) металлические волноводы; в) диэлектрические волноводы; г) соединение волновода с резонатором.

не пропорционально ω и фазовая скорость гармонической волны $v_{\phi} = \omega/k$ оказывается зависящей от частоты. Зависимость фазовых скоростей гармонических составляющих волны от частоты приводит к искажению формы негармонических волн. Это явление называется *дисперсией*.

Скорость распространения энергии волны в линии с дисперсией понятие неоднозначное. Для волнового пакета, фазовые скорости гармонических составляющих которого отличаются незначительно, эта скорость близка к групповой скорости $v_{гр} = d\omega/dk$. В наиболее интересном случае малых потерь (т.е. $R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$) можно получить приближенную формулу для константы распространения γ :

$$\gamma \simeq \pm \left(\frac{i\omega}{v_0} + \delta \right), \quad \delta \simeq \frac{1}{2} \left(G\rho + \frac{R}{\rho} \right). \quad (2.127)$$

Здесь δ — пространственный коэффициент затухания, а общее решение соответствует суперпозиции затухающих волн, бегущих вперед и назад:

$$U(x) = U_+(0)e^{(-i\omega/v_0 - \delta)x} + U_-(0)e^{(i\omega/v_0 + \delta)x}. \quad (2.128)$$

2.3.2 Волноводные системы

В качестве волноводных систем используются кабельные линии (например, коаксиальные кабели, витая пара), металлические волноводы, не имеющие проводов внутри металлического корпуса, и диэлектрические волноводы. На рисунке 2.41 изображены эти системы. В коаксиальных кабелях и волноводах волна распространяется, отражаясь от внешних стенок (в диэлектрических волноводах используется эффект полного внутреннего отражения). В каждой из перечисленных систем могут распространяться волны, имеющие различную пространственную структуру. Их называют *модами*. Уравнения, описывающие каждую моду, могут быть переписаны в виде телеграфных уравнений⁷.

⁷ Вообще говоря, это можно сделать с некоторыми оговорками. Например, волноводы имеют критическую частоту, ниже которой они не пропускают волны. Кроме того, в волноводах обычно

При увеличении частоты передаваемого сигнала (СВЧ диапазон и выше) проблема согласования становится очень важной. В этом диапазоне колебательные контуры, состоящие из сосредоточенных элементов (катушки индуктивности и конденсатора) не используются. Их заменяют объемные резонаторы (пример резонатора приведен на рис. 2.41). Для оптимальной передачи мощности из волновода в резонатор необходимо согласовать волновое сопротивление волновода и характеристическое сопротивление резонатора. Существуют методы расчета такого согласования, на которых мы не будем останавливаться.

Развитие методов передачи сигнала с использованием электромагнитного (э.м.) излучения является одной из основных задач радиофизики.

2.3.3 Дипольная антенна

Назначение антенны — излучение и прием электромагнитных волн. Простейшей (и наиболее часто используемой) антенной является **полуволновый диполь**, называемый иногда диполем Герца или вибратором Герца, по имени Генриха Герца, первым использовавшим его для излучения и приема радиоволн. Качественно представить себе работу такой антенны можно следующим образом: возьмем отрезок длинной линии длиной $\lambda/4$ и разведем проводники в стороны так, что бы они оказались на одной прямой (см. рис. 2.42).

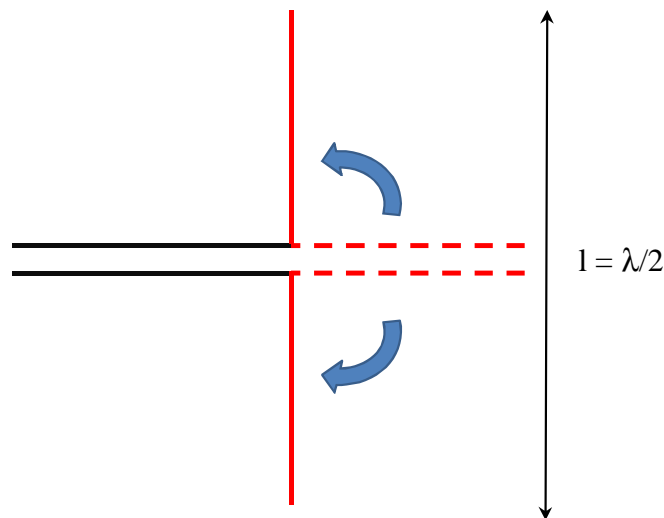


Рис. 2.42: Преобразование четвертьволнового отрезка длинной линии в полуволновый диполь

