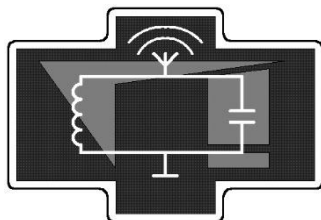


Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Физический факультет

О.В. Боровкова

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОПТИЧЕСКИХ МИКРОРЕЗОНАТОРАХ

Методическая разработка для спецкурса
"Оптические явления в нелинейных средах и микрорезонаторах"
кафедры физики колебаний



Москва, 2022 г.

УДК 535.015

Печатается по решению кафедры физики колебаний
физического факультета МГУ

О.В. Боровкова

Нелинейные явления в оптических микрорезонаторах.

Методическая разработка для спецкурса "Оптические явления в нелинейных средах и микрорезонаторах" кафедры физики колебаний. – М., изд. физического факультета МГУ, 2022, 56 с.

Методическая разработка предназначена для студентов 4 курса кафедры физики колебаний отделения радиофизики физического факультета МГУ, слушающих курс «Оптические явления в нелинейных средах и микрорезонаторах», а также для студентов отделения радиофизики, интересующихся данной темой. Пособие знакомит студентов с понятием нелинейной оптики, видами нелинейных оптических сред, характерными для них явлениями, дает представление о пространственных и временных оптических солитонах, а также о возможностях применения оптических микрорезонаторов с гигантской добротностью для наблюдения нелинейно-оптических эффектов. Особое внимание в пособии уделено популярному и динамично развивающемуся направлению, связанному с генерацией оптических частотных гребенок (ОЧГ). В пособии рассматривается как метод генерации ОЧГ при помощи фемтосекундных лазеров, так и при помощи нелинейных оптических микрорезонаторов. Методическая разработка подготовлена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Введение

Нелинейные явления в оптических микрорезонаторах с гигантской добротностью определяются нелинейными свойствами материала, из которого изготовлена микросфера, микродиск, микротороид или микрорезонатор с другой аксиально-симметричной геометрией.

Благодаря особой геометрии такие объекты действуют как высокодобротные резонаторы для определенных частот, соответствующих его собственным частотам или модам. Моды типа шепчущей галереи, которые можно возбуждать в оптических микрорезонаторах, обладают малым объемом моды и высокой степенью локализации света, поэтому они могут служить удобной платформой для наблюдения и исследования нелинейных оптических эффектов. В частности, в высокодобротных микрорезонаторах нелинейные эффекты могут наблюдаться при мощностях в несколько мВт, как показано, например, в работах [1,2].

В оптических микрорезонаторах с гигантской добротностью были продемонстрированы такие чисто нелинейные эффекты как эффект Поккельса, генерация второй гармоники, генерация третьей гармоники, четырехволновое смешение и многое другое. Особенностью нелинейных эффектов в микрорезонаторах является то, что в силу аксиально-симметричной геометрии микрорезонаторов согласование фаз, то есть условие фазового синхронизма, необходимое для ряда нелинейно-оптических эффектов, возможно лишь для определенных собственных частот микрорезонатора.

Помимо наблюдения уже известных нелинейных эффектов в микрорезонаторах, в последние годы активно развивались и исследовались методы генерации оптических частотных гребенок (ОЧГ) в микрорезонаторах, ключевым условием для которых является нелинейный отклик среды оптического микрорезонатора. ОЧГ служат еще высокоточным инструментом для измерения частот наравне с разными типами атомных часов. Надо отметить, что ОЧГ могут создаваться также при помощи фемтосекундных лазеров с

синхронизацией мод, но методика генерации в микрорезонаторах принципиально отличается.

В данном пособии приводится подробное разъяснение механизма генерации ОЧГ в оптических микрорезонаторах, основанное на нелинейном эффекте четырехволнового смешения.

1. Понятие о нелинейной оптике

Нелинейная оптика изучает эффекты, возникающие в средах при приложении к ним электрического поля мощностью, выше порогового значения, определяющегося энергией внутриатомного взаимодействия. Ключевым свойством нелинейных эффектов является то, что для них не выполняется *принцип суперпозиции*, то есть отклик на сумму двух и более воздействий не равен сумме откликов на каждое из этих воздействий. Это открывает практически неограниченные возможности как с точки зрения управления свойствами среды, так и с точки зрения разнообразия наблюдаемых эффектов. Один оптический пучок, распространяясь в среде, меняет ее диэлектрические свойства для другого пучка, тоже распространяющегося в среде, а второй, в свою очередь, может менять свойства той же самой среды для первого пучка, тем самым, воздействуя на него.

При воздействии внешнего электрического поля на диэлектрик он поляризуется, то есть в нем возникают электрические дипольные моменты. В зависимости от материала и его свойств различают три типа поляризованности: электронная поляризованность, ионная и ориентационная (см. рис. 1).

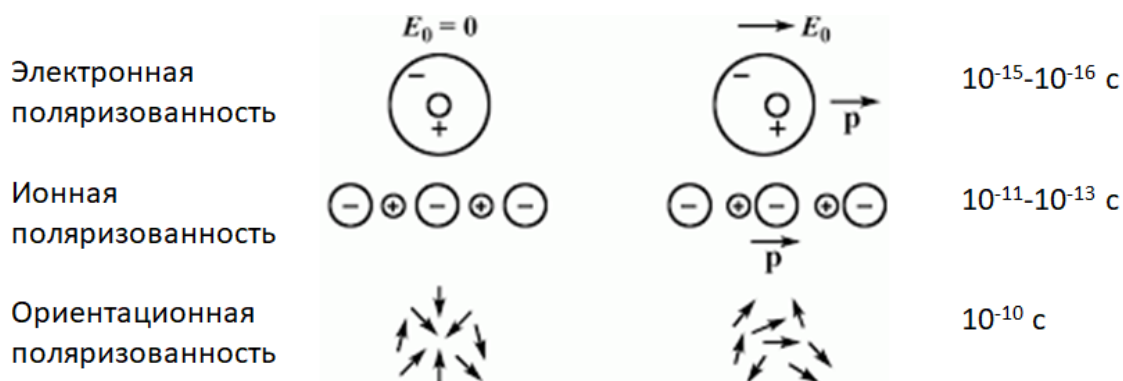


Рисунок 1. Виды поляризованности среды, вызываемой внешним электрическим полем. В левой колонке приведены названия типов поляризованности, по середине даны схемы взаимного расположения носителей заряда, в правой колонке приведены характерные времена установления для каждого типа поляризованности среды.

Электронная поляризованность среды связана со смещением электронного облака атомов относительно его положительно заряженного центра. Этот тип поляризованности устанавливается за характерное время 10^{-15} - 10^{-16} секунды, что меньше, чем период колебаний света в видимом диапазоне длин волн (порядка 10^{-13} сек). Таким образом, электронная поляризованность диэлектрика возникает в среде практически мгновенно с точки зрения видимого света и играет основную роль при рассмотрении отклика среды на приложенное внешнее поле.

Ионная поляризованность среды возникает вследствие смещения положительных и отрицательных ионов в соответствующих материалах. Она имеет большие характерные времена отклика и устанавливается за время 10^{-11} - 10^{-13} сек. Данный тип поляризованности необходимо учитывать при работе с излучением в среднем и дальнем ИК диапазонах, в то время как для видимого и ближнего ИК диапазонов он не играет существенной роли.

Ориентационная поляризованность проявляется в средах, где уже имеются электрические диполи, которые приходят в движение под действием приложенного внешнего электрического поля и выстраиваются вдоль его направления. Это самая «медленная» поляризованность, которая устанавливается в среде порядка 10^{-10} сек. Она наблюдается, например, в жидких кристаллах.

Переходя от физики микросистем к макропараметрам, вводят понятие *вектора поляризованности среды* P , то есть суммарного электрического дипольного момента единицы объема среды, наведенного внешним полем. Это «отклик» среды на внешнее воздействие в виде электрического поля. Вектор поляризованности среды связан с вызывающим его воздействием при помощи материального уравнения. В общем случае это уравнение будет нелинейным:

$$P_i = \sum_k \alpha_{ik}(E) E_k, \quad (1)$$

где

$$\alpha_{ik}(E) = \alpha_{ik} + \sum_{j=1}^3 \chi_{ijk} E_j + \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 \theta_{ijkm} E_j E_m + \dots \quad (2)$$

носит название тензора диэлектрической восприимчивости среды, E_k – это компоненты приложенного электрического поля, $i, k = \overline{1,3}$. В разложении (2) α_{ik} – это тензор 2-го ранга, описывающий линейную восприимчивость среды, χ_{ijk} – тензор 3-го ранга, отвечающий за квадратичную нелинейность материала, а θ_{ijkm} – тензор 4-го ранга, связанный с кубической нелинейностью.

Уравнения (1) и (2) образуют систему, позволяющую достаточно точно описать множество сред с учетом нелинейности отклика среды на внешнее воздействие. При этом если в уравнении (2) ограничиться лишь первым членом в разложении, мы получим привычную и довольно простую линейную модель среды, с линейным по полю откликом на внешнее воздействие.

Тензор диэлектрической проницаемости среды, ε_{ik} , связан с тензором диэлектрической восприимчивости, α_{ik} , как $\varepsilon_{ik}(E) = \delta_{ik} + 4\pi\alpha_{ik}(E)$. Таким образом, зависимость диэлектрических свойств среды от внешнего поля также будет нелинейной.

Величина коэффициентов χ_{ijk} и θ_{ijkm} в разложении (2) очень мала по сравнению с линейным членом разложения. К тому же и между собой эти параметры отличаются на несколько порядков величины, поэтому для того, чтобы их вклад в отклик среды стал существенным, необходимо, чтобы величина приложенного внешнего поля была порядка 10^5 - 10^6 В/см. Такие поля хотя отстают на несколько порядков величины от внутриатомных (10^9 В/см), но уже не могут считаться пренебрежимо малыми.

Если в среде присутствует отклик второго порядка, то есть коэффициенты χ_{ijk} не равны нулю, то такая среда называется *квадратично-нелинейной*. Примерами таких сред являются такие материалы как ниобат лития (LiNbO_3), ниобат калия (KNbO_3), танталат лития (LiTaO_3), дегидрофосфат калия (KDP, химическая формула KH_2PO_4). Наряду с квадратично-нелинейным откликом в

таких средах присутствует и кубический по внешнему полю отклик среды, однако, он значительно меньше квадратичного и обычно не принимается во внимание.

Значительное влияние кубического отклика среды можно наблюдать в средах с так называемой *кубической* или *керровской нелинейностью*. Такие среды имеют центр симметрии или инверсии, то есть кристалл среды не изменяется при преобразовании координат вида $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$. Очевидно, что во всех изотропных средах также выполняется указанное условие инвариантности среды относительно зеркального преобразования координат. Рассмотрим, что же происходит с компонентами тензора χ_{ijk} при таком преобразовании координат. Согласно правилу преобразования тензора 3 ранга, компонента χ_{ikj} должна перейти в компоненту $-\chi_{ikj}$. Но мы помним, что среда не изменяется при таком преобразовании координат, так как она обладает центром симметрии. Отсюда следует, что должно быть выполнено $\chi_{ikj} = -\chi_{ikj}$, тогда неизбежно $\chi_{ikj} = 0$. Следовательно, в средах с центром инверсии, а также всех изотропных средах квадратичный отклик среды на внешнее электрическое поле отсутствует и материальное уравнение принимает вид

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E} + \theta\mathbf{E}^3 + \dots \quad (3)$$

На рисунке 2 приведены зависимости поляризованности среды от напряженности электрического поля световой волны для сред с кубической (а) и квадратичной (б) нелинейностями. Видно, что в кубично-нелинейных или керровских средах функция $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ является нечетной, в то время как в квадратично-нелинейных средах она не обладает ни четностью, ни нечетностью.

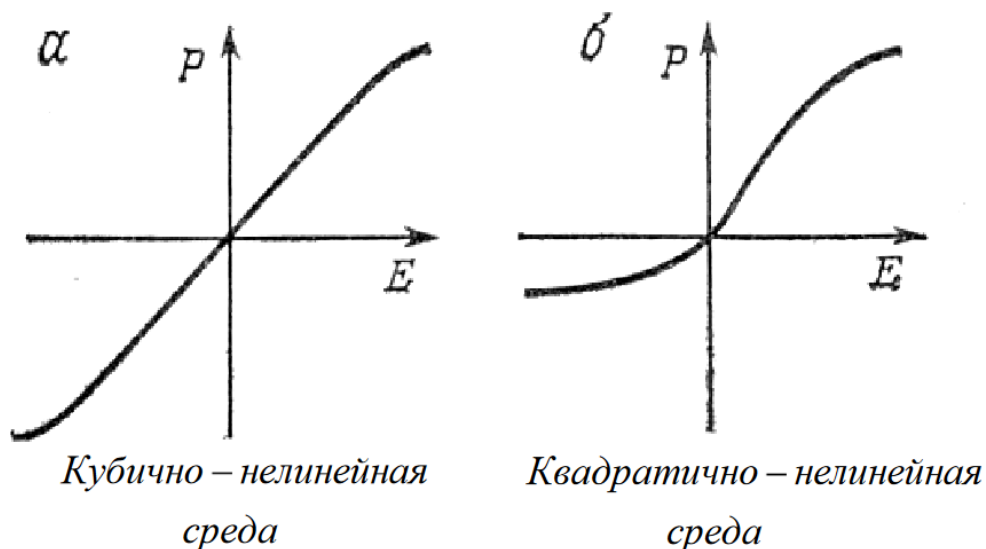


Рисунок 2. Зависимость поляризованности среды от напряженности электрического поля световой волны для сред с кубической (а) и квадратичной (б) нелинейностями.

