

Явление затягивания в автоколебательной системе с двумя степенями свободы

Воронцов Ю.И., Косых Т.Б.

Изучается автоколебательная система с двумя степенями свободы на примере генератора с двумя связанными резонансными контурами. Явление затягивания проявляется в характерной, гистерезисного вида зависимости частоты и амплитуды автоколебаний от соотношения частот контуров и связи между ними.

1 Теория явления затягивания

Примером автоколебательной системы с двумя степенями свободы является изображенный на рис. 1 генератор на полевом транзисторе, в котором кроме основного колебательного контура L_1C_1 есть связанный с ним контур L_2C_2 . В схеме с одним контуром частота гармонических колебаний была бы равна собственной частоте контура $\omega = \nu_1 = 1/\sqrt{L_1C_1}$. Два связанных контура имеют две собственных частоты. Какие колебания будут в этом случае? На обеих частотах одновременно, или только на одной из них? Что произойдет при изменении собственной частоты первого контура?

Исследуем решения уравнений, описывающих схему рис. 1:

$$\ddot{u}_1 + 2\delta_1 u_1 + \nu_1^2 u_1 + \alpha_1 \ddot{u}_2 = M\nu_1^2 \dot{I}(u_1), \quad (1)$$

$$\ddot{u}_2 + 2\delta_2 u_2 + \nu_2^2 u_2 + \alpha_2 \ddot{u}_1 = 0. \quad (2)$$

Здесь u_1 и u_2 — напряжения на емкостях C_1 и C_2 ,
 $\delta_i = R_i/2L_i$ ($i = 1, 2$) — коэффициенты затухания,
 $\nu_i = 1/\sqrt{L_iC_i}$ — парциальные частоты, равные в данном случае резонансным частотам отдельных контуров,
 $\alpha_i = M_1\nu_i^2C_j$, ($i \neq j$) — коэффициенты связи между контурами,
 M — коэффициент взаимной индукции между первым контуром и катушкой обратной связи,
 M_1 — коэффициент взаимной индукции между контурами,
 $I(u_1)$ — ток в цепи стока полевого транзистора.

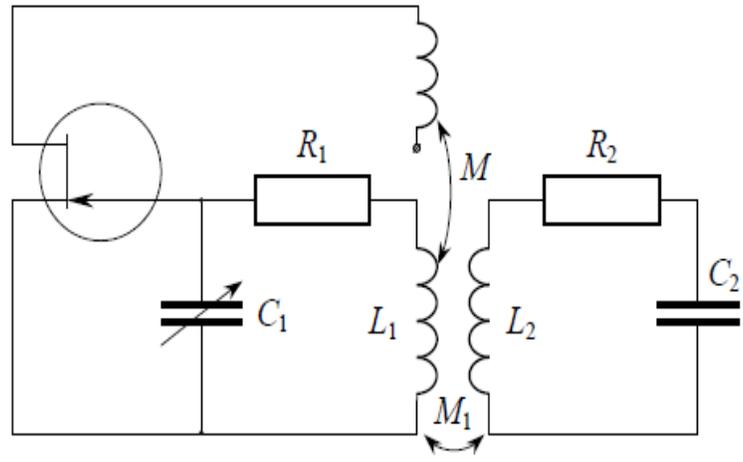


Рис. 1.

Будем исследовать уже установившиеся, **стационарные квазигармонические автоколебания**, т.е. периодические колебания с относительно малыми гармониками. В первом приближении решениями уравнений (1) - (2) будут функции

$$u_1 = A \cos \omega t, \quad u_2 = B \cos(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

Подставим их в уравнения (1) - (2). В правой части уравнения (1) кроме гармонических составляющих с частотой ω будут гармоники с кратными частотами. Их отбросим, считая относительно малыми. В результате, вместо функции $I(u_1)$ будет гармоническая функция

$$I(t) = \bar{S}(A)A \cos \omega t, \quad (4)$$

где $\bar{S}(A)$ — средняя крутизна вольт-амперной характеристики транзистора (отношение амплитуды первой гармоники тока к амплитуде напряжения $u_1(t)$). В случае

$$I(u_1) = S_0 u_1 - \frac{1}{3} S_2 u_1^3, \quad (5)$$

$$\bar{S}(A) = S_0 - \frac{S_2}{4} A^2. \quad (6)$$

После таких преобразований уравнения (1) - (2) станут линейными с функциями времени $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Поскольку уравнения должны выполняться отдельно для функций $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, то из двух уравнений системы (1) - (2), получим четыре уравнения для коэффициентов при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Они содержат четыре неизвестных: ω , A , B , и φ .