Четвертьволновый отрезок длинной линии представлял собой трансформатор, который преобразует выходное сопротивление во входное по формуле $Z_{in} = \rho^2/Z_{out}$, в нашем случае $Z_{out} = \infty$, значит, $Z_{in} = 0$ для любого ρ (если линия без присутствует дисперсия (зависимость фазовой скорости от частоты) и поэтому при сопоставлении выбранной моды волновода и эквивалентной длинной линии обычно формально вводят зависимость волнового сопротивления $\rho(\omega)$ и фазовой скорости $v(\omega)$ от частоты.

потерь). Это - результат интерференции прямой волны и волны, отраженной от конца отрезка. Однако, после того, как проводники были разведены в стороны, нарушилось основное условие, обеспечивающее отсутствие потерь на излучение: проводники более не находятся на расстоянии, много меньшем длины волны друг от друга. Токи, протекающие в них, создают в пространстве электромагнитную волну, уносящую энергию. При подаче гармонического сигнала с частотой $f = 2c/l$ где l - длина диполя, в диполе будет существовать стоячая волна, максимальный ток (пучность тока) в диполе находится в середине (там, куда подается сигнал), напряжение в этом месте минимальное (узел напряжения). На концах напряжение - максимальное (пучность напряжения), токи равны нулю (очевидно). Точное решение уравнений Максвелла для такой системы позволяет получить, что входное сопротивление идеального полуволнового диполя - действительная величина, равная 73 Ом . Ее называют **сопротивлением излучения**. В этом смысле имеется полная аналогия с последовательным колебательным контуром: на резонансной частоте сопротивление диполя - чисто активное (только, в отличие от контура, потери энергии связаны не с нагревом и Джоулевым теплом, а с излучением). На частотах, выше резонансной (когда длина волны меньше, чем $l/2$) входное сопротивление диполя носит индуктивный характер, на частотах ниже - емкостной.

Для подведения сигналов к антенне обычно используется какая-либо разновидность длинной линии, чаще всего - коаксиальный кабель. Для того, чтобы вся энергия передавалась от линии к антенне, а не отражалась от нее, нужно, чтобы волновое сопротивление линии было равно сопротивлению излучения. По этой причине наиболее широкое распространение получили коаксиальные кабели с волновым сопротивлением 75 и 50 Ом - близким к сопротивлению излучения диполя. Отметим, что все сказанное справедливо и для приемной антенны: электромагнитные волны будут создавать в диполе переменные токи, напряжение между точками питания будет максимально на частоте $f = 2c/l$ и диполь будет вести себя на этой частоте как источник тока с внутренним сопротивлением 73 Ом .

Диполь излучает по-разному в различных направлениях. Зависимость интенсивности излучения от направления называют **диаграммой направленности** антенны и обычно изображают в полярных координатах, откладывая по радиусу относительный уровень в децибелах (см. рис. 2.43). Если уровень измеряется по отношению к некоей гипотетической антенне, которая излучает во все стороны одинаково, используется обозначение dBi (децибел по отношению к изотропному излучателю). Направления, в которых уровень максимален, называют главными лепестками диаграммы, а сам этот уровень - усилением антенны. Так, полуволновый диполь имеет главные лепестки, направленные перпендикулярно его оси, а его усиление равно 2.15 dBi . Заметим, что иногда сам полуволновый диполь используют в качестве эталона и тогда усиление других антенн измеряют в dBd (децибел по отношению к диполю).

Заметим, что диполь, имеющий любую длину, кратную $\lambda/2$, так же будет резонансным в том смысле, что его входное сопротивление будет действительной величиной. Сопротивление излучения, диаграмма направленности и усиление таких диполей будет различным.