В средах с квадратичной нелинейностью можно наблюдать эффекты так называемого трехволнового взаимодействия, в частности генерацию второй гармоники (ГВГ), генерацию суммарной и разностной частот, а также электрооптический эффект, при котором показатель преломления среды изменяется под воздействием внешнего постоянного или низкочастотного электрического поля.

1.1 Генерация второй гармоники

С квантовой точки зрения при нелинейном процессе ГВГ можно считать, что два фотона исходной частоты ω одновременно поглощаются в среде, переводя систему на виртуальный уровень с энергией $2\hbar\omega$, после чего система релаксирует с этого уровня в основное состояние с излучением одного фотона с частотой 2ω . Схематически этот процесс показан на рисунке 3.

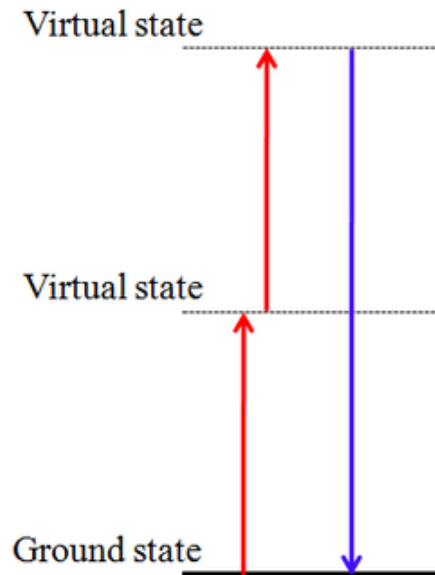


Рисунок 3. Схема процесса генерации второй гармоники в квадратично-нелинейной среде.

Иначе процесс ГВГ можно объяснить следующим образом. Дипольный момент, возникающий в нелинейной среде при малой амплитуде внешнего поля, создает вторичную волну на той же самой частоте, а волновое уравнение будет иметь вид:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Если же амплитуда внешнего поля достаточно велика, то дипольный момент в среде будет создавать вторичные волны на основной, а также удвоенной и других частотах, а волновое уравнение будет иметь следующий вид

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{nl}}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Если внешнее поле имеет вид $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \text{к.с.})$, где к.с. – комплексно-сопряженные слагаемые, то для квадратично-нелинейной среды дипольный момент единицы объема будет иметь вид $P_i = \sum_k \alpha_{ik}(E)E_k = \sum_k \alpha_{ik}E_k + \sum_k \sum_j \chi_{ijk}E_kE_j + \dots$. Следовательно, волновое уравнение примет вид

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{4\pi\chi\omega^2}{c^2} \mathbf{E}\mathbf{E} \sim \frac{4\pi\chi\omega^2}{c^2} |\mathbf{E}_0|^2 + \frac{4\pi\chi\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_0^2 e^{-i2\omega t} + \text{к.с.} \quad (6)$$

Таким образом, в выражении для поляризованности среды в волновом уравнении (6) присутствует статическая часть, отвечающая за выпрямление сигнала, а также колебания на удвоенной частоте, поэтому в такой среде будут присутствовать как волны на основной частоте ω , так и на удвоенной, 2ω , то есть вторая гармоника.

При наблюдении эффекта ГВГ в микрорезонаторах с МШГ условие фазового синхронизма накладывает условия на полярные и азимутальные индексы собственных мод микрорезонатора [3,4]. В частности, в [3] и ряде других было показано, что для обеспечения фазового синхронизма между модами микрорезонатора в квадратично-нелинейной среде азимутальные индексы m_i и полярные индексы l_i должны быть связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= m_3, \\ |l_1 - l_2| &\leq l_3 \leq l_1 + l_2 \\ l_1 + l_2 + l_3 &= 2N \end{aligned} \quad (7)$$

где N – целое число.

Согласование азимутальных чисел можно реализовать при помощи периодической модуляции коэффициента квадратичной нелинейности вдоль окружности микрорезонатора. В этом случае говорят о фазовой квази-синхронизме, который в англоязычной литературе носит название quasi-phase matching (QPM). Периодическую модуляцию коэффициента квадратичной

нелинейности можно создавать различными методами, например, воздействием электрическими импульсами, генерацией полей при облучении электронами, тепловым импульсным воздействием или перераспределением атомов лития в материале химическими методами.

Интересно отметить, что эффективность нелинейного преобразования зависит от размера резонатора. В работе [5] было показано, что величина интеграла перекрытия σ пропорциональна радиусу R микросферического резонатора как $|\sigma|^2 \sim R^{-1.8}$.

1.2 Генерация суммарной и разностной частот

В разделе 1.1 мы рассматривали сложение двух фотонов с одной и той же частотой, но точно также квадратично-нелинейная может одновременно поглотить и два фотона на разных частотах, перейдя в возбужденное состояние. В процессе релаксации системы в основное состояние аналогично может излучиться фотон, но уже с частотой равной сумме частот поглощенных фотонов. Таким образом, в квадратично-нелинейной среде можно реализовать сложение двух частот.

С точки зрения волнового уравнения в среде этот процесс можно записать следующим образом. Внешнее поле представляет собой сумму двух волн $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t} + \text{к.с.})$. Нелинейный отклик среды на суперпозицию этих волн имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{4\pi\chi\omega^2}{c^2} \mathbf{E}\mathbf{E} \sim \frac{4\pi\chi\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + \frac{4\pi\chi\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_2^2 e^{-2i\omega_2 t} + \\ + \frac{4\pi\chi\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + \frac{4\pi\chi\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) мы видим, что в выражении для поляризованности среды присутствуют колебания на входных частотах, их вторых гармониках, а также колебания на суммарной и разностной частотах. На практике суммарные частоты используются для генерации сигнала в ультрафиолетовом диапазоне, то есть более коротких длин волн, а разностные – в ИК-диапазоне.

Однако, помимо равенства частот (то есть выполнения закона сохранения энергии), необходимо еще обеспечить выполнение условия фазового синхронизма, то есть закон сохранения импульса. Условие фазового синхронизма в квадратично-нелинейном кристалле выполняется при направлении распространения света вдоль определенной оси, вдоль которой фазовые скорости всех трех волн согласованы. Если условие фазового синхронизма не будет выполнено, то эффективность генерации суммарной или разностной частот будет очень мала.

1.3 Параметрическая генерация света

Параметрическая генерация света – это процесс, обратный рассмотренному выше процессу сложения частот. При параметрической генерации света один квант света распадается на два за счет квадратично-нелинейного взаимодействия. Этот процесс также требует выполнения законов сохранения энергии и импульса:

$$\hbar\omega_3 = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2, \hbar\mathbf{k}_3 = \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 \quad (9)$$

Несмотря на то, что может существовать множество пар частот ω_1 и ω_2 , удовлетворяющих закону сохранения энергии, закон сохранения импульса определяет единственную пару частот для каждого выбранного пространственного направления в нелинейном кристалле. Таким образом, для конкретного направления в кристалле будет строго определенная пара частот,

для которой выполнены одновременно и закон сохранения энергии, и закон сохранения импульса, то есть может происходить параметрическая генерация света.

Следовательно, вращая кристалл, можно **плавно** изменять частоту генерируемого излучения в широких пределах. Описываемый эффект параметрической генерации света открывает широчайшие возможности для лазерной техники и применяется, например, в параметрических генераторах света.

1.4 Линейный электрооптический эффект или эффект Поккельса

Рассмотрим воздействие на систему с квадратичным откликом внешнего постоянного или низкочастотного поля $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 e^{-i\Omega t} + \text{к.с.})$, так называемого управляющего поля, частота которого $\Omega \ll \omega$. В этом случае диэлектрические свойства среды будут зависеть от приложенного внешнего поля, и зависимость тензора ε можно разложить в ряд по управляющему полю:

$$\varepsilon(\omega, E_0) = \varepsilon^{(1)}(\omega) + \varepsilon^{(2)}(\omega + \Omega)\mathbf{E}_0 + \varepsilon^{(3)}(\omega + 2\Omega)\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0 + \dots \quad (10)$$

В квадратично-нелинейных средах доминирует вклад от второго слагаемого, линейный по приложенному полю. Таким образом, внешнее постоянное или низкочастотное поле приводит к возникновению в материале двулучепреломления, которое зависит от управляющего поля и исчезает при его выключении. В случае, если кристалл и до воздействия внешнего поля обладал свойством двулучепреломления, то под воздействием линейного электрооптического эффекта величина его меняется. Это явление носит название электрооптического эффекта Поккельса. Данный эффект широко используется в

оптических модуляторах, так как он обладает высоким быстродействием, то есть малой инерционностью.

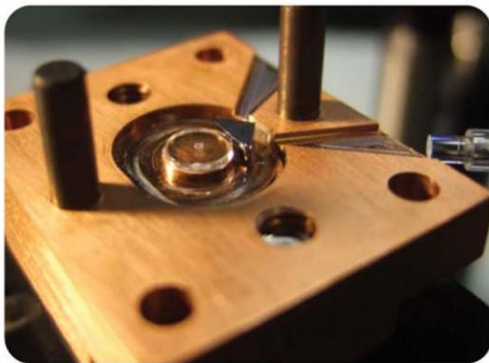
Эффективность традиционных электрооптических модуляторов невелика из-за короткой области взаимодействия внешней низкочастотной накачки и оптической моды, а также малой степени взаимного перекрытия этих полей. Однако, электрооптические модуляторы, основанные на резонаторах типа модами типа шепчущей галереи (МШГ), позволяют обойти эти проблемы. В традиционных электрооптических модуляторах используются дополнительные резонаторы на микроволновый спектральный диапазон. При использовании микрорезонаторов типа МШГ этого не требуется. При этом можно обеспечить хороший уровень перекрытия между микроволновым и оптическим полем, а также низкий уровень потерь и высокую добротность в широком диапазоне длин волн [3]. Было показано, что можно локализовать микроволновое излучение при помощи металлического резонатора на поверхности оптического резонатора, чтобы добиться фазового синхронизма [6]. Этот метод также позволяет контролировать процесс модуляции, в том числе, почти полностью подавлять генерацию стоксовой компоненты и добиваться однополосной модуляции [7] с практически 100% эффективностью передачи энергии низкочастотного модулирующего поля в оптическую моду [8].

Электрооптические модуляторы на основе МШГ, сделанные из кристаллических материалов, таких как ниобат лития (LiNbO_3) и танталат лития (LiTaO_3), характеризуются широкой полосой пропускания от сотен килоггерц (в случае слабой связи) до гигагерц (сильная нагрузка), а также значительным электрооптическими коэффициентами. На основе таких электрооптических модуляторов можно создавать перестраиваемые и мультиполярные фильтры, резонансные электрооптические модуляторы, оптико-микроволновые преобразователи, оптоэлектронные микроволновые осцилляторы, параметрические частотные преобразователи.

Сравнивая традиционный электрооптический модулятор на бегущей волне и модулятор на основе микрорезонатора с МШГ, можно показать, что при

напряжении 3 В и сопротивлении 50 Ом, переключение в традиционном электрооптическом модуляторе достигается при мощности более 100 мВт, а в модуляторе из ниобата лития на основе МШГ с полосой 10 МГц можно получить насыщение уже при 2,5 мкВт, то есть при напряжении меньше 20 мВ [9,10]. Пример электрооптического модулятора, сделанного на основе МШГ, показан на рисунке 4.

(a) open copper cavity



(c) schematic of the setup

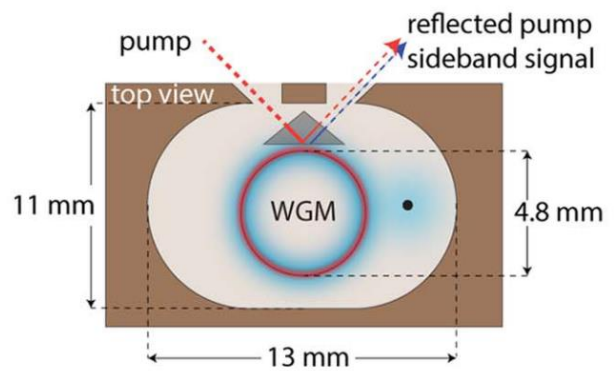


Рисунок 4. Слева фотография нижней части микроволнового резонатора с кремниевой призмой и резонатором типа МШГ. Справа схематичное изображение резонатора. Оптическая накачка связывается через призму с микрорезонатором типа МШГ. Иллюстрация взята из статьи [9].