Из условия нетривиального решения системы уравнений получим уравнение, определяющее частоты генерации ω :

$$(\omega^2 - \nu_1^2) - \frac{k^2 \omega^4 (\omega^2 - \nu_2^2)}{(\omega^2 - \nu_2^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2} = 0, \quad (7)$$

где $k = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ — коэффициент связи контуров.

Из той же системы уравнений следует, что амплитуда A колебаний в основном контуре генератора является решением уравнения

$$2\delta_1 + 2\delta_2 \frac{k^2 \omega^4}{(\omega^2 - \nu_2^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2} = M \bar{S}(A) \nu_1^2. \quad (8)$$

В случае (6)

$$A^2 = A_0^2 - \frac{8\delta_2}{S_2 M_1 \nu_1^2} \frac{k^2 \omega^4}{(\omega^2 - \nu_2^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2}, \quad (9)$$

где

$$A_0 = \sqrt{\frac{4}{S_2} \left(S_0 - \frac{2\delta_1}{M\nu_1^2} \right)}$$

— амплитуда колебаний при отсутствии связи между контурами ($k = 0$). При этом амплитуда колебаний во втором контуре

$$B = A \frac{\alpha_2 \omega^2}{\sqrt{(\nu_2^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_2^2 \omega^2}} \quad (10)$$

1.1 Зависимость частоты автоколебаний от собственной частоты основного контура

Исследование решений уравнения (7) в широком диапазоне значений параметров возможно только численно. Рассмотрим решения в точке $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Здесь одним из решений будет

$$\omega = \nu.$$

Другие возможные решения уравнения (7) являются решениями уравнения

$$(1 - k^2)\omega^4 + 2\omega^2(2\delta_2^2 - \nu^2) + \nu^4 = 0, \quad (11)$$

которое имеет действительные корни только при коэффициенте связи между контурами больше критического значения

$$k > k_{cr} = 2\delta_2/\nu = 1/Q_2. \quad (12)$$

Критический коэффициент связи равен обратному значению добротности второго контура Q_2 .

При **слабой связи** ($k < k_{cr}$) частота автоколебаний зависит от ν_1 однозначно (рис. 2); при **сильной связи** ($k > k_{cr}$) одному значению ν_1 могут соответствовать **три решения** (рис. 4).

Рассмотрим подробнее характеристики автогенератора при слабой и сильной связях.

1.1.1 Слабая связь ($k < k_{cr}$).

Как видно из графиков рис. 2 и рис. 4, частота автоколебаний ω не совпадает с частотой ν_1 основного контура. Второй контур замедляет изменение частоты генератора при изменении ν_1 .

То, что частота автоколебаний двухконтурного генератора не совпадает с частотой одноконтурного, объясняется просто. Автоколебания возбуждаются

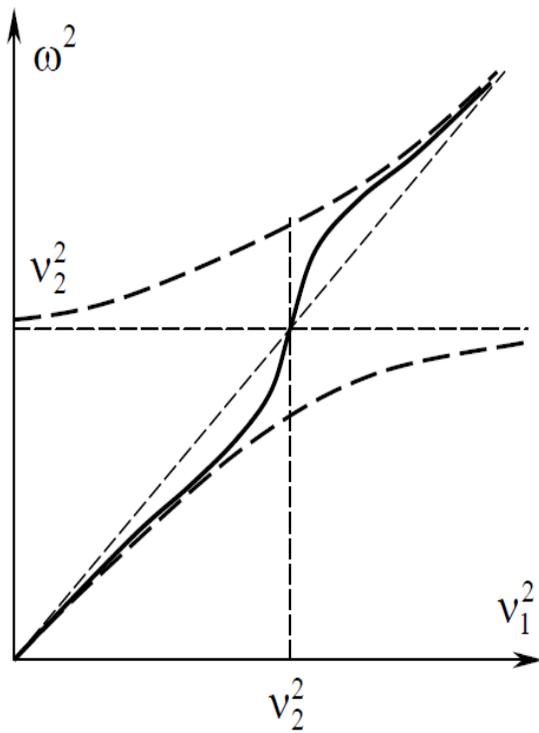


Рис. 2.

