МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики колебаний

С.П. Вятчанин

Введение в квантовые и прецизионные измерения

Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

2022

С. П. Вятчанин, **Введение в квантовые и прецизионные измерения** / Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2022 г. – 139 с.

ISBN 978-5-8279-0224-9

Методическое пособие представляет собой конспект лекций курса “Введение в квантовые измерения”, читаемого для студентов 3-его курса на кафедре физики колебаний физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Пособие написано по методическим материалам проф. В.Б. Брагинского, который в свое время и создал этот курс.

Рассмотрены ограничения на точность измерений координаты пробного тела: тепловые шумы механической степени свободы, тепловые шумы измерителя смещений на примере емкостного датчика, динамическое и флуктуационное обратное влияние измерителя.

Дано введение в квантовые измерения, введено понятие Стандартного Квантового Предела (СКП), способы его преодоления с помощью квантовых невозмущающих измерений (КНИ) и квантового вариационного измерения.

Рецензенты: доктор. физ.-мат. наук., проф. Б.И. Манцызов
канд. физ.-мат. наук., ст. науч. сотр. К.Г. Катамадзе

© Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2022
© С.П. Вятчанин, 2022

Оглавление

Глава 1

Гауссовы шумы

Неотемлемой частью процедуры измерений является анализ шумов, маскирующих полезный сигнал. Предсказать поведение шумовой компоненты, например, напряжения невозможно, однако знать ее характеристики (величину, спектр) необходимо. Это также как волнение на море: предсказать точное поведение поверхности воды нельзя, однако морякам важно знать среднюю амплитуду (сколько баллов шторм) и, может быть, характерные длины волн (частоты).

Мы начнем с напоминания о характеристиках случайного процесса. Будем рассматривать простейшую ситуацию, которую можно характеризовать следующими допущениями:

- Будем рассматривать только гауссовые случайные процессы, т.е. процессы с плотностью вероятности, описываемой гауссовым распределением. Гауссовы процессы наиболее часто встречаются в физике, поскольку обычно шумовой процесс есть совокупность большого числа независимых процессов. Напомним, что согласно центральной предельной теореме распределение вероятности случайной величины, являющейся суммой большого числа независимых случайных величин, асимптотически стремится к нормальному (гауссовому) распределению. Для нормального распределения все моменты случайной величины определяются первыми двумя моментами (средним и дисперсией). Часто случайные процессы молчаливо предполагаютя гауссовыми.

- Будем использовать эргодическую гипотезу, согласно которой усреднение по ансамблю и по большому отрезку времени эквивалентны. Это весьма упрощает измерение характеристик случайного процесса. Для примера приведем игральный кубик. Для измерения вероятностей выпадения различных граней кубика мы должны провести измерения. При измерении по ансамблю нам надо изготовить большое число одинаковых кубиков (допустим тысячу), бросить их одновременно и посчитать, как часто выпадает каждая грань. Понятно, что изготовить тысячу *одинаковых* кубиков — непростая задача. Однако, если можно использовать эргодическую гипотезу, то можно бросать *один (!)* игральный кубик.

- Будем рассматривать только стационарные случайные процессы, у которых характеристики (например, дисперсия) не зависят от времени. Ниже мы поясним это.

Характеристики шумов

Согласно эргодической гипотезе мы можем заменить усреднение по ансамблю усреднением по времени, т.е. можно приравнять для среднее по ансамблю $\langle x \rangle$ и среднее по времени $\bar{x}$ — тоже относится и к дисперсиям $\bar{\sigma}^2$ (усреднение по времени) и $\langle \sigma^2 \rangle$ (по ансамблю):

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt \equiv \langle x \rangle, \tag{1.1}$$

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}, \quad \bar{\sigma}^2 = \overline{\Delta x^2} = \overline{(x(t) - \bar{x})^2} \equiv \langle \sigma^2 \rangle. \tag{1.2}$$

Кроме того, благодаря условию стационарности, величины $\bar{x}$ и $\bar{\sigma}^2$ не зависят от времени. Забегая вперед, заметим, что, конечно, время усреднения T должно быть достаточно велико, насколько велико — обсудим ниже.

