

Характеристики случайного процесса

Эргодическая гипотеза: усреднение по времени эквивалентно усреднению по ансамблю.

Стационарный процесс: \bar{x} , σ не зависят от времени.

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \equiv \langle x \rangle,$$

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}, \quad \sigma = \overline{\Delta x^2} = \overline{(x(t) - \bar{x})^2},$$

Пусть $\overline{u(t)} = 0$, $B(\tau) = \overline{u(t)u(t - \tau)}$,

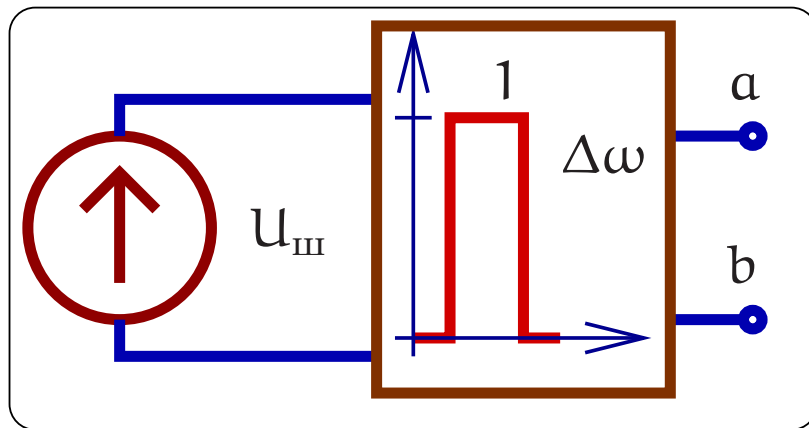
$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t - \tau) dt, \quad B(\tau) = B(-\tau), \quad (1)$$

$$B(0) = \sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)^2 dt. \quad (2)$$

Спектральная плотность

Традиционное определение спектральной плотности $\tilde{S}(\omega)$:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3)$$



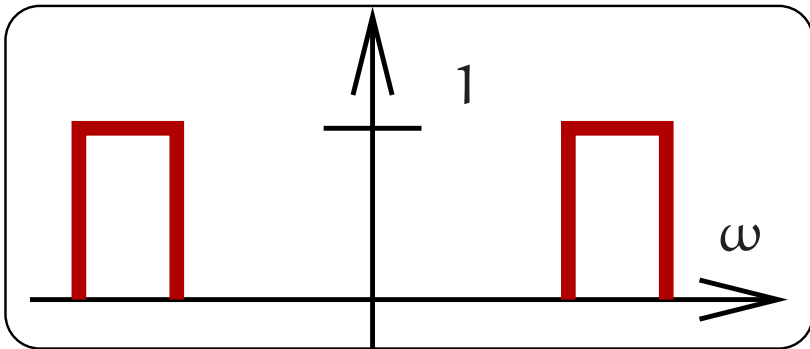
Физический смысл спектральной плотности: среднеквадратичное напряжение шума, генерируемое в единичной спектральной полосе:

$$\Delta u^2 \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_{ab}(t)^2 dt \simeq \tilde{S}_u(\omega) \times 2 \times \frac{\Delta\omega}{2\pi} \quad (4)$$

Дисперсия на выходе узкополосного фильтра $\Delta\omega$ (4):

$$\Delta u_{\Delta\omega}^2 = \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \underbrace{\overline{u(\omega) u(\omega')^*}}_{2\pi\delta(\omega-\omega') \tilde{S}(\omega)} e^{i(\omega-\omega')t} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} = \quad (5)$$

$$= \tilde{S}_u(\omega) \times 2 \times \frac{\Delta\omega}{2\pi}, \quad (6)$$



Другое определение спектральной плотности

Фурье преобразование случайной реализации шума на отрезке времени T :

$$V_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) e^{i\omega t} dt \quad (7)$$

В пределе $T \gg \tau_c$ — сумма большого числа $\simeq T/\tau_c$ интегралов. Это подобно задаче о случайных блужданиях, в которой, как известно, среднеквадратичный уход пропорционален \sqrt{T} .

$V_T(\omega)$ имеет размерность Вольт $\sqrt{\text{сек}}$ или $V/\sqrt{\text{Гц}}$.

Спектральная плотность (“двустороннее” определение):

$$S_{VV}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle |V_T(\omega)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle V_T(\omega) V_T(-\omega) \rangle \quad (8)$$

Теорема Винера-Хинчина

Формальное преобразование Фурье случайного процесса:

$$u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{i\omega t} dt, \quad \overline{u(\omega)} = 0,$$

$$\overline{u(\omega) u(\omega')^*} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(t) u(t')} e^{i(\omega t - \omega' t')} dt dt' =$$

$$\tau = t - t', \quad \tau' = \frac{t + t'}{2}, \quad dt dt' = d\tau d\tau', \quad \overline{u(t) u(t')} = B(t - t') = B(\tau),$$

$$\omega t - \omega' t' = \omega \left(\frac{\tau}{2} + \tau' \right) - \omega' \left(-\frac{\tau}{2} + \tau' \right) = (\omega + \omega') \frac{\tau}{2} + (\omega - \omega') \tau',$$

$$\overline{u(\omega) u(\omega')^*} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau$$

$$\overline{u(\omega) u(\omega')^*} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_u(\omega).$$

Теорема Винера-Хинчина:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_u(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \\ B(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_u(\omega) e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{S}(\omega)$ — “двусторонняя” спектральная плотность.