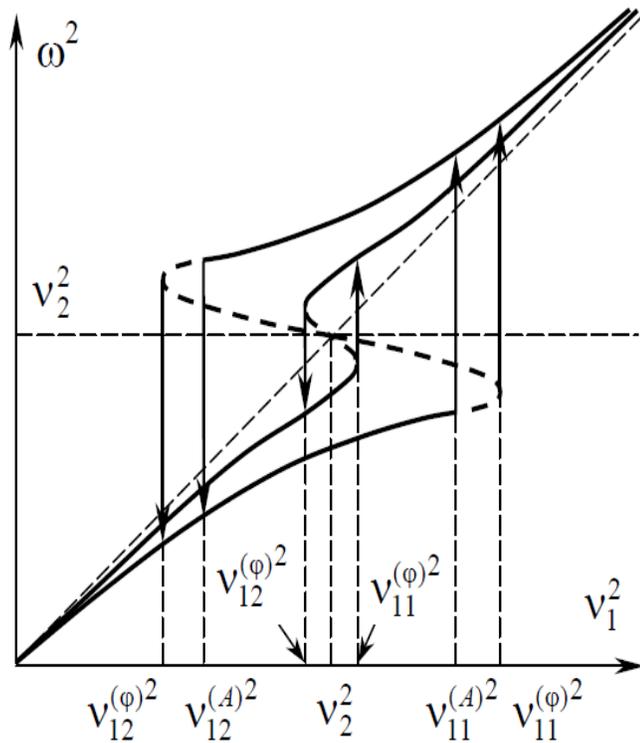


Рис. 4.

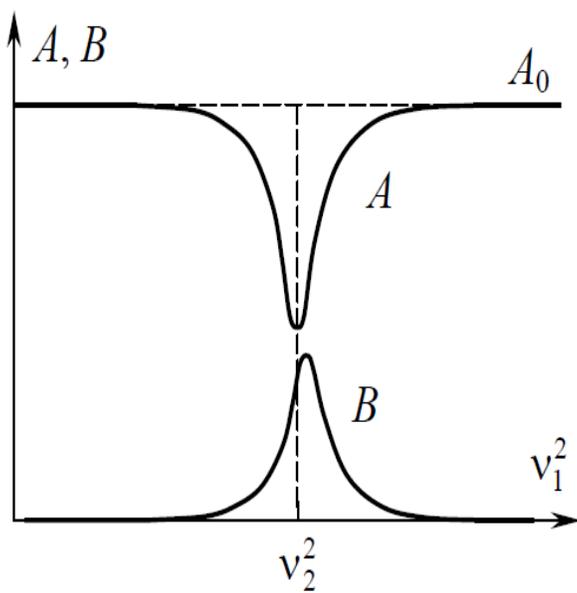


Рис. 3.

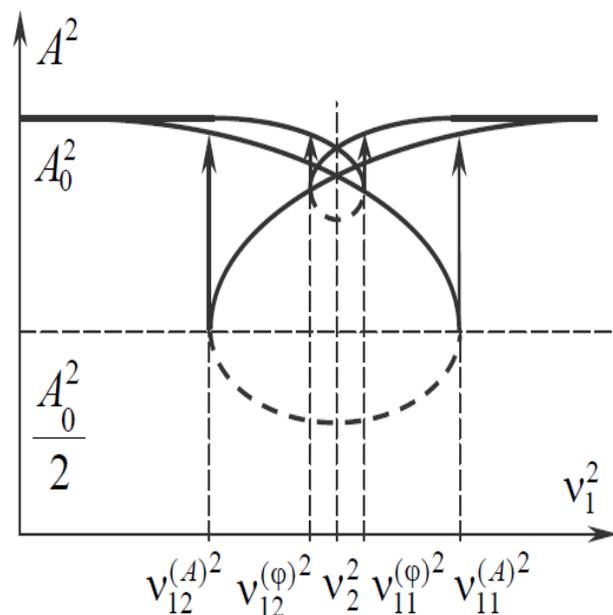


Рис. 5.