Ниже будем рассматривать шумовые напряжения и случайную величину обозначим $u(t)$. Пусть среднее $\overline{u(t)} = 0$. Тогда величина $\overline{u(t)^2}$ соответствует мощности (выделяющейся на сопротивлении 1 Ом). Рассмотрим сумму двух случайных напряжений $u_1(t) + u_2(t)$ (суммарное напряжение приложено к резистору 1 Ом). Тогда их мощность (выделяющаяся на сопротивлении 1 Ом) будет равна

$$\overline{(u_1(t) + u_2(t))^2} = \overline{u_1(t)^2} + \overline{u_2(t)^2} + 2 \cdot \overline{u_1(t) u_2(t)}. \tag{1.3}$$

Здесь первые два члена в правой части соответствуют средним мощностям каждого источника. Последний член пропорционален произведению двух случайных величин и описывает их *корреляцию*. Если источники $u_1(t)$ и $u_2(t)$ независимы друг от друга, то их произведение *в среднем* будет равно нулю. В этом случае говорят, что источники *не коррелированы*. В общем случае величина $\overline{u_1(t)u_2(t)}$ называется корреляционной функцией шумов u_1 и u_2.

Автокорреляционная функция

Среднее и дисперсия случайного процесса не описывают связи между значениями случайного напряжения в различные моменты времени. Для этого служит *автокорреляционная* функция, которая определяется следующим образом (напомним, что $\overline{u(t)} = 0$):

$$B(\tau) = \overline{u(t)u(t-\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)u(t-\tau)\,dt. \qquad (1.4)$$

Здесь τ — временной сдвиг. При $\tau = 0$ автокорреляционная функция равна дисперсии. Для стационарного процесса автокорреляционная функция, как это следует из определения (1.4), зависит только от $|\tau|$ [1]. Таким образом можем записать следующие свойства автокорреляционной функции:

$$B(0) = \sigma^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)^2\,dt, \quad B(\tau) = B(-\tau). \qquad (1.5)$$

Очевидно, что при $\tau = 0$ автокорреляционная функция имеет максимум. Чем больше τ, тем сильнее случайная ве-

[1]Вообще говоря, случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его среднее и дисперсия не зависят от времени, а автокорреляционная функция зависит от модуля $|\tau|$.

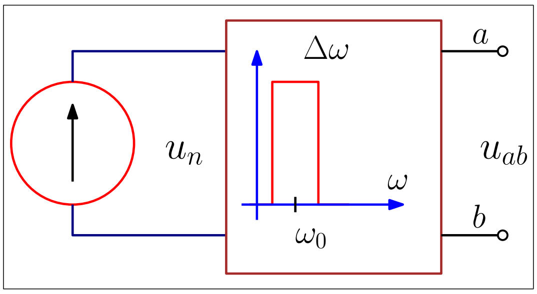

Рис. 1.1: К определению спектральной плотности.

личина "забывает" себя и поэтому $|B(\tau > 0)| < B(0)$. Характерное время $\tau = \tau_0$, при котором автокорреляционная функция зна́чимо уменьшается (обычно $|B(\tau_0)| = B(0)/e$, e — основание натурального логарифма), характеризует "память" системы и называется временем корреляции.

Теперь мы можем сказать, что требование большого времени усреднения T означает выполнение неравенства $T \gg \tau_0$.

Спектральная плотность

Основным понятием в радиофизике является спектральная плотность случайной величины. Традиционно ее определяют следующим образом. Пусть мы имеем источник (генератор) шумового напряжения $u_n(t)$. Примем, что среднее напряжение равно нулю — $\overline{u_n(t)} = 0$. Пусть мы измеряем напряжение на нем через узкополосный фильтр, как показано на рис. 1.1: коэффициент передачи фильтра равен единице в полосе $\Delta\omega$. На выходе фильтра мы получим реализацию случайного процесса — напряжение $u_{ab}(t)$. Используя эргодическую гипотезу и записывая реализации случайного напряжения на выходе фильтра в течение достаточно долгого времени мы можем измерить дисперсию случайного напряжения Δu_{ab}^2. Эта дисперсия будет пропорциональна полосе фильтра $\Delta\omega$:

$$\Delta u^2 \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_{ab}(t)^2\, dt \simeq \tilde{S}_u(\omega) \times 2 \times \frac{\Delta\omega}{2\pi} \tag{1.6}$$

Величину $\tilde{S}_u(\omega)$ мы и назовем спектральной плотностью. Отсюда сразу следует физический смысл спектральной плотности: это среднеквадратичное напряжение шума, генерируемое в единичной спектральной полосе частот. Очевидно, что полная дисперсия будет определяться интегралом:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\omega)\, \frac{d\omega}{2\pi} \tag{1.7}$$

Подчеркнем, что здесь мы говорим от так называемом двустороннем определении спектральной плотности — величина $\tilde{S}_u(\omega)$ определена для положительных и отрицательных частот. С "двусторонним" определением связано появление множителя 2 в (1.6). Часто говорят об одностороннем определении спектральной плотности $S_u(\omega)$ (величина $S_u(\omega)$ определена для положительных частот). Очевидно, что эти величины связаны равенством:

$$S_u(\omega) = 2\tilde{S}_u(\omega).$$

Для иллюстрации см. рис. 1.3.