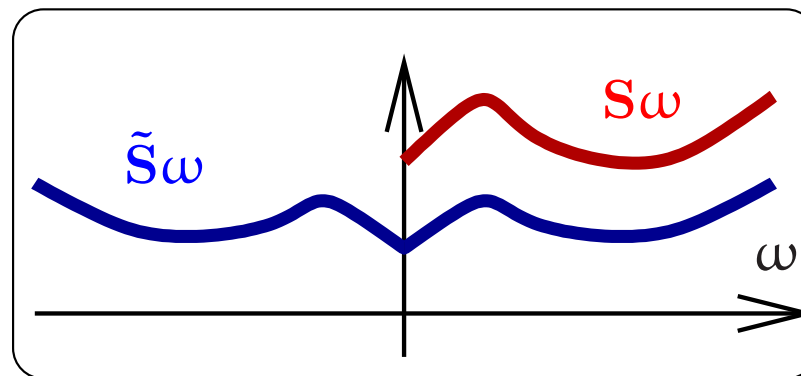
Очевидно, что это совпадает с традиционным определением (3).

$$\sigma = B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_u(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

“Одностороннее” определение спектральной плотности

Мы будем пользоваться “односторонним” определением спектральной плотности:

$$S(\omega) = 2\tilde{S}_u(\omega)$$



Теорема Винера - Хинчина для “односторонней” спектральной плотности:

$$S_u(\omega) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) \cos \omega\tau \frac{d\omega}{2\pi}$$

Докажем теорему Винера - Хинчина для “односторонней” спектральной плотности. Имеем:

$$\tilde{S}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad S_u(\omega) = 2\tilde{S}_u(\omega)$$

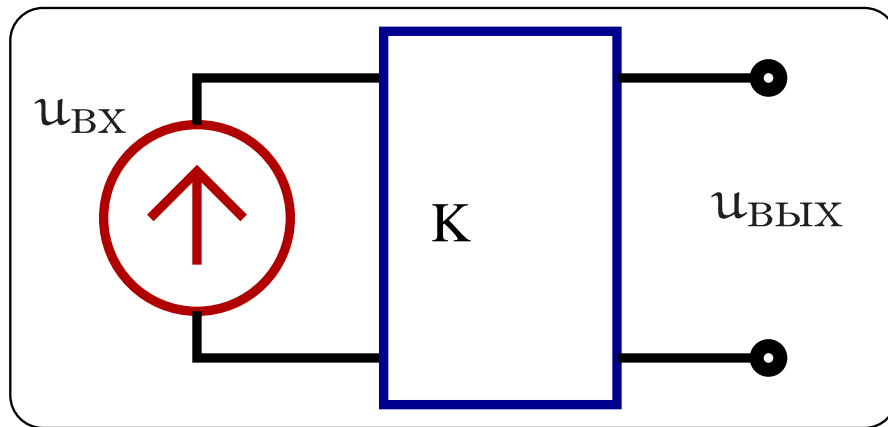
$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_u(\omega) e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad B(\tau) = B(-\tau)$$

$$S_u(\omega) \equiv 2\tilde{S}_u(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B(\tau) (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) d\tau =$$

$$= \boxed{4 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau},$$

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{S_u(\omega)}{2} (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) \frac{d\omega}{2\pi} = \boxed{\int_0^{\infty} S_u(\omega) \cos(\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi}}$$

Преобразование шума в линейных цепях



$$u_{ВЫХ}(\omega) = K(\omega) u_{BX}(\omega)$$

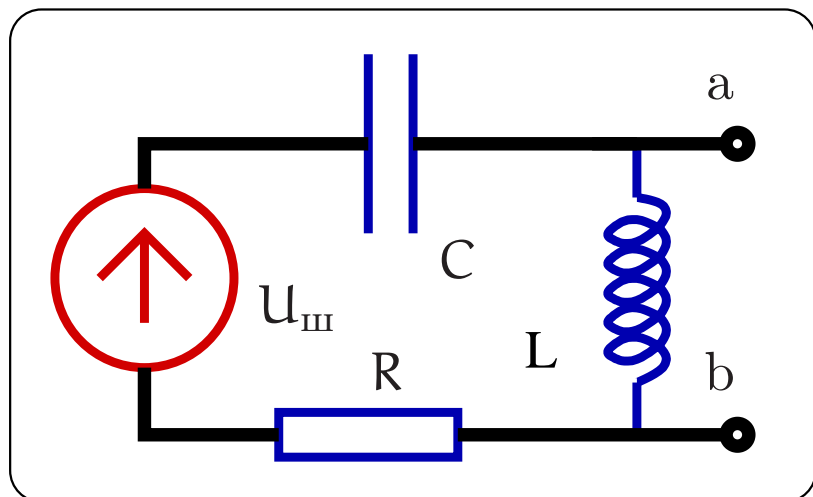
$$\overline{u_{BX}(\omega) u_{BX}(\omega')^*} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_{BX}(\omega),$$

