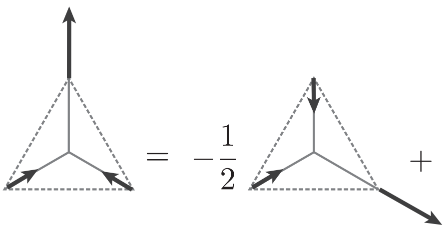
Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова
Физический факультет

А.С. Сергеев

Теория представлений в физике колебаний



Москва
2020

Рекомендовано к изданию Ученым советом Физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Рецензенты:
д.ф.-м.н., проф. С.С. Кротов (МГУ им. М.В. Ломоносова)
к.ф.-м.н. К.В. Антипин (МГУ им. М.В. Ломоносова)

А.С. Сергеев. Теория представлений в физике колебаний: учебное пособие / А.С. Сергеев — М.: Издательский отдел Физического факультета МГУ, 2020 — 61 с.: ил.

В учебном пособии изложены основы теории линейных представлений конечных групп. Рассмотрены примеры применения теоретико-групповых методов в задачах о колебаниях симметричных систем и простейших моделях квантовой механики. Пособие содержит большое количество оригинальных упражнений, последовательное выполнение которых обеспечит успешное овладение материалом. Рекомендовано для студентов, аспирантов и начинающих научных сотрудников.

Отпечатано в отделе оперативной печати Физического факультета МГУ.

Версия от 30 октября 2020 г.

Содержание

1 Введение

Симметрия играет важную роль во многих явлениях природы, и нередко составляет основу их физического описания. Например, в физике высоких энергий уравнения должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца, что существенно влияет на классификацию элементарных частиц. Если перейти из вакуума в кристалл, симметрия задачи понизится: пространство перестанет быть однородным и изотропным. Свойства электронов в кристалле во многом определяются симметрией периодического потенциала, создаваемого кристаллической решеткой. Так, симметрия задает кратность вырождения уровней энергии в особых точках импульсного пространства. Подобным образом симметрия проявляется уже и в простейших классических задачах, таких как описание колебательных систем со многими степенями свободы. Известно, что у пары одинаковых маятников, связанных пружиной, есть две собственные моды: симметричная (колебания в противофазе) и антисимметричная (синфазные колебания). Однако обобщение таких "соображений симметрии" на случай трех одинаковых грузов, связанных пружинами, не говоря о более сложных физических задачах, требует математического аппарата теории групп и теории представлений.

В каждом из приведенных выше примеров симметрия участвует дважды: во-первых, как набор преобразований, относительно которых инварианта физическая система, то есть ее уравнения движения; во-вторых, как ограничения на возможные состояния системы, или решения уравнений. Набор таких преобразований системы называют группой симметрии, а действие группы на пространстве состояний — ее представлением. Если известна группа симметрии системы, методы теории представлений позволяют существенно упростить поиск решений и дают их классификацию по типам симметрии.

Цель данного пособия — познакомить читателей с основами теории групп и теории представлений, а также показать, как они применяются в физических задачах. Изложение теории ведется в математическом стиле. С одной стороны, это позволяет показать внутреннюю логику теории, а с другой — подготовить заинтересованного читателя к восприятию математической литературы. В качестве физических примеров рассматриваются колебательные системы со многими степенями свободы и простейшие задачи квантовой механики. В рассказе о физических приложениях значительное внимание уделяется тому, как именно понятия и методы теории представлений стыкуются с алгоритмом решения физической задачи. Изучение этого материала позволит читателю увидеть подобную схему в применении теории групп к другим физическим ситуациям.

Освоение курса не требует предварительных знаний теории групп, но предполагается, что читатель прошел курс линейной алгебры (и знаком с векторными пространствами, линейными отображениями и их матрицами). Желательно знакомство с теорией колебаний систем со многими степенями свободы и знание основ квантовой механики. **Полужирным** шрифтом в тексте выделены первые упоминания понятий, сопровожденные их определениями. Треугольником $\triangleright$ обозначены упражнения. Выполнение упражнений является важнейшей частью изучения материала.

При подготовке пособия использовались следующие учебники:

- S. Sternberg, *Group theory and physics.* Cambridge University Press, 1994.
- J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups.* Springer-Verlag New York, 1977.

Приведем также список пособий по нескольким учебным курсам, посвященным применению теории групп в физике:

- А.А. Белов, *Теория групп в физике колебаний.* Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2008.
- Е.А. Кузнецов, Д.А. Шапиро, *Методы математической физики. Часть II. Представления групп и их применение в физике. Функции Грина.* Новосибирск, 2014.
- Н.А. Поклонский, *Точечные группы симметрии.* БГУ, Минск, 2003.

2 Множества, функции, группы

2.1 Множества и функции

Множество M можно описать как совокупность различных объектов $\{m_i\}$, называемых **элементами множества**, $m_i \in M$.

Множество из двух элементов **2** выглядит так:

$$\mathbf{2} = \{1, 2\} = \{\bullet, \circ\}.$$

Не имеет значения, как обозначены элементы множества; важно, что они различны.

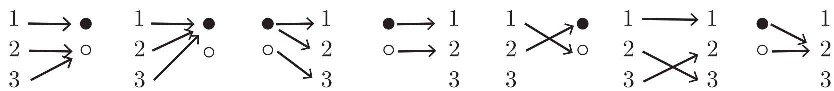
Определим множество положительных чисел

$$\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \,|\, a > 0\}$$

подобная запись читается как “множество действительных чисел a, таких, что $a > 0$”.

Отображением, или **функцией** f из множества M в множество N называют правило, ставящее в соответствие каждому элементу $m \in M$ некоторый элемент $n \in N$.

2.1 ▷ Какие из наборов стрелок задают функции между множествами **2** и **3**?



Функции записывают так:

$$\begin{aligned} f : M &\to N \\ m &\mapsto f(m). \end{aligned}$$

Вторая строка говорит о том, в какой элемент $f(m) \in N$ переходит элемент $m \in M$ под действием функции f. Например, функция косинус является отображением действительной оси на отрезок $[-1; 1]$:

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1; 1] \\ x &\mapsto \cos(x). \end{aligned}$$

Если заданы функции $f : M \to N$ и $g : N \to L$, можно определить их **композицию**:

$$\begin{aligned} g \circ f : M &\to L \\ m &\mapsto g(f(m)). \end{aligned}$$

2.2 ▷ Найдите композицию каких-либо двух функций из рисунка выше.

Рассмотрим множество $\operatorname{End}(M)$ всех отображений множества M в себя:

$$\operatorname{End}(M) = \{f : M \to M\}.$$

Одним из элементов $\operatorname{End}(M)$ является **тождественное отображение** id_M:

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_M : M &\to M\\ m &\mapsto m.\end{aligned}$$

2.3 ▷ Найдите композиции $f \circ \mathrm{id}_M$ и $\mathrm{id}_N \circ f$ некоторой функции $f : M \to N$ с тождественными отображениями.

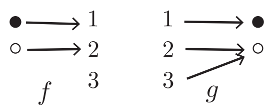
2.4 ▷ Найдите $\operatorname{End}(\mathbf{2})$, то есть все отображения множества из двух элементов в себя.

Пусть $f : M \to N$ — некоторая функция. Если существует такая функция $g : N \to M$, что выполнены условия

$$g \circ f = \mathrm{id}_M \qquad f \circ g = \mathrm{id}_N,$$

то ее называют **обратной** к f и обозначают $g = f^{-1}$. В этом случае функция f является **обратимой** и задает взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств M и N.

2.5 ▷ Пусть $M = \mathbf{2}$, $N = \mathbf{3}$, а функции f и g заданы следующим образом:



Выполнены ли условия из определения обратной функции?

2.6 ▷ У каких из элементов $\operatorname{End}(\mathbf{2})$ есть обратные функции?

2.7 ▷ Пусть $f : M \to N$ и $g : N \to K$ — обратимые функции. Найдите обратную функцию к их композиции: $(g \circ f)^{-1}$.

2.2 Множества со структурой

Нас будут интересовать множества с дополнительной структурой. Роль такой структуры будут играть операции на множестве, подчиняющиеся некоторым правилам. Простейший пример операции — сложение, заданное на множестве действительных чисел.

Обозначим $M \times N$ множество упорядоченных пар (m, n), где $m \in M$ и $n \in N$. Тогда операции на M можно записать как отображения:

$$\begin{aligned} \bullet : M \times M &\to M \\ (m_1, m_2) &\mapsto m_1 \bullet m_2. \end{aligned}$$

2.8 ▷ Запишите в этой форме операцию сложения действительных чисел.

Знакомый пример множества со структурой — векторное пространство. Напомним, что множество V называют **векторным пространством** над полем $\mathbb{R}$, если на V заданы операции сложения элементов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ и операция умножения элемента $\mathbf{v} \in V$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие аксиомам векторного пространства.

Ключевое понятие этого курса, группа, также является множеством с дополнительной структурой. **Группа** $(G, \bullet)$ — множество G, снабженное операцией $\bullet : G \times G \to G$, обладающей следующими свойствами:

1. Существует *нейтральный* элемент e, такой что: $e \bullet g = g \bullet e = g$ для всех $g \in G$.

2. Для любого элемента группы $g \in G$ существует *обратный* элемент $g^{-1} \in G$, такой, что $g \bullet g^{-1} = g^{-1} \bullet g = e$.

3. Операция $\bullet$ *ассоциативна*, то есть $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

Таким образом, для того, чтобы узнать, является ли $(G, \bullet)$ группой, необходимо проверить следующее:

1. Входит ли в G нейтральный элемент?

2. Не выводит ли операция $\bullet$ за пределы множества G?

3. У каждого ли элемента G есть обратный ему элемент G?

4. Является ли операция $\bullet$ ассоциативной?

2.9 ▷ На множестве $\mathrm{End}(\mathbf{2})$ задана операция $\circ$, композиция отображений. Является ли $\mathrm{End}(\mathbf{2})$ группой относительно этой операции?

2.10 ▷ Для набора множеств $\{M\}$ и двух операций $\bullet \in \{+, \cdot\}$ (сложение и умножение чисел) найдите все пары $(M, \bullet)$, являющиеся группами. Множества: действительные числа $\mathbb{R}$, действительные числа без точки ноль $\mathbb{R}^\times$, положительные числа $\mathbb{R}_+$, неотрицательные числа $\mathbb{R}_+^0$, целые числа $\mathbb{Z}$, целые числа без точки ноль $\mathbb{Z}^\times$, пара чисел $\{1, -1\}$.

Подмножество $H \subset G$ называют **подгруппой** группы G, если оно является группой (относительно той же операции).

2.11 ▷ Среди групп, найденных в предыдущем задании, найдите три пары "группа — ее подгруппа".

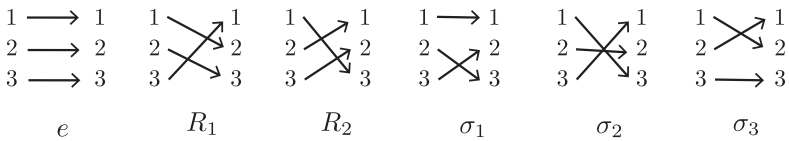
2.3 Группы перестановок

Важный пример группы — **группа перестановок** S_M, состоящая из всех перестановок множества M. **Перестановкой** называют обратимое отображение множества в себя. Групповой операцией в S_M является композиция таких отображений. Также S_M называют **симметрической группой** множества M.

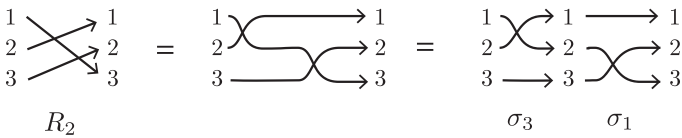
2.12 ▷ Проверьте, что $(S_M, \circ)$ действительно является группой.

2.13 ▷ Опишите группу S_2 перестановок множества **2**.

На рисунке изображены элементы группы S_3 и обозначения для них, которые понадобятся нам в дальнейшем:



Транспозицией называют перестановку, при которой два элемента “меняются местами”, а остальные остаются на месте. Элементы σ_i группы S_3 являются транспозициями. Любая перестановка может быть представлена как композиция транспозиций. Рассмотрим перестановку $R_2 \in S_3$:



Из картинки следует, что $R_2 = \sigma_1 \circ \sigma_3$. Обратите внимание на обратный порядок отображений в композиции: сначала на точку действует σ_3, а затем σ_1. Например, $(\sigma_1 \circ \sigma_3)(1) = \sigma_1(\sigma_3(1)) = \sigma_1(2) = 3$.

Четностью перестановки называют четность числа транспозиций, образующих данную перестановку.

2.14 ▷ Какова четность перестановок, входящих в группу S_3?

3 Отображения между множествами со структурой

3.1 Общий принцип

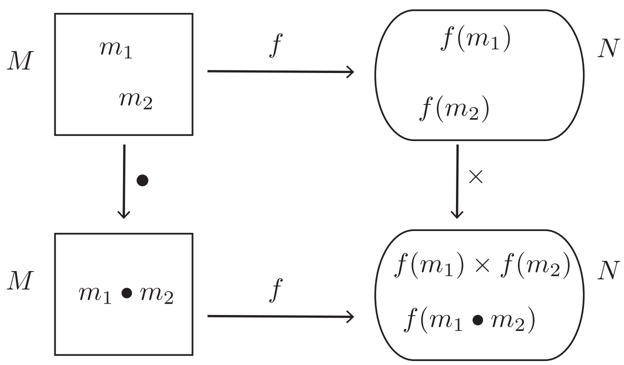
В предыдущем разделе мы познакомились с двумя типами дополнительных структур на множествах — структурой векторного пространства и структурой группы. Существует важный принцип:

> Введение на множествах дополнительной структуры выделяет класс отображений между ними, сохраняющих эту структуру.

Рассмотрим структуру, заданную бинарной операцией. Пусть на множестве M задана операция $\bullet$, а на множестве N — операция $\times$. Тогда говорят, что отображение $f : M \to N$ сохраняет структуру, если для всех пар $m_1, m_2 \in M$ справедливо

$$f(m_1 \bullet m_2) = f(m_1) \times f(m_2).$$

Это уравнение можно наглядно представить в виде **коммутативной диаграммы**:



В левом верхнем углу выбраны два элемента множества M. Если уравнение выполняется, то результат вычислений (движения по стрелкам) не зависит от выбора пути.