на резонансной частоте, а у связанных контуров их две, и обе не равны ни одной из парциальных. Но в графиках рис. 2 и рис. 4 отражены некоторые особенности двухконтурных генераторов, которые не объясняются характеристиками связанных линейных контуров.

Например, ни при какой величине связи частота автоколебаний не равна ни одной из двух собственных частот связанных контуров без потерь, зависимость которых от ν_1 изображает график Вина (пунктирная кривая на рис. 2). Это говорит о том, что хотя в автогенераторе потери компенсируются вложением энергии, наличие их влияет на фазовые условия самовозбуждения.

Второй контур влияет как на частоту, так и на амплитуду автоколебаний. При слабой связи амплитуда колебаний в первом контуре определяется соотношением (9). Присутствие второго контура приводит к уменьшению амплитуды колебаний в первом. Это связано с рассеянием энергии на потерях во втором контуре. Отсос энергии из первого во второй контур тем больше, чем ближе частота автоколебаний к частоте второго контура ν_2 . Поэтому амплитуда колебаний в первом контуре имеет минимальное значение при равенстве парциальных частот ($\nu_1 = \nu_2$) (см. рис. 3). В этой точке

$$A^2 = A_0^2 - \frac{2k^2}{S_2\delta_2M}. \quad (13)$$

В то время как амплитуда колебаний в первом контуре уменьшается, во втором она растет.

Возможно такое соотношение параметров, при котором правая часть (13) станет отрицательной. В этой области значений параметров (области гашения) автоколебания гасятся.

1.1.2 Сильная связь ($k > k_{cr}$)

При сильной связи в определенной области значений параметров уравнения дают три действительных значения частоты автоколебаний, т.е. три стационарных автоколебания. Реализуются из них только устойчивые. Эта область значений параметров называется областью **затягивания частоты**. В области затягивания режим генерации зависит от предыстории.

Исследование устойчивости стационарных решений. Вернемся к исходным уравнениям (1) - (2). В стационарных решениях добавим к стационарной амплитуде и стационарной частоте (фазе) малые зависящие от времени приращения. Линеаризуем уравнения относительно приращений и исследуем корни характеристического уравнения. Расчеты покажут, что из

трех решений *среднее всегда неустойчиво*. Два других устойчивы по одной точке: **генерация одновременно на двух частотах невозможна**. На границах области затягивания при плавном изменении частоты ν_1 частота автоколебаний скачком изменяет свое значение. Это происходит потому, что в этих точках нарушаются условия устойчивости для имевшихся колебаний.

Нарушаться могут либо **фазовые условия устойчивости**, либо **амплитудные**. Нарушение фазовых условий устойчивости происходит в точках, в которых кривая $\omega = f(\nu_1)$ имеет вертикальную касательную (точки $\nu_{11\varphi}$ и $\nu_{12\varphi}$ на рис. 4). *Этот вид неустойчивости проявляется при связях, значительно превышающих критическую. При больших связях раньше наступает неустойчивость амплитудная.*

Амплитудные условия устойчивости.

Допустим, что существуют два гармонических колебания с частотами ω_1 и ω_2 :

$$u_1 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad (14)$$

$$u_2 = B_1 \cos (\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos (\omega_2 t + \varphi_2). \quad (15)$$

Подставив функцию (14) в (5) и отбросив все гармонические составляющие кроме составляющих с частотами ω_1 и ω_2 , получим

$$I(t) = \bar{S}_{\omega_1} A_1 \cos \omega_1 t + \bar{S}_{\omega_2} A_2 \cos \omega_2 t, \quad (16)$$

где

$$\bar{S}_{\omega_1} = S_0 - \frac{1}{4} S_2 (A_1^2 + 2A_2^2); \quad \bar{S}_{\omega_2} = S_0 - \frac{1}{4} S_2 (2A_1^2 + A_2^2) \quad (17)$$

— средние крутизны для основных гармонических составляющих. Из (17) следует, что *средняя крутизна для одной гармонической составляющей уменьшается при росте амплитуды другой*. Следовательно, **присутствие одного колебания ухудшает условие генерации другого**. Причем уменьшение средней крутизны на частоте ω_1 в большей степени зависит от A_2 , чем от A_1 , а крутизна на частоте ω_2 сильнее зависит от A_1 , чем от A_2 .