$$\overline{u_{ВЫХ}(\omega) u_{ВЫХ}(\omega')^*} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \times \tilde{S}_{ВЫХ}(\omega),$$

$$u_{ВЫХ}(\omega) = K(\omega) u_{BX}, \Rightarrow \tilde{S}_{ВЫХ}(\omega) = |K(\omega)|^2 \tilde{S}_{BX}(\omega),$$

Результат: $S_{ВЫХ}(\omega) = |K(\omega)|^2 S_{BX}(\omega)$

Пример: преобразование шума в линейных цепях



Пусть $S(\omega)$ — спектральная мощность шумового напряжения $U_{ш}$. Какова спектральная мощность $S_{ab}(\omega)$ напряжения U_{ab} ?

$$U_{ab} = U_{ш} \times K(\omega), \quad K(\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L + 1/i\omega C},$$

$$S_{ab} = S(\omega) \times |K(\omega)|^2 = \frac{S(\omega) \omega^2 L^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

Основные виды шумов

- 1). Тепловой шум (белый шум).
- 2). Дробовой шум (белый шум).
- 3). Фликкер шум (избыточный шум или “1/f” - шум).

Белый шум

$S_u(\omega) = S_0$ (не зависит от ω).

$$B(\tau) = B(\tau) = \int_0^{\infty} S_u(\omega) \cos(\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{S_0}{2} \delta(\tau)$$

Это модель шума *без памяти*. Это только модель.

“Абсолютно пьяный человек”

Шаг длины $\pm\Delta x$, через время $\Delta\tau$: $\langle\Delta x_i\rangle = 0$, $\langle\Delta x_i^2\rangle = \Delta x^2$

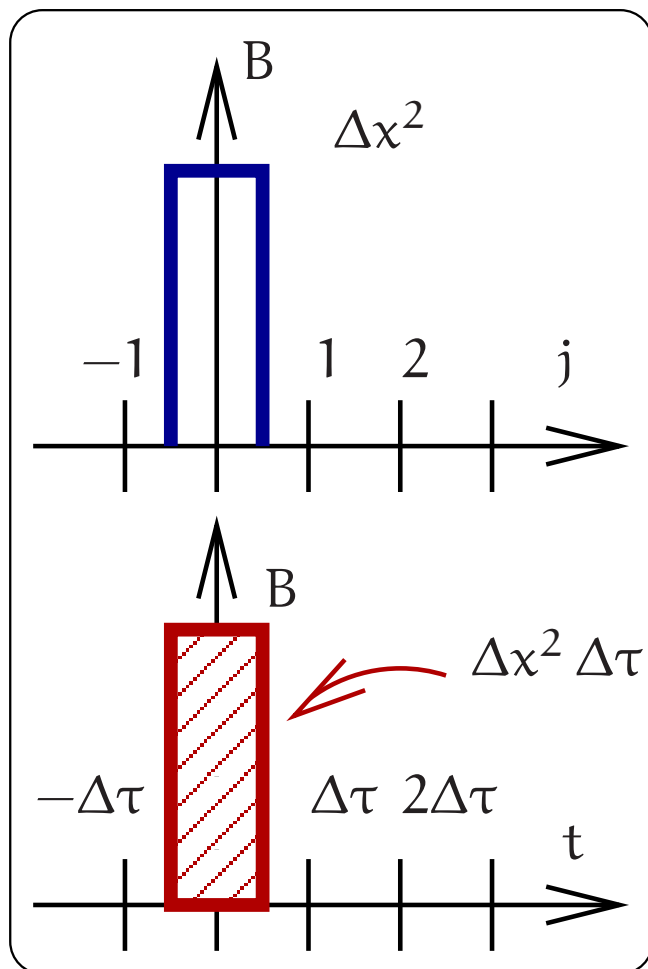
N шагов: $y_i = \{\Delta x_i\}$, $1 < i < N$.

$$\bar{y} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta x_i = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt,$$

$$\overline{y^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2 = \Delta x^2, \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)^2 dt.$$

$$B_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta x_i \Delta x_{i-j} = (\Delta x)^2 \delta_{0j}, \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{B}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) u(t - \tau) dt. \quad (10)$$



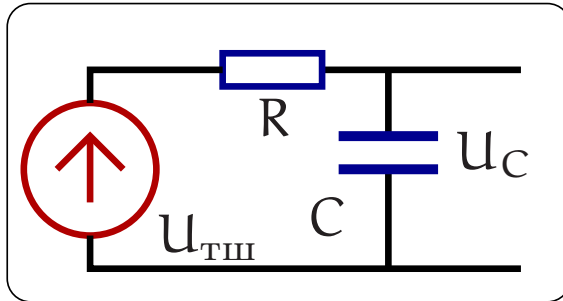
Устремляем $\Delta\tau \rightarrow 0$ так,
что $\Delta x^2 \Delta\tau = B_0$ — постоянная.