Таким образом, мы кратко рассмотрели наиболее известные эффекты, которые можно получать в квадратично-нелинейных средах и их особенности, связанные с наблюдением их в оптических микрорезонаторах типа МШГ. В свою очередь кубично-нелинейные или керровские среды также имеют ряд характерных явлений, связанных с кубическим по полю откликом среды на внешнее воздействие. К таким эффектам относятся изменение эффективного показателя преломления или эффект Керра, эффект самофокусировки, перекрестная фазовая модуляция, генерация третьей гармоники и четырехволновое смешение.

1.5 Бистабильность мод нелинейного оптического высокодобротного микрорезонатора

Перед тем, как рассматривать отдельные оптические нелинейные эффекты, необходимо, вкратце поговорить о том, что происходит с оптическими модами в высокодобротных микрорезонаторах из материалов с керровской или кубической нелинейностью. Подробно этот вопрос рассмотрен в Главе 11 работы [11]. Здесь же мы приведем лишь основные результаты, по возможности сохранив и обозначения, совпадающие с монографией [11].

Снова обратимся к волновому уравнению (5) для нелинейно-оптической среды. Пусть поле моды имеет вид $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{2} (a(t)\mathbf{e}_m(\mathbf{r})e^{-ipt} + \text{к.с.})$, где p – частота гармонической накачки, близкая к собственной частоте моды микрорезонатора ω_m . Подставляя этот вид решения в волновое уравнение (5), домножая его на \mathbf{e}_m^* и интегрируя по всему объему, можно получить, отбросив члены второго порядка малости

$$\frac{\partial a}{\partial t} + (-i\Delta\omega - i\mu|a|^2 + \delta_0 + \delta_c)a = iF, \quad (11)$$

где $\mu = \frac{3\omega_m\chi^{(3)}V_{ef}}{8n^2V_{jj}}$, и $V_{jj} = \frac{(\int_V |e|^2 dV)^2}{\int_V |e|^4 dV}$, расстройка $\Delta\omega = p - \omega_m$ и собственные потери δ_0 . F – величина, учитывающая внешнюю накачку.

В стационарном режиме, при постоянной амплитуда и частоте накачки уравнение (11) описывает нелинейную амплитудно-частотную характеристику резонатора (АЧХ). График АЧХ для нелинейных систем хорошо известен в физике. Он обладает областью бистабильности. Чтобы это продемонстрировать, положим $\frac{\partial a}{\partial t} = 0$, а также домножим уравнение (11) на комплексно-сопряженное.

В результате получим

$$\mu^2 A^3 + 2\mu\Delta\omega A^2 + (\delta^2 + \Delta\omega^2)A - F^2 = 0, \quad (12)$$

где введено обозначение $A = |a|^2$ и все виды потерь обозначены одной величиной δ . Графики линейного и нелинейного резонанса приведены на рисунке 5.

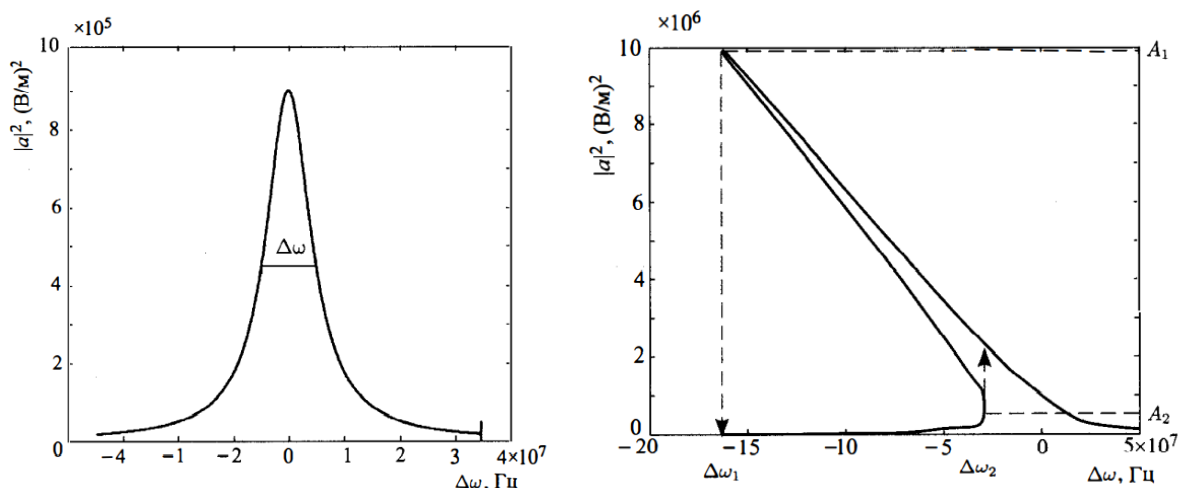


Рисунок 5. Амплитудно-частотные характеристики линейного (слева) и нелинейного (справа) оптического микрорезонатора при мощности, выше пороговой. Иллюстрация взята из монографии [11].

В отличие от линейного случая, при мощности больше пороговой, нелинейный микрорезонатор имеет два устойчивых, наблюдаемых в эксперименте, и одно неустойчивое решения, как это показано на рисунке 5. Резонансная кривая при наличии нелинейности принимает треугольный вид, зависящий от направления сканирования (перестройки) частоты. Устойчивые решения имеют вид $\Delta\omega = -\mu A \pm \sqrt{\frac{F^2}{A} - \delta^2}$. Помимо нахождения решений, анализируя уравнение (12), можно определить интервал частот, в котором находится участок бистабильности, а также пороговое значение интенсивности для наблюдения нелинейности. Подробнее эти и другие вопросы рассмотрены в [11].

1.6 Эффект Керра или квадратичный электрооптический эффект

Рассмотрим воздействие на систему с квадратичным откликом среды внешнего постоянного или низкочастотного электрического поля $\mathbf{E}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 e^{-i\Omega t} + \text{к.с.})$. Аналогично эффекту Поккельса диэлектрические свойства среды будут зависеть от приложенного внешнего поля и зависимость тензора ε можно разложить в ряд по полю, однако, в этой зависимости будет отсутствовать слагаемое, линейное по внешнему полю, из-за центральной симметрии кристалла. Таким образом, зависимость $\varepsilon(\mathbf{E}_0)$ будет иметь вид

$$\varepsilon(\omega, E_0) = \varepsilon^{(1)}(\omega) + \varepsilon^{(3)}(\omega + 2\Omega)\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0 + \dots \quad (13)$$

Электрооптический эффект Керра приводит к изменению значения показателя преломления оптического материала для обыкновенной и необыкновенной волн пропорционально квадрату напряжённости приложенного электрического поля. Если изначально среда была изотропной, то под воздействием внешнего поля за счет электрооптического эффекта Керра она становится анизотропной, возникает явление двулучепреломления в среде.

Достаточно интенсивный луч лазера за счет электрооптического эффекта Керра может вызвать заметное изменение показателя преломления среды. В свою очередь, изменение показателя преломления влияет на условия распространения самого лазерного луча и приводит к новому классу нелинейных оптических эффектов. Например, при распространении луча в среде, может возникать наведенное двулучепреломление, созданное самим лучом и влияющее на поляризацию распространяющегося луча. Свет с линейной и круговой поляризациями не меняют своего состояния поляризации, и, напротив, свет с эллиптической поляризацией испытывает поворот плоскости поляризации,

пропорциональный интенсивности света за счет электрооптического эффекта Керра.

1.7 Генерация третьей гармоники

Кубично-нелинейные среды, также, как и квадратично-нелинейные позволяют генерировать гармоники, в частности, третью гармонику. Механизм генерации третьей гармоники аналогичен механизму, описанному в разделе 1.1 с той лишь разницей, что требуется одновременное поглощение системой трех фотонов, чтобы перевести ее в возбужденное состояние с энергией $3\hbar\omega$. Релаксация системы из возбужденного состояния в основное с излучением одного фотона приводит к эмиссии света с частотой 3ω . Схематически описанный процесс показан на рисунке 6.

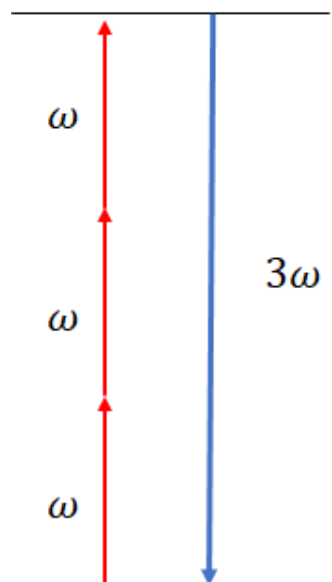


Рисунок 6. Схема процесса генерации третьей гармоники в кубично-нелинейной среде.

Этот же процесс можно описать через волновое уравнение и поляризованность среды и показать, что благодаря кубическому отклику среды появляются колебания на утроенной частоте.

Эффект генерации третьей гармоники наблюдался в оптических микрорезонаторах с МШГ наблюдался в кварцевых микротороидах [12], микрокольцах из нитрида кремния [13], а также в кварцевых микросферах [14]. При этом микрорезонатор с МШГ накачивается на основной частота, а третья гармоника соответствует возбуждаемым модам. Из-за малого размера резонатора дисперсия этих мод, вызванная геометрией структуры, оказывается достаточной, чтобы скомпенсировать хроматическую дисперсию материала резонатора.

Исследователи, занимающиеся изучением третьей гармоники, возбуждаемой в резонаторах типа МШГ, сталкиваются с проблемой наблюдения сигнала на утроенной частоте при помощи спадающего поля. Из-за разницы длины области затухания поля значительная часть сигнала на третьей гармонике испытывает сильную связь с полем накачки. Это ведет к снижению эффективности преобразования как третья степень величины нагруженной добротности для данной накачки [12]. Поэтому вместо того, чтобы выводить сигнал на третьей гармонике посредством волноводного элемента связи, используют метод рассеяния на поверхности, как это было сделано в работах [12,14]. Очевидно, что данный метод хорошо подходит для лабораторных экспериментов по наблюдению третьей гармоники, но мало пригоден для различных практических приложений. Одним из возможных путей решения является использование поляризационной дисперсии для разделения сигналов. Кроме того, можно предложить использовать волокна, оптимизированные для связи только на определенных частотах.

Оригинальное решение было предложено в работе [15], где в качестве элемента связи был использован волновод, который огибал поверхность микрорезонатора на протяжении небольшого сегмента окружности, как показано на рисунке 7. Изгиб, которым обладает такой элемент связи, приводит к тому,

что на определенных частотах наблюдается сильное подавление сигнала, в то время как на других частотах этот эффект отсутствует. Таким образом, можно подавить накачку и избежать снижения эффективности сигнала на утроенной частоте.

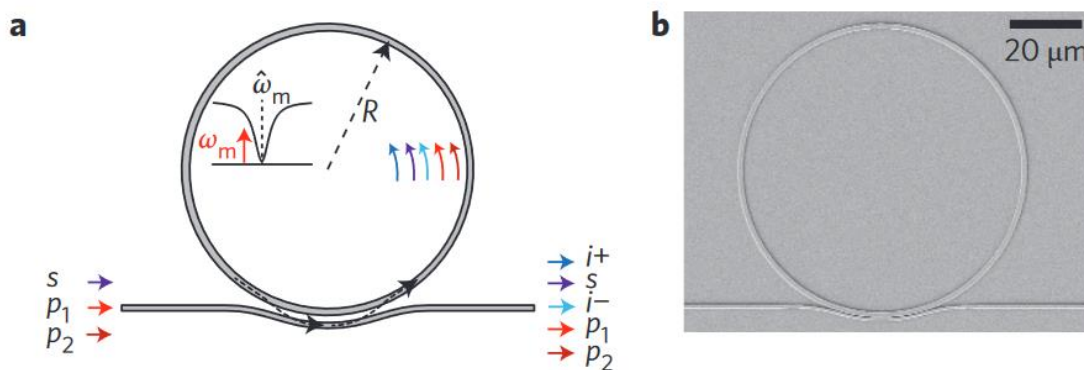


Рисунок 7. а) Схема микрорезонатора с изогнутым элементом связи. б) Фотография, полученная при помощи электронного сканирующего микроскопа, кольцевого микрорезонатора с радиусом 40мкм и изогнутым элементом связи. Иллюстрация взята из статьи [15].

1.8 Самофокусировка. Понятие солитона.

Тот факт, что нелинейные среды открывают широчайшие возможности для управления светом и воздействия на него, лучше всего можно проиллюстрировать на примере таких эффектов как самофокусировка лазерных пучков и самомодуляция лазерных импульсов. Для наблюдения этих эффектов необходима среда с кубической нелинейностью.

Самофокусировка – это эффект искажения волнового фронта, создаваемый самим световым пучком при прохождении через нелинейную среду. При распространении мощного светового пучка в нелинейной среде, в области локализации света меняется показатель преломления среды, причем это

изменение тем больше, чем интенсивнее световой пучок в данной конкретной точке пространства. Изменение показателя преломления среды ведет к изменению фазовой скорости для различных компонент светового пучка, а именно там, где показатель преломления становится больше, фазовая скорость пучка становится меньше, и наоборот. Так как для большинства материалов нелинейная добавка к показателю преломления среды вследствие кубической нелинейности положительна, то показатель преломления больше в центральной части пучка, чем на его периферии. Это ведет к формированию в среде своеобразной линзы, наведенной самим интенсивным лазерным пучком. На рисунке 8 приведена схема искажения волнового фронта пучка при явлении самофокусировки. Волновой фронт пучка искажается, как это было бы при наличии фокусирующей линзы, интенсивность света в центре становится все больше, что в конце концов, при отсутствии других эффектов, привело бы к коллапсу светового пучка, то есть его фокусировке в точку с огромной энергией.