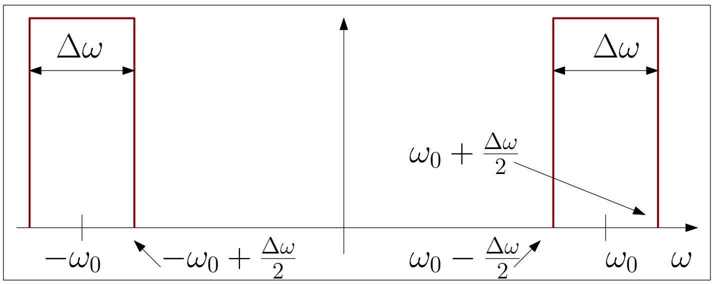

Рис. 1.2: Полосовой фильтр пропускает только частоты $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ и $-\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$.

Рассмотрим определение (1.6) более подробно. Для этого применим преобразование Фурье к случайной величине $u(t)$:

$$u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt, \quad \overline{u(\omega)} = 0. \qquad (1.8)$$

Последнее равенство очевидно, т.к. $\overline{u(t)} = 0$. Напряжение на выходе узкополосного фильтра на рис. 1.1), будет равно (см. пояснения на рис. 1.2)

$$u_{ab} = \int_{\Delta\omega} u(\omega)\, e^{-i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \int_{\Delta\omega} \equiv \int_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2} + \int_{-\omega_0-\Delta\omega/2}^{-\omega_0+\Delta\omega/2} \qquad (1.9)$$

Среднее от этого напряжения будет равно нулю, а дисперсия равна

$$\overline{u_{ab}^2} = \int_{\Delta\omega}\int_{\Delta\omega} \overline{u(\omega)u^*(\omega')}\, e^{-i(\omega-\omega')t}\, \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2} \qquad (1.10)$$

Сопоставляя это выражение и определение (1.6) спектральной плотности мы приходим к выводу, что должно выполняться равенство:

$$\overline{u(\omega)\, u^*(\omega')} = 2\pi \times \delta(\omega - \omega') \times 2\tilde{S}(\omega) \qquad (1.11)$$

Ниже мы докажем эту формулу.

Применяя преобразование Фурье (1.8) к случайной величине $u(t)$, вычислим среднее

$$\overline{u(\omega)\, u^*(\omega')} = \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(t)u(t')}\, e^{-i(\omega t-\omega' t')}\, dt\, dt' = \tag{1.12}$$

$$= \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} B(t-t')\, e^{-i(\omega t-\omega' t')}\, dt\, dt' . \tag{1.13}$$

Это выражение можно упростить, сняв одно интегрирование. Для этого сделаем замену переменных:

$$\tau = t - t', \quad \tau' = \frac{t+t'}{2}, \tag{1.14}$$

$$\omega t - \omega' t' = (\omega + \omega')\frac{\tau}{2} + (\omega - \omega')\tau' \tag{1.15}$$

и проинтегрируем по τ', принимая во внимание известное представление дельта-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\, dp \tag{1.16}$$

В итоге получаем:

$$\overline{u(\omega)\, u(\omega')^*} = 2\pi\, \delta(\omega-\omega')\ \tilde{S}_u\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \tag{1.17}$$

$$= 2\pi\, \delta(\omega-\omega')\ \tilde{S}_u(\omega), \tag{1.18}$$

$$\tilde{S}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau . \tag{1.19}$$

Нетрудно убедиться, что величина $\tilde{S}_u(\omega)$ есть спектральная плотность шума u. Смысл равенства (1.17) заключается в том, что спектральные гармоники $u(\omega)$ и $u(\omega')$ статистически не зависимы, а средний квадрат одной гармоники определяется спектральной плотностью $\tilde{S}_u(\omega)$.