$\delta_{ij}/\Delta\tau \rightarrow \delta(\tau)$:

$$B_j = (\Delta x)^2 \delta_{0j} \quad \Leftrightarrow \quad B(\tau) = B_0 \delta(\tau)$$

Время “памяти” — $\Delta\tau$.

Тепловой шум



$$S_{ТШ}(\omega) = S_0,$$

$$\overline{U_C^2} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_C(\omega).$$

$$U_C(\omega) = \frac{U_{ТШ}/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)}, \quad S_C(\omega) = \frac{S_0}{1 + (\omega RC)^2},$$

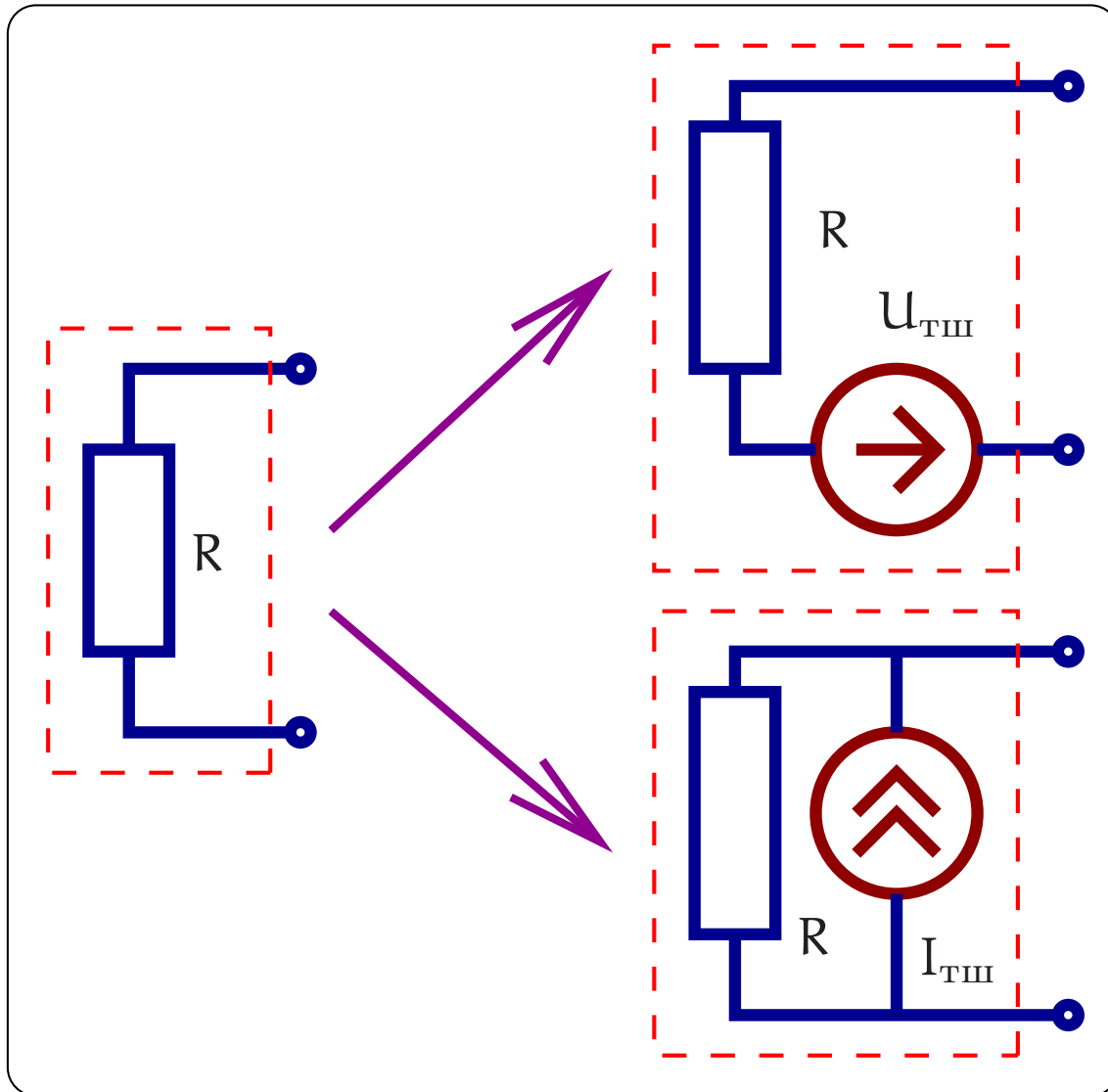
$$\overline{U_C^2} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{S_0}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{S_0}{2\pi RC} \operatorname{arctg}(\omega RC) \Big|_0^{\infty} = \frac{S_0}{4RC},$$

$$\frac{C\overline{U_C^2}}{2} = \frac{\kappa T}{2}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_0 = 4\kappa TR},$$

