Сигнал

Сигналы: аналоговый, дискретный и цифровой.

Аналоговый сигнал — непрерывная функциия непрерывного аргумента (радиофизика “доцифровой эры”)

Дискретный (descrete) есть непрерывная функция, но определен только для дискретных значений аргумента. Задается дискретной последовательностью отсчетов (samples) $u(n\Delta)$, $n = 0, 1, 2, ..., N$. Частота лискретизации $f = 1/\Delta$,

Цифровой (digital) сигнал дискретен как по своим значениям, так и по аргументу (разновидность дискретного сигнала, округленного до определенного значения, набор этих значений (шкала квантования) задается заранее. Такое округление принято называть квантованием сигнала по уровню (не путать с квантовой механикой!).

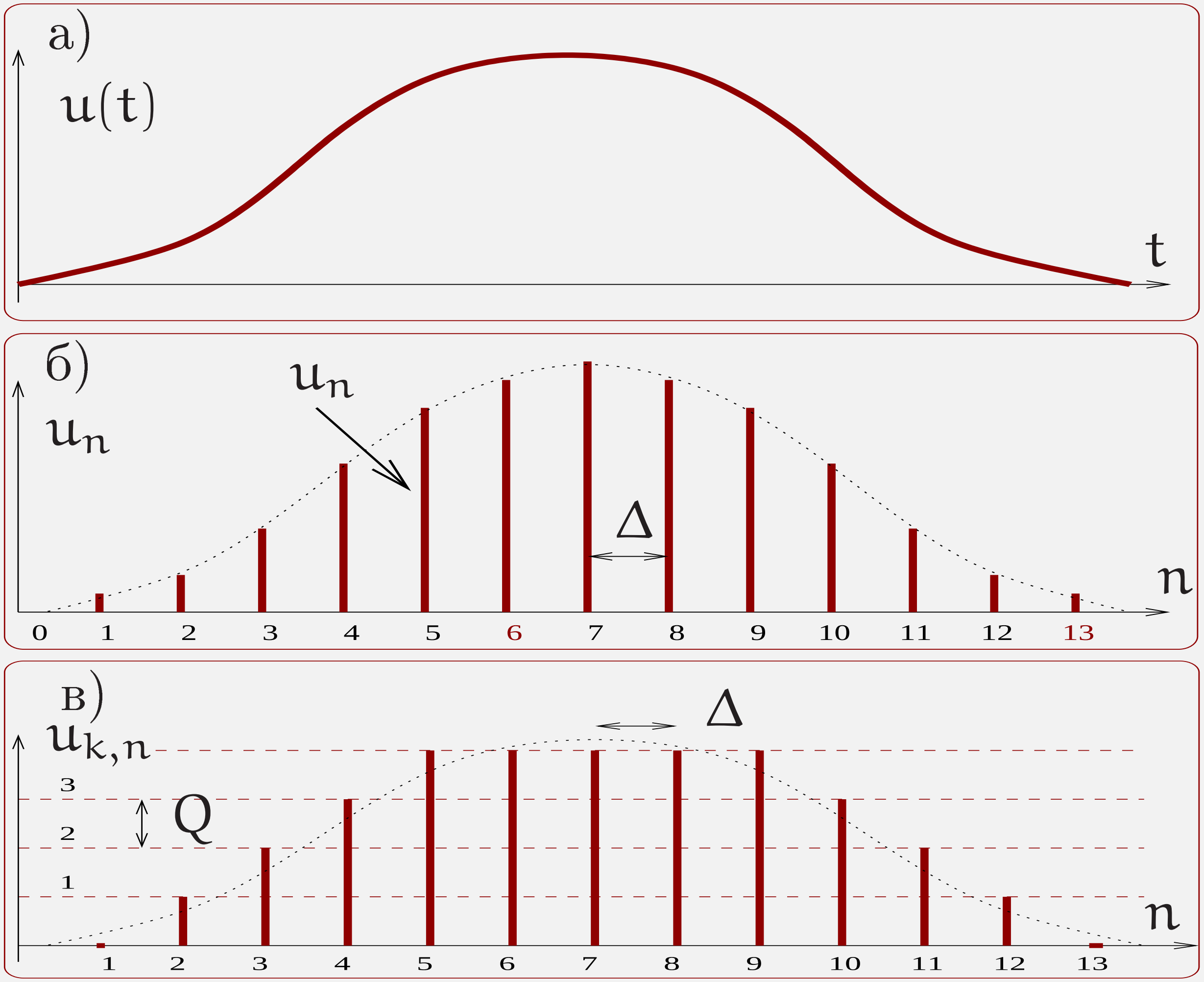


Рис. 1: а) Аналоговый сигнал. б) Дискретный сигнал. в) Цифровой сигнал.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Имеем дискретный сигнал

$$u_k \equiv u(t_k), \quad t_k \equiv k\Delta, \quad k = 0, 1, 2 \dots N-1, \quad \mathbf{N}\ \text{четно} \tag{1}$$

Если $u(t)$ не ограничена по времени — отбрасываем “хвосты”. N чисел на входе — N на выходе. Ограничимся только дискретным набором частот

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2}, \qquad \left(\omega_n \equiv \frac{2\pi n}{N\Delta}\right) \tag{2}$$

Крайние значения n в (2) — частоты Найквиста. (n пробегает $N+1$, а не N значений — два крайние значения зависимы (равны).

Преобразуем интеграл Фурье в сумму:

$$U(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{2\pi i f_n t}\, dt \simeq \sum_{k=0}^{N-1} u_k\, e^{2\pi i f_n t_k}\, \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} u_k\, e^{2\pi i\, kn/N}$$

Введем обозначение U_n:

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k\, e^{2\pi i\, kn/N}\ . \tag{3}$$