Рисунок 8. Схема искажения волнового фронта светового пучка в процессе самофокусировки в кубично-нелинейной среде. Иллюстрация взята из работы [16].

Рассмотрим, как можно математически описать процесс самофокусировки. Показатель преломления кубично-нелинейной среды можно записать как $n = n_0 + \Delta n(I)$, где $\Delta n(I)$ – нелинейная добавка к показателю преломления. Так как среда имеет кубический отклик, то нелинейная добавка к показателю преломления будет зависеть от интенсивности электромагнитного поля. Тогда нелинейное волновое уравнение можно переписать как

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{[n_0 + \Delta n]^2 \mathbf{E}\} = 0 \quad (14)$$

Отклик среды считаем мгновенным, поэтому добавка к показателю преломления не будет зависеть от времени. Кроме того, будем считать, что амплитуда поля медленно меняется на характерных расстояниях и можно использовать приближение медленно меняющихся амплитуд и, в частности, пренебречь зависимостью огибающей от времени.

Введем замену переменных в виде $\xi = t - z/v_g$, где z – направление распространения пучка света, а v_g – его групповая скорость.

Пусть профиль поля имеет круговую симметрию, то есть его можно записать в виде $\mathbf{E} = \bar{E}(r, z, \xi) e^{ikz - i\omega t}$. Тогда волновое уравнение (14) принимает следующий вид

$$\left(i2k \frac{\partial}{\partial z} + \Delta_{\perp} \right) \bar{E} = -2k^2 \frac{\Delta n}{n_0} \bar{E} \quad (15)$$

И амплитуда, и фаза поля \bar{E} зависят от координат r, z, ξ . Можно выразить $\bar{E} = A e^{i\varphi}$ и получить следующие уравнения для амплитуды и фазы волны:

$$k \frac{\partial}{\partial z} A^2 = -\nabla_{\perp} (A^2 \nabla_{\perp} \varphi), \quad (16)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2k} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 - \frac{k}{2} \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A} + 2 \frac{\Delta n}{n_0} \right) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (16) описывает эволюцию интенсивности светового пучка, то есть A^2 , уравнение (17) определяет траекторию луча, то есть его фазу $\varphi(r, z, \xi)$. Разберем поподробнее уравнение (17). Первое слагаемое, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, описывает изменение волнового фронта по мере распространения пучка вдоль координаты z . Слагаемое $\frac{1}{2k} (\nabla_{\perp} \varphi)^2$ определяет изменение волнового фронта в поперечном направлении. Последний член в уравнении (17), $-\frac{k}{2} \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A} + 2 \frac{\Delta n}{n_0} \right)$, учитывает

влияние на волновой фронт пучка, как самофокусировки, $2 \frac{\Delta n}{n_0}$, так и дифракции, $\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A}$. Более подробно вывод уравнений (16)-(17) приведен в монографии [17].

Если в некоторой координате $z=z_0$ волновой фронт светового пучка был плоским, так что $\nabla_{\perp} \varphi = 0$, то из уравнения (17) следует, что при условии баланса между дифракцией и самофокусировкой, то есть если $-\frac{k}{2} \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A} + 2 \frac{\Delta n}{n_0} \right) = 0$, будет выполнено, что $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ при $z > z_0$. Рассмотрим этот процесс с точки зрения физики. Заметим, что при дифракции пучка искажение волнового фронта аналогично действию в среде дефокусирующей линзы, то есть центральные компоненты пучка распространяются с бóльшей фазовой скоростью, чем периферийные, при этом профиль пучка становится все шире по мере распространения. Иллюстрация искажения волнового фронта при дифракции показана на рисунке 9 (центральная строка). Таким образом, дифракция и самофокусировка оказывают противоположное действие на волновой фронт светового пучка, а значит, подбирая амплитуду и профиль пучка, можно добиться того, чтобы воздействие дифракции и самофокусировки было взаимоскомпенсировано, то есть выполнялось условие $-\frac{k}{2} \left(\frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A} + 2 \frac{\Delta n}{n_0} \right) = 0$. В этом случае отсутствует изменение профиля волнового фронта при распространении пучка вдоль оси z , волновой фронт остается плоским, а амплитудный профиль сохраняет исходную форму (см. рисунок 9, нижняя строка). Этот процесс называется *самоканализование* или *самозахватыванием пучка*, а получившийся пучок носит название *пространственный солитон*. Итак, *солитон* – это волна, которая распространяется в кубично-нелинейной среде с плоским фронтом и неизменным поперечным профилем. В англоязычной литературе процесс самозахватывания носит название *self-trapping*, а самозахватившийся пучок *self-trapped* или *soliton*.

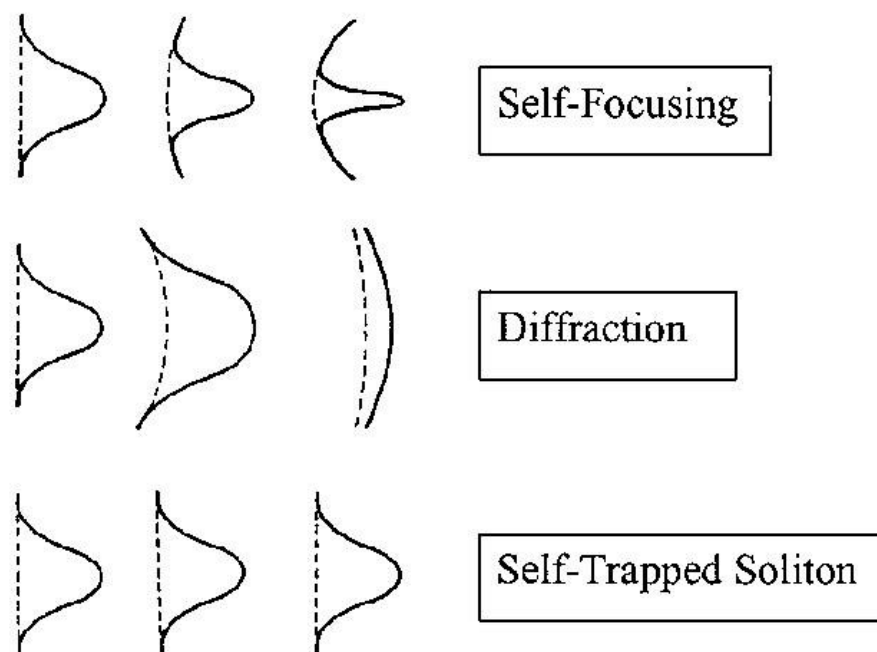


Рисунок 9. Схема искажения волнового фронта светового пучка в процессе самофокусировки (верхняя строка), дифракции (центральная строка) и самозахватывания пучка (нижняя строка) в кубично-нелинейной среде. Иллюстрация взята из работы [16].

Уникальное свойство солитонных решений в том, что сформировавшийся солитон может распространяться на значительные расстояния без заметного искажения формы, профиля пучка. За счет одновременного влияния дифракции и нелинейности в среде формируется своеобразный волноводный канал, по которому распространяется свет. Причем, формирование этого волноводного канала обусловлено именно присутствием в среде мощного светового пучка. То есть свет, попав в нелинейную среду сам оказывает на нее воздействие таким образом, что создает для себя волноводный канал, по которому он может распространяться без искажений.

1.9 Фазовая самомодуляция. Временной солитон.

До сих пор мы рассматривали непрерывный лазерный пучок, то есть создаваемый постоянной накачкой, а отклик среды считали мгновенным. Это позволило в уравнении (15) избавиться от частной производной по времени. Однако, схожий эффект можно продемонстрировать и для лазерных импульсов в кубично-нелинейной среде. Для удобства дальнейшего рассмотрения нелинейно-оптических эффектов в микрорезонаторах приведем распространения импульса в керровской (кубично-нелинейной) среде на примере сферического микрорезонатора [11].

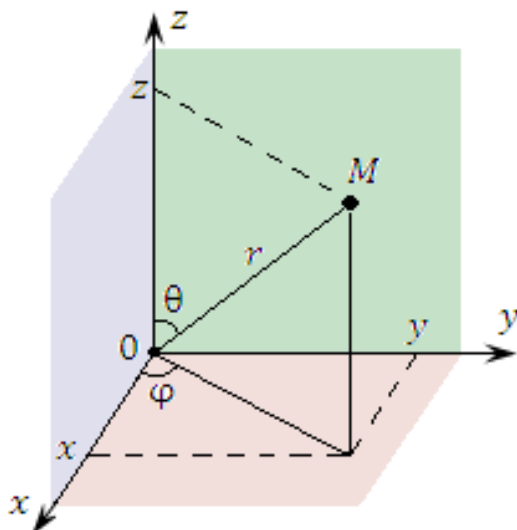


Рисунок 10. Взаимосоответствие прямоугольной декартовой и криволинейной сферической системы координат.

Будем считать, что длительность импульса меньше, чем величина, обратная области свободной дисперсии, расстоянию между соседними собственными модами микрорезонатора. Мы считаем, что свет распространяется в экваториальной плоскости прозрачной сферы из материала с керровской нелинейностью. Вместо пространственных координат (x, y, z) мы переходим к

сферическим пространственным координатам, то есть к тройке (r, φ, θ) (см. рисунок 10).

Так как решения для сферических микрорезонаторов лежат вблизи экватора сферы, то зависимость решения от полярного угла θ можно опустить и считать $\theta \approx \pi/2$. Направление распространения в данном случае будет выступать азимутальный угол φ с постоянной распространения $k_\varphi = m/a$, где a – радиус сферы, m – целое число [18].

Решение будем искать в виде $E(r, \varphi, \theta, t) = A(\varphi, t)F(\theta, r)e^{-i\omega t}$, тогда уравнение для медленно меняющихся амплитуд $A(\varphi, t)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial A(\varphi, t)}{\partial \varphi} = -i\beta A(\varphi, t), \quad (18)$$

где частотная зависимость для β имеет вид

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega - \omega_0)^2. \quad (19)$$

Каждая спектральная компонента огибающей импульса приобретает при распространении фазовый сдвиг, который зависит от частоты, а также от интенсивности света посредством нелинейной добавки.

Подставив частотную зависимость для β из уравнения (19) в уравнение для огибающей (18), выполнив обратное преобразование Фурье и учтя, что $\omega - \omega_0 = i \frac{\partial}{\partial t}$, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) A(\varphi, t) = \frac{i}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \frac{d^2 A(\varphi, t)}{dt^2} \quad (20)$$

Здесь введены следующие обозначения: групповая скорость, связанная с импульсом $v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1}$ и дисперсия групповой скорости (ДГС), связанной с импульсом $\beta_2 = \frac{d^2\beta}{d\omega^2}$. Остановимся поподробнее на последнем параметре. Дисперсия групповой скорости импульса показывает, как меняется фазовая скорость частотных компонент импульса от их частоты. Это параметр аналогичен дифракции, которая действует лазерный пучок в кубично-нелинейной среде в рассмотренном выше пространственном случае. Дисперсия приводит к тому, что разные частотные компоненты импульса бегут с разной фазовой скоростью и, тем самым, начальный профиль пучка меняется, уширяясь. Однако, в отличие от дифракции знак дисперсии групповых скоростей может быть разным в зависимости рассматриваемого частотного диапазона. Знак дисперсии групповых скоростей определяет, какие спектральные компоненты импульса окажутся вблизи переднего фронта импульса, а какие – вблизи заднего фронта. Эта зависимость от знака накладывает определенные ограничения и на возможности получения самозахватывающихся решений, ведь как уже упоминалось выше, для большинства материалов знак нелинейной добавки, возникающей в керровской среде, положителен.

Во многих работах, как статьях, так и монографиях вместо дисперсии групповых скоростей можно встретить такую величину как дисперсионный параметр. Дисперсионный параметр выражается через дисперсию групповых скоростей как

$$D_2 = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = - \frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (21)$$

Размерность величины D_2 пс/(км·нм), то есть дисперсионный параметр показывает, какой набег фазы в пикосекундах получает лазерный импульс пока проходит расстояние, равное 1 километру на частоте, соответствующей определенной длине волны.

Отдельно надо подчеркнуть, что знаки дисперсии групповых скоростей и дисперсионного параметра противоположны по определению (см. формулу (21)). Это надо помнить при чтении научных статей и монографий, так как обе величины используются одинаково часто, но для одного и того же процесса они должны иметь разные знаки.