Флуктуации в полосе $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$:

$$\Delta U_{ТШ}^2 \simeq \mathbf{4\kappa TR \Delta f} = \frac{\mathbf{2}}{\pi} \kappa TR \Delta\omega$$

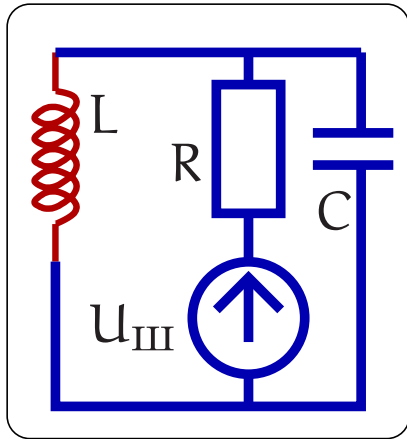
Эквивалентные источники теплового шума



$$S_U(\omega) = 4kTR,$$

$$S_I(\omega) = \frac{4kT}{R}$$

№9 “Найквист”



Доказать теорему Найквиста исходя из схемы. L и C – произвольные.

Рассмотреть случай $C \rightarrow 0$.

В квантовом случае ($T \rightarrow 0$):

$$S_0 = 4kTR \Rightarrow 4R \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \right),$$

$$T = 300^\circ\text{K} \Rightarrow f_{\text{гр}} = \frac{\omega_{\text{гр}}}{2\pi} = \frac{kT}{h} \simeq 6 \cdot 10^{12} \text{ Гц.}$$

При $f > f_{\text{гр}}$ надо пользоваться квантовой формулой.

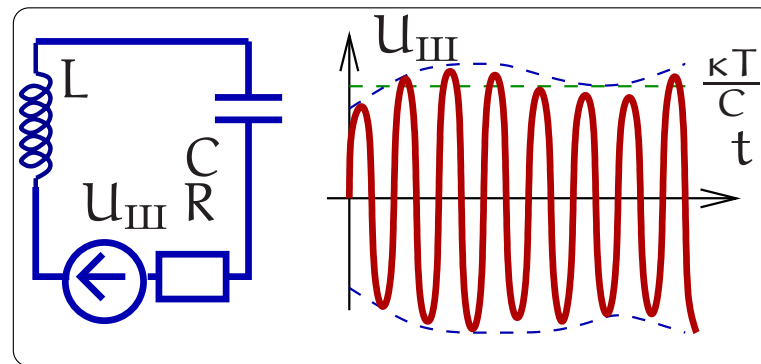
Теорема Найквиста — частный случай

флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ). Смысл ФДТ: чем больше потери, тем больше спектральная плотность шумов.

№10 “Вариация шумовой амплитуды”