Подставив функции (14) и (15) в уравнения (1) - (2), получим подобные (8) уравнения для определения амплитуд A_1, A_2 :

$$M\nu_1^2 [S_0 - \frac{S_2}{4} (A_1^2 + 2A_2^2)] = 2\delta_{ef}(\omega_1), \quad (18)$$

$$M\nu_1^2 [S_0 - \frac{S_2}{4} (2A_1^2 + A_2^2)] = 2\delta_{ef}(\omega_2), \quad (19)$$

где

$$\delta_{ef}(\omega_1) = \delta_1 + \delta_2 \frac{\nu_1^2 - \omega_1^2}{\nu_2^2 - \omega_1^2}, \quad (20)$$

$$\delta_{ef}(\omega_2) = \delta_1 + \delta_2 \frac{\nu_1^2 - \omega_2^2}{\nu_2^2 - \omega_2^2} \quad (21)$$

— эффективные коэффициенты затухания на частотах ω_1 и ω_2 .

Левые части уравнений (20) и (21) характеризуют вклад энергии на соответствующих частотах колебаний, правые — потери энергии. Следовательно, если при $A_2 = 0$

$$M\nu_1^2[S_0 - \frac{S_2}{4}(2A_1^2)] < 2\delta_{ef}(\omega_2), \quad (22)$$

то колебания на частоте ω_2 возбуждаться не могут. Будут стационарные колебания на частоте ω_1 .

Условия существования стационарных колебаний на частоте ω_1 :

$$M\nu_1^2[S_0 - \frac{S_2}{4}(A_1^2)] = 2\delta_{ef}(\omega_1), \quad (23)$$

$$M\nu_1^2[S_0 - \frac{S_2}{4}(2A_1^2)] < 2\delta_{ef}(\omega_2), \quad (24)$$

а на частоте ω_2 —

$$M\nu_1^2[S_0 - \frac{S_2}{4}(2A_2^2)] < 2\delta_{ef}(\omega_1), \quad (25)$$

$$M\nu_1^2[S_0 - \frac{S_2}{4}(A_2^2)] = 2\delta_{ef}(\omega_2). \quad (26)$$

Режим бигармонических автоколебаний неустойчив. Условием существования стационарных колебаний одновременно на обеих частотах являются равенства (18) – (19). Но такой режим неустойчив. Допустим, что произошло случайное увеличение амплитуды A_1 . Это вызовет уменьшение крутизны на обеих частотах, но на частоте ω_2 больше. В результате уменьшится амплитуда A_2 . Это приведет к росту крутизны на частоте ω_1 , соответственно, к дальнейшему росту амплитуды A_1 и уменьшению амплитуды A_2 . В результате колебания на частоте ω_2 исчезнут, а амплитуда колебаний на частоте ω_1 будет удовлетворять соотношению (23).

Скачки частоты и амплитуды при сильной связи.

Допустим, что существуют стационарные колебания с частотой ω_2 , соответствующей нижней ветви на рис. 4. Из рис. 4 видно, что с ростом ν_1 разность

$\nu_1^2 - \omega_2^2$ увеличивается, а $\nu_2^2 - \omega_2^2$ уменьшается. В результате происходит увеличение эффективного коэффициента затухания $\delta_{ef}(\omega_2)$ на частоте ω_2 , что приводит к уменьшению амплитуды A_2 в соответствии с (25). Одновременно происходит уменьшение отношения

$$\frac{\nu_1^2 - \omega_1^2}{\nu_2^2 - \omega_1^2},$$

и, следовательно, уменьшается затухание на частоте ω_1 . При некотором значении ν_1^2 изменится знак неравенства в (26) и возникнут условия возбуждения колебаний на частоте ω_1 . Произойдет скачкообразное нарастание амплитуды A_1 и уменьшение амплитуды A_2 (рис. 4 и 5).

