Сигнал

Сигналы: аналоговый, дискретный и цифровой.

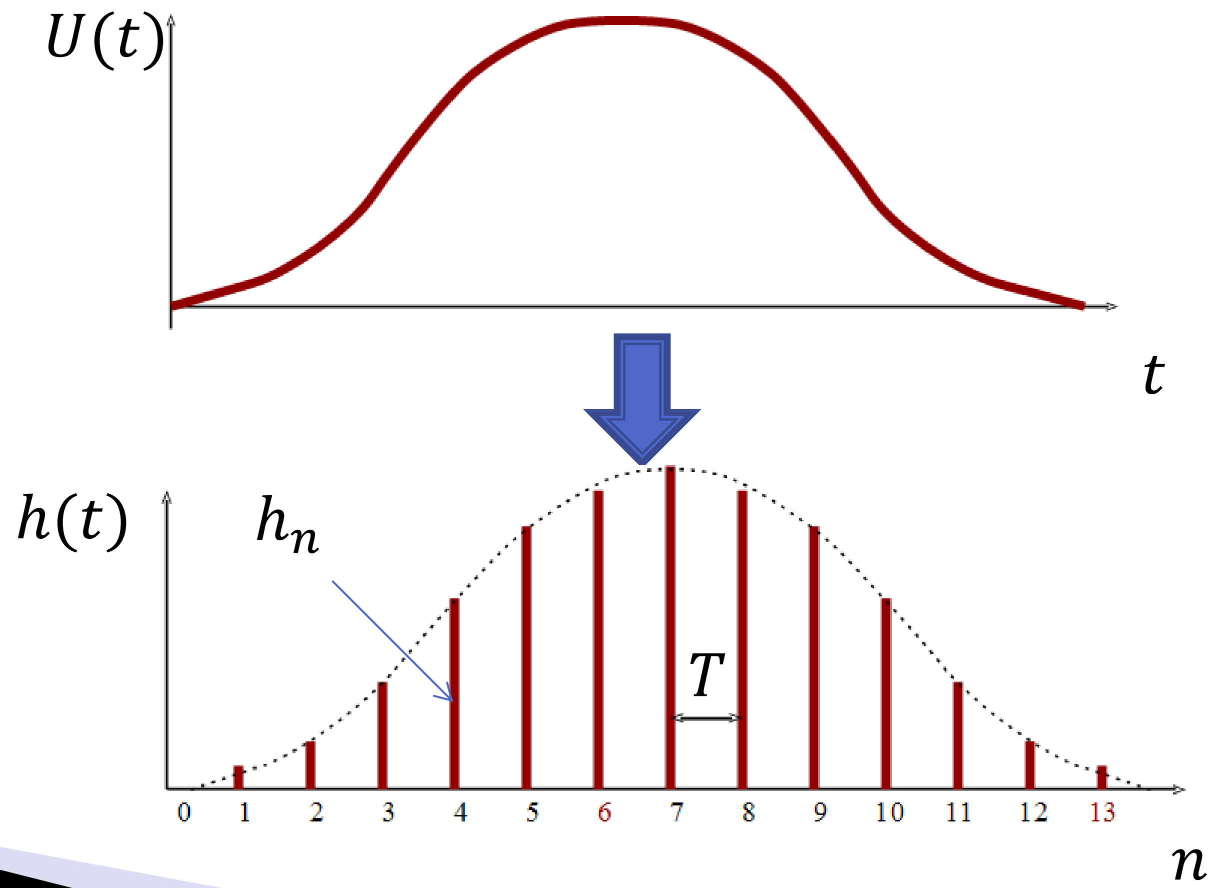
Аналоговый сигнал - непрерывная функция непрерывного аргумента (радиофизика «доцифровой эры»)

Дискретный (discrete) - непрерывная функция, но определен только для дискретных значений аргумента. Задается дискретной последовательностью отсчетов (samples) $u(nT)$, $n = 0,1,2,\ldots,N$. Частота дискретизации $f = 1/T$,

Цифровой (digital) сигнал дискретен как по своим значениям, так и по аргументу (разновидность дискретного сигнала, округленного до определенных значений, набор этих значений - шкала квантования задается заранее). Такое округление принято называть квантованием сигнала по уровню (не путать с квантовой механикой!).