На практике часто оказывается, что даже полуволновый диполь слишком велик, в этом случае используют укороченные антенны, а для согласования при-

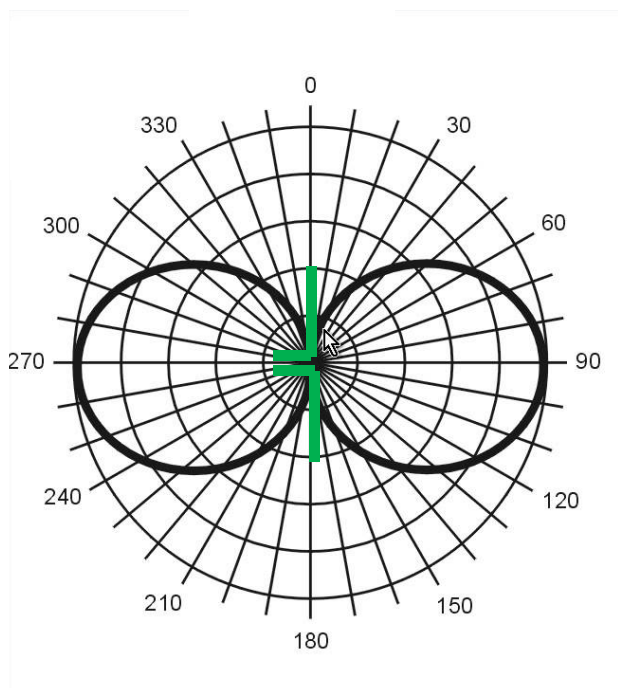


Рис. 2.43: Диаграмма направленности полуволнового диполя (в плоскости проводников).

меняют удлиняющие катушки, которые компенсируют емкостную составляющую входного сопротивления и позволяют настроить антенну в резонанс. К сожалению, эффективность таких антенн тем ниже, чем больше отношение λ/l : сопротивление излучения укороченных антенн становится малым и большая часть энергии идет на нагрев проводников диполя и катушек.

Сопротивление излучения реального диполя может отличаться от теоретического значения. Во-первых, играет роль распределение токов в проводниках, имеющих конечную толщину. Формула, учитывающая этот эффект, имеет вид:

$$l = \frac{1}{2}k\lambda \quad (2.129)$$

где k - коэффициент укорочения. Для тонких ($< 10^{-5}\lambda$) проводников $k \cong 0.98$, для проводников большей толщины k уменьшается до ~ 0.9 . Заметим, что, чем толще проводник, тем меньше эффективная добротность антенны. Иногда это используют для расширения полосы частот.

Кроме этого, на сопротивление излучения и диаграмму направленности влияет окружение диполя: электромагнитные волны, излучаемые диполем создают токи в любых проводниках, расположенных вблизи. Эти токи сами создают электромагнитные волны, которые, во-первых, интерферируют с первичными, и, во вторых, создают в диполе токи, амплитуда и фаза которых зависит от размеров и расположения этих проводников. Точное решение такой самосвязанной задачи обычно не возможно и используется численное моделирование. Для того, чтобы можно было пренебречь влиянием окружающих предметов (в том числе, поверхности Земли)

надо, что бы они находились на расстоянии не менее 2λ от антенны (расстояние тем больше, чем меньшее влияние требуется). Однако, данный эффект можно использовать для создания узконаправленных антенн, применяя параболические отражатели или дополнительные вибраторы.

Для характеристики согласования антенн (и, вообще говоря, любых нагрузок) с длинной линией используют величину, называемую **коэффициентом стоячей волны**, сокращенно - КСВ (SWR). Очевидно, если вся энергия уходит в нагрузку, а не отражается, в линии будет только бегущая волна. КСВ напрямую связано с коэффициентом отражения 2.124: если используется коэффициент отражения по напряжению, то КСВ обозначают VSWR:

$$VSWR = \frac{1 + |R|}{1 - |R|}. \quad (2.130)$$

Поскольку модуль коэффициента отражения находится в диапазоне $0 \dots 1$, то очевидно, что КСВ всегда больше или равно 1. Единица соответствует идеальному согласованию, бесконечность - случаю, когда вся энергия отражается обратно. Можно записать КСВ через мощности прямой и отраженной волны:

$$VSWR = \frac{1 + \sqrt{W_-/W_+}}{1 - \sqrt{W_-/W_+}}. \quad (2.131)$$

В случае, когда сопротивление нагрузки - чисто действительная величина (или мнимой составляющей можно пренебречь), выражение принимает очень простой вид:

$$VSWR = \left(\frac{R}{\rho} \right)^{\pm 1}, \quad (2.132)$$

здесь R - сопротивление нагрузки (сопротивление излучения антенны), ρ - волновое сопротивление линии. Знак показателя следует выбрать так, чтобы величина КСВ была положительной. Так, например, подключение к идеальному полуволновому диполю кабеля с волновым сопротивлением 50 Ом даст на резонансной частоте КСВ 1.46. Это означает, что потери на отражение по мощности составят:

$$\frac{W_-}{W_+} = \left(\frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} \right)^2 \simeq 0.035 \quad (2.133)$$

- всего 3.5%.