Различают три вида дисперсии групповых скоростей, в зависимости от знака β_2 . Если в рассматриваемом диапазоне длин волн $\beta_2 > 0$ (то есть, $D_2 < 0$), то показатель преломления увеличивается с ростом частоты, и дисперсия называется *нормальной*. Если с ростом частоты показатель преломления уменьшается, то дисперсия называется *аномальной* и $\beta_2 < 0$ (то есть, $D_2 > 0$). Из непрерывности физической величины очевидно следует, что существует длина волны, для которой дисперсия групповых скоростей будет равна нулю, то есть $\beta_2 = D_2 = 0$. Этот случай очень интересен, потому что в этом случае не возникает смещения собственных частот микрорезонатора, обусловленного дисперсией, и набор собственных частот будет эквидистантным. Причем, естественно, что интерес представляет не только точное значение частоты, соответствующее нулевой дисперсии групповых, но и близлежащий спектральный диапазон, в котором дисперсией групповых скоростей в данном материале можно будет пренебречь.

Уравнение (20), полученное для огибающей импульса, учитывает влияние дисперсии, но не учитывает действие нелинейности. Чтобы аккуратно получить уравнение, учитывающее вклад нелинейности, нужно представить частотную зависимость в виде

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{d\beta}{d|\mathbf{E}|^2} |\mathbf{E}|^2 \quad (22)$$

Последнее слагаемое в разложении (22) определяет эффект, называемый *фазовой самомодуляцией*. Это явление

обусловлено нелинейностью среды и приводит к изменению фазовой скорости различных спектральных компонент импульса.

Подставив такой вид зависимости в уравнение (18) для случая нелинейной керровской среды с дисперсией получим

$$i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) A(\varphi, t) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} \frac{d^2 A(\varphi, t)}{dt^2} + \frac{k \Delta n}{2n} I A(\varphi, t). \quad (23)$$

Здесь I – интенсивность света, а $\Delta n I$ – нелинейная добавка к показателю преломления n вследствие керровской нелинейности. Для того, чтобы решение уравнения (23) имело постоянный профиль, необходимо, чтобы правая часть была тождественно равна 0. Следовательно, для компенсации воздействия дисперсии на лазерный импульс нелинейная добавка к показателю преломления должна иметь знак, противоположный знаку дисперсии групповых скоростей. Так как для большинства материалов нелинейная добавка $\Delta n > 0$, то ДГС $\beta_2 = \frac{d^2 \beta}{d\omega^2} < 0$, то есть дисперсия должна быть аномальной. При достижении баланса между дисперсией и самомодуляцией, формируется импульс с огибающей в виде солитона, так называемый *временной солитон*.

Таким образом, в микрорезонаторе формируется короткий импульс света, временной солитон, который циркулирует по окружности микрорезонатора в плоскости экватора без изменения профиля импульса.

Отметим также, что так как фазовая самомодуляция приводит к частотному сдвигу, зависящему от мощности сигнала, то это меняет резонансную кривую резонатора типа МШГ в присутствии данного мощного лазерного сигнала. При высоких мощностях накачки можно наблюдать эффект бистабильности мод резонатора МШГ по отношению к оптической накачке, то есть такая система будет иметь два устойчивых решения и выбор того или иного решения зависит от мощности внешнего сигнала.

1.10 Перекрестная фазовая модуляция или фазовая кросс-модуляция

Фазовая кросс-модуляция (ФКМ) – это нелинейный эффект, при котором две и более волны, распространяющиеся по световоду, влияют на показатель преломления среды. То есть эффективный показатель преломления любой из этих волн зависит не только от интенсивности самой этой волны, но и от интенсивности других волн, распространяющихся с ней совместно. В англоязычной литературе ФКМ обозначается как XPM- cross-phase modulation.

ФКМ всегда сопровождается фазовой самомодуляцией, так как, естественно, каждая волна создает изменения показателя преломления среды не только для других волн, но и для самой себя.

Рассмотрим распространение по световоду двух волн с разными частотами, но с одинаковыми поляризациями. В квазимонохроматическом приближении суммарное электрическое поле может быть представлено в виде $E = \frac{1}{2} \vec{\chi} (E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + \text{к.с.})$. Если пренебречь дисперсией тензора кубической нелинейности, то есть считать, что компоненты тензора одинаковы для обеих волн, хотя они и имеют различные частоты, то можно показать, что в волновом уравнении будут присутствовать следующие нелинейные добавки к показателю преломления:

$$\Delta n_1 = n_1(|E_1|^2 + 2|E_2|^2), \quad \Delta n_2 = n_2(|E_2|^2 + 2|E_1|^2) \quad (24)$$

Волны, распространяясь по световоду, приобретают нелинейный набег фазы:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{nl} &= \frac{\omega_1 z}{c} \Delta n_1 = \frac{\omega_1 z}{c} n_1 (|E_1|^2 + 2|E_2|^2), \\ \Phi_2^{nl} &= \frac{\omega_2 z}{c} \Delta n_2 = \frac{\omega_2 z}{c} n_2 (|E_2|^2 + 2|E_1|^2). \end{aligned} \quad (25)$$

Первое слагаемое в правой части в выражениях (25) отвечает за эффект фазовой самомодуляции, второе слагаемое возникает из-за фазовой модуляции одной волны другой волной, распространяющейся вместе с ней, и отвечает за ФКМ. Вследствие интерференции двух полей в правой части перед вторыми слагаемыми стоит коэффициент 2, который показывает, что ФКМ в 2 раза эффективнее, чем фазовая самомодуляция при той же интенсивности для волн с одинаковыми поляризациями, но разными частотами.

Если в световоде одновременно распространяются две волны, одна из которых является менее мощной, а другая более мощной, то больший нелинейный фазовый набег реализуется для менее мощной волны из-за ФКМ, в то время как более мощная волна испытывает только фазовую самомодуляцию, эффект которой в 2 раза меньше, чем от ФКМ.

Отметим, что если в световоде распространяются волны одной частоты, но разной поляризации (с амплитудами E_{p1} и E_{p2} , соответственно), то нелинейный набег фазы за счет фазовой кросс-модуляции будет иметь вид

$$\begin{aligned}\Phi_{p1}^{nl} &= \frac{\omega_1 z}{c} \Delta n_{p1} = \frac{\omega_1 z}{c} n_1 \left(|E_{p1}|^2 + \frac{2}{3} |E_{p2}|^2 \right), \\ \Phi_{p2}^{nl} &= \frac{\omega_2 z}{c} \Delta n_{p2} = \frac{\omega_2 z}{c} n_2 \left(|E_{p2}|^2 + \frac{2}{3} |E_{p1}|^2 \right).\end{aligned}\tag{26}$$

То есть влияние волны с другой поляризацией учитывается с коэффициентом $2/3$.

1.11 Четырехволновое смешение

Четырехволновое смешение (ЧВС) – это нелинейный эффект, определяемый керровской нелинейностью, при котором в нелинейном кристалле происходит взаимодействие волн четырех различных частот: $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, или $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$.

В терминах квантовой механики четырехволновое смешение описывается как уничтожение фотонов одной частоты и рождение фотонов другой частоты, причем сохраняются энергия и импульс.

Соотношение частот $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ соответствует случаю передачи энергии трех фотонов одному фотону. Это аналогично генерации третьей гармоники. Однако при таком процессе довольно трудно обеспечить условие фазового синхронизма (закон сохранения импульса) и, следовательно, получить высокую эффективность преобразования.

Условие $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3$ соответствует случаю уничтожения двух фотонов с частотами ω_1 и ω_2 и одновременного рождения двух фотонов с частотами ω_3 и ω_4 . В этом случае условие фазового синхронизма выполнить проще. Этот процесс активно используется для генерации оптических гребенок в микрорезонаторах, которые будут подробно рассмотрены в Разделе 2 данного пособия.

2. Оптические частотные гребенки

2.1 Генерация ОЧГ при помощи фемтосекундных лазеров с синхронизацией мод

В последние годы исследование нелинейных явлений в микрорезонаторах привлекает значительное внимание еще и в связи с повышенным интересом к методам генерации оптических частотных гребенок (ОЧГ). ОЧГ служат своеобразной линейкой для высокоточного измерения частоты сигнала (см. Рис. 11).



Рисунок 11. Оптическая частотная гребенка как высокоточная «линейка» для измерения частот сигналов.

Точность физических измерений имеет принципиальное значение, когда мы говорим, например, об определении абсолютных значений фундаментальных физических величин. Кроме того, не раз в истории физики небольшие расхождения между результатами измерений и теоретическими предсказаниями требовали пересмотра всей теоретической модели и приводили к крупным открытиям в фундаментальной физике.

Время и частота – это величины, которые в настоящее время могут быть измерены с наибольшей точностью. Однако, до XVI века у ученых не было такого необходимого для экспериментов прибора как часы. Галилео Галилей, проводя свои опыты, использовал собственный пульс, чтобы измерять отрезки времени. И именно он обратил внимание, что период колебания маятника не зависит ни от массы, ни от формы груза, а лишь от длины нити, на которой он подвешен. Это свойство маятника позволило затем использовать его для

измерения равных отрезков времени. В 1637 году Г. Галилей предложил идею маятниковых часов со спусковым механизмом, позволяющим равномерно расходовать энергию, запасенную в пружине или гире. Независимо и практически одновременно с Галилеем Христиан Гюйгенс также предложил модель часов с маятником. Начиная с этого времени, часы постоянно совершенствовались и точность их измерений повышалась. Более того, со временем для точного измерения таких величин как длина или электрическое напряжение стали использовать метод преобразования их в частоту. Для измерения частоты необходимо произвести подсчет числа циклов за определенный интервал времени, поэтому такая методика устойчива ко многим видам шумов.

Для высокоточных измерений частоты современная физика предлагает использовать процессы в атомах и молекулах, в частности, переходы между уровнями. Энергия перехода между уровнями в атомах и молекулах, а, следовательно, и его частота, строго фиксирована и определяется строением энергетических уровней вещества. Этот факт лежит в основе так называемых атомных часов, высокостабильного источника, излучающего на определенной частоте. Известны атомные часы на основе атомов цезия, рубидия, а также молекул водорода, йода, метана.

Высокоточные измерения времени (частоты) необходимы не только для научных задач, без них невозможно функционирование систем спутниковой связи, навигации, наземных телекоммуникационных систем и т.д. Однако, возможности атомных часов ограничены системой энергетических уровней атомов и молекул. Для дальнейшего увеличения точности измерения времени необходимо было создать искусственные атомные часы с «маятником» в виде атома или молекулы, колеблющейся на оптической частоте.

Такая возможность появилась с развитием фемтосекундных лазеров и создания на их основе методов генерации оптических частотных гребенок. В 2005 году Нобелевская премия по физике была присуждена Теодору В. Хэншу и Джону Л. Холлу (см. Рис. 12) "за вклад в развитие основанной на лазерах точной

спектроскопии, включая технику прецизионного расчёта светового сдвига в оптических стандартах частоты (оптических гребёнок)".



Теодор Вольфганг Хэнш



Джон Льюис Холл

Рисунок 12. Т.В. Хэнш и Дж.Л. Холл, лауреаты Нобелевской премии по физике 2005 года.

Принцип генерации оптических частотных гребенок при помощи фемтосекундных лазеров показан на рисунке 13 и подробно описан, например, в Нобелевской лекции Теодора Хэнша [19].

В резонаторе фемтосекундного лазера, работающего в режиме синхронизации мод, циркулирует короткий световой импульс в форме солитона. После каждого прохода по резонатору ослабленная копия светового импульса выходит из системы, так что лазер излучает строго регулярную последовательность сверхкоротких импульсов. Регулярность последовательности в данном случае определяется за счет постоянства геометрических размеров резонатора, его высокой добротности, и неизменности длины оптического пути светового импульса. Спектр одиночного импульса, вышедшего из резонатора, будет иметь довольно сложную форму. Однако, у регулярной последовательности импульсов частотный спектр будет представлять собой набор эквидистантных спектральных линий, так называемую

оптическую гребенку, (см. рисунок 13). Математически можно описать идеальную периодическую последовательность импульсов с помощью ряда Фурье и тогда спектральные компоненты оптической частотной гребенки будут соответствовать элементам данного ряда.

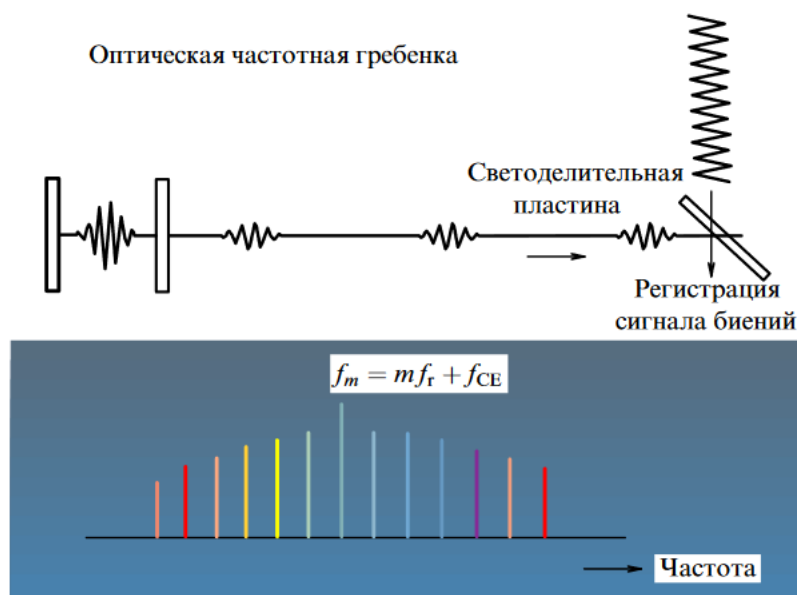


Рисунок 13. Схема генерации фемтосекундной лазерной частотной гребенки. Иллюстрация взята из работы [19].