3.2 Линейные преобразования

Пусть $(V, +, \cdot)$ и $(W, +, \cdot)$ — действительные векторные пространства. На них заданы операции сложения векторов и умножения вектора на число $\alpha \in \mathbb{R}$. Отображение $a : V \to W$ называется **линейным**, если оно сохраняет структуру векторного пространства:

$$a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = a(\mathbf{v}_1) + a(\mathbf{v}_2) \qquad\qquad a(\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot a(\mathbf{v})$$

для всех $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Линейные отображения пространства V в себя называют **линейными преобразованиями**.

3.2.1 Немного линейной алгебры

Напомним некоторые сведения о линейных преобразованиях, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Как только в векторном пространстве V выбран базис $\{\mathbf{e}_i\}$, любой вектор $\mathbf{v} \in V$ можно однозначно представить как столбец компонент v_i:

$$\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{e}_i v_i.$$

Действие линейного преобразования $a : V \to V$ на векторы описывается умножением матрицы на столбцы:

$$a\mathbf{v} = a\sum_j \mathbf{e}_j v_j = \sum_j (a\mathbf{e}_j) v_j = \sum_{ij} \mathbf{e}_i (a\mathbf{e}_j)_i v_j \equiv \sum_{ij} \mathbf{e}_i A_{ij} v_j$$

Матрицу A называют матрицей линейного преобразования a относительно базиса $\{\mathbf{e}_i\}$. Ее столбцами являются компоненты преобразованных базисных векторов:

$$A = \begin{pmatrix} (a\mathbf{e}_1)_1 & (a\mathbf{e}_2)_1 \\ (a\mathbf{e}_1)_2 & (a\mathbf{e}_2)_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для однозначного задания линейного преобразования достаточно знать, как оно действует на базисные векторы.

3.1 ▷ Найдите матрицу поворота против часовой стрелки на угол $\frac{2\pi}{3}$ в ортонормированном базисе.

Найдем матрицу, соответствующую композиции линейных преобразований:

$$(b \circ a)\mathbf{v} = \sum_{ij} (b\mathbf{e}_i) A_{ij} v_j = \sum_{ijk} \mathbf{e}_k B_{ki} A_{ij} v_j = \sum_{jk} \mathbf{e}_k \left(\sum_i B_{ki} A_{ij} \right) v_j.$$

В последнем выражении в скобках происходит умножение по правилу “строка на столбец”. Таким образом, матрица композиции преобразований равна произведению матриц этих преобразований.

3.2.2 Группы линейных преобразований

Действительные числа можно превратить в группу двумя способами: в качестве групповой операции может выступать сложение или умножение (во втором случае нужно выколоть точку ноль).

Рассмотрим множество $\mathrm{Hom}(V, V)$ всех линейных преобразований V:

$$\mathrm{Hom}(V, V) = \{a : V \to V\}.$$

3.2 ▷ Задайте на $\mathrm{Hom}(V, V)$ операцию сложения и превратите это множество в группу.

С другой стороны, в качестве операции можно выбрать композицию линейных преобразований. В этом случае необходимо исключить из множества $\mathrm{Hom}(V, V)$ все вырожденные, то есть необратимые, линейные преобразования.

3.3 ▷ Приведите примеры вырожденных и невырожденных линейных преобразований плоскости.

Множество невырожденных линейных преобразований пространства V с композицией в качестве операции образуют **общую линейную группу** $GL(V)$ пространства V.

3.4 ▷ Пусть V — действительное одномерное пространство. Убедитесь, что группа $GL(V)$ совпадает с $(\mathbb{R}^{\times}, \cdot)$.

3.3 Гомоморфизмы групп

Применим теперь общий принцип к отображениям между группами. **Гомоморфизм групп** — отображение φ из группы $(G, \bullet)$ в группу $(H, \circ)$, сохраняющее групповую структуру:

$$\varphi(g_1 \bullet g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$$

для всех $g_1, g_2 \in G$.

Важными свойствами гомоморфизма $\varphi : G \to H$ являются сохранение нейтральных и обратных элементов группы:

$$\varphi(e_G) = e_H \qquad \varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}.$$

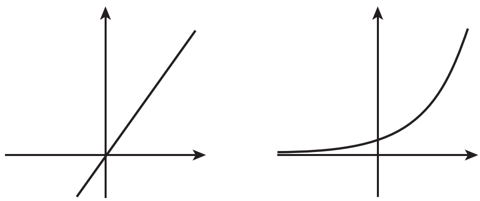
Докажем первое свойство. По определению нейтрального элемента, $\varphi(g) = \varphi(e_G \bullet g)$. Тогда, по определению гомоморфизма,

$$\varphi(g) = \varphi(e_G) \circ \varphi(g).$$

Остается умножить обе части равенства справа на $[\varphi(g)]^{-1} \in H$.

3.5 $\triangleright$ Докажите второе свойство гомоморфизма.

Примерами гомоморфизмов групп являются следующие элементарные функции:



3.6 $\triangleright$ Между какими группами действуют эти отображения? Как запишется определяющее свойство гомоморфизма в каждом случае?

У любой пары групп существует **тривиальный гомоморфизм**:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : G &\to H \\ g &\mapsto e_H. \end{aligned}$$

3.7 $\triangleright$ Проверьте, что φ_1 — гомоморфизм.

3.8 $\triangleright$ Найдите все группы M из задания 2.10, для которых отображение $\varphi : M \to M$, заданное как $\varphi(x) = |x|$, является гомоморфизмом.

Обозначим $\mathbb{Z}_2$ группу $(\{1, -1\}, \cdot)$. Найдем гомоморфизм

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to \mathbb{Z}_2.$$

По определению функции, φ ставит в соответствие каждому целому числу некоторый элемент группы $\mathbb{Z}_2$. Это значит, что множество целых чисел разбивается на два подмножества, одно из которых φ отправит в элемент 1, а второе — в элемент -1.

3.9 $\triangleright$ Какие это подмножества? Закончите построение гомоморфизма.

Теперь построим гомоморфизм $\psi : \mathbb{Z}_2 \to (\mathbb{R}^\times, \cdot)$. Каждому элементу $\mathbb{Z}_2$ нужно сопоставить некоторое действительное число.

3.10 $\triangleright$ Чему равны $\psi(1)$ и $\psi(-1)$?

Если гомоморфизм является взаимно-однозначным отображением, то он называется **изоморфизмом**. Группы, между которыми существует изоморфизм, называют **изоморфными** и обозначают $G \simeq H$.

3.11 ▷ Группа перестановок двух точек S_2 изоморфна одной из групп, упоминавшихся в этом разделе. Найдите ее.

3.12 ▷ Придумайте гомоморфизм $S_2 \to GL(V)$, где V — двумерное векторное пространство.

4 Действия групп

Рассмотрим множество M и его группу перестановок S_M. Для любого элемента $g \in S_M$ и любой точки $m \in M$ известно, в какую точку она перейдет под действием элемента группы. Обобщением этой ситуации является понятие действия некоторой группы G на множестве M: каждому элементу G ставится в соответствие отображение M в себя. При этом необходимо потребовать, чтобы отображения множества были согласованы с умножением в группе.

Действием группы $(G, \bullet)$ на множестве M называют отображение

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \\ (g, m) &\mapsto g \cdot m, \end{aligned}$$

такое, что выполнены условия

$$g \cdot (h \cdot m) = (g \bullet h) \cdot m \qquad\qquad e \cdot m = m,$$

где $h \in G$, а e — нейтральный элемент.

Простейшее действие оставляет на месте все точки множества. Это **тривиальное действие**: $g \cdot m = m$ для всех $g \in G$ и $m \in M$.

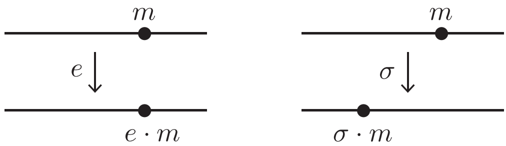
4.1 Действия на геометрических фигурах

В отличие от множества точек, геометрическая фигура обладает дополнительной структурой — формой и размером, то есть информацией о взаимном расположении точек. Мы будем рассматривать только те преобразования плоскости, которые сохраняют эту структуру.

4.1 $\triangleright$ Какие преобразования плоскости сохраняют форму и размер геометрической фигуры?

Если преобразование плоскости переводит фигуру в себя, оно называется **преобразованием симметрии**, или просто **симметрией** фигуры. По аналогии с группой перестановок, все симметрии фигуры F образуют ее **группу симметрии** S_F. Мы не будем различать элементы S_F, отличающиеся лишь действием на точки плоскости, не принадлежащие фигуре.

Зададим действие группы перестановок $S_2 = \{e, \sigma\}$ на отрезке следующим образом: элемент e оставляет отрезок на месте, а элемент σ переворачивает его. Можно сказать, что действие определено как набор преобразований отрезка, заданных перестановками его концов. Действие элементов группы на точку m выглядит так:



Похожим способом можно определить действие группы S_3 на правильном треугольнике.

4.2 ▷ Каким геометрическим преобразованиям треугольника соответствуют перестановки его вершин?

В этих примерах действие группы на фигуре естественным образом задает взаимно-однозначное соответствие между элементами группы и преобразованиями плоскости, входящими в группу симметрии фигуры. При этом умножение элементов группы по построению согласовано с композициями преобразований. Другими словами, имеет место изоморфизм $G \simeq S_F$: группа S_2 изоморфна группе симметрии отрезка C_2, а группа S_3 — группе симметрии правильного треугольника D_3.

В общем случае, действие группы G на фигуре F эквивалентно некоторому гомоморфизму $c : G \to S_F$.

4.3 ▷ Задайте действие группы S_2 на треугольнике.

4.4 ▷ Задайте действие группы S_3 на отрезке. *Подсказка:* рассмотрите трехмерную фигуру, образованную треугольником и перпендикулярным ему отрезком.

4.2 Действие как гомоморфизм

Убедимся, что действие группы G на множестве M соответствует гомоморфизму в симметрическую группу S_M. Для этого нам понадобится новое обозначение $c_g(m) \equiv g \cdot m$. Действие группы можно описать так: каждому элементу $g \in G$ ставится в соответствие функция c_g, переводящая элемент $m \in M$ в $c_g(m) \in M$:

$$\begin{aligned} c : G &\to \mathrm{End}(M) \qquad\qquad & c_g : M &\to M \\ g &\mapsto c_g & m &\mapsto c_g(m) \end{aligned}$$

В новых обозначениях последовательное действие на m элементами h и g становится композицией функций, и условия в определении действия принимают вид:

$$c_g \circ c_h = c_{g \bullet h} \qquad c_e = \mathrm{id}_M\,.$$

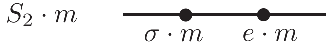
4.5 ▷ Закончите рассуждение. Покажите, что функция c_g — обратимая, и $c : G \to S_M$ является гомоморфизмом из группы G в группу перестановок множества M.

4.3 Орбиты и инвариантные подмножества

Орбитой точки m под действием группы G называют множество

$$G \cdot m = \{g \cdot m | g \in G\}.$$

Пример орбиты для действия S_2 на отрезке приведен на рисунке:



4.6 ▷ Все ли орбиты действия S_2 на отрезке состоят из двух точек? Сколько точек может входить в орбиту действия группы S_3 на треугольнике?

Подмножество $Y \subset M$ называется **инвариантным подмножеством**, если оно переходит в себя под действием группы: $G \cdot Y = Y$, где

$$G \cdot Y = \{g \cdot y \mid g \in G, y \in Y\}.$$

Обратите внимание, что "Y переходит в себя" не означает, что под действием G все точки $y \in Y$ остаются на месте.

4.7 ▷ Пусть $G \cdot m$ и $G \cdot n$ — орбиты некоторых точек $m, n \in M$. Покажите, что либо эти множества не пересекаются, либо совпадают.

4.8 ▷ Является ли орбита $G \cdot m$ инвариантным подмножеством? Всякое ли инвариантное подмножество является орбитой?

4.4 Классы сопряженных элементов

В качестве множества, на котором действует группа, может выступать сама группа. Важным примером такого действия является **сопряжение**:

$$\begin{aligned} c_g : G &\to G \\ h &\mapsto ghg^{-1}. \end{aligned}$$

4.9 ▷ Проверьте, что сопряжение является действием.

Отметим, что теперь групповой структурой обладает и то множество, на котором действует группа. Интересно посмотреть, сохраняет ли действие эту структуру:

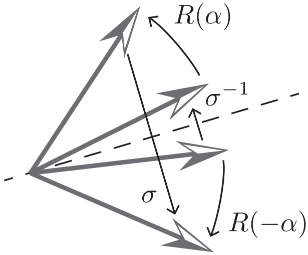
4.10 ▷ Является ли $c_g : G \to G$ гомоморфизмом?

4.11 ▷ *(Для любителей абстракции)* Проверьте, что $c : g \mapsto c_g$ является гомоморфизмом из группы G в группу изоморфизмов из группы G в себя.

Действуя на себе сопряжением, группа разбивается на орбиты. Они называются **классами сопряженных элементов**.

4.12 ▷ Найдите классы сопряженных элементов в группе S_2.

Чтобы найти классы в группе S_3, не выписывая всю таблицу умножения, воспользуемся ее реализацией как группы симметрии правильного треугольника. Сопряженность двух элементов симметрии нетрудно установить из геометрических соображений. Рассмотрим повороты плоскости $R(\alpha)$ и отражения σ относительно прямых:



Из рисунка следует, что $R(-\alpha) = \sigma R(\alpha)\sigma^{-1}$, то есть повороты на некоторый угол по и против часовой стрелки сопряжены отражением. Аналогично можно показать, что если ось симметрии σ_1 переходит в ось σ_2 при повороте $R(\alpha)$, они сопряжены: $\sigma_2 = R(\alpha)\sigma_1 R(-\alpha)$.

4.13 ▷ Нарисуйте картинку, соответствующую второй формуле.

4.14 ▷ Найдите классы сопряженных элементов в группе S_3.

4.15 ▷ Найдите классы сопряженных элементов в группе симметрии квадрата D_4.

5 Представления групп

Пусть на множестве M задано действие группы G. В результате действия элемента $g \in G$, точка $m \in M$ переходит в точку $g \cdot m \in M$, то есть каждый элемент g задает отображение $c_g : M \to M$.