$$\tau^* = \frac{2Q}{\omega_0},$$

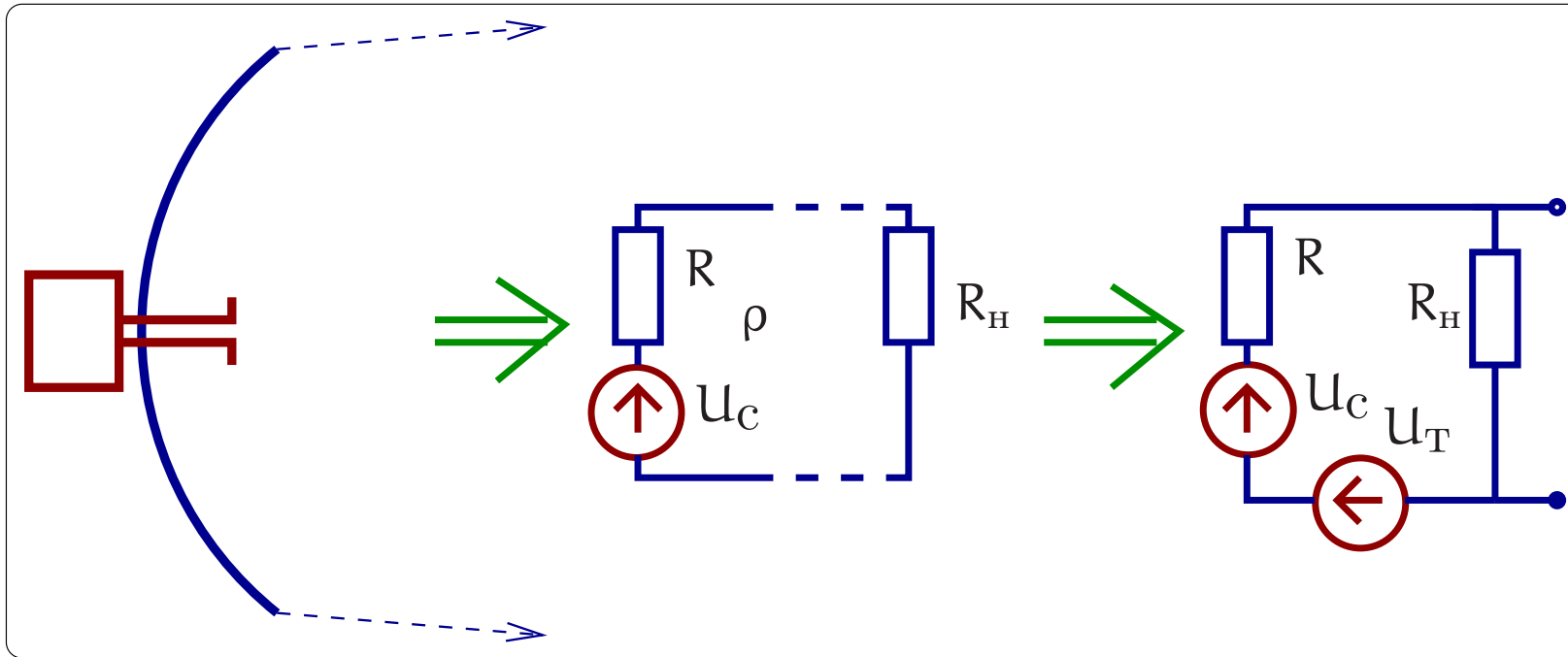
$$U_C(t) = U_{C0}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$



$U_{C0}(t)$ и $\varphi(t)$ — случайные медленные функции с характерным временем (временем корреляции) τ^* . Доказать, что при $\tau \ll \tau^*$ вариация амплитуды напряжения на конденсаторе равна

$$\delta U_{C0} = \sqrt{\langle (U_{C0}(t + \tau) - U_{C0}(t))^2 \rangle} \simeq \sqrt{\frac{kT}{C}} \sqrt{\frac{\tau}{\tau^*}}$$

Минимально обнаружимая мощность



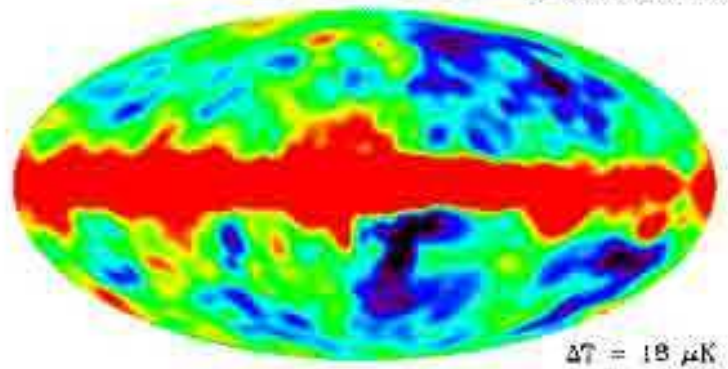
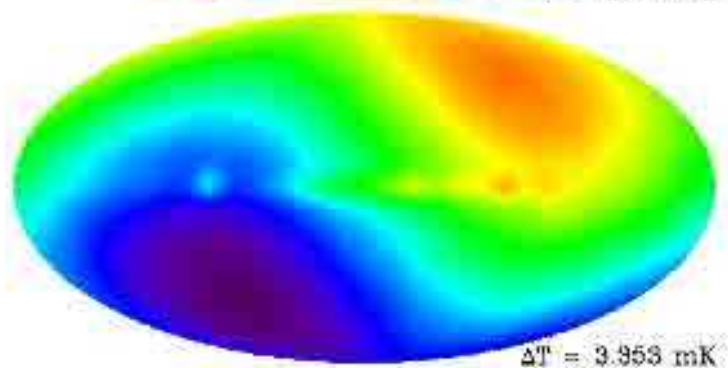
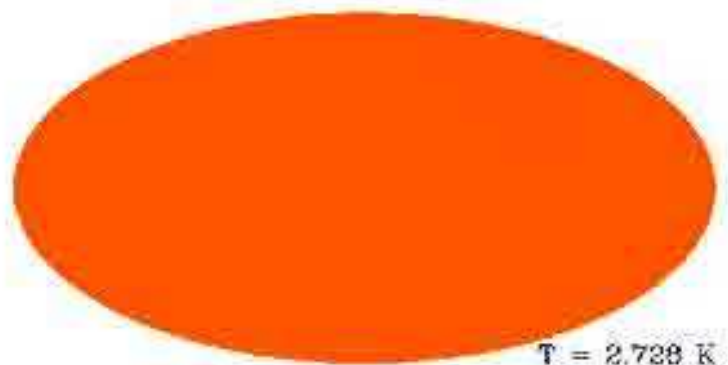
Согласование: $\rho = R_H = R$.

$$W_T = \frac{U_T^2 R}{(R + R_H)^2} = \kappa T \Delta f$$

Тепловая мощность:

Условие обнаружения: $U_{\text{СИГН}}^2 > U_T^2$, или $W_{\text{СИГН}} > W_T$.