Направленное излучение электромагнитных волн

Излучение диполя практически изотропно (интенсивность пропорциональна $\sim \cos^2 \theta$, где θ — широтный угол). Чтобы сделать излучение более направленным используют сферические зеркальные поверхности. Если в фокус такого зеркала поместить излучающий диполь, то расходимость излучения будет определяться только дифракцией.

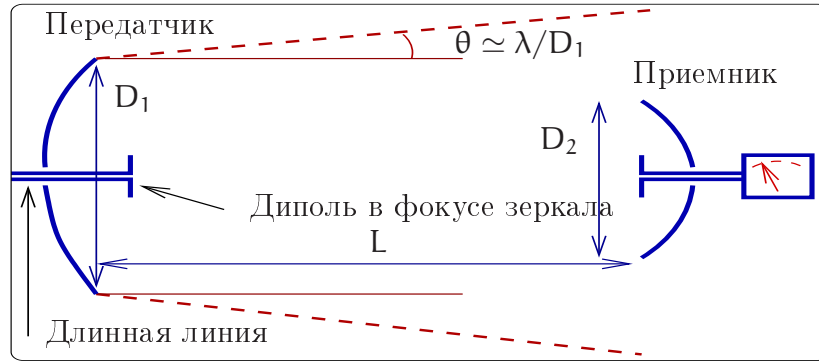


Рис. 2.44: Схема направленного приема и передачи. Излучение передатчика фокусируется зеркалом диаметра D_1 . Зеркало приемника диаметра D_2 собирает и фокусирует принимаемое излучение.

2.3.4 Излучающие системы. Радиоинтерферометрия

Пример системы, включающей направленные передающую и приемную антенны изображен на рис. 2.44. Пусть передатчик излучает мощность $W_{\text{передат}}$. Тогда мощность излучения, которая достигает приемника, расположенного на расстоянии L от передатчика, определяется дифракционной расходимостью волнового пучка (угол дифракции $\theta = \lambda/D_1 \ll 1$), точнее — отношением площади принимающей антенны $\pi D_2^2/4$ и площади $\pi(L\theta)^2/4$, через которую проходит основная часть излучаемой передатчиком мощности. Мощность $W_{\text{прием}}$, поступающая на вход приемника, может быть оценена как:

$$W_{\text{прием}} = W_{\text{передат}} \times \frac{D_2^2}{\left(L \frac{\lambda}{D_1}\right)^2} = W_{\text{передат}} \times \left(\frac{D_1 D_2}{L \lambda}\right)^2,$$

где D_1 и D_2 — диаметры передающей и принимающей антенн соответственно.

В качестве примера рассмотрим, за какое время можно передать изображение со спутника от Юпитера на Землю. Пусть

$$W_{\text{передат}} = 10 \text{ Вт}, D_1 = 30 \text{ м}, D_2 = 1 \text{ м}, \lambda = 3 \text{ см}, L \simeq 10^{12} \text{ м}. \quad (2.134)$$

Тогда мощность на входе приемника равна

$$W_{\text{прием}} \simeq 10 \text{ Вт} \times \left(\frac{30 \cdot 1}{10^{12} \cdot 0.03}\right)^2 \simeq 1 \times 10^{-17} \text{ Вт}.$$

Энергия излучения $W_{\text{прием}} \tau$, необходимая для передачи одного бита информации (представляющего собой радиоимпульс длительности τ) должна быть больше тепловой энергии kT (k — постоянная Больцмана, T — шумовая температура приемника — см. подробности в разделе 4). Потребуем чтобы $W_{\text{прием}} \tau \simeq kT$. Тогда при $T = 30 \text{ К}$ получаем, что для передачи одного бита информации с Юпитера на Землю потребуется время

$$\tau \simeq 4 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$$

Количество импульсов N для передачи изображения, содержащем 500×1500 элементов, можно оценить как производное от числа точек

$$N = 500 \cdot 1500 \cdot \underbrace{3}_{\text{цвет}} \cdot \underbrace{5}_{\text{градации яркости}} \simeq 10^7.$$