Допустим теперь, что в качестве множества M выступает векторное пространство V. Естественно потребовать, чтобы действие группы сохраняло линейную структуру:

$$g \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = g \cdot \mathbf{v} + g \cdot \mathbf{w} \qquad g \cdot (\alpha \mathbf{v}) = \alpha (g \cdot \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, а $\alpha \in \mathbb{R}$. Другими словами, каждому элементу $g \in G$ соответствует некоторое линейное преобразование $r(g) : V \to V$. Линейные действия групп на векторных пространствах называют представлениями групп. Они лежат в основе многих приложений теории групп к физическим задачам.

5.1 Действие на векторных пространствах

Представлением r группы G на векторном пространстве V называют набор линейных преобразований этого пространства $\{r(g) \,|\, g \in G\}$ таких, что выполнены условия:

$$r(g)r(h) = r(gh) \qquad r(e) = \mathrm{id}_V \, .$$

Иногда представление обозначают как пару (r, V). **Размерностью** представления называют размерность пространства, на котором оно действует.

5.1 ▷ Опишите представление группы G на векторном пространстве V как некоторый гомоморфизм.

Начнем с представлений на одномерном векторном пространстве V. Для всех групп определено **тривиальное представление** r_1, оставляющее на месте все векторы $\mathbf{v} \in V$:

$$r_1(g) = \mathrm{id}_V$$

для всех $g \in G$.

У групп перестановок задано одномерное **знаковое представление** r_s:

$$\begin{aligned} r_s(g)\mathbf{v} &= \mathbf{v}, && \text{если } g \text{ — четная перестановка} \\ r_s(g)\mathbf{v} &= -\mathbf{v}, && \text{если нечетная.} \end{aligned}$$

5.2 ▷ Постройте знаковое представление группы S_3.

5.2 Прямые суммы пространств и представлений

Попробуем теперь придумать двумерное представление группы $S_2 = \{e, \sigma\}$ на плоскости V. По определению представления, $r(e) = \mathrm{id}_V$.

5.3 ▷ Чему равно $[r(\sigma)]^2$? Приведите пример такого преобразования плоскости. Сравните с заданием 3.12.

Нам нужен систематический способ конструировать представления высокой размерности из представлений низкой размерности. Напомним, что **подпространством** векторного пространства V называют подмножество $U \subset V$, являющееся векторным пространством. Если внутри V выбраны два подпространства U_1 и U_2, таких, что

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V \qquad \text{и} \qquad U_1 \cap U_2 = \mathbf{0},$$

пространство V называют их **прямой суммой** и обозначают

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

Любой вектор $\mathbf{v} \in V$ можно единственным образом представить как сумму компонент

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{u}_i \in U_i$.

Пусть в подпространствах U_i заданы линейные преобразования a_i. По линейности, они однозначно задают преобразование a пространства V

$$a\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\mathbf{u}_1 \\ a_2\mathbf{u}_2 \end{pmatrix},$$

которое мы также будем называть прямой суммой преобразований и обозначать $a = a_1 \oplus a_2$.

5.4 ▷ Представьте отражение относительно прямой на плоскости как прямую сумму линейных преобразований. Можно ли подобным образом разложить поворот плоскости?

Если на подпространствах U_i заданы представления r_i группы G, то на пространстве V можно определить **прямую сумму представлений** $r = r_1 \oplus r_2$, заданную линейными преобразованиями вида

$$r(g) = r_1(g) \oplus r_2(g) \qquad \text{для всех } g \in G.$$

Например, пусть U_x и U_y — координатные оси на плоскости V. Зададим представление (r, V) группы S_2 как прямую сумму тривиального (r_1, U_x) и знакового (r_s, U_y) представлений.

5.5 ▷ Как действует на плоскости преобразование $[r_1 \oplus r_s](\sigma)$?

Таким образом, из представлений низкой размерности легко можно сконструировать представление на пространстве высокой размерности. Намного более интересно решение обратной задачи: возможно ли разложить данное представление (r, V) на прямую сумму представлений? И если возможно, то как это сделать? На эти вопросы отвечает теория представлений.

Подпространство $V_1 \subset V$ называют **инвариантным подпространством** представления (r, V), если под действием линейных преобразований $r(g)$ оно переходит в себя, то есть $r(g)\mathbf{v}_1 \in V_1$ для любого $\mathbf{v}_1 \in V_1$ и для всех $g \in G$ (сравните с определением инвариантного подмножества в разделе 4.3).

5.6 ▷ Представление r группы $S_2 = \{e, \sigma\}$ на плоскости задано так: $r(\sigma)$ действует как отражение плоскости относительно прямой. Найдите инвариантные подпространства.

5.7 ▷ Другое представление S_2 получится, если $r(\sigma) = R(\pi)$, поворот плоскости на $180°$. Сколько у этого представления инвариантных подпространств?

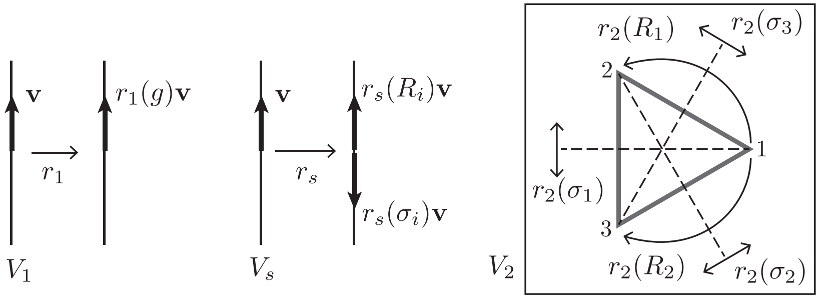
Представление (r, V) называют **неприводимым**, если V не содержит инвариантных подпространств, кроме тривиальных — $\{\mathbf{0}\}$ и V. Одномерные тривиальное и знаковое представления автоматически являются неприводимыми, так как на прямой нет нетривиальных подпространств.

5.8 ▷ Какие неприводимые представления группы S_2 действуют на инвариантных подпространствах в последних двух упражнениях?

Теория представлений утверждает, что любое представление конечной группы можно разложить на прямую сумму ее неприводимых представлений.

5.3 Представления группы S_3

Как и у любой группы перестановок, у группы S_3 заданы тривиальное представление r_1 и знаковое представление r_s. Кроме того, можно рассмотреть действие S_3 на правильном треугольнике как набор линейных преобразований плоскости. Так задается ее **двумерное** неприводимое представление r_2. Действия этих представлений на соответствующих векторных пространствах приведены на рисунке:



Попробуем теперь сконструировать трехмерное представление группы S_3. Пусть r_2 действует на горизонтальной плоскости V_{xy}, а r_1 — на вертикальной оси V_z. Мы получили трехмерное представление $r = r_2 \oplus r_1$ на пространстве $V = V_{xy} \oplus V_z$.

5.9 ▷ Для каждого $g \in S_3$ отображение $r(g)$ является линейным преобразованием трехмерного пространства V. Какие это преобразования?

5.10 ▷ Что изменится, если $r = r_2 \oplus r_s$? Сравните с заданием 4.4.

Одномерные представления заданы на своих пространствах однозначно. В случае двумерного представления ситуация иная: разные способы вложить треугольник в плоскость и разные способы нумерации вершин задают различные наборы линейных преобразований. С другой стороны, эти представления — одинаковые “по сути”. В этом случае говорят об эквивалентных представлениях. Представления (r, V) и (r', W) называются **эквивалентными** $r \sim r'$, если существует невырожденное линейное отображение $\tau : V \to W$, такое, что

$$r'(g)\tau = \tau r(g) \quad \forall g \in G.$$

5.11 ▷ Запишите это условие в виде коммутативной диаграммы.

5.12 ▷ Пусть на пространстве V заданы двумерные представления r_2 и r_2' группы S_3, отличающиеся способом вложения правильного треугольника в плоскость. Найдите отображение τ.

Линейные отображения, удовлетворяющие условию выше (но не обязательно обратимые) называют G-**морфизмами**. Примером такого отображения служит $\tau = 0$. Можно сказать, что представления группы G задают на векторных пространствах V и W дополнительную структуру, а G-морфизмы ее сохраняют.

5.4 Неприводимые представления и физика

В этом разделе мы познакомились с двумя неприводимыми представлениями группы S_2:

r_1 тривиальное:	$r_1(g) = 1$
r_s знаковое:	$r_s(\sigma) = -1$

и с тремя неприводимыми представлениями группы S_3:

r_1 тривиальное:	$r_1(g) = 1$
r_s знаковое:	$r_s(\sigma_i) = -1, \ r_s(R_i) = 1$
r_2 двумерное:	преобразования треугольника

Мы докажем, что этим списком исчерпываются *все* неприводимые представления групп S_2 и S_3. Они являются элементарными строительными блоками, из которых можно построить любое представление (r, V) группы:

$$r = \bigoplus_i r_i^{\oplus m_i} \qquad V = \bigoplus_i V_i^{\oplus m_i}.$$

Здесь m_i — кратность, с которой неприводимое представление r_i входит в r (например, $r_s \oplus r_s = r_s^{\oplus 2}$). Информацию о кратности m_i и расположении инвариантных подпространств V_i внутри V для всех r_i мы будем называть **структурой представления**.

Решение физической задачи часто сводится к поиску собственных векторов и собственных значений некоторого оператора. Если система обладает симметрией, то каждый собственный вектор лежит в подпространстве V_i, на котором действует неприводимое представление группы симметрии. Поэтому знание структуры представления позволяет сильно упростить задачу, частично или полностью заменяя диагонализацию оператора на поиск подпространств V_i. Теория групп дает простые и эффективные алгоритмы для нахождения структуры представления, с которым мы познакомимся позже. А пока попробуем сделать это "методом пристального взгляда":

5.13 ▷ Пусть группа S_2 действует на плоскости как группа перестановок базисных векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (каждая перестановка задает линейное преобразование). Найдите инвариантные подпространства и действующие в них неприводимые представления.

5.14 ▷ То же для действия группы S_3 как группы перестановок векторов ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в трехмерном пространстве.

6 Лемма Шура

Лемма Шура является одним из центральных результатов теории представлений. Она позволяет получить методы разложения некоторого представления на неприводимые. Согласно лемме Шура, всякий ненулевой G-морфизм между пространствами неприводимых представлений группы G является изоморфизмом. Несмотря на абстрактность, это утверждение имеет непосредственные физические следствия. Так, наличие n-мерного неприводимого представления в пространстве решений механической задачи приводит к n-кратному вырождению собственных частот (и вырождению уровней энергии в квантовых системах).

6.1 Ядро и образ гомоморфизма

Пусть $f : M \to N$ — некоторая функция. Множество

$$f^{-1}(n) = \{m \in M \mid f(m) = n\} \subset M$$

называют **полным прообразом** элемента m. **Образом** множества M называется

$$f(M) = \{n \in N \mid f^{-1}(n) \neq \varnothing\} \subset N.$$

Рассмотрим линейное отображение $a : V \to W$. Важную информацию об отображении a несут подпространства, называемые **ядром** и **образом** отображения:

$$\ker a = a^{-1}(\mathbf{0}_W) \subset V \qquad\qquad \operatorname{im} a = a(V) \subset W.$$

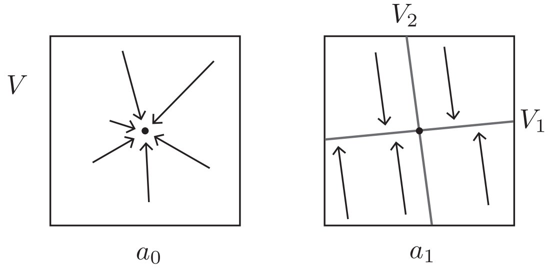
Убедимся, что ядро $\ker a$ является подпространством пространства V. Для этого достаточно проверить, что операции сложения векторов и умножения на число не выводят за пределы $\ker a$. Пусть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \ker a$, то есть $a\mathbf{v}_1 = a\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}_W$. Тогда $a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}_W$, и сумма также лежит в ядре. Для умножения на число получим: $a(\alpha \cdot \mathbf{v}_1) = \alpha \cdot (a\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}_W$, поэтому $\alpha \cdot \mathbf{v}_1 \in \ker a$.

6.1 $\triangleright$ Проверьте, что образ $\operatorname{im} a$ является подпространством пространства W.

Существует связь между размерностями ядра, образа и исходного пространства:

$$\dim\ker a + \dim\operatorname{im} a = \dim V.$$

Чтобы проиллюстрировать это соотношение, рассмотрим три линейных преобразования плоскости: нулевое преобразование a_0, проекцию a_1 на прямую V_1 вдоль прямой V_2 и поворот a_2.



6.2 ▷ Найдите ядро и образ каждого преобразования. Убедитесь, что $\ker a_2 \subset \ker a_1 \subset \ker a_0$.

Похожим способом определяют **ядро** и **образ** гомоморфизма групп $\varphi : G \to H$:

$$\ker \varphi = \varphi^{-1}(e_H) \subset G \qquad\qquad \operatorname{im} \varphi = \varphi(G) \subset H.$$

6.3 ▷ Покажите, что $\ker \varphi$ и $\operatorname{im} \varphi$ являются подгруппами групп G и H, соответственно.

6.4 ▷ Найдите три гомоморфизма $\varphi_i : S_3 \to S_3$, таких, что $\ker \varphi_2 \subset \ker \varphi_1 \subset \ker \varphi_0$.

6.2 Эквивалентность неприводимых представлений

6.5 ▷ Повторите определения инвариантного подпространства, неприводимого представления и G-морфизма.

Лемма 6.1 (Лемма Шура)**.** *Пусть (r_1, V) и (r_2, W) — неприводимые представления группы G, а линейное отображение $\tau : V \to W$ является G-морфизмом. Тогда либо $\tau = 0$, либо τ — изоморфизм.*

Доказательство. Как нетрудно проверить, ядро и образ отображения τ являются инвариантными подпространствами. Поскольку представления неприводимые, возможны два случая:

1. $\ker \tau = V, \quad \operatorname{im} \tau = \mathbf{0}_W \qquad \Rightarrow \qquad \tau = 0.$
2. $\ker \tau = \mathbf{0}_V, \quad \operatorname{im} \tau = W \qquad \Rightarrow \qquad \tau$ — изоморфизм.