Если диаграмма вне ярких радиоисточников, то W_T соответствует $T \simeq 3^\circ\text{K}$ — реликтовый э.м. шум.



Эквивалентная шумовая температура усилителя

Пусть все согласовано. Выходное напряжение:

$$U_{\text{ВЫХ}}^2 = K^2 \cdot 4k(T_{\text{ВХ}} + T_y) R_{\text{ВХ}} \Delta f,$$

$$F = \left(\frac{U_s}{U_n} \right)_{\text{ВХОД}}^2 / \left(\frac{U_s}{U_n} \right)_{\text{ВЫХОД}}^2 = \frac{T_{\text{ВХ}} + T_y}{T_{\text{ВХ}}} = 1 + \frac{T_y}{T_{\text{ВХ}}}$$

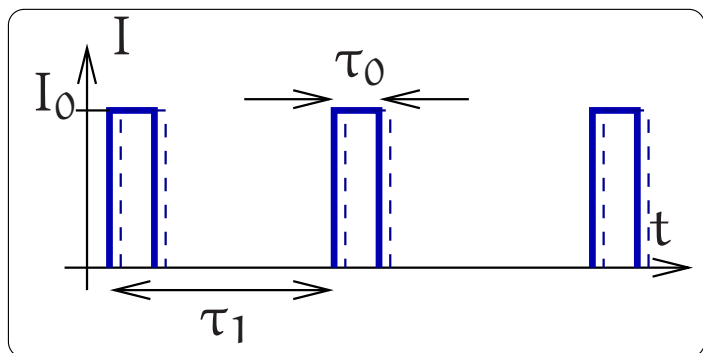
F — коэффициент шума усилителя (“s” — сигнал, “n” — шум (noise)).

Условно принято $T_{\text{ВХ}} = 300^\circ \text{ К}$.

Мазеры (СВЧ): $T_y = 6 \dots 10^\circ \text{ К}$.

Усилитель на полевых транзисторах (FET): $T_y = 1^\circ \text{ К}$ (очень хорошие, при физической $T = 4^\circ \text{ К}$).

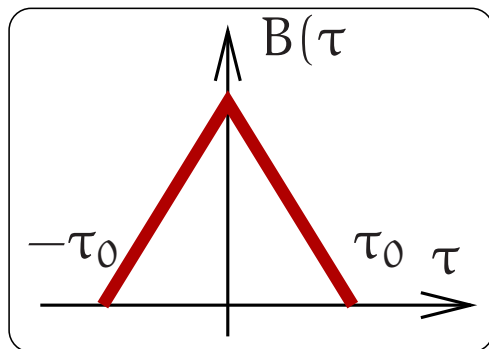
Дробовой шум



$$I_0 = \frac{e}{\tau_0}, \quad \tau_0 \ll \tau_1$$

$$\bar{I} = \frac{e}{\tau_1}.$$

$$\begin{aligned} \overline{I(t)I(t-\tau)} &= B(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I(t)I(t-\tau) dt = \\ &= \frac{1}{T} \times \frac{T}{\tau_1} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} I(t)I(t-\tau) dt. \end{aligned}$$



$$B(\tau) = \frac{I_0^2}{\tau_1} (\tau_0 - |\tau|), \quad \text{если } |\tau| < \tau_0,$$

$$B(\tau) = 0, \quad \text{если } |\tau| > \tau_0.$$

Нас интересуют частоты $\omega \ll 1/\tau_0$, поэтому можно считать, что

$$B(\tau) \Rightarrow \delta(\tau) \times \int_{-t_0}^{t_0} B(\tau') d\tau' = \frac{I_0^2 \tau_0^2}{\tau_1} \delta(\tau) = \frac{e^2}{\tau_1} \delta(\tau)$$

Рассчитываем спектральную плотность:

$$S_{\text{др}}(\omega) = 4 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 4 \times \frac{1}{2} \times e \times \frac{e}{\tau_1} = 2e\bar{I},$$

$$\Delta I^2 = S_{\text{др}}(\omega) \cdot \frac{\Delta \omega}{2\pi} = 2e\bar{I} \Delta f.$$