Преобразование (3) и называют *дискретным преобразованием Фурье*. N отсчетов u_k преобразуются в N комплексных чисел U_n. Преобразование (3) не зависит от интервала дискретизации Δ. Связь между обычным и дискретным преобразованием Фурье:

$$U(f_n) \simeq U_n\, \Delta$$

Обратное дискретное Фурье преобразование (из набора U_n получить набор u_k) задается формулой

$$u_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n \, e^{-2\pi i \, kn/N} \tag{4}$$

(3, 4) отличаются только знаком в показателе экспоненты и делением на N. Значит, численные процедуры для прямого ДПФ могут быть легко модифицированы и для обратного ДПФ.

Дискретный аналог равенства Парсеваля:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |u_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |U_n|^2 \tag{5}$$

Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Перепишем формулу (3) для дискретного преобразования Фурье:

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} u_k, \quad W \equiv e^{2\pi i/N} \, . \tag{6}$$

Для вычисления одного элемента U_n потребуется N операций комплексного умножения, а для вычисления всех элементов U_n — N^2 операций (плюс еще меньшее количество операций для генерации коэфициентов W^{nk}). Для реализации ДПФ требуется $\mathcal{O}(N^2)$ операций.

Алгоритм БПФ выгодно отличается тем, что для той же задачи ему требуется всего лишь $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ операций. Разница между $\mathcal{O}(N^2)$ и $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ огромна, например, при $N = 10^6$ БПФ дает выигрыш в $\approx 5 \times 10^4$ раз!

Алгоритм БПФ стал широко известен в середине 60-х после работ Кули и Тьки (J.W.Cooley, J.W.Tukey), однако позже выяснилось, что подобные методы были независимо и раньше открыты десятком других исследователей, начиная с Гаусса (1805 год).