Суммарное время, необходимое для передачи изображения будет равно:

$$\sum \tau \simeq 4 \cdot 10^{-5} \times 10^7 \simeq 400 \text{ сек} \simeq 7 \text{ мин.}$$

Полезно оценить величину напряжения, которое будет фиксироваться на входе приемника:

$$W_{\text{прием}} \simeq 10^{-17} \text{ Вт} = \frac{U_0^2}{2\rho}. \text{ Если } \rho = 100 \text{ Ом} \Rightarrow U_0 \simeq 4.5 \cdot 10^{-8} \text{ В.}$$

Подчеркнем, что это весьма оптимистическая оценка, поскольку мы предположили, что минимальная энергия, разрешимая на входе приемника, должна быть равна кТ. В реальности, обычно, требуется бóльшая энергия из-за наличия технических шумов.

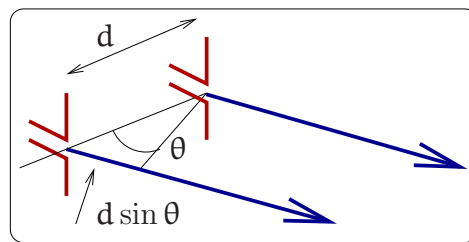


Рис. 2.45: Два излучающие диполя, расположенных на расстоянии d друг от друга.

Два диполя

Переходя к рассмотрению излучающих систем, рассмотрим простейшую систему, состоящую из двух диполей, которые излучают гармонические волны длины λ . Пусть диполи, находящиеся на расстоянии d друг от друга параллельны и ориентированы так, как показано на рисунке 2.45. Пусть каждый диполь, работающий независимо, создает на достаточно большом расстоянии (в волновой зоне излучения) поле амплитуды a , и пусть φ – разность фаз между диполями. Тогда два диполя создают в направлении, задаваемом углом θ , волны, сдвинутые по фазе на:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta + \varphi.$$

Интерференция этих волн создает поле с амплитудой A :

$$A^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cos \Delta\phi = 4a^2 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} = 4a^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta + \frac{\varphi}{2} \right).$$

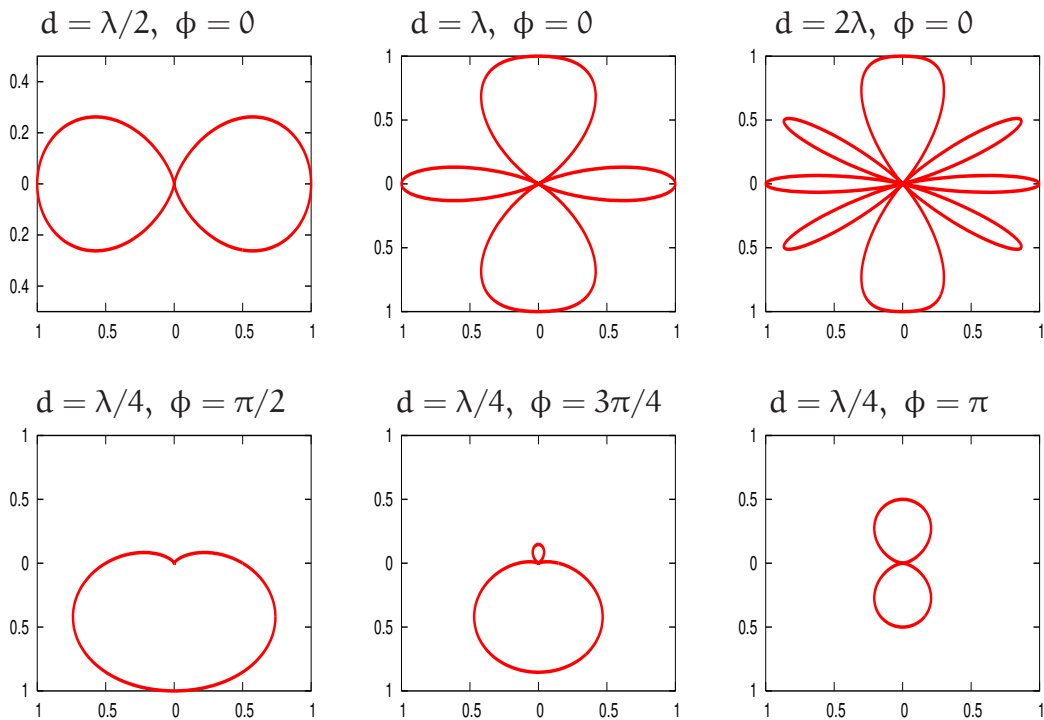


Рис. 2.46: Диаграммы направленности излучения двух диполей в плоскости перпендикулярной осям диполей (расстояние от центра до точки диаграммы пропорционально A^2). Диполи находятся вблизи начала координат и расположены вдоль вертикальной оси. По осям отложены условные единицы.