Далее приведем цитату из нобелевской лекции Т.В. Хэнша [19]: «Интервал между двумя соседними модами или спектральными компонентами гребенки точно равен частоте повторения f_r . Это соотношение остается в силе, даже если импульсы цуга не являются идентичными копиями, но при этом имеется (воспроизводимый) сдвиг фазы «несущей» волны электромагнитного поля относительно его огибающей от импульса к импульсу. Подобные сдвиги фазы неизбежно возникают в реальном лазере из-за дисперсии резонатора. Вследствие этого вся гребенка сдвигается относительно спектра целых гармоник частоты повторения f_r на частоту расстройки между несущей и огибающей f_{CE} по модулю 2π равной полному сдвигу фазы за интервал между импульсами. Частота спектральной компоненты гребенки, соответствующей моде с номером m , при этом определяется выражением $f_m = m f_r + f_{CE}$.

Подобная частотная гребенка действует как линейка в пространстве частот, которую можно использовать для измерения больших интервалов между различными оптическими частотами f в терминах частоты повторения импульсов. В случае, когда эти две частоты представляют собой известные кратные или дробные части одной и той же лазерной частоты f , такое измерение позволяет определить саму частоту f . При известной частоте повторения f_r сигнал биений, формируемый полем известной оптической частоты f и ближайшей спектральной компонентой частотной гребенки, позволяет определить ранее неизвестную частоту расстройки f_{CE} . Зная две радиочастоты f_r и f_{CE} и целое число, соответствующее номеру моды, мы можем рассчитать частоту любой спектральной компоненты гребенки.»

Подчеркнем еще раз, что речь идет именно об определении абсолютного значения частоты для компонент оптической частотной гребенки. Именно разработка Т.В. Хэншем и Дж.Л. Холлом очень красивого и простого метода определения абсолютных значений частот в оптической частотной гребенке существенно продвинула вперед исследования в области высокоточных измерений частоты. «Кратные или дробные части одной и той же лазерной частоты», упоминаемые в лекции Хэнша, могут быть, например, частотой и ее удвоенной величиной, генерируемых одной и той же оптической гребенкой.

Разберемся поподробнее в идее Т.В. Хэнша и Дж.Л. Холла. На рисунке 14 приведена схема, иллюстрирующая предложенный метод. Необходимо сгенерировать так называемую октавную оптическую частотную гребенку, то есть гребенку, в которой будет присутствовать как некоторая частота $n\omega_r + \omega_0$, так и удвоенная $2n\omega_r + \omega_0$. Здесь частота ω_0 соответствует частоте расстройки f_{CE} . Затем, необходимо выделить частоту $n\omega_r + \omega_0$, при помощи квадратично-нелинейного кристалла сгенерировать ее удвоенную частоту, $2n\omega_r + 2\omega_0$, и совместить полученный сигнал с компонентой гребенки с номером $2n$ и с частотой, $2n\omega_r + \omega_0$, полученный из той же самой октавной гребенки.

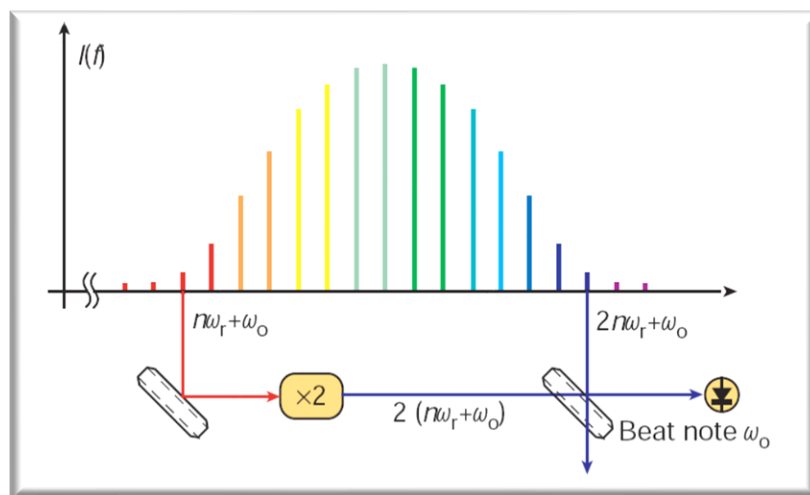


Рисунок 14. Схема метода определения абсолютных значений частот в октавной оптической частотной гребенке.

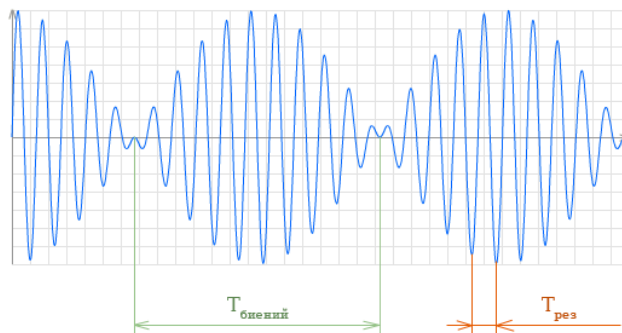


Рисунок 15. Интерференция двух сигналов с близкой частотой с формированием картины биений.

В результате интерференции можно ожидать возникновения картины биений (рис. 15), которая позволяет определить как сумму, так и разность интерферирующих частот. В частности, интерференция частот $2n\omega_r + 2\omega_0$ и $2n\omega_r + \omega_0$ позволяет из периода биений $T_{\text{биений}}$ определить абсолютное значение частоты ω_0 , а следовательно, и частоту расстройки f_{CE} . «Коль скоро эту частоту можно измерить, появляется возможность управлять ее значением, например, путем подстройки дисперсии лазерного резонатора или просто путем изменения мощности накачки. Можно даже сделать f_{CE} равной нулю, так что частоты

спектральных компонент гребенки окажутся точно равными целым кратным лазерной частоты повторения f_r .» [19]

«Синтезаторы частотных гребенок действуют так, как если бы у нас имелось несколько сотен тысяч сверхстабильных, точно настроенных и одновременно работающих лазеров. Путем нелинейной генерации суммарной и разностной частоты такие системы позволяют выполнять высокоточное измерение любой частоты от радио- до ближнего ультрафиолетового диапазона. Они служат тем часовым механизмом оптических атомных часов, который так долго искали ученые.» [19]

2.2 Генерация ОЧГ в нелинейных оптических микрорезонаторах

Повсеместный интерес к оптическим частотным гребенкам и их широкое применение в различных областях не могли не вызвать интерес к ним специалистов, работающих в области оптических микрорезонаторов с гигантской добротностью. Очевидным преимуществом оптических микрорезонаторов по сравнению с фемтосекундными лазерами являются их габариты. На рисунке 16 приведены две иллюстрации, одна из которых (слева) изображает фемтосекундный лазер для генерации оптических гребенок фирмы MenloSystems, а справа – изображение нескольких планарных интегральных микрорезонаторов с характерными размерами порядка 100 мкм, которые также могут быть использованы для генерации оптических частотных гребенок.

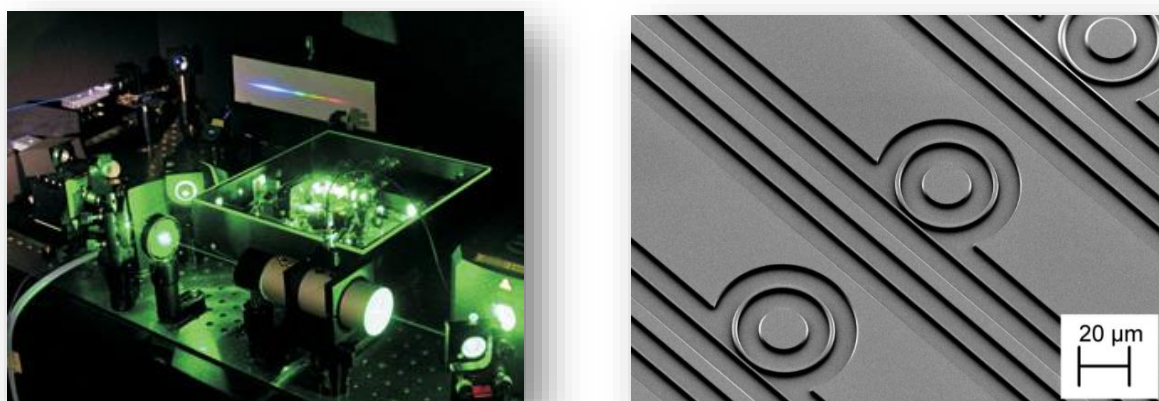


Рисунок 16. Слева: фотография установки фемтосекундного лазера, имеющего размер порядка 1 метра. Справа: фотография изготовленных интегральных микрорезонаторов, размер каждого из резонаторов порядка 100 мкм.

Необходимо сразу же отметить, что механизм генерации оптических гребенок при помощи микрорезонаторов не является простым переносом

разработанной методики на новый тип резонатора, но представляет собой совершенно другой метод, развитый именно для данного типа устройств. Разберемся поподробнее, как же можно получать оптические частотные гребенки в микрорезонаторах с гигантской добротностью.

В 2007 году было показано, что оптические частотные гребенки можно генерировать при помощи высокодобротных микрорезонаторов за счет нелинейного четырехволнового взаимодействия (смещения), который может быть реализован в средах с керровской нелинейностью [20].

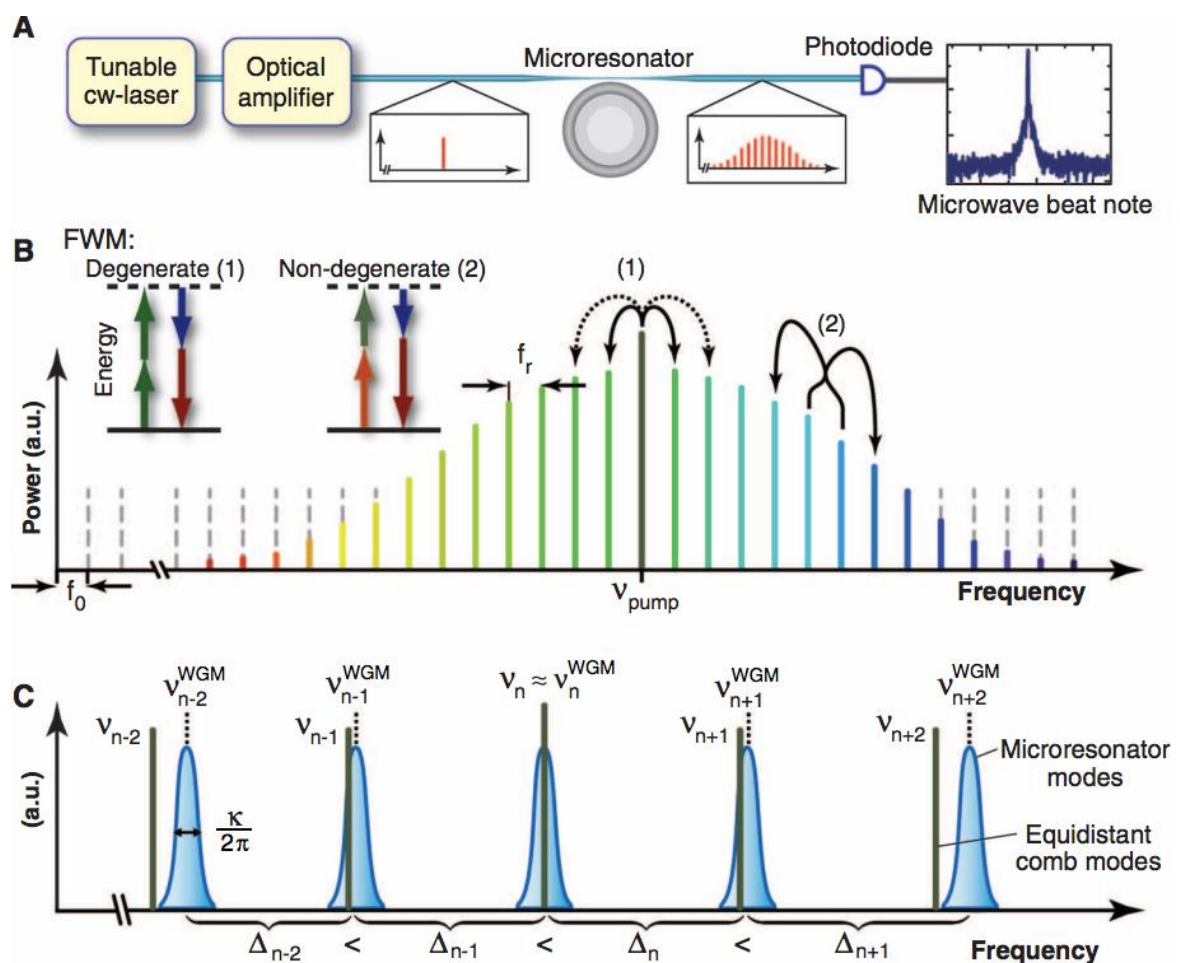


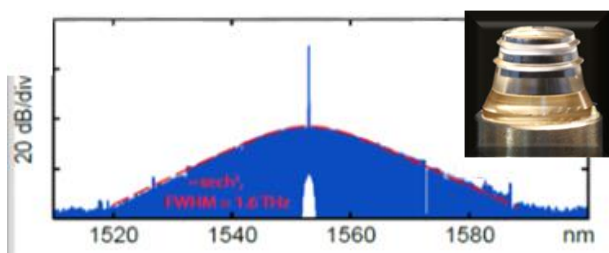
Рисунок 17. Процесс генерации ОЧГ при помощи оптических микрорезонаторов с МШГ. Иллюстрация взята из статьи [21].