□

6.6 ▷ Покажите, что ядро и образ τ являются инвариантными подпространствами.

Если изоморфизм существует, то представления являются эквивалентными: $r_1 \sim r_2$. В противном случае $r_1 \nsim r_2$.

Лемма 6.2 (Следствие леммы Шура)**.** *Если $(r_1, V) \sim (r_2, W)$, то ненулевой G-морфизм $\tau : V \to W$ единственен с точностью до умножения на число. В частности, если $r_1 = r_2$ и $V = W$, он пропорционален тождественному преобразованию* id_V.

Доказательство. Пусть $a : V \to W$ — другой невырожденный G-морфизм. Рассмотрим оператор $\tau^{-1}a$. Пусть $\mathbf{v}$ — его собственный вектор с собственным значением λ. Тогда

$$\tau^{-1}a\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \Rightarrow \qquad (a - \lambda\tau)\mathbf{v} = \mathbf{0}_W.$$

Оператор в круглых скобках является G-морфизмом и имеет нетривиальное ядро. Следовательно, по лемме Шура он равен нулю, и $a = \lambda\tau$.

Пусть теперь представления совпадают, то есть $r_1 = r_2$ и $V = W$. Очевидно, что тождественное преобразование $\tau = \mathrm{id}_V$ является G-морфизмом. Следовательно, любой G-морфизм $a : V \to V$ имеет вид $a = \lambda\,\mathrm{id}_V$. □

6.7 ▷ Почему оператор в круглых скобках равен нулю?

При доказательстве следствия мы воспользовались тем, что у некоторого линейного преобразования есть собственный вектор. Для действительных векторных пространств это не обязательно так (рассмотрите поворот плоскости). С другой стороны, собственные векторы всегда есть у преобразований **комплексного векторного пространства**, в котором числовые множители $\alpha \in \mathbb{C}$. Чтобы пользоваться следствием леммы Шура, далее мы будем считать все векторные пространства (скаляры, компоненты векторов, матричные элементы) комплексными.

Более того, оказывается, что линейные преобразования, входящие в представление, всегда можно сделать унитарными путем подбора скалярного произведения $\langle\,,\,\rangle$. В дальнейшем мы будем предполагать унитарность операторов представлений $r(g)$ и их матриц:

$$\langle r(g)\mathbf{v}, r(g)\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle, \qquad R(g)^{-1} = \overline{R(g)^T}.$$

Здесь $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ — векторы в пространстве представления, $R(g)$ — матрица оператора представления, T означает транспонирование, а черта над символом — комплексное сопряжение.

6.3 Соотношения ортогональности

С помощью леммы Шура мы докажем соотношения ортогональности для элементов матриц неприводимых представлений. Эти соотношения, в свою очередь, лежат в основе методов разложения некоторого представления на неприводимые компоненты.

Напомним, что пространство всех линейных отображений $\mathrm{Hom}(V, W)$ можно рассматривать как группу по сложению. На этом множестве несложно также определить умножение на число, и задать таким образом структуру векторного пространства.

Пусть снова (r_1, V) и (r_2, W) — неприводимые представления группы G. Зададим ее представление r_H на векторном пространстве $H = \mathrm{Hom}(V, W)$ следующим образом:

$$r_H(g)s_0 = r_2(g)s_0r_1(g)^{-1},$$

где $g \in G$, а $s_0 \in H$ — некоторое линейное преобразование.

6.8 ▷ Проверьте, что r_H удовлетворяет определению представления.

Определим следующее линейное преобразование:

$$s = \frac{1}{|G|}\sum_g r_H(g)s_0,$$

где $|G|$ — число элементов группы, или ее **порядок**. Независимо от выбора s_0, преобразование s является G-морфизмом. Чтобы это доказать, достаточно подействовать оператором представления $r_H(h)$, где $h \in G$, на отображение s.

6.9 ▷ Найдите, чему равно $r_H(h)s$. Для этого вам пригодится новая переменная суммирования $k = hg$. Покажите, что суммирование по k эквивалентно суммированию по g. Убедитесь, что s является G-морфизмом.

Пусть в пространствах V и W выбраны базисы. Обозначим R^1, R^2, S^0 и S матрицы операторов представлений и линейных отображений. Применим к отображению s лемму Шура для двух случаев:

1. Представления не эквивалентны: $r_1 \nsim r_2$. В этом случае $s = 0$. Для элементов матриц получим:

$$0 = S_{\alpha\mu} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(r_2(g)s_0r_1(g)^{-1}\right)_{\alpha\mu} =$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{\beta\gamma} R^2_{\alpha\beta}(g)S^0_{\beta\gamma}\ [R^1(g)^{-1}]_{\gamma\mu}$$

2. Представления совпадают: $r_2 = r_1$, $W = V$. Тогда $s = \lambda \, \mathrm{id}_V$.

   6.10 ▷ Покажите, что $\lambda = \frac{1}{n} \operatorname{tr} s_0$, где $n = \dim V$. Для этого нужно взять след от обеих частей последнего равенства.

   Получим:

$$\left(\frac{\operatorname{tr} s_0}{n} \, \mathrm{id}_V \right)_{\alpha\mu} = \frac{1}{n} \left(\sum_{\beta} S^0_{\beta\beta} \right) \delta_{\alpha\mu} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{g \in G \\ \beta\gamma}} R^1_{\alpha\beta}(g) S^0_{\beta\gamma} \; [R^1(g)^{-1}]_{\gamma\mu}$$

Поскольку уравнения выполняются для любого линейного отображения s_0, они принимают вид:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} R^2_{\alpha\beta}(g) \, [R^1(g)^{-1}]_{\gamma\mu} = 0$$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} R^1_{\alpha\beta}(g) \; [R^1(g)^{-1}]_{\gamma\mu} = \frac{1}{n} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}$$

Так как матрицы представлений — унитарные, для их элементов справедливо

$$[R^{-1}]_{\gamma\mu} = \overline{R}_{\mu\gamma}.$$

Заметим, что матричные элементы $R^i_{\alpha\beta}(g)$ задают отображение

$$R^i_{\alpha\beta} : G \to \mathbb{C},$$

то есть являются **функциями на группе**. Функции можно складывать друг с другом и умножать на числа. Несложно проверить, что функции на группе образуют векторное пространство $\mathcal{F}(G)$. Определим в этом пространстве скалярное произведение:

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}.$$

Теперь соотношения ортогональности можно записать в компактной форме:

$$(R^i_{\alpha\beta}, R^j_{\mu\gamma}) = \frac{1}{n_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}.$$

7 Характеры представлений

Пусть представление (r, V) содержит в себе два неприводимых представления, $r = r_1 \oplus r_2$. Тогда, если все базисные векторы лежат в инвариантных подпространствах, матрицы операторов представления будут блочно-диагональными:

$$R(g) = \begin{pmatrix} R^1(g) & 0 \\ 0 & R^2(g) \end{pmatrix}.$$

Такой базис называют **согласованным** с разбиением V на инвариантные подпространства $V_1 \oplus V_2$. Как правило, базис, используемый в формулировке физической задачи, не является согласованным. Это значит, что все элементы матриц представления могут быть отличны от нуля. Но оказывается, что даже в этом случае по виду матриц можно определить структуру представления. Для этого достаточно найти сумму диагональных элементов каждой матрицы.

7.1 Определение и свойства

Характером χ_r представления r называют функцию на группе, равную следу отображения $r(g)$:

$$\chi_r(g) = \operatorname{tr} r(g) \equiv \sum_i R_{ii}(g).$$

Напомним, что след матрицы не зависит от выбора базиса, поэтому можно говорить о следе отображения.

Перечислим некоторые свойства характеров:

1. Характер прямой суммы представлений: $\chi_{r_1 \oplus r_2} = \chi_{r_1} + \chi_{r_2}$
2. Характер сопряженного элемента: $\chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$
3. Характер единичного элемента: $\chi(e) = \dim V$
4. Характер обратного элемента: $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$

7.1 ▷ Докажите свойства характеров. Для свойства 1 запишите матрицы в согласованном базисе. Для свойства 2 воспользуйтесь тем, что $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Для свойства 4 перейдите в базис, в котором матрица $R(g)$ диагональна.

7.2 Ортогональность характеров

7.2.1 Соотношения ортогональности

С помощью соотношений ортогональности для матричных элементов найдем скалярное произведение характеров неприводимых представлений:

$$r_1 \nsim r_2: \quad (\chi_1, \chi_2) = \sum_{\alpha\beta} (R^1_{\alpha\alpha}(g), R^2_{\beta\beta}(g)) = 0$$
$$r_1 = r_2: \quad (\chi_1, \chi_1) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha\beta} (R^1_{\alpha\alpha}(g), R^1_{\beta\beta}(g)) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha\beta} \delta^2_{\alpha\beta} = 1$$

Мы получили, что характеры неэквивалентных неприводимых представлений ортогональны (как векторы в пространстве функций на группе). Норма характера неприводимого представления $||\chi||^2 = 1$. Таким образом, характеры неприводимых представлений образуют ортонормированный набор функций:

$$(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}.$$

7.2.2 Структура представления

Пусть некоторое представление задано как прямая сумма неприводимых представлений:

$$r = \bigoplus_i r_i^{\oplus m_i}.$$

Обозначим χ характер представления r. Поскольку характер прямой суммы представлений равен сумме характеров,

$$\chi = \sum_i m_i \chi_i.$$

Найдем скалярное произведение χ с характером i-го неприводимого представления:

$$(\chi_i, \chi) = m_i.$$

Итак, чтобы найти кратность m_i, с которой неприводимое представление r_i входит в состав r, достаточно вычислить скалярное произведение их характеров.

В качестве примера рассмотрим характеры неприводимых представлений группы S_2, тривиального χ_1 и знакового χ_s. Поскольку представления одномерные, они задаются матрицами 1×1, и след равен самим матрицам. Пусть представление r группы S_2 на двумерном пространстве V задано следующими матрицами:

$$R(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R(\sigma) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

7.2 ▷ Определите кратности m_1 и m_s, вычислив скалярные произведения характера представления r с характерами χ_1 и χ_s.

7.3 Свойства неприводимых представлений

С помощью теории характеров мы получим полезные свойства неприводимых представлений. Это позволит доказать, что у групп S_2 и S_3 нет неприводимых представлений, отличных от рассмотренных ранее.

7.3.1 Критерий неприводимости

7.3 ▷ Покажите, что скалярное произведение характера некоторого представления r с собой равно

$$(\chi_r, \chi_r) = \sum_i m_i^2,$$

где m_i — кратности, с которыми в r входят неприводимые представления.

Такая сумма может быть равна единице только в том случае, если содержит ровно одно отличное от нуля слагаемое, равное единице. Мы получили критерий того, является ли некоторое представление неприводимым:

$$(\chi_r, \chi_r) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{представление } r \text{ является неприводимым.}$$

7.3.2 Размерности неприводимых представлений

Найдем структуру **регулярного представления** r_G группы G, заданного следующим образом. Пусть V — абстрактное векторное пространство размерности $|G|$. Проиндексируем базисные векторы элементами группы: $\{\mathbf{e}_g,\ g \in G\}$. Зададим представление как действие элементов группы на базисные векторы:

$$r_G(g)\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_{gh}.$$

7.4 ▷ Проверьте, что r_G является представлением.

Наша задача — найти характер χ_G регулярного представления. Заметим, что элементы матриц представления равны 0 или 1. Диагональный элемент матрицы $R_G(g)$ равен 1, если

$$1 = [R_G(g)]_{hh} = (r_G(g)\mathbf{e}_h)_h \quad \Leftrightarrow \quad r_G(g)\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_h.$$

7.5 ▷ Закончите рассуждение. Покажите, что характер $\chi_G(g)$ равен нулю на всех элементах группы, кроме единичного, для которого

$$\chi_G(e) = \dim V = |G|.$$

Найдем, сколько раз каждое неприводимое представление r_i содержится в регулярном представлении:

$$(\chi_i, \chi_G) = \frac{1}{|G|}\chi_i(e)\overline{\chi_G(e)} = \dim V_i \equiv n_i.$$

Итак, неприводимое представление r_i содержится в регулярном с кратностью, равной его размерности. Отсюда следует, что сумма квадратов размерностей неприводимых представлений равна порядку группы:

$$\sum_i n_i^2 = |G|,$$

что является существенным ограничением на размерности неприводимых представлений и их количество. Отметим без доказательства, что число неприводимых представлений группы равно числу классов сопряженных элементов.

7.6 ▷ Докажите последнюю формулу, вычислив (χ_G, χ_G) двумя способами.

7.4 Таблицы характеров

7.4.1 Группа S_3

Найдем характер двумерного неприводимого представления r_2 группы S_3. Напомним, что оно содержит повороты на угол $\frac{2\pi}{3}$ и отражения относительно высот правильного треугольника.

7.7 ▷ Запишите матрицу поворота на угол α и найдите ее след.

7.8 ▷ Чему равен след любого отражения плоскости? (Найдите удобный базис.)

В группе S_3 есть три класса сопряженных элементов, мы обозначим их $[e]$, $[R]$ и $[\sigma]$. Поскольку характер не меняется при сопряжении, функции $\chi(g)$ постоянны на классах сопряженных элементов. Таким образом, вся информация о характерах неприводимых представлений группы может быть представлена в виде следующей **таблицы характеров**:

$6S_3$	$[e]$	$2[R]$	$3[\sigma]$
χ_1	1	1	1
χ_s	1	1	-1
χ_2	2	-1	0

Число у названия группы равно ее порядку, а числа у классов — количеству элементов в них. С помощью таблицы несложно проверить свойства неприводимых представлений, рассмотренные выше.

7.9 ▷ Проверьте, что эти представления являются неприводимыми.

7.10 ▷ Докажите, что у группы S_3 нет других неприводимых представлений.