Пусть $\varphi = 0$ — диполи излучают когерентно. Тогда максимумы квадрата амплитуды, A^2 будут иметь место при углах, определяемых условием $\sin \theta = \pm m \frac{\lambda}{d}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

На рис. 2.46 приведены диаграммы направленности (в плоскости перпендикулярной осям диполей). В первой линии графиков приведены диаграммы направленности синфазно излучающих диполей, расположенные на расстояниях $d = \lambda/2, \lambda, 2\lambda$ друг от друга. Легко видеть, с увеличением расстояния d диаграмма направленности становится все более изрезанной. Во второй линии приведены диаграммы направленности диполей, расположенных на одинаковом расстоянии $d = \lambda/2$, но отличающиеся взаимной фазой. Отметим, что в случае, когда разность фаз диполей равна $\varphi = \pi/2$, излучение диполей направлено преимущественно в одну сторону. Таким образом, мы видим, что можно управлять диаграммой направленности, используя всего два диполя. Увеличение числа излучателей (диполей) повышает возможности управления направленностью излучения.

N когерентных диполей

Рассмотрим изображенную на рис. 2.47 систему из N диполей ($N \gg 1$), излучающих на длине волны λ . Пусть фаза колебаний каждого диполя равна $n\varphi$, где n — номер диполя, φ — постоянная. В этом случае комплексная амплитуда поля, создаваемого на достаточно большом расстоянии n -ым диполем в направлении угла

θ (см. рис. 2.47), будет определяться комплексной экспонентой $e^{in(kd \sin \theta + \phi)}$. Тогда амплитуду A суммарного излучения можно найти, воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии ($k = 2\pi/\lambda$):

$$A = a \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(kd \sin \theta + \phi)} \right| = a \left| \frac{1 - e^{iN(kd \sin \theta + \phi)}}{1 - e^{i(kd \sin \theta + \phi)}} \right| = a \left| \frac{\sin(Nkd/2 \times \sin \theta + N\phi/2)}{\sin(kd/2 \times \sin \theta + \phi/2)} \right|,$$

$$A^2 = a^2 \times \frac{\sin^2 \left(N \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta + \frac{\phi}{2} \right) \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta + \frac{\phi}{2} \right)}. \quad (2.135)$$

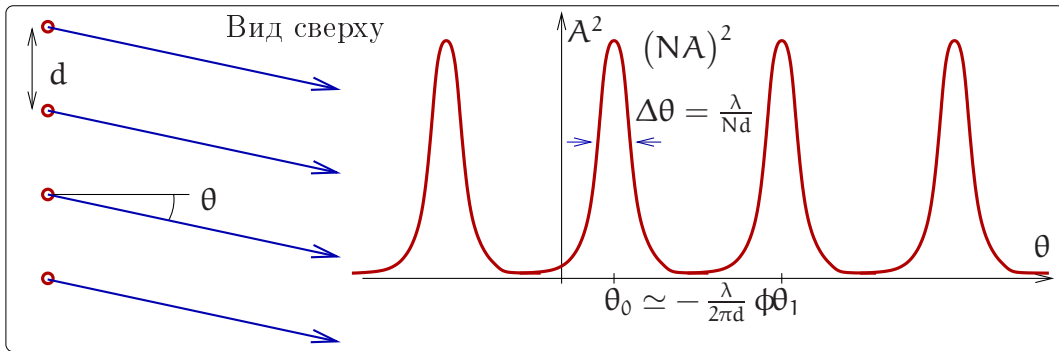


Рис. 2.47: N когерентно излучающих диполей (оси диполей направлены перпендикулярно плоскости рисунка) дают лепестковую диаграмму направленности, аналогично дифракционной решетке в оптике. При $d \leq \lambda/2$ есть только один лепесток излучения.