Если теперь уменьшать ν_1 , то будет уменьшаться $\delta_{ef}(\omega_2)$ и увеличиваться $\delta_{ef}(\omega_1)$. Как только нарушится неравенство (24), произойдет скачок частоты с верхней на нижнюю ветвь графика рис. 4 и скачок амплитуды (рис. 5). Границы амплитудной устойчивости ν_{11A} , ν_{12A} не совпадают с границами фазовой устойчивости (точки с вертикальной касательной на кривой $\omega(\nu_1)$). **При небольшом превышении k над k_{cr} скачки связаны с нарушением фазовой устойчивости, а при больших значения k — с нарушением амплитудной устойчивости.**

Роль явления затягивания в технике.

Затягивание может быть как вредным, так и полезным явлением. Если к одноконтурному генератору подключается резонансная нагрузка, она изменяет частоту и амплитуду генератора, нарушает его градуировку, делает частоту менее стабильной, если нестабильна собственная частота нагрузки, что, конечно, плохо. С другой стороны, если собственная частота второго резонатора стабильнее, чем первого, то результирующая частота автоколебаний будет стабильней, чем частота одноконтурного генератора, что, естественно, хорошо. То, что стабильный второй контур позволяет уменьшить нестабильность частоты генерации, связанную с нестабильностью ν_1 , следует из графика на рис. 4. Производная $d\omega/d\nu_1 < 1$ везде, но особенно вблизи равенства парциальных частот. При таком способе стабилизации частоты генераторов в качестве второго резонатора используют высокочастотные кварцевые, сверхпроводящие, диэлектрические, оптические резонаторы. Наиболее высокий коэффициент стабилизации частоты $K_{st} = \Delta\nu_1/\Delta\omega$ (в несколько тысяч) получается в двухконтурных схемах с резистивной (а не с индуктивной, как в схеме рис. 1) связью между контурами.

2 Экспериментальное исследование двухконтурного генератора

Цель работы — экспериментальное исследование явления затягивания.

2.1 Описание установки № 1.

В конструкции генератора предусмотрена возможность снятия зависимостей частоты генерации ω и амплитуд колебаний в контурах A_1 , A_2 от собственной частоты основного контура ν_1 при различных коэффициентах связи.

Блок-схема установки приведена на рис. 6. Экспериментальная установка состоит из генератора на полевых транзисторах, электронного частотомера, трех идентичных милливольтметров, блока питания и механической системы изменения связей. (В установке предусмотрена возможность изучения трехконтурной схемы. При исследовании двухконтурной схемы катушка третьего контура должна быть отодвинута на максимальное расстояние.)

Генератор с индуктивной обратной связью изготовлен на двух полевых транзисторах. Перестройка частоты генератора в пределах 550–1350 кГц осуществляется конденсатором переменной емкости, включенным в основной контур генератора. Изменение емкости вызывает изменение величины ν_1 и соответствующее изменение частоты генерации ω .

Связь между контурами изменяется за счет изменения коэффициента взаимоиндукции между катушками. С этой целью катушки контуров выполнены в виде тороидов, расположенных на одной оси параллельно друг другу. Катушка второго контура неподвижна. Другие катушки могут перемещаться по оси.

Частота автоколебаний измеряется с помощью встроенного в установку цифрового частотомера. (Электронный частотомер собран на микросхемах К155.)

Измерение частоты производится в четыре этапа в зависимости от требуемой точности измерения. Точность измерения выбирается кнопочным переключателем.