7.4.2 Группа S_2

Пусть r — некоторое представление группы G, а H — ее подгруппа. Из r легко получить представление группы H: достаточно оставить в наборе преобразований $r = \{r(g), g \in G\}$ только те, которые соответствуют элементам подгруппы. Такое представление называют **ограничением** представления r группы G на подгруппу H и обозначают

$$r \downarrow H = \{r(g), g \in H\}.$$

Например, рассмотрим группу $S_2 = \{e, \sigma\}$ как подгруппу в S_3:

$$S_2 = \{e, \sigma_1\} \subset S_3.$$

Ограничением двумерного представления (r_2, V) на подгруппу S_2 будет набор из двух преобразований плоскости:

$$r_2 \downarrow S_2 = \{\mathrm{id}_V, r_2(\sigma_1)\}.$$

Проведем подобную процедуру для всех неприводимых представлений группы S_3. Оставляя в ее таблице характеров только записи, относящиеся к элементам группы S_2, получим:

$2S_2$	$[e]$	$[\sigma]$
χ_1	1	1
χ_s	1	-1
$\chi_2 \downarrow S_2$	2	0

Поскольку $2 = 1^2 + 1^2$, у группы S_2 есть только два неприводимых представления, и оба они одномерные. Двумерное представление $\chi_2 \downarrow S_2$ является приводимым, так как $\frac{1}{2}(2^2 + 0^2) \neq 1$.

7.11 ▷ Представьте третью строку таблицы как линейную комбинацию первых двух. Найдите, какие неприводимые представления содержатся в $\chi_2 \downarrow S_2$.

7.4.3 Группа $\mathbb{Z}_3$

Выберем теперь в S_3 другую подгруппу — набор всех поворотов треугольника, образующих **циклическую группу третьего порядка**

$$\mathbb{Z}_3 = \{e, R_1, R_2\}.$$

В ней нет отражений, и повороты не являются сопряженными элементами. Ограничивая представления группы S_3, получим таблицу:

$3\mathbb{Z}_3$	$[e]$	$[R_1]$	$[R_2]$
χ_1	1	1	1
$\chi_2 \downarrow \mathbb{Z}_3$	2	-1	-1

7.12 ▷ Сколько у группы $\mathbb{Z}_3$ неприводимых представлений и какова их размерность? Является ли $\chi_2 \downarrow \mathbb{Z}_3$ неприводимым?

На первый взгляд, такой ответ противоречит здравому смыслу: у поворотов плоскости нет инвариантных подпространств, и представление $\chi_2 \downarrow \mathbb{Z}_3$ должно быть неприводимым. Дело в том, что здесь проявились отличия между действительными и комплексными представлениями. Напомним, что теория характеров построена для комплексных векторных пространств.

Рассмотрим матрицу поворота на угол α

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

как матрицу преобразования комплексного двумерного пространства V (если выбран базис, то $V \simeq \mathbb{C}^2$).

7.13 ▷ Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $R(\alpha)$.

Так как собственные векторы не зависят от α, они задают инвариантные подпространства для всех поворотов. В этих подпространствах действуют одномерные представления группы $\mathbb{Z}_3$, заданные собственными значениями. Таким образом, таблица характеров неприводимых представлений имеет вид:

$3\mathbb{Z}_3$	$[e]$	$[R_1]$	$[R_2]$
χ_1	1	1	1
χ_+	1	$e^{i\alpha}$	$e^{-i\alpha}$
χ_-	1	$e^{-i\alpha}$	$e^{i\alpha}$

Здесь $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Теперь противоречий с теорий характеров нет.

7.14 ▷ С помощью таблицы характеров найдите, какие неприводимые представления входят в $\chi_2 \downarrow \mathbb{Z}_3$.

7.4.4 Группа симметрии ромба V_4

Найдем таблицу характеров неприводимых представлений группы симметрии ромба V_4, также известной как группа Кляйна четвертого порядка. В группу, помимо единичного элемента, входят два отражения относительно диагоналей ромба и их композиция — инверсия, или поворот на π.

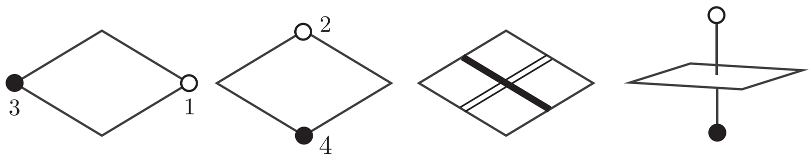
7.15 ▷ Найдите классы сопряженных элементов в этой группе.

Единственный способ представить порядок группы как сумму квадратов размерностей неприводимых представлений имеет вид

$$4 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2.$$

7.16 ▷ Почему формула $4 = 2^2$ не подходит?

Чтобы найти представления, рассмотрим действие группы на элементах ромба. Для этого нам нужно найти такие точки (или множества точек), которые переходят друг в друга под действием всех преобразований симметрии ромба. Например, группа меняет местами точки 1 и 3, то есть каждому элементу V_4 можно сопоставить перестановку из S_2. По построению, таблицы умножения групп будут согласованы, и мы получаем гомоморфизм $\varphi_{13} : V_4 \to S_2$.



Напомним, что представление группы на пространстве V можно рассматривать как гомоморфизм $G \to GL(V)$ в группу невырожденных линейных преобразований V. Пусть (r_s, V) — знаковое представление группы S_2. Рассмотрим композицию:

$$V_4 \xrightarrow{\varphi_{13}} S_2 \xrightarrow{r_s} GL(V).$$

Поскольку композиция гомоморфизмов также является гомоморфизмом, $r_{13} = r_s \circ \varphi_{13}$ задает одномерное представление группы V_4.

Также в качестве множества, на котором действует группа, можно рассмотреть пару точек 2 и 4 и пару отрезков, соединяющих центры сторон. Действие на отрезках эквивалентно действию на концах перпендикуляра к ромбу, заданному поворотами конструкции на правом рисунке. Получаем следующую таблицу характеров:

$4V_4$	$[e]$	$[\sigma_1]$	$[\sigma_2]$	$[R]$
χ_1	1	1	1	1
χ_{13}	1	-1	1	-1
χ_{24}	1	1	-1	-1
$\chi_\perp$	1	-1	-1	1

7.17 $\triangleright$ Найдите подобным способом таблицу характеров неприводимых представлений группы симметрии квадрата D_4.

8 Проекционные операторы

Напомним, что структура представления (r, V) определяется кратностью m_i, с которой неприводимые представления r_i входят в r, а также разбиением V на их инвариантные подпространства:

$$V = \bigoplus_i V_i^{\oplus m_i}.$$

Характеры позволяют найти m_i, но ничего не говорят о расположении подпространств $V_i \subset V$. Эту информацию можно получить с помощью проекционных операторов.

8.1 Определение и примеры

Начнем с простого примера. Пусть на плоскости действует представление группы S_2:

$$r(\sigma)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \qquad r(\sigma)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1.$$

8.1 ▷ Запишите матрицы представления и определите, какие неприводимые представления в нем содержатся.

Попробуем теперь найти инвариантные подпространства. Поскольку $r(\sigma)$ меняет векторы местами, имеет смысл составить их симметричную и антисимметричную комбинации.

8.2 ▷ Примените $r(\sigma)$ к сумме и разности базисных векторов.

Итак, $r = r_1 \oplus r_s$, и мы нашли, как инвариантные подпространства V_1 и V_s вложены в пространство представления V.

В более сложных случаях для этого можно воспользоваться **проекционными операторами**. Пусть (r, V) — представление группы G. Определим следующий оператор на V:

$$\mathsf{P}_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \overline{\chi_i(g)} r(g),$$

где χ_i — характер неприводимого представления r_i, а n_i — его размерность. Мы покажем, что для любого $\mathbf{v} \in V$ результат действия $\mathsf{P}_i\mathbf{v}$ будет лежать в подпространстве неприводимого представления V_i.

8.3 ▷ Найдите проекцию $\mathsf{P}_s\mathbf{e}_1$ на подпространство знакового представления в примере выше.

8.4 ▷ Рассмотрите двумерное представление группы $\mathbb{Z}_3$, заданное как набор поворотов плоскости. Найдите проекцию $\mathsf{P}_+\mathbf{e}_1$ на подпространство представления χ_+.

8.2 Доказательство формулы для P_i

Чтобы доказать, что P_i действительно проецирует на V_i, нам понадобится следующий результат. Пусть (r_i, V_i) — неприводимое представление, а f — функция на группе, постоянная на классах сопряженных элементов (или **классовая функция**). Определим оператор r_i^f, действующий на V_i:

$$r_i^f = \frac{n_i}{|G|} \sum_g f(g) r_i(g).$$

Тогда

$$r_i^f = (f, \overline{\chi_i}) \operatorname{id}_{V_i}.$$

8.5 ▷ Покажите, что r_i^f является G-морфизмом. Для этого вычислите произведение $r_i(h) r_i^f r_i(h)^{-1}$. Перейдите к новой переменной $k = hgh^{-1}$ и воспользуйтесь тем, что f — классовая функция.

8.6 ▷ По следствию леммы Шура, $r_i^f = \lambda \operatorname{id}_{V_i}$. Найдите значение λ, взяв след от последнего равенства.

Теперь рассмотрим оператор P_i, действующий в пространстве V представления r общего вида:

$$\mathsf{P}_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \overline{\chi_i(g)} \Big(\bigoplus_j r_j^{\oplus m_j} \Big)(g).$$

Меняя местами суммирование по группе и прямую сумму представлений, получим в каждом подпространстве оператор вида r_j^f, где $f = \overline{\chi_i}$. Таким образом,

$$\mathsf{P}_i = \bigoplus_j \big((\overline{\chi_i}, \overline{\chi_j}) \operatorname{id}_{V_i} \big)^{\oplus m_j} = \bigoplus_j \big(\delta_{ij} \operatorname{id}_{V_i} \big)^{\oplus m_j}.$$

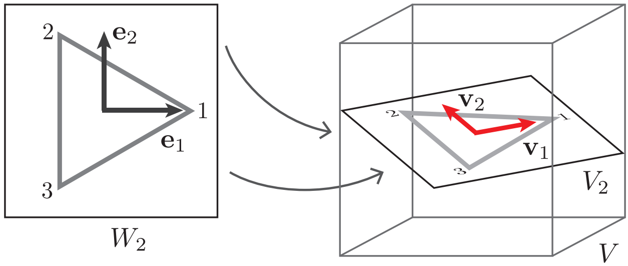
Итак, оператор P_i действует как тождественное преобразование на пространствах V_i и обращает в ноль все векторы других пространств V_j, $j \neq i$.

Заметим, что P_i является проекцией на пространство $V_i^{\oplus m_i}$, образованное всеми подпространствами, в которых действуют r_i. Дальнейшее разбиение на V_i не может быть задано однозначно. Например, вспомните представление $r = r_s \oplus r_s$ группы S_2 на плоскости: любая прямая, проходящая через начало координат, является инвариантным подпространством V_s.

8.3 Представления высокой размерности

Пусть в состав представления (r, V) группы S_3 входит двумерное представление r_2, образованное симметриями правильного треугольника. Проекционный оператор P_2 позволит определить, как плоскость V_2 вложена в V. Но для решения физических задач этого не всегда достаточно: необходимо также найти, как именно внутри плоскости V_2 расположен правильный треугольник.

Для этого рассмотрим некоторую стандартную копию (r_2, W_2) двумерного представления. Выберем в пространстве W_2 базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Мы знаем, как базисные векторы расположены относительно треугольника, и можем найти матрицы линейных преобразований $r_2(g)$ в этом базисе. Оказывается, с помощью этой информации в пространстве V можно найти пару векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, которые будут лежать в подпространстве $V_2 \subset V$, причем они будут расположены относительно треугольника так же, как и векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ внутри стандартной копии.



Рассмотрим эту ситуацию в общем виде. Пусть (r_i, W_i) — стандартная копия неприводимого представления r_i с размерностью $n_i > 1$. Пусть в пространстве W_i задан базис $\{\mathbf{e}_\alpha\}$, и $R^i(g)$ являются матрицами операторов $r_i(g)$ в этом базисе:

$$r_i(g)\mathbf{e}_\alpha = \sum_\beta \mathbf{e}_\beta R^i_{\beta\alpha}(g).$$

Наша задача — найти внутри любого представления (r, V), содержащего (r_i, V_i), набор векторов $\{\mathbf{v}_\alpha\}$, которые преобразуются под действием r так же, как векторы $\{\mathbf{e}_\alpha\}$.

Определим на пространстве W_i следующий оператор:

$$\mathsf{P}^i_{\alpha\beta} = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \overline{R^i_{\alpha\beta}(g)} r_i(g).$$

Посмотрим, как он действует на базисные векторы:

$$\mathsf{P}^i_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\gamma = \delta_{\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha.$$

8.7 ▷ Получите эту формулу с помощью соотношений ортогональности для матричных элементов.

Таким образом, оператор $\mathsf{P}^i_{\alpha\beta}$ переводит вектор $\mathbf{e}_\beta$ в вектор $\mathbf{e}_\alpha$ и равен нулю на всех остальных базисных векторах. В частности, оператор $\mathsf{P}^i_{\alpha\alpha}$ проецирует любой вектор в W_i на подпространство, заданное базисным вектором $\mathbf{e}_\alpha$. Отметим, что мы определили оператор $\mathsf{P}^i_{\alpha\beta}$ с помощью матричных элементов представления внутри стандартной копии W_i. Затем мы рассмотрели действие $\mathsf{P}^i_{\alpha\beta}$ на базисные векторы в этом же пространстве.

Похожим образом можно задать оператор на пространстве (r, V):

$$\mathsf{P}^i_{\alpha\beta} = \frac{n_i}{|G|}\sum_g \overline{R^i_{\alpha\beta}(g)}\, r(g).$$

Как и раньше, $\mathsf{P}^i_{\alpha\beta}$ является суммой линейных преобразований с числовыми коэффициентами. В качестве множителей по-прежнему выступают элементы матриц представления в стандартной копии. Но линейные преобразования теперь берутся из представления r на пространстве V.

Пусть $\mathbf{v} \in V$ — такой вектор, что проекция $\mathsf{P}^i_{\alpha\alpha}\mathbf{v}$ отлична от нуля. Посмотрим, как на нее действует оператор $r(h)$ для некоторого элемента $h \in G$:

$$r(h)(\mathsf{P}^i_{\alpha\alpha}\mathbf{v}) = \frac{n_i}{|G|}\sum_g \overline{R^i_{\alpha\alpha}(g)}\, r(hg)$$

8.8 ▷ Перейдите к новой переменной суммирования $k = hg$ и представьте элемент $R^i_{\alpha\alpha}(h^{-1}k)$ как результат умножения матриц.