Лемма Даниельсона и Ланца (Danielson and Lanczos): дискретное преобразование Фурье длины N может быть записано как сумма двух преобразований длины N/2

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k\, e^{2\pi i\, kn/N} = \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k}\, e^{2\pi i\, (2k)n/N} + \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k+1}\, e^{2\pi i\, (2k+1)n/N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k}\, e^{2\pi i\, kn/(N/2)} + e^{2\pi i\, n/N} \sum_{k=0}^{N/2-1} u_{2k+1}\, e^{2\pi i\, kn/(N/2)} =$$

$$= U_n^{\text{чет}}(N/2) + W^n U_n^{\text{нечет}}(N/2), \quad W \equiv e^{2\pi\, i/N}.$$

Лемму Даниельсона и Ланца можно применять *рекурсивно.*

Лемму Даниельсона и Ланца можно применять *рекурсивно*:

$$\begin{aligned} U_n &= U_n^{\text{чет}}(N/2) + W^n U_n^{\text{нечет}}(N/2) = \\ &= \left[U_n^{\text{чет-чет}}(N/4) + W^n U_n^{\text{чет-нечет}}(N/4)\right] + \\ &\quad + W^n \left[U_n^{\text{нечет-чет}}(N/4) + W^n U_n^{\text{нечет-нечет}}(N/4)\right] = \dots \end{aligned} \tag{7}$$

Пусть N есть степень 2, т.е. $N = 2^m$ (m — целое). На практике обычно так и делают (если число $N \neq 2^m$, то его надо увеличить до ближайшей степени двойки, заполнив добавленные позиции нулями). Очевидно, что в этом случае ($N = 2^m$) мы можем продолжать рекурсию уменьшая N вплоть до единицы. В конце концов получим одно-точечное преобразоване:

$$U_n^{\text{нечет-чет-чет-...- нечет-чет-нечет}}(1) = u_k \quad \text{для индекса } k \tag{8}$$

Осталось выяснить какой конкретной комбинации (чет) и (нечет) соответствует u_k в выражении (8). Ответ: надо призвести обращение (реверсию) битов в комбинации (нечет-чет-чет-. . .- нечет-чет-нечет) и это число в *двоичной* системе будет равно числу k в (8). Для этого надо сначала записать комбинацию (нечет-чет-чет-. . .- нечет-чет-нечет) в двоичной системе, присвоив значения чет$=0$, нечет$=1$. Например, комбинация нечет-чет-чет-. . .- нечет-чет-нечет запишется в виде $(100\dots101)$. Для обращения (инверсии) надо просто заменить порядок следования нулей и единиц на обратный, в нашем примере получится число $(101\dots001)$. Это число и будет равно числу k в (8), записанному в двоичной системе.

Дальнейшее почти очевидно. Мы можем выбрать два соответствующих одно-точечных преобразованя вида (8), образуюзщих 2-точечное преобразование. Таких пар будет N/2. Далее собираем из 2-точечных преобразований 4-точечные и так далее, пока не получим две половинки полного преобразования в соответствии с формулой (7). Каждая такая комбинация требует N операций, а количество комбинаций есть $\log_2 N$, поэтому весь алгоритм требует порядка $N \log_2 N$ операций (мы считаем, что операция сортировки при обращении битов требует меньшее число операций).

Количество информации

Рассмотрим сообщение из n. Число градаций – m. Полное количество комбинаций

$$N = m^n$$

Кол-во информации I должно $I \sim n$ (как стоимость телеграммы). С другой стороны $I = f(N)$. Выпишем:

$$\begin{aligned} df &= K\,dn, \qquad df = \frac{df}{dN}\,N\,\ln(m)\,dn, \\ \Rightarrow & \qquad f = \log_a N \end{aligned}$$

здесь K, a — постоянные. Для определения постоянной a выберем $m = 2$, $n = 1$ ("бит" информации):

$$1 = \log_a(2^1), \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$
\begin{aligned}
df &= K\,dn, \qquad df = \frac{df}{dN} N \ln m\, dn, \\
\Rightarrow &\qquad f = \log_a N
\end{aligned}
$$