Теорема Котельникова (теорема отсчетов)

Заменим непрерывный (аналоговый) сигнал конечным числом дискретных значений:



Если спектр сигнала **ограничен** и верхняя частота спектра **меньше** частоты

$$\Omega = \frac{1}{2T},$$

то по дискретному набору h_n можно **точно** восстановить исходный сигнал:

$$\boxed{h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \frac{\sin[2\pi\Omega(t - n\mathrm{T})]}{2\pi\Omega(t - n\mathrm{T})}}$$

Ω - частота Найквиста.

Замечание: Условие $f < \Omega = \frac{1}{2\mathrm{T}}$ формально означает *неограниченность сигнала по времени* (наоборот - *ограниченность* сигнала по времени означает *неограниченность* по частоте).

Доказательство:

Пусть $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi i\omega t} dt$ $\quad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{2\pi i\omega t} d\omega$

Введем $G(\omega) = \begin{cases} H(\omega) \text{ если} |\omega| < \Omega \\ 0 \text{ если } \Omega \leq |\omega| \end{cases}$

И продолжим ее периодически с периодом $\frac{1}{T}$ на интервал $-\infty \dots \infty$

Тогда формально можно разложить $G(\omega)$ в ряд Фурье:

$G(\omega) = \sum \mathrm{C}_n e^{-\pi i n\omega 2T}$ где $\mathrm{C}_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} G(\omega) e^{\pi i n\omega 2T} d\omega$

Очевидно: $\mathrm{C}_n = Th(nT)$

Тогда:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{2\pi i\omega t} d\omega = \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\omega) e^{2\pi i\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum \mathrm{C}_n e^{-\pi i n\omega 2T}\, e^{2\pi i\omega t} d\omega = \sum \mathrm{C}_n \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-2\pi i\omega(t-nT)}\, d\omega =$$

$$= \sum \mathrm{C}_n \frac{\sin(2\pi\Omega(t-nT))}{\pi(t-nT)} = 2T\Omega \sum h(nT) \frac{\sin\big(2\pi\Omega(t-nT)\big)}{\pi\Omega(t-nT)} =$$

$$= \sum h_n \frac{\sin\big(2\pi\Omega(t-nT)\big)}{\pi\Omega(t-nT)}$$

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Имеем дискретный сигнал

$$u_k \equiv u(t_k), \quad t_k \equiv k\Delta, \quad k = 0,1,2 \ldots N, \quad N - \text{четно}$$

Если $u(t)$ не ограничена по времени - отбрасываем «хвосты». N чисел на входе - N на выходе. Ограничимся только дискретным набором частот:

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2} \ldots \frac{N}{2}, \qquad \left(\omega_n \equiv \frac{2\pi\, n}{N\Delta}\right)$$

Крайние значения n - частоты Найквиста
(n пробегает $N+1$, а не N значений - два крайние значения зависимы (равны).

Преобразуем интеграл Фурье в сумму:

$$U(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{2\pi i f_n t}\, dt \cong \sum_{k=0}^{N-1} u_k\, e^{2\pi i f_n t_k}\, \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} u_k\, e^{2\pi i\, kn/N}$$

Введем обозначение U_n:

$$U_n \quad = \sum_{k=0}^{N-1} u_k\, e^{2\pi i\, kn/N} \quad .$$

- называют *дискретным преобразованием Фурье*.
N отсчетов u_k преобразуются в N комплексных чисел U_n.
Такое преобразование не зависит от интервала дискретизации Δ. Связь между обычным и дискретным преобразованием Фурье: $U(f_n) \cong U_n\, \Delta$

Обратное дискретное Фурье преобразование (получение из набора U_n набор u_k) задается формулой

$$u_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U_n\, e^{-2\pi i\, kn/N}$$

формулы отличаются только знаком в показателе экспоненты и делением на N. Значит, численные процедуры для прямого ДПФ могут быть легко модифицированы и для обратного ДПФ.

Дискретный аналог равенства Парсеваля:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |u_k|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |U_n|^2$$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Перепишем формулу (3) для дискретного преобразования Фурье:

$$U_n \quad = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk}\, u_k, \qquad W \equiv e^{2\pi\, ikn/N}$$

Для вычисления одного элемента U_n потребуется N операций комплексного умножения, а для вычисления всех элементов U_n - $O(N^2)$ операций.