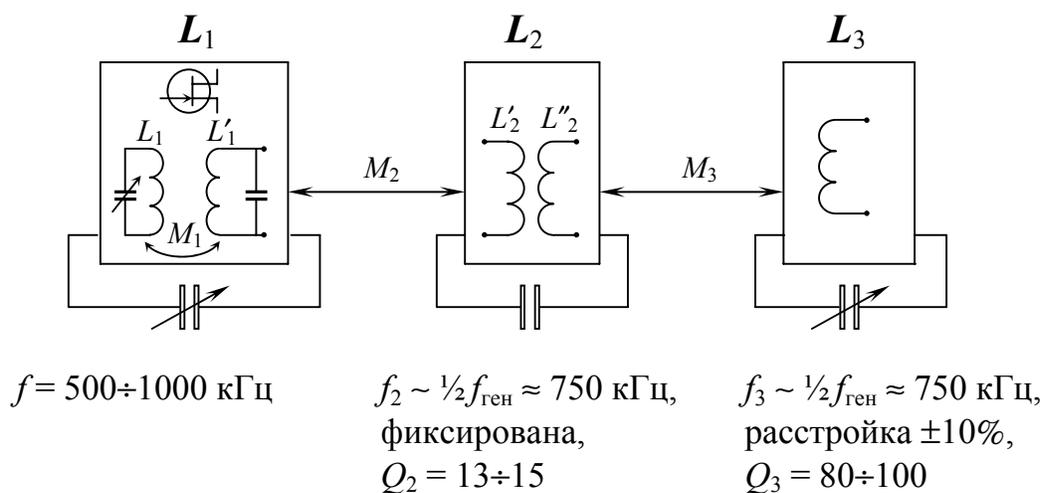
Например, требуется измерить частоту 1.234.567 Гц.

а) с точностью до 1 кГц — все кнопки отжаты, на электронном табло: 1 2 3 4;

б) с точностью до 100 Гц — нажата первая кнопка, на электронном табло: 2 3 4 5;

в) с точностью до 10 Гц — нажата вторая кнопка, на электронном табло: 3 4 5 6;

Система трех связанных контуров: L_1 — контур генератора ($f = 500 \div 1000$ кГц), L_2 и L_3 — дополнительные контуры.



Связь контуров:

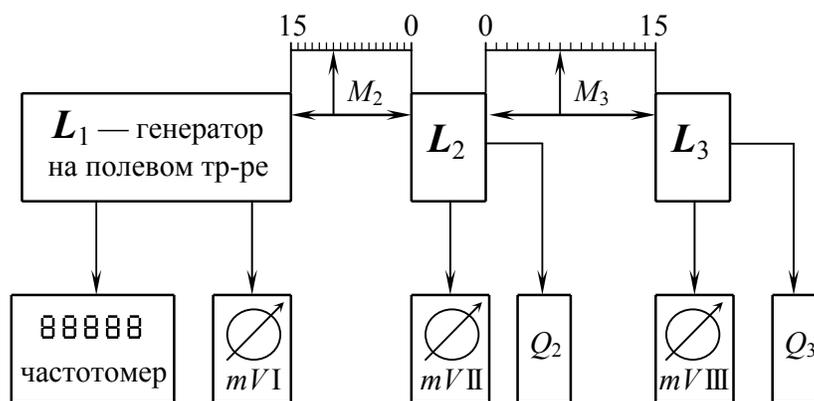
M_1 — между контурами исследуемого генератора,

M_2 — между контуром генератора L_1 и L_2 ,

M_3 — между контурами L_2 и L_3 .

Контур L_2 неподвижен, L_1 и L_3 перемещаются относительно L_2 .

Система измерения:



Q_2, Q_3 — устройство изменения добротности контуров L_2 и L_3 .

Рис. 6.

г) с точностью до 1 Гц — нажата третья кнопка, на электронном табло: 4 5 6 7.

Амплитуды колебаний напряжения в контурах отсчитываются по стрелочным приборам. Их шкалы проградуированы так, что 1 Вольту соответствуют 100 делений.

В схеме предусмотрена возможность изменения добротности второго контура. (тумблер: добротность „большая“, „малая“.)

Установка позволяет подключать к связанным контурам вместо внутреннего генератора внешний генератор с частотой генерации 500–1500 кГц и выходным напряжением 0,5 – 1,0 В. При нажатой кнопке <ВН.ГЕНЕРАТОР> первый прибор показывает напряжение внешнего генератора, а частотомер — его частоту.