Процесс генерации ОЧГ в микрорезонаторах проиллюстрирован на рис. 17. Оптический высокодобротный микрорезонатор из материала с керровской нелинейностью накачивается на частоте ν_{pump} и в микрорезонаторе

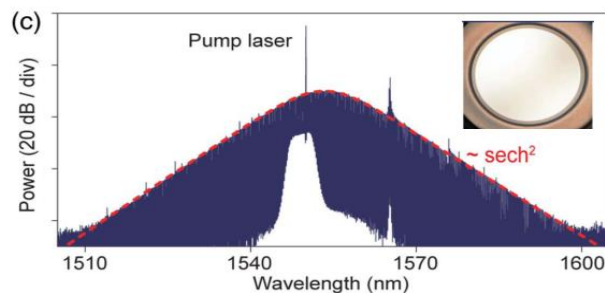
возбуждается мода на частоте накачки. За счет вырожденного процесса четырехволнового смешения из двух фотонов накачки образуются два фотона с разными частотами, которые отстоят от частоты накачки на равные спектральные промежутки (см. рисунок 17В). Процесс называется вырожденным, так как в нем участвуют две одинаковые частоты, два фотона накачки. За счет описанного процесса в микрорезонаторе возбуждаются сигналы на трех частотах, частоте накачки и стоксова и антистоксова его компоненты. Далее уже эти три частоты могут принимать участие в процессе четырехволнового смешения. В частности, две частоты, уже возбужденные в микрорезонаторе дают еще две новые частоты. Такой процесс будет уже невырожденным, так как все четыре частоты будут различны. Таким образом происходит заполнение оптической гребенки, причем физика процесса генерации ОЧГ обеспечивает эквидистантность частот.

Надо отметить, что из-за дисперсии мод микрорезонатора не все частоты сгенерированной ОЧГ будут попадать в спектральную область собственных мод микрорезонатора, а следовательно, часть мод будет испытывать сильное затухание. Эта особенность показана на рисунке 17С, где частоты ОЧГ ν_{n+2} и ν_{n-2} не попадают в области существования мод микрорезонатора. Чем сильнее дисперсия групповых скоростей в материале в данном спектральном диапазоне, тем более редкой будет сгенерированная ОЧГ. Именно поэтому особый интерес вызывают области нулевой дисперсии групповых скоростей материалов, в которых частоты ОЧГ будут легко согласовываться с собственными модами микрорезонаторов.

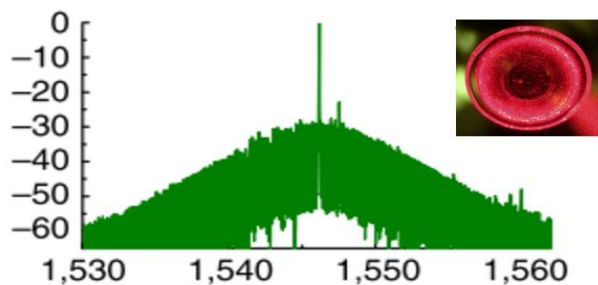
ОЧГ были продемонстрированы в оптических высокочастотных микрорезонаторах из самых различных материалов и с самыми различными геометриями (см. рисунок 18).



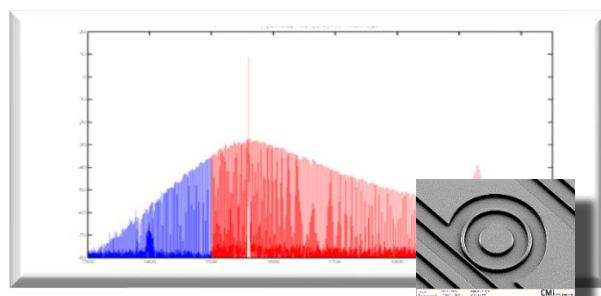
а)



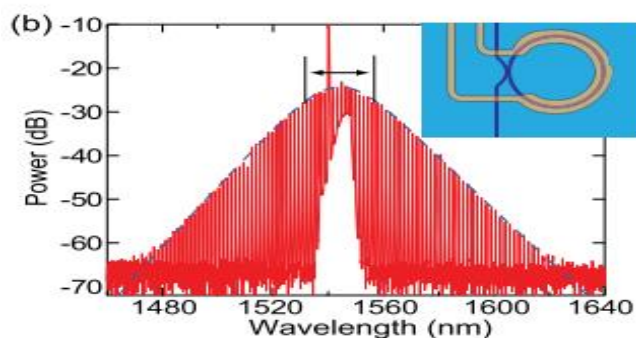
б)



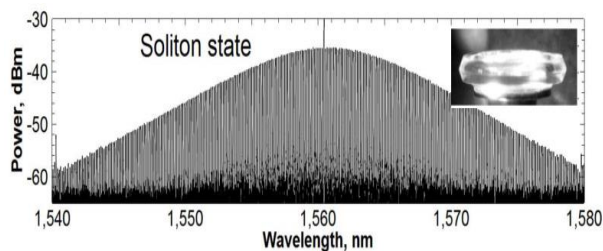
в)



г)



д)



е)

Рисунок 18. Примеры ОЧГ, сгенерированных в оптических микрорезонаторах с МШГ. Иллюстрации взяты из статей а) [22], б) [23], в) [24], г) [25], д) [26], е) [27].

Так как сигнал на частоте оптической накачки как правило гораздо сильнее, чем все остальные частоты в ОЧГ, то часто при анализе полученной гребенки его вырезают при помощи частотного фильтра.

Наименьшим уровнем фазовых шумов обладают когерентные частотные гребенки, имеющие во временном представлении вид диссипативных временных солитонов, образующихся при двойном балансе нелинейности и дисперсии с

одной стороны, и потерь и накачки с другой. Основной методикой генерации временных диссипативных солитонов в микрорезонаторах является метод сканирования частоты, когда частота накачки плавно меняется вблизи резонансной частоты моды резонатора. Схема генерации показана на рисунке 19.

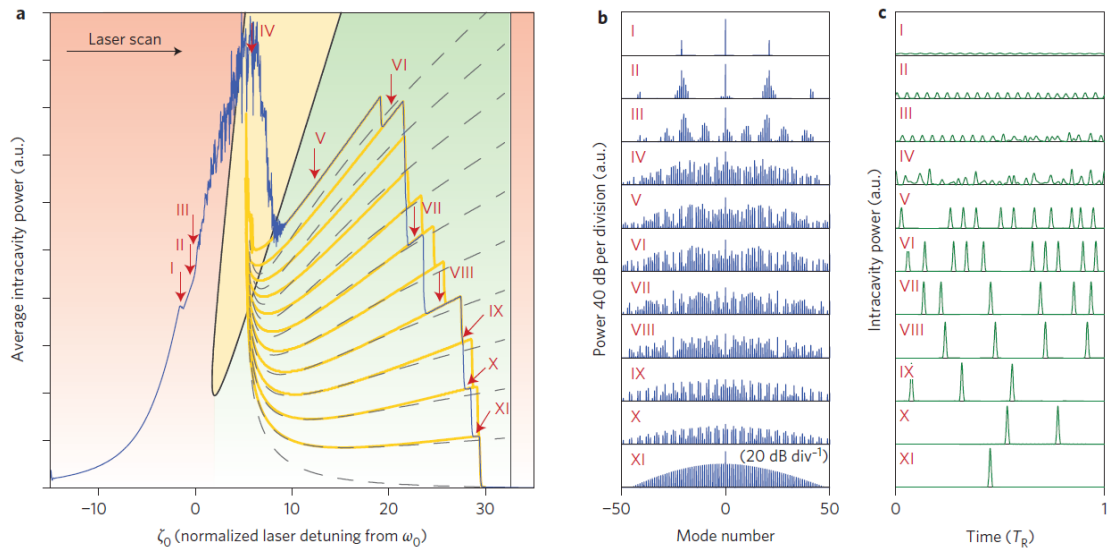


Рисунок 19. Схема генерации ОЧГ в высокодобротных оптических микрорезонаторах методом сканирования частоты. Иллюстрация взята из статьи [22].

На левой панели рисунка 19 приведена зависимость средней мощности внутри микрорезонатора в зависимости от частоты накачки. На оси абсцисс частота накачки отложена в виде отстройки от центральной частоты, резонансной частоты моды резонатора. По мере увеличения частоты внешней накачки и приближения ее к собственной частоте сначала можно видеть характерную зависимость, которая напоминает собой левый край типичной резонансной кривой. Римской цифрой I обозначен момент, когда за счет вырожденного процесса четырехволнового взаимодействия из двух фотонов частоты накачки образуются две боковые линии частот. На средней и правой панелях на рисунке 19 показаны соответственно частотная (синие линии спектров) и временная (зеленые линии) зависимости для каждого их процессов.

В частности, для процесса, обозначенного цифрой I, временная зависимость для сигнала внутри микрорезонатора представляет собой кноидальные волны.

Далее, по мере увеличения частоты накачки (процессы, обозначенные на рисунке 19 цифрами II и III) происходит каскадное размножение частот, при котором появляются дополнительные спектральные компоненты. В резонаторе при этом можно наблюдать периодические оптические структуры (на правой панели рисунка 19). Эти процессы сопровождаются постепенным нарастанием мощности сигнала, циркулирующего в резонаторе. Дальнейшее каскадное размножение частот приводит к хаосу: фазовое распределение частот становится хаотическим, а также импульсы на временном распределении становятся хаотическими. При этом мощность достигает своего пикового значения (см. процесс, обозначенный на рисунке 19 цифрой IV), а затем резко падает.

В процессе резкого падения мощности происходит захват солитона, обозначенный на рисунке 19 цифрой V. При этом появляются уединенные волны в импульсах, солитонные импульсы. Частотный спектр при этом имеет разные мощности на различных частотах и огибающая этих частот достаточно неравномерна. Это соответствует существованию в резонаторе набора солитонных импульсов.

Дальнейшая перестройка частоты приводит к скачкообразному уменьшению числа солитонов в резонаторе и постепенному сглаживанию огибающей частотного спектра, что проиллюстрировано обозначениями VI-X. В конце концов, в микрорезонаторе остается только один солитон, частотный спектр которого как раз и имеет вид ОЧГ (обозначен на рисунке 19 цифрой XI).

Затем, при слишком большой отстройке частот солитон пропадает и остается лишь фон, что соответствует падению мощности интенсивности в микрорезонаторе до нуля.

Подчеркнем еще раз, для формирования солитонного импульса в микрорезонаторе необходимо, чтобы среда резонатора обладала нелинейностью. Как правило, используется керровская нелинейность. Как уже говорилось ранее, в большинстве материалов знак нелинейной добавки к показателю преломления

в керровских средах положителен, поэтому для генерации солитонов приходится использовать аномальную дисперсию групповых скоростей (дисперсионный параметр $D_2 > 0$, $\frac{d^2\beta}{d\omega^2} < 0$). Такой режим дисперсии будет реализовываться лишь для определенного диапазона длин волн или частот накачки, что ограничивает возможности для генерации ОЧГ.

Одним из способов расширить область генерации солитонов является использование нормальной дисперсии групповых скоростей. При нормальной дисперсии групповых скоростей, тоже возможны устойчивые решения, но влияние нелинейности, нелинейная добавка к показателю преломления, в этом случае должно быть со знаком минус, то есть $n_{nl} = n - \Delta n(I)$. Важно подчеркнуть, что смена знака может быть связана не с выбором другой среды, но с выбором другого решения, а именно решения в виде темного солитона. На рисунке 20 приведено типичное распределение амплитуды для решения в виде *темного солитона*. Решение представляет собой провал, ультракороткий импульс, на ненулевом постоянном фоне.

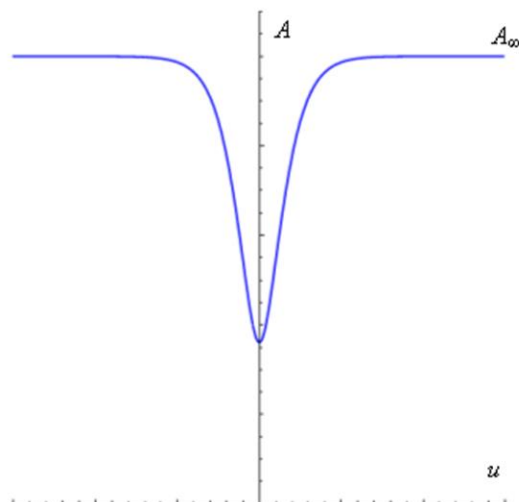


Рисунок 20. Профиль решения в виде темного солитона.