Алгоритм БПФ выгодно отличается тем, что для той же задачи ему требуется всего лишь $O(N\log_2 N)$ операций. Разница между $O(N^2)$ и $O(N\log_2 N)$ огромна, например, при $N = 10^6$ БПФ дает выигрыш в $\approx 5 \times 10^4$ раз!

Алгоритм БПФ стал широко известен в середине 60-х после работ J.W.Cooley и J.W.Tukey, (позже выяснилось, что подобные методы были независимо и раньше открыты десятком других исследователей, начиная с Гаусса (1805 год).

Количество информации

Рассмотрим сообщение из n посылок, каждая может принимать m различных значений (градаций). Полное количество комбинаций

$$N = m^n$$

Количество информации I должно $I \sim n$ (как стоимость телеграммы). С другой стороны $I = f(N)$. Выпишем:

$$df \quad = \quad K\,dn, \qquad df = \frac{df}{dN}\,N\ln(m)\,dn,$$

$$\Rightarrow \qquad f = K\log_a N$$

здесь $K,\ a$ - постоянные. Для определения постоянной a выберем $m = 2, n = 1$ (“бит” информации):

$$1 = log_a(2^1), \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Формула Хартли:

$$I = \log_2 N = n\log_2 m$$

Передача информации через канал связи

Пусть сообщение - функция $u(t)$, ее спектр ограничен: $f < F_0$. По т. Котельникова достаточно передать набор импульсов с интервалами $\Delta t = 1/(2F_0)$, за время t, всего $2F_0 t$ импульсов.

Если число градаций m, то количество информации $I(t)$ и скорость R передачи информации:

$$\boxed{\begin{aligned} I &= 2F_0 t \log_2 m, \\ R &= \frac{dI}{dt} = 2F_0 \log_2 m. \end{aligned}} \qquad (1)$$

Число градаций m не может быть бесконечным из-за наличия шумов. **Теорема Шеннона-Хартли**:

$$I_{\max} = F_0 t \log_2\left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right), \tag{2}$$

$$R_{\max} = \frac{dI}{dt} = F_0 \log_2\left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right), \tag{3}$$

W_s -- мощность сигнала, а W_n -- мощность шума. Величину $I_{\max}$ называют еще объемом сигнала.

Для передачи сообщения:

a) полоса частот F_k, пропускаемых каналом, должна быть достаточно велика: $F_k > F_0$;

b) время связи t_k через канал должно быть также достаточно велико: $t_k > t$;

c) превышение сигнала над шумом $\frac{W_s}{W_n}$ в канале $H_k = \log_2\left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right)$ должно быть также больше соответствующей величины H

Информационная емкость канала

Величину $C = F_0 \log_2\left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right)$ называют емкостью канала.

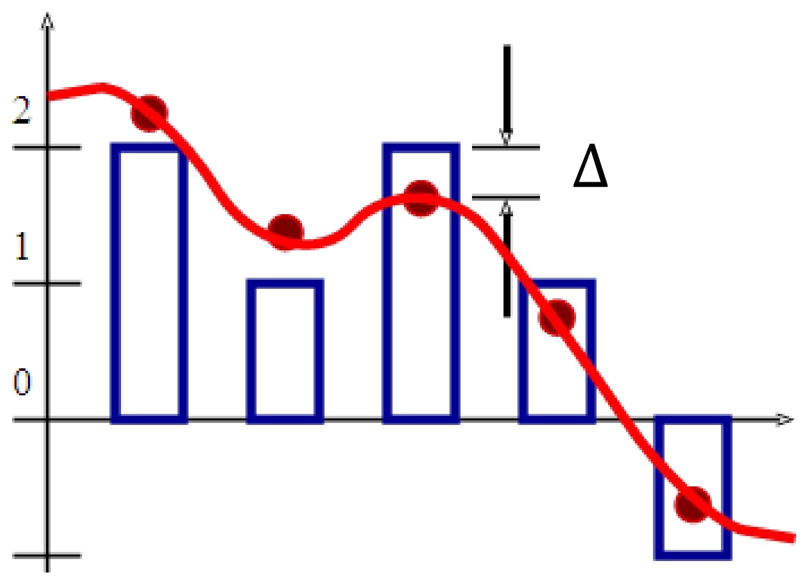
В случае, когда W_n зависит от частоты («окрашенный» шум):

$$C = \int_0^{F_0} \log_2\left(1 + \frac{W_s(f)}{W_n(f)}\right) df$$

F_0 - полоса пропускания канала

Шумы квантования

Пусть число градаций m и нет «обычных» шумов. Шаг дискретизации $b = 1/m$. Если амплитуда сигнала равновероятна в пределах шага b, то заменяя ее дискретным значением, мы допускаем ошибку Δ.