Окончательно получаем:

$$r(h)(\mathsf{P}^i_{\alpha\alpha}\mathbf{v}) = \sum_\beta (\mathsf{P}^i_{\beta\alpha}\mathbf{v}) R^i_{\beta\alpha}(h).$$

Таким образом, мы нашли набор векторов в пространстве представления r

$$\{\mathsf{P}^i_{11}\mathbf{v}, \mathsf{P}^i_{21}\mathbf{v}, \ldots\} \in V_i \subset V,$$

которые преобразуются под действием группы, как базисные векторы в стандартной копии

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\} \in W_i.$$

9 Представления на пространствах функций

Многие физические системы можно описать с помощью линейных уравнений, или линейных операторов на некотором пространстве. Элементы этого пространства соответствуют состояниям системы. Например, моды механической колебательной системы живут в пространстве смещений, а состояния квантовой системы — в гильбертовом пространстве волновых функций. Если система обладает симметрией, то на векторном пространстве ее состояний действует представление группы симметрии.

В этом разделе мы познакомимся с математическим прототипом такой ситуации. Мы увидим, как действие группы на множестве порождает представление группы на векторном пространстве функций, заданных на этом множестве.

9.1 Скалярные функции

Пусть группа G действует на множестве M. Напомним, что все функции на M образуют векторное пространство $\mathcal{F}(M)$:

$$\{f : M \to \mathbb{C}\} = \mathcal{F}(M).$$

Зададим **представление G на пространстве функций** следующим образом:

$$[r_M(g)f](m) = f(g^{-1} \cdot m).$$

Выражение в квадратных скобках — функция, полученная из f в результате действия $r_M(g)$.

9.1 ▷ Проверьте, что r_M является представлением. Найдите, чему равно значение $[r_M(h)\psi](m)$, где $\psi = [r_M(g)f]$.

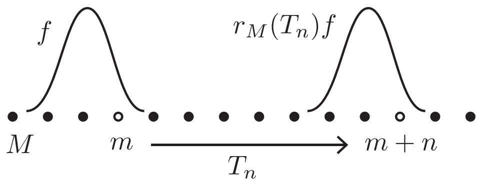
Например, пусть M является множеством целых чисел. Определим на M действие группы $G = (\mathbb{Z}, +)$ как набор трансляций. Элемент $T_n \in G$ действует на точку $m \in M$ так:

$$T_n \cdot m = m + n.$$

Теперь посмотрим, как группа действует на функцию f:

$$[r_M(T_n)f](m) = f((T_n)^{-1} \cdot m) = f(T_{-n} \cdot m) = f(m - n).$$

Таким образом, под действием элемента группы, сдвигающего точки направо, функция смещается в ту же сторону.



Как и любой вектор, функцию f можно записать в виде линейной комбинации **базисных функций** e_m:

$$f = \sum_m \mathrm{e}_m f(m).$$

Функция e_m равна единице на элементе m и равна нулю на всех остальных элементах множества M, то есть $\mathrm{e}_m(n) = \delta_{mn}$.

Из разложения по базису видно, что значение функции $f(m)$ в некоторой точке имеет смысл компоненты вектора f. Следовательно, определение $r_M(g)$ выше говорит о преобразовании компонент векторов. Посмотрим теперь, как оператор $r_M(g)$ действует на базисные векторы:

$$r_M(g)\mathrm{e}_m = \mathrm{e}_{g\cdot m}.$$

9.2 ▷ Докажите эту формулу. Какой вид имеют матрицы представления r_M в базисе $\{\mathrm{e}\}$?

9.3 ▷ Убедитесь, что значение характера $\chi_M(g)$ представления r_M равно числу неподвижных точек, для которых $g \cdot m = m$.

9.4 ▷ Регулярное представление r_G группы можно интерпретировать как представление в пространстве функций $\mathcal{F}(G)$. Каким действием оно порождается?

9.2 ▷ Практикум: представление группы S_3

Группа S_3 действует на множестве из трех точек $M = \{1, 2, 3\}$ перестановками. Обозначим $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ базис в пространстве функций на M. Цель этого задания — найти структуру представления $(r_M, \mathcal{F}(M))$ с помощью характеров и проекционных операторов. Воспользуйтесь обозначениями для элементов группы из раздела 2.3.

9.2.1 Неприводимые представления

1. Найдите характер представления r_M.

2. С помощью таблицы характеров определите, какие неприводимые представления группы S_3 содержатся в r_M.

9.2.2 Инвариантные подпространства

1. Найдите одномерное инвариантное подпространство с помощью проекционного оператора. Выберите в нем некоторый вектор.

2. Запишите матрицы двумерного неприводимого представления (r_2, W_2) группы S_3. Выберите базисные векторы, как показано на рисунке в разделе 8.3.

3. Действуя на вектор $\mathrm{e}_1 \in \mathcal{F}(M)$ проекционными операторами, найдите два вектора, которые преобразуются, как базисные векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ неприводимого представления:
$$\{\mathsf{P}^2_{11}\mathrm{e}_1, \mathsf{P}^2_{21}\mathrm{e}_1\}.$$

4. Нормируйте три полученных вектора $\{\mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ на единицу. Убедитесь, что они ортогональны.

9.2.3 Переход в хороший базис

1. Составьте матрицу B перехода из базиса $\{\mathrm{e}\}$ в базис $\{\mathbf{b}\}$. Для этого запишите рядом три столбца компонент векторов $\{\mathbf{b}\}$.

2. Запишите обратную матрицу B^{-1}. Поскольку B ортогональная, для этого достаточно ее транспонировать.

3. Найдите матрицу какого-либо оператора представления r_M в новом базисе, например, $r_M(\sigma_2)$:
$$B^{-1}R_M(\sigma_2)B,$$
где $R_M(\sigma_2)$ — матрица оператора в базисе $\{\mathrm{e}\}$.

9.3 Векторные функции. Пространство смещений

Выше мы рассмотрели скалярные функции, которые сопоставляют каждой точке множества M число. В теории колебаний естественным образом возникают **векторные функции**, принимающие значения в векторном пространстве.

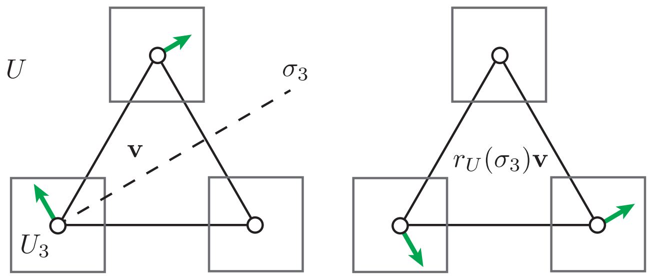
Рассмотрим систему из трех грузов, лежащих в одной плоскости и соединенных одинаковыми пружинами. Группа симметрии правильного треугольника D_3 действует на множестве грузов перестановками. Нас интересует представление группы, которое возникает в **пространстве смещений** грузов из положения равновесия. Обозначим это пространство U.

Смещение каждого груза задается двумерным вектором, причем смещения разных грузов не зависят друг от друга. Таким образом, пространство смещений можно представить как прямую сумму:

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3,$$

где U_i — пространство смещений i-го груза. Вектор $\mathbf{v} \in U$ описывает отклонение всей системы из положения равновесия и содержит три векторные компоненты $\mathbf{v}_i \in U_i$. Размерность пространства смещений $\dim U = 6$.

Действие группы симметрии на элемент U определяется из физических соображений: отклоним грузы из положения равновесия на вектор $\mathbf{v} \in U$ и применим к системе преобразование симметрии $g \in D_3$. В результате получится новое смещение $r_U(g)\mathbf{v}$:



Отметим, что оператор r_U можно представить как набор линейных отображений между векторными пространствами смещений отдельных грузов U_i. Характер $\chi(g)$ будет определяться суммой следов отображений $U_i \to U_i$ для грузов, остающихся на месте под действием g.

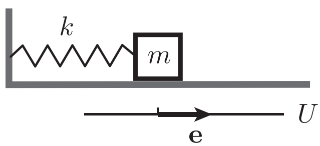
9.5 ▷ Не выписывая матрицы, найдите характер представления (r_U, U) для системы, изображенной на рисунке.

10 Колебания симметричных систем

Если физическая задача обладает симметрией, теория групп позволяет упростить поиск решений и классифицировать их по типу симметрии. В некоторых случаях задача может быть полностью решена методами теории групп (прямое решение исходных уравнений, как правило, намного сложнее). В этом разделе мы увидим, как теория характеров, проекционные операторы и лемма Шура применяются в контексте колебательных систем со многими степенями свободы.

10.1 Оператор ускорения и нормальные моды

Вспомним, как решается задача о колебаниях груза массы m на пружине жесткости k (трение учитывать не будем).



Смещения груза из положения равновесия зададим с помощью вектора $\mathbf{x}$, лежащего в одномерном векторном пространстве U с базисом $\mathbf{e}$. Если колебания малые, по закону Гука сила будет пропорциональна смещению с обратным знаком:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}.$$

По закону Ньютона, $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$. Отсюда получаем **уравнение колебаний**:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{m}\mathbf{x},$$

то есть ускорение груза направлено против его смещения. Решением является гармоническая функция $\mathbf{x} = \mathbf{e}\cos(\omega t)$. Действительно, в этом случае

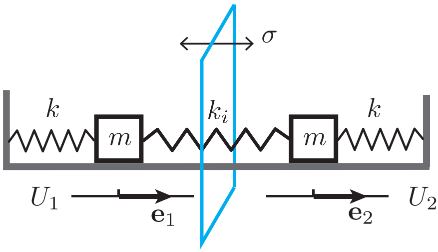
$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{e}\,\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2\mathbf{x}.$$

Таким образом, частота колебаний равна $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, а общее решение имеет вид:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{e}\cos(\omega t + \varphi),$$

где C — амплитуда, а φ — фаза колебаний.

Теперь рассмотрим более интересную систему с двумя степенями свободы, состоящую из двух грузов, связанных пружинами друг с другом и со стенками. В этом случае пространство смещений $U = U_1 \oplus U_2$ двумерное, то есть для описания состояния системы нужно задать два вектора. Введем в пространстве смещений каждого груза базисный вектор, как показано на рисунке.



Запишем уравнения движения грузов:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_i(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_i(x_2 - x_1).$$

Эту систему уравнений удобно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} k+k_i & -k_i \\ -k_i & k+k_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицы массы M и жесткости K:

$$M\ddot{\mathbf{x}} = -K\mathbf{x}.$$

Наконец, обозначим $a = -M^{-1}K$ **оператор ускорения**:

$$\ddot{\mathbf{x}} = a\mathbf{x},$$

действующий на пространстве смещений U. Этот оператор переводит вектор смещения грузов в вектор ускорения, соответствующий их конфигурации. Поскольку оператор a может менять направление вектора, эволюция системы задается сложной траекторией в пространстве смещений U.

Попробуем найти решение по аналогии с одномерной задачей: пусть $\mathbf{x} = \mathbf{q}\cos(\omega t)$, где $\mathbf{q}$ — некоторый фиксированный вектор. Тогда:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\mathbf{x} \qquad \Rightarrow \qquad a\mathbf{q} = -\omega^2\mathbf{q}.$$

Мы получили, что ускорение грузов пропорционально смещению с обратным знаком. Это значит, что система совершает гармонические колебания в одномерном подпространстве, заданном вектором $\mathbf{q}$. Кроме того, вектор $\mathbf{q}$ является собственным вектором оператора ускорения a с собственным значением $-\omega^2$. Колебание, обладающее такими свойствами, называют **нормальной модой** системы, а частоту ω — **нормальной частотой**. Любое колебание системы можно представить как линейную комбинацию нормальных колебаний:

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha} C_\alpha \mathbf{q}_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha).$$

Таким образом, задача о колебаниях системы со многими степенями свободы сводится к поиску собственных векторов и собственных значений оператора ускорения a.

10.2 Следствия симметрии

10.2.1 Симметрия связанных маятников

Будем называть **симметрией** колебательной системы преобразование, которое меняет местами грузы равной массы и пружины равной жесткости. Набор всех симметрий системы составляет ее **группу симметрии**. В нашем примере, симметриями системы является отражение в плоскости σ и тождественное преобразование. Группа симметрии $C_2 = \{e, \sigma\}$ изоморфна группе перестановок двух точек S_2. Действие группы на множестве грузов задает ее представление r_U в пространстве смещений. Например, $r_U(\sigma)\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2$.

10.1 ▷ Определите, какие неприводимые представления содержатся в r_U, и найдите инвариантные подпространства с помощью проекционных операторов.

10.2.2 Нормальные моды и лемма Шура

Рассмотрим эту ситуацию в чуть более общем виде. Пусть G является группой симметрии системы грузов, и ее представление r_U действует на пространстве смещений. Тогда оператор ускорения является G-морфизмом:

$$a r_U(g) = r_U(g) a \quad \forall g \in G.$$

Оператор ускорения зависит от значений масс и жесткости пружин, поэтому важно, чтобы операции симметрии переставляли одинаковые элементы.

10.2 ▷ Убедитесь, что если у двух грузов разные массы, это равенство нарушается.

Пусть в пространстве смещений действуют два разных неприводимых представления группы симметрии: $U = V_1 \oplus V_2$. Тогда любой вектор $\mathbf{v} \in U$ можно единственным образом разложить на компоненты, лежащие в этих подпространствах: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \sum_j \mathbf{v}_j$. Разложим подобным образом результат действия оператора ускорения на вектор $\mathbf{v}$:

$$a\mathbf{v} = \sum_i (a\mathbf{v})_i = \sum_{ij} (a\mathbf{v}_j)_i \equiv \sum_{ij} a_{ij}\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Предпоследнее равенство является определением операторов $a_{ij} : V_j \to V_i$, действующих между подпространствами неприводимых представлений. Эти операторы являются элементами “матрицы”, действующей на столбец векторов $\mathbf{v}_i$.