Мы видим, что диаграмма направленности представляет собой набор лепестков, их максимумы направлены под углами θ_m , которые определяются из условия

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta_m + \frac{\phi}{2} = 0, \pm\pi \dots \quad (2.136)$$

При $\theta = \theta_m$ числитель и знаменатель в формуле (2.135) обращаются в нуль (получаемая неопределенность раскрывается по правилу Лопиталья). Нетрудно показать, что угловая ширина каждого лепестка равна $\Delta\theta = \lambda/(dN)$. Налицо прямая аналогия с дифракционной решеткой в оптике.

Из формулы (2.135) следует, что при $d \leq \lambda/2$ диаграмма направленности имеет только один узкий лепесток — обычно используется именно этот режим. Изменение относительной фазы ϕ элементарных излучателей позволяет изменять направление излучения (т.е. управлять углом максимума диаграммы направленности). Действительно, для малых относительных фаз $\phi \ll 1$ из уравнения (2.136) получаем для угла нулевого максимума θ_0 :

$$\theta_0 \simeq -\frac{\lambda}{2\pi d} \phi \quad (2.137)$$

Таким образом, изменяя относительную фазу ϕ излучателей, можно управлять диаграммой направленности излучения диполей. На рис. 2.48 приведена диаграмма направленности десяти диполей для двух значений относительного сдвига фазы $\phi = 0, \pi/6$.

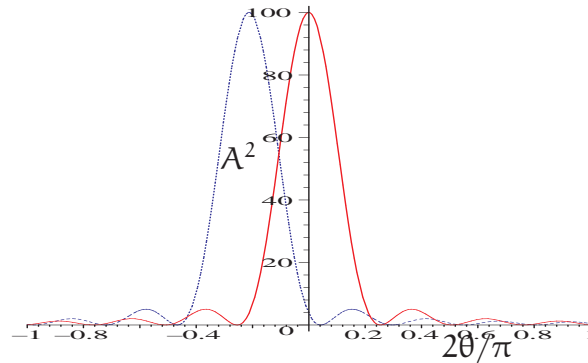


Рис. 2.48: Диаграмма направленности $N = 10$ когерентно излучающих диполей при $d/\lambda = 1/4$ (однолепестковый режим излучения), рассчитанная по формуле (2.135) при $\phi = 0$ (сплошная кривая) и $\phi = \pi/6$ (штриховая кривая).

Мы рассмотрели изменение направленности излучения линейки диполей только в одной плоскости. Очевидно, что можно составить параллельно друг другу множество из таких линеек и образовать излучающую плоскость (так называемая “фазированная антенная решетка”). Такая конструкция позволит управлять направленностью излучения и во взаимно перпендикулярных плоскостях, задавая направление излучения системы.

Заметим, что сказанное справедливо и для приема: если есть фазовая решетка из $N \gg 1$ приемников, то вводя различные времена задержки в каждом приемнике, можно “слушать” *все* небо. На этом принципе основано последнее поколение антенн (типа “активная фазированная антенная решетка” – АФАР), которые могут как передавать, так и принимать излучение. АФАР компактна и не имеет вращающихся частей. Естественно, в первую очередь такие фазированные решетки применяются для военных (оборонных) целей. Это дорогое устройство, требующее для работы мощный компьютер. Радары на основе АФАР ставятся на современные военные самолеты (размещение обычных радаров с вращающимися механическими частями практически невозможно из-за недостатка места в корпусе и присутствия вибраций).

Для достижения максимального углового разрешения приема требуется увеличение размеров приемной антенны. В принципе, можно использовать и всего два приемника, но разнесенных на большое расстояние L . Тогда направление на источник определяется с угловым разрешением $\Delta\theta \simeq \lambda/L$. Например, спутник Института космических исследований АН СССР “Радиоастрон”, вращающийся вокруг Земли (диаметр орбиты $L \simeq 10^{13}$ см) и регистрирующий излучение в диапазоне длин волн $\lambda = 3$ см, позволил зарегистрировать внеземной радиисточник с угловым разрешением

$$\Delta\theta \simeq 3 \cdot 10^{-13}.$$

Подчеркнем, для проведения таких измерений нужен высокостабильный генератор (часы) со стабильностью частоты $\Delta f/f < 10^{-14}$.