Результат квантования можно рассматривать как аддитивный случайный процесс с дисперсией σ^2. Квадрат среднего значения максимального квантованного сигнала - m^2. Тогда: $W_N = \sigma^2$, $W_S = m^2 - \sigma^2$

Подставляем в формулы (2), (3):

$$I \quad = F_0 t \log_2\left(1 + \frac{W_S}{W_N}\right) = F_0 t \log_2 m^2,$$

$$R \quad = \frac{dI}{dt} = F_0 \log_2\left(1 + \frac{W_S}{W_N}\right) = F_0 \log_2 m^2.$$

Различные каналы передачи информации

	F_0	m	$\log_2 \mathrm{m}$	R бит/с
Телеграф	$4 \cdot 10^2$ Гц	2	1	$8 \cdot 10^2$
Телефон (без сжатия)	$4 \cdot 10^3$ Гц	128	7	$6 \cdot 10^4$
Телевидение (без сжатия)	$6 \cdot 10^6$ Гц	30	~ 5	$6 \cdot 10^7$

Интересно: через зрение человек получает $2 \cdot 10^4$ бит/сек. Это много меньше, чем по ТВ: записывается не каждый кадр, а лишь *изменение* картинки (но (!) мозг помнит всю текущую картинку). Аналогичный принцип используют алгоритмы сжатия информации (mpeg)

Информационная энтропия

Радиотелеграф: опытный радист мог принимать сигнал «на слух» при

$W_S < W_N$ в полосе приема

$F_0 \cong R$

– нарушение формулы Хартли?

В алфавите буквы не равновероятны. Тем более, их сочетания.

Информационная двоичная энтропия:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p(i)\log_2 p(i)$$

- формула Шеннона

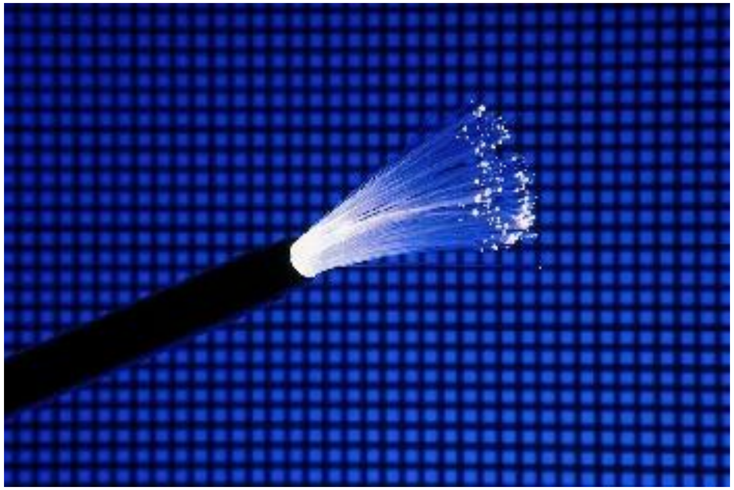
Прирост информации = утраченной энтропии

Примеры современных каналов информации:

СВЧ кабель (длинная линия!): $F_0 \simeq 10^{10}$ Гц, т.е. по СВЧ кабелю можно передавать ~ 1000 ТВ каналов или $2{,}5 \cdot 10^6$ телефонных каналов.

Витая пара (тоже длинная линия): $F_0 \simeq 10^9$ Гц (дешевле и удобнее). Скорость передачи $100 \ldots 1000$ Мбит/сек.