здесь K, a — постоянные. Для определения постоянной a выберем $m = 2$, $n = 1$ (“бит” информации):

$$
1 = \log_a(2^1), \quad \Rightarrow \quad a = 2
$$

Формула для количества информации:

$$
\boxed{I = \log_2 N = n \log_2 m}
$$

Передача информации через канал связи

Пусть сообщение — функция $u(t)$, ее спектр ограничен: $f < F_0$. По т. Котельникова — передача набора импульсов через время $\Delta t = 1/(2F_0)$, за время t — $2F_0 t$ импульсов. Если число градаций m, то количество информации $I(t)$ и скорость R передачи информации:

$$\begin{aligned} I &= 2F_0 t \log_2 m, \\ R &= \frac{dI}{dt} = 2F_0 \log_2 m. \end{aligned} \tag{9}$$

Число градаций m не может быть бесконечным из-за наличия шумов. Шеннон (1948 г.):

$$I_{max} = F_0 t \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right), \tag{10}$$

$$R_{max} = \frac{dI}{dt} = F_0 \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right), \tag{11}$$

W_s – мощность сигнала, а W_n – мощность шума. Величину I_{max} (10) называют еще объемом сигнала. Надо:

a) полоса частот F_k, пропускаемых каналом, должна быть достаточно велика: $F_k > F_0$;

b) время связи t_k через канал должно быть также достаточно велико: $t_k > t$;

c) превышение сигнала над шумом в канале $H_k = \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right)$ должно быть также больше соответствующей величины H канала: $H_k > H$.

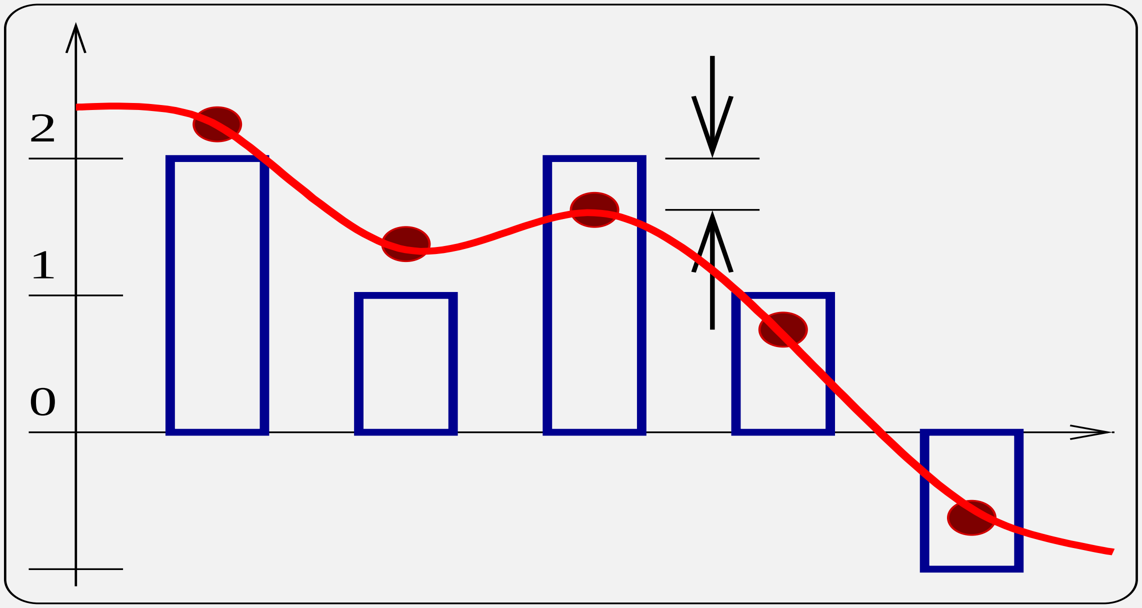
$$I_{\max} = F_0 t \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right), \tag{12}$$

$$R_{\max} = \frac{dI}{dt} = F_0 \log_2 \left(1 + \frac{W_s}{W_n}\right), \tag{13}$$

Величину $\boxed{F_k t_k H_k}$ называют емкостью канала.