По определению подпространств V_i, оператор представления $r_U(g)$ принимает вид:

$$\begin{pmatrix} r_1(g) & 0 \\ 0 & r_2(g) \end{pmatrix}.$$

Из условия коммутативности оператора ускорения и операторов представления следует, что

$$a_{ij} r_j = r_i a_{ij}.$$

Тогда, по лемме Шура, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, поскольку неприводимые представления различны. По следствию леммы Шура, a_{ii} пропорциональны тождественным преобразованиям. Таким образом,

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 \,\mathrm{id}_{V_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \,\mathrm{id}_{V_2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, любой вектор $\mathbf{v}_i \in V_i$ является собственным вектором оператора ускорения с собственным значением λ_i. Физически, вектор $\mathbf{v}_i$ задает нормальную моду колебаний с частотой $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$.

Если размерность $n_i = \dim V_i > 1$, в пространстве V_i можно выбрать n_i линейно независимых мод колебаний с одной частотой. В этом случае говорят об n_i-кратном **симметрийном вырождении** нормальных частот.

Полученный результат несложно обобщить на случай

$$V = \bigoplus V_i^{\oplus m_i}$$

при условии, что каждое неприводимое представление входит в разложение не больше одного раза: $m_i = 0, 1$. Тогда все нормальные моды системы можно найти с помощью проекционных операторов.

10.2.3 Нормальные моды связанных маятников

Вернемся к системе из двух связанных маятников. Выберем базисные векторы

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

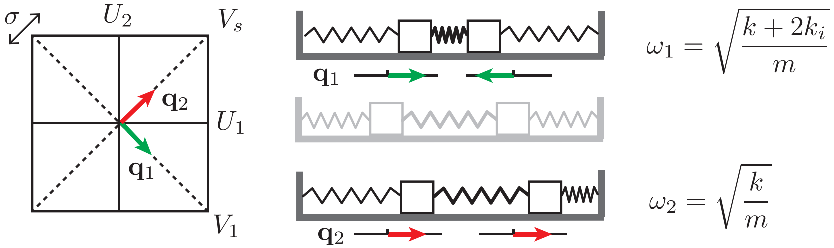
в подпространствах тривиального и знакового представления. Матрица перехода в базис $\{\mathbf{q}\}$ имеет вид:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу оператора ускорения в новом базисе:

$$A = -\frac{1}{m}\begin{pmatrix} k+k_i & -k_i \\ -k_i & k+k_i \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad B^{-1}AB = -\frac{1}{m}\begin{pmatrix} k+2k_i & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем формы и частоты нормальных колебаний:

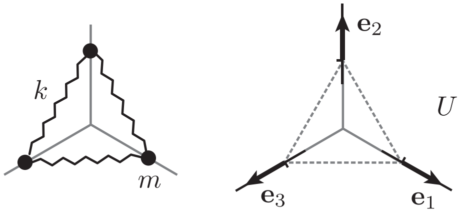


Мода $\mathbf{q}_1$ принадлежит подпространству тривиального представления. Под действием отражения она переходит в себя. Вторая мода $\mathbf{q}_2$ лежит в подпространстве знакового представления, и меняет знак при отражении. Грузы при этом смещаются в одну сторону, и центральная пружина остается расслабленной. Поэтому частота второй моды совпадает с частотой колебаний одного груза m на пружине жесткости k.

10.2.4 Три груза на стержнях

Рассмотрим задачу о колебаниях трех грузов, скользящих без терния по стержням и связанных пружинами. Вся система лежит в горизонтальной плоскости, и сила тяжести роли не играет. Симметрия системы описывается группой преобразований правильного треугольника D_3. Эта группа изоморфна группе перестановок трех точек S_3.

Введем базис в пространстве смещений U, как показано на рисунке:



При таком выборе базиса представление r_U в пространстве смещений формально совпадает с представлением группы S_3 в пространстве функций на множестве трех точек, изученном в разделе 9.2.

Оператор ускорения удобно искать с помощью уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0.$$

Здесь x_i — смещение одного из грузов, а **лагранжиан** $\mathcal{L}$ определяется разностью кинетической и потенциальной энергии системы:

$$\mathcal{L} = T - U.$$

В нашем случае кинетическая энергия зависит только от скорости, а потенциальная — только от величины смещения, поэтому уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0.$$

Первое слагаемое дает произведение массы на ускорение груза, а второе — величину действующей на него силы. Изменение потенциальной энергии определяется удлинением пружин, соединенных с данным грузом.

10.3 $\triangleright$ Покажите, что в линейном приближении удлинение пружины равно $x_i \cos\alpha$, где x_i — смещение груза из положения равновесия, а α — угол между пружиной и направлением смещения.

Потенциальная энергия системы имеет вид:

$$U = \frac{k}{2}\left(\frac{3}{4}(x_1 + x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_2 + x_3)^2 + \frac{3}{4}(x_3 + x_1)^2\right).$$

Для матрицы оператора ускорения получаем:

$$A = -\frac{3k}{4m}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Представление r_U содержит два различных неприводимых представления, тривиальное и двумерное: $U = V_1 \oplus V_2$. Следовательно, векторы, лежащие в этих подпространствах, автоматически являются нормальными модами системы. Подействуем оператором ускорения на вектор $\mathbf{v}_1 \in V_1$:

$$Av_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3k}{m} v_1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

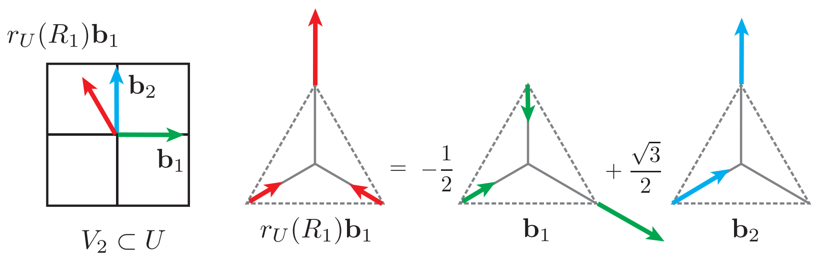
Похожим образом получим собственную частоту, соответствующую векторам из двумерного представления $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in V_2$:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{4m}}.$$

Напомним, что векторы $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} \in V_2$ были получены в результате действия проекционных операторов $\mathsf{P}_{\alpha\beta}$. Они преобразуются, как базисные векторы в стандартной копии (r_2, W_2). Например, под действием оператора $r_U(R_1)$ вектор $\mathbf{b}_1$ поворачивается на угол $\frac{2\pi}{3}$:

$$r_U(R_1)\mathbf{b}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{b}_2.$$

Интересно посмотреть, как это соотношение выглядит в пространстве смещений грузов:



10.3 Эквивалентные неприводимые представления

Рассмотрим случай, когда представление r_U на пространстве смещений содержит $m_i > 1$ копий некоторого неприводимого представления r_i. Для определенности будем считать, что $r = r_2 \oplus r_2$, где r_2 — двумерное представление группы S_3.

Для начала, нам нужно найти подпространства неприводимых представлений $U = V_1 \oplus V_2$ (в обоих подпространствах действует r_2). Это можно сделать с помощью проекционных операторов $\mathsf{P}_{\alpha\beta}$. Пусть (r_2, W) — стандартная копия неприводимого представления r_2. Обозначим $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ базис в пространстве W.

Действуя на некоторый вектор $\mathbf{v}^1 \in U$ проекционными операторами, найдем два вектора, образующие базис неприводимого представления:

$$\{\mathsf{P}_{xx}\mathbf{v}^1, \mathsf{P}_{yx}\mathbf{v}^1\} \equiv \{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_y^1\}.$$

Обозначим V_1 множество их линейных комбинаций. Выбирая другой вектор $\mathbf{v}^2 \in U$, найдем второе подпространство неприводимого представления:

$$\{\mathbf{v}_x^2, \mathbf{v}_y^2\} \in V_2.$$

Так мы получили разложение $U = V_1 \oplus V_2$ на подпространства, в которых действуют представления r_2. Поскольку мы выбрали $\mathbf{v}^1$ и $\mathbf{v}^2$ произвольно, это разложение не единственно.

Отметим, что использование проекционных операторов позволяет построить G-морфизм между подпространствами V_1 и V_2. Действительно, определим следующее отображение:

$$\begin{aligned} \tau_{21} : V_1 &\to V_2 \\ \mathbf{v}_\alpha^1 &\mapsto \mathbf{v}_\alpha^2, \end{aligned}$$

где $\alpha = x, y$. Похожим образом определяется отображение $\tau_{12} : V_2 \to V_1$.

10.4 ▷ Рассмотрите преобразования правильного треугольника в V_1 и V_2 и убедитесь, что τ_{21} является G-морфизмом.

Теперь посмотрим на оператор ускорения с учетом разложения пространства смещений $U = V_1 \oplus V_2$. Как и раньше, представим a в виде матрицы операторов, действующих между подпространствами V_i. На диагонали по-прежнему будут расположены тождественные преобразования. Но недиагональные элементы уже могут быть отличны от нуля: лемма Шура требует лишь, чтобы это были обратимые G-морфизмы. К счастью, мы уже построили такие отображения, τ_{12} и τ_{21}. По следствию леммы Шура, любой обратимый G-морфизм получается из них путем умножения на скаляр. Итак, оператор ускорения принимает вид:

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_{11}\,\mathrm{id}_{V_1} & \lambda_{12}\tau_{12} \\ \lambda_{21}\tau_{21} & \lambda_{22}\,\mathrm{id}_{V_2} \end{pmatrix},$$

где λ_{ij} — некоторые коэффициенты.

Найдем матрицу оператора a в базисе $\{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_y^1, \mathbf{v}_x^2, \mathbf{v}_y^2\}$. Для этого подействуем оператором на базисные векторы. Например, для $\mathbf{v}_x^1$ находим

$$a\mathbf{v}_x^1 = a\begin{pmatrix}\mathbf{v}_x^1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_{11}\mathbf{v}_x^1\\ \lambda_{21}\mathbf{v}_x^2\end{pmatrix}.$$

Получаем следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix}\lambda_{11} & 0 & \lambda_{12} & 0\\ 0 & \lambda_{11} & 0 & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{22} & 0\\ 0 & \lambda_{21} & 0 & \lambda_{22}\end{pmatrix}.$$

Зададим V_x как подпространство, образованное всеми векторами, преобразующимися, как $\mathbf{e}_x \in W$. Другими словами, это пространство линейных комбинаций векторов $\{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_x^2\}$. Аналогично определим пространство V_y. Из вида матрицы A следует, что оператор ускорения действует в пространствах V_x и V_y независимо. Поскольку действие одинаковое, нам необходимо диагонализовать всего одну матрицу размерности 2×2. В общем случае, если кратность некоторого представления r_i равна m_i, решение физической задачи потребует диагонализации матрицы $m_i \times m_i$.

Таким образом, мы получили следующий алгоритм для нахождения нормальных мод в случае $r = r_2 \oplus r_2$.

1. Найдите с помощью проекционных операторов векторы

$$\{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_y^1, \mathbf{v}_x^2, \mathbf{v}_y^2\}$$

2. Подействуйте на пару векторов в пространстве V_x оператором ускорения:

$$\left.\begin{aligned} a\mathbf{v}_x^1 &= \lambda_{11}\mathbf{v}_x^1 + \lambda_{21}\mathbf{v}_x^2\\ a\mathbf{v}_x^2 &= \lambda_{12}\mathbf{v}_x^1 + \lambda_{22}\mathbf{v}_x^2\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}.$$

3. Найдите собственные значения и компоненты собственных векторов $\{\mathbf{q}_x, \mathbf{b}_x\}$ этой матрицы в базисе $\{\mathbf{v}_x^1, \mathbf{v}_x^2\}$:

$$q_x = (\gamma_x^1, \gamma_x^2)^T, \quad b_x = (\beta_x^1, \beta_x^2)^T.$$

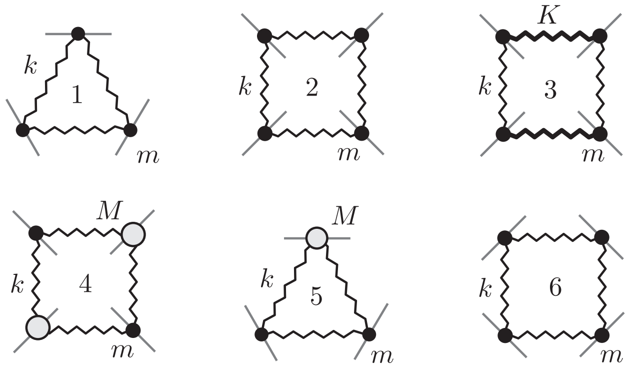
Те же компоненты будут у собственных векторов оператора ускорения в пространстве V_y. Окончательно получаем четыре нормальные моды колебаний:

$$\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y.$$

10.5 $\triangleright$ Сколько в этой ситуации получится различных собственных частот?

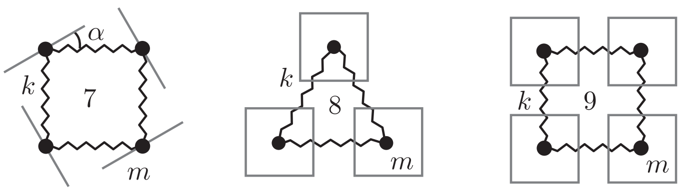
10.4 Задачи

Колебательные системы состоят из связанных пружинами грузов, скользящих без трения по стержням.



10.6 ▷ Определите группы симметрии этих систем. Найдите разложение представления в пространстве смещений на неприводимые компоненты и предскажите кратности вырождения собственных частот.

10.7 ▷ Среди систем 1 – 6 выберите любые две системы, переход между которыми при изменении параметров сопровождается понижением симметрии. Найдите формы и частоты нормальных мод колебаний. Объясните поведение частот при изменении симметрии.



10.8 ▷ Найдите формы и частоты нормальных колебаний для систем 2, 6 и 7. Постройте графики зависимости $\omega(\alpha)$ в диапазоне $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$. *Указание.* Представления циклической группы будут построены в разделе 11.3.1. Если собственные векторы получаются комплексными, вспомните, что линейная комбинация собственных векторов с одним собственным значением также является собственным вектором.

10.9 ▷ Найдите формы и частоты нормальных колебаний для системы 8 или 9, в которых грузы могут двигаться по плоскости. Наиболее удобный базис состоит из ортонормированных векторов, переходящих друг в друга под действием операторов представления.