Оптический кабель (почти как длинная линия…): : $F_0 \simeq 10^{14}$ Гц, (пока полоса частот лишь $\sim 10^{10}$ Гц). до 100 Гбит/сек. (1 волокно, Диаметр сердцевины $\sim 5\,\mu$, оболочка $\sim 20\,\mu$. Затухание на $\lambda \sim 1.6\,\mu$, составляет 0,2 дб/км).



Рекорд: 32 Тб/с – с помощью **частотных гребенок!**

Nature Photonics 8, 375–380 2014.

Надежность передачи информации – фундаментальный предел

Пусть один бит - за время τ, полоса частот $\Delta f \simeq 1/\tau$. Мощность тепловых шумов в согласованной линии $W_T \sim \kappa T\,\Delta f$, поэтому для передачи каждого бита нужна энергия $> \kappa T$.

Величина $E/\kappa T$ пока велика, но постоянно уменьшается. Если средняя энергия, рассеиваемая процессором W , тактовая частота ν, а количество элементов N, то очевидно, что

$$\frac{E}{\kappa T} = \frac{W}{\nu\, N\, \kappa T}$$

Приведем оценки для различных процессоров

Процессор	W	ν	N	$\frac{E}{\kappa T}$
8086	1 Вт	5 МГц	$5 \cdot 10^4$	$\sim 10^9$
Pentium 4	90 Вт	3 ГГц	10^8	$\sim 7 \cdot 10^4$
Core i7 Extreme (6 ядер)	130 Вт	3.3 ГГц	$2 \cdot 10^9$	$\sim 10^4$

В оптике $\kappa T \ll \hbar\omega$. Можно показать, что предельная величина для передачи одного бита за время τ составляет

$$E \geq \frac{\hbar}{\tau}$$

Скорость передачи информации – рекорд?

Достигнута была такая скорость в офисе одной из компьютерных фирм при падении со стеллажа высотой в один метр 8 коробок, каждая из которых содержала 20 накопителей Seagate Barracuda 300 GB.

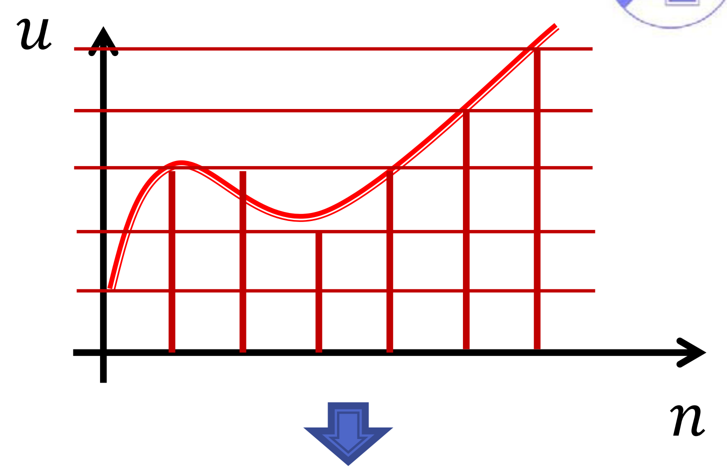
Общий объем переданной на расстояние 1 метра информации составил 300 × 20 × 8 = 48000 GB, время передачи составило $t = \sqrt{2h/g} = 0.4\ c$

Средняя скорость передачи информации составила

120 Тб/сек ! ;)

Основы цифровых систем

От дискретного представления сигнала можно перейти к цифровому:
каждый отсчет – дискретное значение амплитуды сигнала.



$$U(t) \to u(n) = 3,3,2,3,4,5 \dots.$$

Возможная архитектура цифровой системы обработки аналогового сигнала (сигнального процессора)

Коды

Вместо десятичного представления удобно использовать двоичные.

Есть разные способы – коды. Коды бывают:

- Неизбыточные (каждая комбинация нулей и единиц кодирует число)
- Избыточные – комбинаций больше, чем необходимо (лишние могут быть использованы для обнаружения ошибок)
- Равномерные (комбинации содержат постоянное число разрядов)
- Неравномерные (пример – азбука Морзе: буквы кодируются различным числом точек и тире).
- Взвешенные (каждый разряд имеет вес),
  например *n* – степень 2 – натуральный двоичный код:
  $5_{10} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 101_2$
- Невзвешенные

Коды, использующиеся в цифровых системах хранения, обработки и передачи информации

- Код 8421 : каждый десятичный знак заменяется на 4 двоичных:

$$N_{10} = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0$$

(избыточный блоковый код)

- Натуральный двоичный код (неизбыточный, непрерывный.) Используются 8-и, 16-и, 32-ух… разрядные блоки
- Код Грея – получается суммированием по модулю 2 соседних разрядов натурального двоичного кода.