Это есть

теорема Шоттки: $S_{\text{др}}(\omega) = 2e\bar{I}$

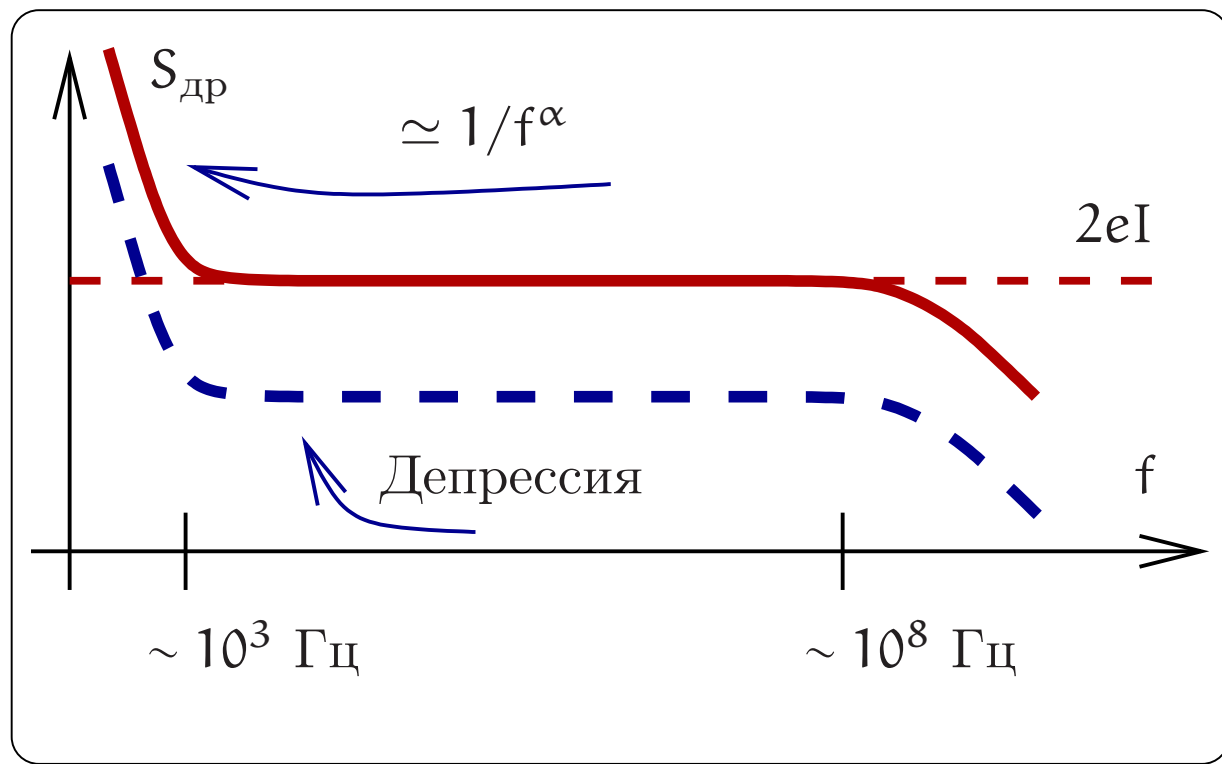
Условия вывода теоремы Шоттки:

- Малое время τ_0 “импульса тока” — $\omega\tau_0 \ll 1$.
Если $\omega\tau_0 \geq 1$, то $S_{\text{др}}(\omega)$ меньше (!).
- Нет корреляции между зарядами.
(На самом деле из-за кулоновского отталкивания есть депрессия дробового шума).
- Нет сгустков зарядов.
(На самом деле есть — спектральная плотность $S_{\text{др}}(\omega)$ растет на низких частотах).

Обобщенная формула теоремы Шоттки:

$$S_{\text{др}} = \beta(f) \Gamma \times 2e\bar{I}, \quad \beta(f) = \frac{1}{f^\alpha}, \quad \alpha \simeq 1 \quad f < 10^3 \Gamma_{\text{ц}},$$

$$\beta(f) \simeq 0.5 \quad \text{при} \quad f \simeq 1/\tau_0, \quad 0.05 < \Gamma \leq 1.$$



Расписание контрольных по радиоп физике. 1 поток. 2010 г.

201 гр. Чтв. 13 мая, 15.15 - 17.00, ауд. 1-31

202 гр. Чтв. 13 мая, 15.15 - 17.00, ауд. 5-52

203 гр. Чтв. 13 мая, 8.55 - 10.35, ауд. 5-68

204 гр. Чтв. 13 мая, 13.25 - 15.35, ауд. 5-46

205 гр. Срд. 12 мая, 17.00 - 18.40, ауд. 5-49

206 гр. Чтв. 13 мая, 17.00 - 18.40, ауд. 5-37

207 гр. Чтв. 13 мая, 17.00 - 18.40, ауд. 5-51

208 гр. Срд. 12 мая, 17.00 - 18.40, ауд. 5-50

209 гр. Чтв. 13 мая, 8.55 - 10.35, ауд. 5-37

210 гр. Срд. 12 мая, 15.15 - 17.00, ауд. 5-35

220 гр. Срд. 12 мая, 15.15 - 17.00, ауд. 5-37