2.1.1 Порядок работы

Подготовительные операции.

1. Проверить заземление блока.
2. Калибровка милливольтметров.
 - а) Перед включением измерительного блока в сеть установить < 0 > стрелочных приборов механическими корректорами.
 - б) Включить сеть и прогреть установку 5 - 7 минут.
 - в) Проверить установку < 0 > вольтметров, нажав поочередно кнопки < 0 > МВ1 и < 0 > МВ2. При необходимости установить нули с помощью подстроечных сопротивлений.
3. Калибровка шкалы переменного конденсатора — сопоставление условным делениям шкалы конденсатора C_1 значений собственной частоты ν_1 первого контура. Для этого связь между контурами уменьшают настолько, что генератор фактически становится одноконтурным. Частота автоколебаний одноконтурного генератора в первом приближении равна частоте ν_1 контура. Поэтому калибровка заключается в сопоставлении делениям шкалы конденсатора частоты генерации одноконтурного генератора. Результатом калибровки будет график соответствия частоты одноконтурного генератора делениям шкалы конденсатора.

Снятие кривых, характеризующих явление затягивания.

1. Определите расстояние между катушками, соответствующее критической связи. (Критическая связь — связь, выше которой будут скачки частоты и амплитуд при изменении емкости контура.)

2. Снимите зависимости частоты генерации ω и амплитуд колебаний в первом (A) и во втором (B) контурах от собственной частоты основного контура ν_1 при двух значениях добротности второго контура: <большая> и <малая> и при различных коэффициентах связи:

- а) при слабой связи
- б) при промежуточной связи;
- в) при сильной связи.

3. Снимите зависимость разности частот $\nu_{11} - \nu_{12}$, соответствующих границам затягивания, от связи M . (Указание. Для этого не нужно снимать многочисленное семейство характеристик $\omega(\nu_1)$. Достаточно измерять частоты, при которых происходят скачки амплитуд колебаний.)

Результаты всех экспериментов представьте в виде таблиц результатов измерений и графиков.

Проанализируйте соответствие результатов эксперимента теории.

2.2 Описание установки № 2.

Подготовительные операции.

1. Проверить заземление блока.

2. Перед включением сети:

- а) отрегулировать „ноль“ стрелочных приборов механическим корректором;
- б) ручку „частота генератора“ поставить в крайнее левое положение;
- в) отжать кнопочные выключатели „калибровка“;
- г) переключатели приборов „mV-I“ и „mV-II“ поставить в положение „10 mV“;
- д) ручку „регулировка связи“ поставить в правое положение $M \simeq 6$ делений;

3. Включить сеть, прогреть установку.

4. Произвести калибровку приборов:

- а) винтом „уровень \mp “ установить „ноль“ частотомера;
- б) нажать кнопку „калибровка частоты“, подстроечным сопротивлением поставить стрелку частотомера на отметку 55-57 делений;
- в) последовательно нажать кнопки калибровка $mV - I$ и калибровка $mV - II$ и подстроечным сопротивлением поставить стрелки приборов на отметку 80 делений.

5. Отжать все кнопки и перевести аттенюатор вольтметра $mV - I$ на 300, аттенюатор вольтметра $mV - II$ на 1000.

6. Включить генератор и приступить к выполнению измерений, указанных выше в пункте *Снятие кривых, характеризующих явление затягивания*. Добротность второго контура в этом макете изменяется с помощью шунтирующего контур сопротивления:

большая добротность — без $R_{ш}$,

средняя добротность — $R_{ш}=50$ кОм,

малая добротность — $R_{ш}=10$ кОм.

Контрольные вопросы.

В какой системе наблюдается явление затягивания?

В чем проявляется явление затягивания?

Какая связь между контурами генератора называется сильной?

Как связано критическое значение коэффициента связи с добротностью второго контура?

Характер зависимостей частоты и амплитуды автоколебаний от частоты основного контура при слабой и сильной связях.

Причины скачков частоты и амплитуды автоколебаний при изменении частоты контура.

Почему в изучаемой схеме невозможны автоколебания одновременно на двух частотах?