11 Теория групп в квантовой механике

Несмотря на кардинальные отличия квантовой физики от классической, их математическое описание может быть схожим. Задача о колебаниях механической системы со многими степенями свободы сводится к диагонализации оператора ускорения, действующего в пространстве смещений. Похожая ситуация возникает и в квантовой механике. Состояниям системы соответствуют векторы в пространстве комплексных функций. Согласно уравнению Шредингера, эволюция состояния определяется гамильтонианом системы, и для решения задачи необходимо найти его собственные векторы.

Как и в случае механических систем, теория представлений позволяет упростить решение квантовой задачи, обладающей симметрией. Так, собственные состояния гамильтониана частицы в сферически-симметричном потенциале определяются неприводимыми представлениями группы вращений, а состояния электрона в периодическом потенциале — представлениями группы трансляций.

11.1 Уравнение Шредингера и симметрии

Рассмотрим квантовую частицу на плоскости M. Ее состояние задается **волновой функцией** — квадратично интегрируемой функцией

$$\psi : M \to \mathbb{C}.$$

Все такие функции образуют векторное пространство $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(M)$, называемое **гильбертовым пространством состояний**. Напомним, что значение функции в некоторой точке $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$ имеет смысл компоненты вектора. Чтобы работать с самим вектором, а не его компонентами, в квантовой механике используется бра-кет формализм Дирака. Вектор, соответствующий функции $\psi(\mathbf{x})$, обозначают $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

Эволюция состояния во времени определяется уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle,$$

где **гамильтониан** $\hat{H}$ — линейный оператор на пространстве $\mathcal{H}$, а $\hbar$ — постоянная Планка. Найдем решение уравнения Шредингера по аналогии с решением задачи о колебаниях связанный маятников, рассмотренной в разделе 10.1. Заметим, что

$$|\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle,$$

то есть оператор $-\frac{i}{\hbar}\hat{H}$ можно назвать "оператором скорости изменения состояния" в том же смысле, в котором a является оператором ускорения в механической задаче. Будем искать решение в виде гармонической функции

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_n t}|n\rangle,$$

где $|n\rangle$ — некоторый фиксированный вектор. Получаем:

$$|\dot{\psi}\rangle = -i\omega_n|\psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \hat{H}|n\rangle = \hbar\omega_n|n\rangle,$$

то есть вектор $|n\rangle$ является собственным вектором гамильтониана с собственным значением $\hbar\omega_n \equiv \epsilon_n$ (имеющем смысл энергии состояния). Как и в механической задаче, эволюция каждого собственного вектора будет гармонической, и общее решение примет вид

$$|\psi\rangle = \sum_n e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)}|n\rangle,$$

где $\{|n\rangle\}$ — набор собственных векторов гамильтониана, а φ_n — некоторые фазы.

Если квантовая система обладает симметрией, результаты теории групп приводят к тем же следствиям, что и для механических систем. На пространстве состояний $\mathcal{H}$ действует представление группы симметрии G. Поскольку гамильтониан коммутирует с операторами представления, его собственные векторы преобразуются по неприводимым представлениям группы. По лемме Шура, разложение пространства $\mathcal{H}$ на подпространства неприводимых представлений приводит к занулению некоторых матричных элементов. Наконец, размерность пространств неприводимых представлений определяет кратность вырождения уровней энергии.

11.2 Группа $SO(2)$ и сферические гармоники

В задаче об атоме водорода необходимо решить уравнение Шредингера в сферически-симметричном потенциале. Симметрия задачи описывается группой поворотов сферы $SO(3)$. Собственные функции гамильтониана принимают вид **сферических гармоник**, умноженных на некоторые радиальные функции. В этом разделе мы рассмотрим похожую, но более простую, ситуацию с точки зрения теории групп.

Рассмотрим группу $SO(2)$, элементами которой являются повороты окружности g_α на угол α. Композиция двух поворотов дает поворот на суммарный угол:

$$g_\alpha g_\beta = g_{\alpha+\beta},$$

причем порядок сомножителей не важен. Поскольку поворот окружности на 2π эквивалентен тождественному преобразованию, параметр α определен с точностью до 2π, то есть $g_{\alpha+2\pi} = g_\alpha$.

Отметим, что выбор некоторой точки p на окружности S^1 позволяет отождествить элементы группы $SO(2)$ с точками окружности: отображение

$$\begin{aligned} c : SO(2) &\to S^1 \\ g_\alpha &\mapsto g_\alpha \cdot p \end{aligned}$$

является взаимно-однозначным. В этом смысле группа $SO(2)$ представляет собой окружность. Она содержит бесконечно много элементов. Для того, чтобы задать элемент группы, достаточно одного действительного параметра. Более сложные группы такого типа требуют несколько параметров для задания элемента, и могут быть отождествлены с многомерными поверхностями (дифференцируемыми многообразиями). Такие группы называют **группами Ли**. С теорией представлений групп Ли тесно связана классификация элементарных частиц в физике высоких энергий.

Попробуем найти представления группы $SO(2)$. Вложим окружность, на которой действует группа, в плоскость V_1 и продолжим по линейности действие на всю плоскость. Мы получили представление (r_1, V_1), которое называют **стандартным**. В ортонормированном базисе матрицы стандартного представления имеют вид

$$R_1(g_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

11.1 $\triangleright$ Найдите формулы для косинуса и синуса разности, вычислив матрицу $R_1(g_\alpha g_{-\beta})$.

Чтобы найти другие представления, рассмотрим пространство функций на окружности $\mathcal{F}(S^1)$. Введем на окружности координату φ. Действие группы имеет вид:

$$g_\alpha \cdot \varphi = \varphi + \alpha.$$

Тогда представление r_S в пространстве $\mathcal{F}(S^1)$ действует на функцию f следующим образом:

$$[r_S(g_\alpha)f](\varphi) = f(g_\alpha^{-1} \cdot \varphi) = f(\varphi - \alpha).$$

Посмотрим, как $r_S(g_\alpha)$ действует на гармонические функции $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$, заданные на окружности. Для упрощения записи, позаимствуем из квантовой механики бра-кет обозначения, которые позволяют убрать аргумент φ из обеих частей равенства:

$$r_S(g_\alpha)|\cos\rangle = \cos\alpha|\cos\rangle + \sin\alpha|\sin\rangle$$
$$r_S(g_\alpha)|\sin\rangle = -\sin\alpha|\cos\rangle + \cos\alpha|\sin\rangle.$$

Таким образом, действие оператора $r_S(g_\alpha)$ на пару векторов $\{|\cos\rangle, |\sin\rangle\}$ задается матрицей $R_1(\alpha)$. Другими словами, мы нашли внутри пространства $\mathcal{F}(S^1)$ подпространство V_1 стандартного представления r_1.

Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Обозначим $|\cos_n\rangle$ функцию, равную $\cos(n\varphi)$ в точке φ, и аналогично определим $|\sin_n\rangle$. Векторы $\{|\cos_n\rangle, |\sin_n\rangle\}$ задают подпространство представления, которое мы обозначим (r_n, V_n). Как и в случае $n = 1$, рассмотренном выше, это представление содержится внутри $(r_S, \mathcal{F}(S^1))$.

11.2 $\triangleright$ Найдите матрицу оператора $r_n(g_\alpha)$.

11.3 $\triangleright$ Опишите пространство V_0 в терминах теории групп.

В квантовой механике пространство состояний $\mathcal{H}$ является комплексным. Напомним, что повороты двумерного комплексного пространства содержат инвариантные подпространства (раздел 7.4.3). Следовательно, найденные представления не являются неприводимыми. Ситуацию можно исправить, рассмотрев в качестве гармонической функции комплексную экспоненту:

$$w_n(\varphi) = e^{in\varphi}.$$

Действие оператора представления на соответствующий вектор $|w_n\rangle$ является умножением на число:

$$r_S(g_\alpha)|w_n\rangle = e^{-in\alpha}|w_n\rangle.$$

Таким образом, каждый вектор $|w_n\rangle$ задает одномерное инвариантное подпространство $W_n \subset \mathcal{F}(S^1)$. В подпространстве W_n действует неприводимое представление r_n группы $SO(2)$, заданное как $r_n(g_\alpha) = e^{-in\alpha}$. Оказывается, набор представлений $\{r_n\}$ исчерпывает список всех неприводимых представлений группы $SO(2)$.

Теперь представим, что на плоскости M задан радиально симметричный потенциал с центром в начале координат. Группа $SO(2)$ является группой симметрии такой системы, и гамильтониан коммутирует с ее представлением r_M в пространстве $\mathcal{H}$. Векторы $\{|w_n\rangle\}$ задают инвариантные подпространства неприводимых представлений. Для упрощения задачи нужно перейти в базис, образованный векторами вида $|w_n\rangle|\chi\rangle$, где вектор $|\chi\rangle$ соответствует функции $\chi(r)$, не зависящей от угловой координаты.

Похожая ситуация возникает при решении задачи о движении частицы в сферически-симметричном потенциале в трехмерном пространстве. В терминах теории групп, сферические гармоники — это функции, задающие базис неприводимых представлений группы $SO(3)$ в пространстве функций на сфере.

11.3 Группа $\mathbb{Z}_N$ и волны Блоха в кристалле

11.3.1 Представления циклической группы

Рассмотрим $\mathbb{Z}_N$, **циклическую группу порядка** N. Она может быть реализована как группа поворотов правильного N-угольника на плоскости. Обозначим g_n поворот плоскости на угол $n\frac{2\pi}{N}$, где n — целое число. Умножение в группе имеет вид

$$g_n g_m = g_{n+m}.$$

Из этого следует, что любой элемент g_m группы можно представить как

$$g_m = g_1^m,$$

если принять, что нулевая степень соответствует нейтральному элементу $e = g_0$. При $m = N$ получаем поворот на угол 2π, то есть тождественное преобразование:

$$g_1^N = e.$$

Найдем неприводимые представления группы $\mathbb{Z}_N$. Из последнего равенства следует, что для представления (r, V) справедливо

$$r(g_1^N) = \mathrm{id}_V .$$

Пусть пространство V — одномерное. Тогда

$$r(g_1^N) = [r(g_1)]^N = 1 \qquad \Rightarrow \qquad r(g_1) = \sqrt[N]{1}.$$

Таким образом, мы получаем N одномерных неприводимых представлений, заданных набором комплексных корней из единицы. Обозначим аргументы корней $\{-k\}$. Тогда

$$r_k(g_1) = e^{-ik}.$$

Для произвольного элемента группы, оператор представления r_k совпадает с характером и равен

$$r_k(g_n) = \chi_k(g_n) = e^{-ikn}.$$

Итак, мы получили N одномерных неприводимых представлений группы $\mathbb{Z}_N$.

11.4 ▷ Покажите, что у группы $\mathbb{Z}_N$ нет других неприводимых представлений.

11.3.2 Приближение сильной связи

Рассмотрим модель одномерного кристалла в виде цепочки атомов. Будем считать, что атомные орбитали почти не перекрываются. При этом гамильтониан будет содержать лишь элементы, описывающие переходы между близкими орбиталями. Собственные состояния гамильтониана можно искать в виде линейных комбинаций атомных орбиталей. Этот подход называют **приближением сильной связи** (сильной предполагается связь между электроном и ядром атома).

Пусть кристалл состоит из N ячеек единичной длины, каждая из которых содержит по одному атому с одной орбиталью. Обозначим m координату атома, а $|m\rangle$ — соответствующую орбиталь. Будем считать, что орбитали образуют ортонормированный базис в пространстве состояний $\mathcal{H}$:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}.$$

Волновая функция в этом базисе принимает вид

$$|\psi\rangle = \sum_m \psi_m |m\rangle.$$

Запишем гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H} = \sum_m u|m\rangle\langle m| + t|m\rangle\langle m+1| + \bar{t}|m+1\rangle\langle m|,$$

где $u \in \mathbb{R}$ — потенциальная энергия орбитали, а $t \in \mathbb{C}$ — амплитуда перехода между соседними орбиталями. Наша задача — найти уровни энергии в таком кристалле. Для этого необходимо диагонализовать гамильтониан.

Заметим, что локально кристалл обладает трансляционной симметрией: гамильтониан инвариантен относительно сдвига на одну ячейку. Однако на краях кристалла инвариантность нарушается. Чтобы ее восстановить, вводят **периодические граничные условия**, отождествляя ячейки $0 \leftrightarrow N$. При этом группой симметрии эффективно становится циклическая группа $\mathbb{Z}_N$.

Группа действует на множестве атомов M сдвигами:

$$g_n \cdot m = m + n.$$

Это действие порождает представление r_M в пространстве функций:

$$[r_M(g_n)\psi]_m = \psi_{g_n^{-1}\cdot m} = \psi_{m-n}.$$

Напомним, что это представление также можно записать с помощью базисных векторов:

$$r_M(g_n)|m\rangle = |m+n\rangle.$$

Заметим, что гамильтониан является G-морфизмом:

$$r_M(g_n)\hat{H} = \hat{H} r_M(g_n).$$

Следовательно, для поиска собственных векторов будет полезно разложить пространство $\mathcal{H}$ на прямую сумму подпространств неприводимых представлений.

11.5 $\triangleright$ Проверьте последнее равенство, подействовав обеими частями на состояние $|\psi\rangle$.

11.3.3 Структура представления и собственные векторы

Найдем структуру представления $(r_M, \mathcal{H})$. Характер χ_M определяется числом неподвижных точек действия $\mathbb{Z}_N$ на кристалле M.

11.6 $\triangleright$ Найдите характер χ_M и кратности неприводимых представлений, входящих в r_M.

Найдем инвариантное подпространство неприводимого представления r_k. Для этого подействуем соответствующим проекционным оператором на состояние $|0\rangle$:

$$\mathsf{P}_k|0\rangle = \frac{1}{N}\sum_n \overline{\chi_k(g_n)} r_M(g_n)|0\rangle = \frac{1}{N}\sum_n e^{ikn}|n\rangle.$$

Нормируем полученный вектор на единицу:

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_m e^{ikm}|m\rangle.$$

Такие состояния называют **волнами Блоха**. Они образуют базис в импульсном пространстве, связанный с базисом орбиталей преобразованием Фурье. Параметр k играет роль квазиимпульса электрона в кристалле.

11.7 $\triangleright$ Подействуйте гамильтонианом на вектор $|k\rangle$ и найдите соответствующее собственное значение.

Поскольку неприводимые представления входят в разложение с кратностью не больше единицы, все собственные векторы гамильтониана можно найти методами теории групп.