Достоинство: коды соседних чисел отличаются только одним разрядом (циклический неизбыточный код).

- Код Джонсона – получается последовательным сдвигом блока единиц (избыточный) – легко формируется и дешифрируется.
- Код «1 из n» - только одна единица в кодовой комбинации. Очень простой, очень избыточный блоковый код.

Коды, использующиеся в цифровых системах хранения, обработки и передачи информации

Число	Натуральный двоичный код (8421)				Код Грея			
S	x_3	x_2	x_1	x_0	y_3	y_2	y_1	y_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1	1	1
11	1	0	1	1	1	1	1	0
12	1	1	0	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	0	0	0

Коды, использующиеся в цифровых системах хранения, обработки и передачи информации

S	Код Джонсона	Код “1 из 8”
0	0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 1
1	0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 1 0
2	0 0 1 1	0 0 0 0 0 1 0 0
3	0 1 1 1	0 0 0 0 1 0 0 0
4	1 1 1 1	0 0 0 1 0 0 0 0
5	1 1 1 0	0 0 1 0 0 0 0 0
6	1 1 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0
7	1 0 0 0	1 0 0 0 0 0 0 0

В цифровых каналах (устройствах) так же возникают ошибки!

Коды, обнаруживающие ошибки

Коды, исправляющие ошибки

Коды, обнаруживающие ошибки

Простейший вариант: контроль четности – к каждому блоку добавляем 0 или1 так, что бы сумма единиц в блоке всегда была четной. Обнаруживаются ошибки кратности 1.
Более сложный: (менее избыточный) – дописывается циклическая контрольная сумма (обычно получаемая как остаток от деления различных функций от кодовой последовательности).

Исправление ошибок

Расстоянием Хемминга (метрикой Хемминга) между двумя кодовыми словами X и Y называется количество отличных бит на соответствующих позициях:

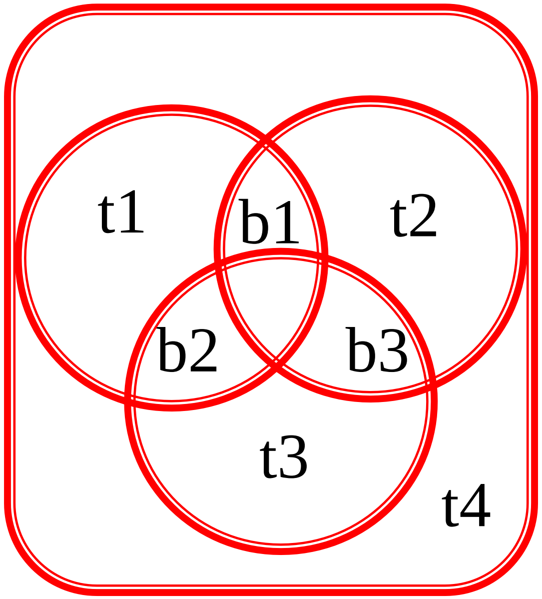
$$d_H = \sum_s \left| X^{(s)} - Y^{(s)} \right|$$

Исправление ошибок

Минимальное расстояние Хемминга: $d_{MIN} = MIN_{X \neq Y}\, d_H(\mathrm{X},\mathrm{Y})$

Определяет корректирующую способность кода:

$$t = \frac{d_{MIN} - 1}{2}$$



Пример: к трем информационным битам b1-b3 добавляем три контрольных, так, что бы в каждой окружности сумма была четной, а затем – еще один, что бы четной была сумма всех. Такой код исправляет ошибки кратности 1 и обнаруживает двукратные.

Код Рида — Соломона исправляющий *t* ошибок, требует *2t* проверочных символов и с его помощью исправляются произвольные пакеты ошибок длиной *t* и меньше. Впервые использовался при записи CD дисков (избыточность – 25%, корректирующая способность – 87 Мб из 700), алгоритмы на его основе применяются в штрих-кодах, мобильной связи.