Шумы квантования

Число градаций m. Пусть нет обычных шумов. Пусть шаг дискретизации равен b. Если амплитуда сигнала равновероятна в пределах шага b, то заменяя ее дискретным значением, мы допускаем ошибку.



$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{b}\, x^2\, dx = \frac{b^2}{12}, \\
U_s &= U_{qs} + \text{шум}, \quad U_{qs} = mb, \\
U_s^2 &= U_{qs}^2 + \sigma^2 = m^2 b^2 + \frac{b^2}{12},
\end{aligned}
$$

где U_{qs}^2 — средний квадрат квантованного сигнала, Выражаем отсюда m и подставляем в формулу Шеннона:

$$
I = F_0 t \log_2 \left(1 + \frac{U_{qs}^2}{\sigma^2}\right) = F_0 t\ \log_2 12 m^2, \tag{14}
$$

$$
R = \frac{dI}{dt} = F_0 \log_2 \left(1 + \frac{U_{qs}^2}{\sigma^2}\right) = F_0\ \log_2 12 m^2. \tag{15}
$$

Различные каналы передачи информации

	F_0	m	$\log_2$ **m**	R **бит/с**
Телеграф	$4 \cdot 10^2$ **Гц**	2	1	$8 \cdot 10^2$
Телефон	$4 \cdot 10^3$ **Гц**	128	7	$6 \cdot 10^4$
Телевидение	$6 \cdot 10^6$ **Гц**	30	~ 5	$6 \cdot 10^7$

Интересно: через зрение человек получает $2 \cdot 10^4$ бит/сек. Это много меньше, чем по ТВ: записывается не каждый кадр, а лишь *изменение* картинки (но (!) мозг помнит всю текущую картинку).

Современные каналы информации: СВЧ кабель, витая пара и оптический волновод.

СВЧ кабель: $F_0 \simeq 10^{10}$ Гц, т.е. по СВЧ кабелю можно передавать ~ 1000 ТВ каналов или $2,5 \cdot 10^6$ телефонных каналов.

Витая пара (дешевле и удобнее). Скорость передачи $100\ldots 1000$ Мбит/сек.

Оптический кабель: $F_0 \simeq 10^{14}$ Гц, (пока полоса частот лишь $\sim 10^{10}$ Гц). Скорость передачи информации: до 100 Гбит/сек. Диаметр сердцевины $\sim 5\,\mu$, оболочка $\sim 20\,\mu$. Затухание на длине волны $\lambda \sim 1.6\,\mu$, составляет $0,2$ дб/км (интенсивность уменьшается в e раз на расстоянии 30 км). На каждом волноволе нужны оптические усилители на расстоянии ~ 10 км.

Надежность передачи информации

Пусть одит бит – за время τ, полоса частот $\Delta f \simeq 1/\tau$. Мощность тепловых шумов в соглас. линии $W_T = \kappa T \Delta f$, поэтому для передачи каждого бита нужна энергия $> \kappa T$.

Величина $\mathcal{E}/\kappa T$ постоянно уменьшается. Если средняя энергия, рассеиваемая процессором W, тактовая частота ν, а количество элементов N, то очевидно, что

$$\frac{\mathcal{E}}{\kappa T} = \frac{W}{\nu N \kappa T}$$

Приведем оценки для различных процессоров:

Процессор	W	ν	N	$\frac{\mathcal{E}}{\kappa T}$
886	1 **Вт**	5 **МГц**	$5 \cdot 10^4$	$\sim 10^9$
Pentium 4	100 **Вт**	3 **ГГц**	10^8	$\sim 7 \cdot 10^4$
Моб. Pentium 4	10 **Вт**	3 **ГГц**	$5 \cdot 10^7$	$\sim 10^4$
Core Duo (2007)	10 **Вт**	3 **ГГц**	$3 \cdot 10^8$	$\sim 10^3$

В оптике $\kappa T \ll \hbar\omega$.

Предельная величина для передачи одного бита за время τ:

$$\mathcal{E} \geq \frac{\hbar}{\tau}.$$