Возможность генерации оптических импульсов в микрорезонаторах в области нормальной дисперсии групповых скоростей в форме темных солитонов было предсказано теоретически в 2015 году [28]. Интерес к такого рода

решениям вызван тем, что в отличие от аномальной ДГС, нормальная ДГС наблюдается в средах в широком диапазоне длин волн в видимом и ближнем ИК диапазонах.

Регулярная последовательность ультракоротких импульсов, темных солитонов, формирует решение, которое также можно рассматривать как последовательность широких прямоугольных импульсов или светлых солитонов с плоской вершиной. Такие решения называются «платиконы» (в англоязычной литературе используются такие термины как *platicons* или, реже, *flat-top pulses*).

Для генерации платиконов не подходит метод, пригодный для возбуждения светлого солитона, так как такого типа решений отсутствует модуляционная неустойчивость, которая приводила к хаотическому фазовому распределению, из которого в последствии выделялись светлые солитонные импульсы.

Один из методов генерации платиконов: двухчастотная или амплитудно-модулированная накачка. На рисунке 21 приведен график зависимости средней мощности поля в микрорезонаторе в зависимости от величины частотной отстройки накачки для разной глубины амплитудной модуляции сигнала и разной величины мощности накачки. Видно, что при малой величине амплитудной модуляции накачки ϵ (черная линия), не происходит захвата решения (появления горизонтального участка графика мощности от отстройки частот), а мощность нарастает и затем падает до 0 при слишком большой отстройке. Дальнейшее повышение глубины модуляции ведет сначала к появлению небольшой области генерации платиконов (красная линия на рисунке 21), а затем и к значительному расширению диапазона, горизонтального участка на графике (см. синюю линию для $\epsilon=0.25$).

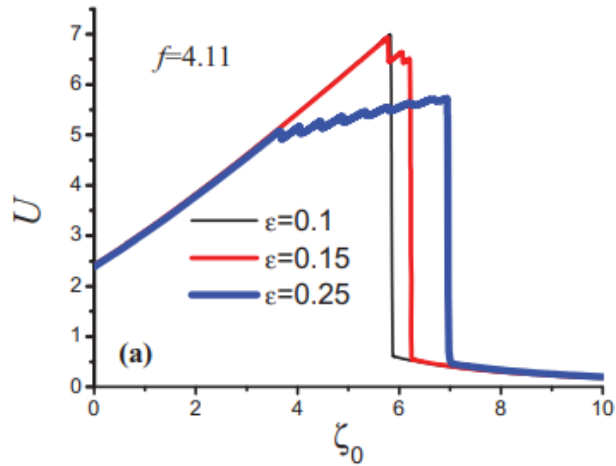


Рисунок 21. Средняя мощность поля в микрорезонаторе в зависимости от величины частотной отстройки для различной глубины амплитудной модуляции накачки. Иллюстрация взята из статьи [29].

Еще одним достоинством платиконов является то, что эффективность преобразования энергии накачки в энергию ОЧГ при генерации платиконов существенно выше, чем при генерации светлых солитонов, более 40% против 1-3%, соответственно [30]!

3. Заключение

Предложенная в 1989 году проф. В.Б. Брагинским идея оптических высокодобротных микрорезонаторов с модами типа шепчущей галереи получила свое активное развитие не только как линейный элемент оптических систем, но и как первоклассная платформа для наблюдения разнообразных нелинейных эффектов.

С развитием концепции оптических частотных гребенок и предложением методики генерации их на базе оптических микрорезонаторов с гигантской добротностью, интерес к этой области стал поистине ошеломительным. В последние годы число публикаций по теме оптических микрорезонаторов превышает 500 публикаций в год. Неугасающий интерес в течение продолжительного времени, начиная с 2007 года, вызывали различные аспекты генерации ОЧГ в микрорезонаторах из различных материалов, различных геометрий и т.д. В последние годы новая волна интереса связана с проблемой генерации ОЧГ в микрорезонаторах из квадратично-нелинейных материалов [31].

В данном пособии даны начальные знания и обзоры научных результатов, которые потребуются студентам, которые только начинают свою научную работу в области оптических микрорезонаторов с гигантской добротностью. Безусловно, многие интересные и значительные работы не были упомянуты на этих страницах, но автор надеется, что после прочтения данного пособия у читателей сложится достаточно ясная картина процессов, которые лежат в основе нелинейно-оптических эффектов в оптических микрорезонаторах, а также будет сформировано понимание такой интересной и красивой идеи современной физики, как оптические частотные гребенки, современной высокоточной линейки частот, и методов ее генерации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Понятие о нелинейной оптике	5
1.1. Генерация второй гармоники	9
1.2. Генерация суммарной и разностной частот	12
1.3. Параметрическая генерация света	13
1.4. Линейный электрооптический эффект или эффект Погкельса.....	14
1.5. Бистабильность мод нелинейного оптического высокодобротного микрорезонатора.....	17
1.6. Эффект Керра или квадратичный электрооптический эффект	19
1.7. Генерация третьей гармоники.....	20
1.8. Самофокусировка. Понятие солитона.....	22
1.9. Фазовая самомодуляция. Временной солитон.	27
1.10. Перекрестная фазовая модуляция или фазовая кросс-модуляция	32
1.11. Четырехволновое смешение.....	33
2. Оптические частотные гребенки	35
2.1. Генерация ОЧГ при помощи фемтосекундных лазеров с синхронизацией мод.....	35
2.2. Генерация ОЧГ в нелинейных оптических микрорезонаторах	42
3. Заключение.....	51
Оглавление	52
Список литературы.....	53

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Pu, L. Ottaviano, E. Semenova, L. K. Oxenløwe, and K. Yvind, "Ultra-Low Threshold Power On-Chip Optical Parametric Oscillation in AlGaAs-On-Insulator Microresonator," in CLEO: 2015 Postdeadline Paper Digest, (Optical Society of America, 2015), paper JTh5A.9.
2. B. Zhang, P. Zeng, Z. Yang, D. Xia, J. Zhao, Y. Sun, Y. Huang, J. Song, J. Pan, H. Cheng, D. Choi, and Z. Li. On-chip chalcogenide microresonators with low-threshold parametric oscillation, *Photon. Res.* 9, pp. 1272-1279 (2021).
3. J.U. Fürst, D.V. Strekalov, D. Elser, M. Lassen, U.L. Andersen, C. Marquardt, and G. Leuchs. Naturally Phase-Matched Second-Harmonic Generation in a Whispering-Gallery-Mode Resonator, *Phys. Rev. Lett.* 104, 153901 (2010).
4. D.V. Strekalov, C. Marquardt, A.B. Matsko, H.G.L. Schwefel, and G. Leuchs. Nonlinear and quantum optics with whispering gallery resonators, *J. Opt.* 18, 123002 (2016).
5. D.V. Strekalov, A.S. Kowligy, V.G. Veleev, G.S. Kanter, P. Kumar, and Y.P. Huang. Phase matching for the optical frequency conversion processes in whispering gallery mode resonators, *J. Mod. Opt.* 63, pp. 50-63 (2016).
6. D.A. Cohen, M. Hossein-Zadeh, and A.F.J. Levi. High-Q microphotonic electro-optic modulator, *Solid-State Electron.* 45, pp. 1577-1589 (2001).
7. A.A. Savchenkov, W. Liang, A.B. Matsko, V.S. Ilchenko, D. Seidel, and L. Maleki. Tunable optical single-sideband modulator with complete sideband suppression, *Opt. Lett.* 34, p. 1300 (2009).
8. A.B. Matsko, D.V. Strekalov, and N. Yu. Sensitivity of terahertz photonic receivers, *Phys. Rev. A* 77, 043812 (2008).
9. A. Rueda, F. Sedlmeir, M.C. Collodo, U. Vogl, B. Stiller, G. Schunk, D.V. Strekalov, C. Marquardt, J.M. Fink, O. Painter, G. Leuchs, and H.G.L. Schwefel. Efficient microwave to optical photon conversion: an electro-optical realization,

- Optica 3, pp. 597-604 (2016).
10. V. Ilchenko, A. Savchenkov, A. Matsko, D. Seidel, and L. Maleki. Crystalline resonators add properties to photonic devices, SPIE Newsroom 10, 002536 (2010).
 11. М.Л. Городецкий. Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью. Москва, Физматлит, 2011.
 12. T. Carmon, and K. Vahala. Visible continuous emission from a silica microphotonic device by third-harmonic generation, Nature Phys. 3, pp. 430–435 (2007).
 13. J.S. Levy, M.A. Foster, A.L. Gaeta, and M. Lipson. Harmonic generation in silicon nitride ring resonators, Opt. Express 19, pp. 11415-11421 (2011).
 14. D. Farnesi, A. Barucci, G. C. Righini, S. Berneschi, S. Soria, and G. Nunzi Conti. Optical Frequency Conversion in Silica-Whispering-Gallery-Mode Microspherical Resonators, Phys. Rev. Lett. 112, 093901 (2014).
 15. Q. Li, M. Davanço, and K. Srinivasan. Efficient and low-noise single-photon-level frequency conversion interfaces using silicon nanophotonics, Nature Photon 10, 406–414 (2016).
 16. G.I.A. Stegeman, D.N. Christodoulides, and M. Segev. Optical spatial solitons: historical perspectives, IEEE J. Quantum Electron. 6, 1419 (2000).
 17. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. Теория волн. Москва, Наука, 1979.
 18. W.B. Whitten, M.D. Barnes, J.M. Ramsey. Propagation of short optical pulses in a dielectric sphere, J. Opt. Soc. Am. B 14 (12), 3424 (1997).
 19. Т.В. Хэнш. Страсть к точности, Нобелевские лекции по физике, Успехи физических наук 176 (12), стр. 1368-1380 (2005).
 20. P. Del’Haye, A. Schliesser, O. Arcizet, T. Wilken, R. Holzwarth and T. J. Kippenberg. Optical frequency comb generation from a monolithic

- microresonator, *Nature* 450, 1214–1217 (2007).
21. T. J. Kippenberg, R. Holzwarth, and S. A. Diddams. Microresonator-Based Optical Frequency Combs, *Science* 332, pp. 555-559 (2011).
 22. T. Herr, V. Brasch, J.D. Jost, C.Y. Wang, N.M. Kondratiev, M.L. Gorodetsky, and T.J. Kippenberg. Temporal solitons in optical microresonators, *Nature Photonics* 8, pp.145-152 (2014).
 23. X. Yi, Q.F. Yang, K.Y. Yang, M.G. Suh, and K. Vahala. Soliton frequency comb at microwave rates in a high-Q silica microresonator, *Optica* 2, pp. 1078-1085 (2015).
 24. W. Liang, D. Eliyahu, V.S. Ilchenko, A.A. Savchenkov, A.B. Matsko, D. Seidel, and L. Maleki. High spectral purity Kerr frequency comb radio frequency photonic oscillator, *Nat. Commun.* 6, 7957 (2015).
 25. V. Brash, M. Gieselmann, T. Herr, G. Lihachev, M.H.P. Pfeiffer, M.L. Gorodetsky, and T.J. Kippenberg. Photonic chip-based optical frequency comb using soliton Cherenkov radiation, *Science*, 351, pp. 357-360 (2016).
 26. C. Joshi, J.K. Jang, K. Luke, X. Ji, S.A. Miller, A. Klenner, Y. Okawachi, M. Lipson, and A.L. Gaeta. Thermally controlled comb generation and soliton modelocking in microresonators, *Opt. Lett.* 41, pp. 2565-2568 (2016).
 27. I.S. Grudinin, and N. Yu. Towards efficient octave-spanning comb with microstructured crystalline resonator, *Proc. SPIE* 9343, *Laser Resonators, Microresonators, and Beam Control XVII*, 93430F (13 March 2015); <https://doi.org/10.1117/12.2085420>.
 28. V.E. Lobanov, G. Lihachev, T. J. Kippenberg, and M.L. Gorodetsky. Frequency combs and platicons in optical microresonators with normal GVD, *Opt. Express* 23, pp. 7713-7721 (2015).
 29. V.E. Lobanov, G. Lihachev, and M.L. Gorodetsky. Generation of platicons and frequency combs in optical microresonators with normal GVD by modulated

pump, EPL 112, 54008 (2015).

30.B.Y. Kim, Y. Okawachi, J.K. Jang, M. Yu, X. Ji, Y. Zhao, C. Joshi, M. Lipson, and A.L. Gaeta, "Turn-key, high-efficiency Kerr comb source, Opt. Lett. 44, pp. 4475-4478 (2019).

31.I. Ricciardi, S. Mosca, M. Parisi, F. Leo, T. Hansson, M. Erkintalo, P. Maddaloni, P. De Natale, S. Wabnitz, and M. De Rosa. Optical Frequency Combs in Quadratically Nonlinear Resonators, Micromachines 11, 230 (2020).