Другое определение спектральной плотности

Часто определяют спектральную плотность по-другому, исходя из средней по времени мощности шума. Рассмотрим реализацию $u(t)$ случайного процесса длительности T, которую выбираем достаточно большой (много больше возможного времени корреляции). Определим среднюю по времени мощность шума как

$$W_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \big(u(t)\big)^2 \, dt \tag{1.20}$$

Преобразуем это выражение, вводя преобразование Фурье $u(\omega)$ процесса $u(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad u(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \tag{1.21}$$

$$W_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \int\int_{-\infty}^{\infty} u(\omega)u(\omega')^* \, e^{i(\omega-\omega')t} \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2}\, dt \tag{1.22}$$

Здесь мы используем то, что для действительной функции $u(t)$ справедливо равенство $u(t) = u^*(t)$. Теперь рассмотрим предел $T \to \infty$:

$$W_T = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (u(t))^2 \, dt \right) = \sigma^2 \equiv B(0), \tag{1.23}$$

$$W_T = \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{u(\omega)u(\omega')^*}{T} \right) e^{i(\omega-\omega')t} \frac{d\omega \, d\omega'}{(2\pi)^2} \, dt =$$
$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{u(\omega)u(\omega')^*}{T} \right) 2\pi \, \delta(\omega - \omega') \frac{d\omega \, d\omega'}{(2\pi)^2} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{|u(\omega)|^2}{T} \right) \frac{d\omega}{(2\pi)^2} = B(0) \tag{1.24}$$

Теперь мы можем записать

$$\lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (u(t))^2 \, dt \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{|u(\omega)|^2}{T} \right) \frac{d\omega}{(2\pi)^2} \tag{1.25}$$

Отсюда спектральную плотность средней мощности шума определяют как

$$S_u(\omega) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{|u(\omega)|^2}{T} \right) \tag{1.26}$$

Сравниваем (1.19) и (1.26), используя (1.24):

$$\tilde{S}(\omega) = S_u(\omega) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{|u(\omega)|^2}{T} \right) \tag{1.27}$$

Таким образом мы видим, что определения (1.19) и (1.26) эквивалентны. Однако, в настоящее время проще измерять спектральную плотность по определению (1.26) — просто отцифровав шумовой сигнал, вычислить его Фурье преобразование $u(\omega)$ по формуле (1.21) и подставить в (1.26).

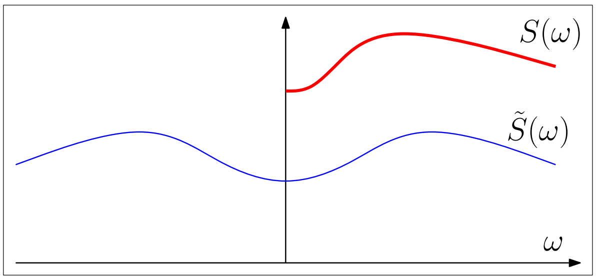

Рис. 1.3: Одностороннее ($S(\omega)$) и двустрононнее ($\tilde{S}(\omega)$) определение спектральной плотности.

Теорема Винера-Хинчина

Равенство (1.19) утверждает, что автокорреляционная функция и спектральная плотность связаны преобразованием Фурье. Следовательно, верно и обратное преобразование Фурье. Эти два утверждения и составляют содержание теоремы Винера-Хинчина:

$$\tilde{S}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau, \tag{1.28}$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}_u(\omega)\, e^{-i\omega\tau}\, \frac{d\omega}{2\pi} \tag{1.29}$$

Подчеркнем, что спектральная плотность $\tilde{S}_u(\omega)$ определена для положительных и отрицательных частот. Очевидно, что функция $\tilde{S}_u(\omega)$ четна (это очевидно из (1.28) в силу четности автокорреляционной функции $B(\tau)$).

Везде ниже мы будем пользоваться так называемым односторонним[2] определением спектральной плотно-

[2]Т.е. $S(\omega)$ определена только для положительных ω. При этом определение автокорреляционной функции $B(\tau)$ не изменяется, но определяется только для положительных τ.

сти $S(\omega) = 2\tilde{S}_u(\omega)$ — см. рис. 1.3. Тогда теорема Винера-Хинчина (1.28, 1.29) переписывается в виде:

$$S_u(\omega) = 4\int_0^\infty B(\tau)\,\cos(\omega\tau)\,d\tau \tag{1.30}$$

$$B(\tau) = \int_0^\infty S_u(\omega)\,\cos(\omega\tau)\,\frac{d\omega}{2\pi} \tag{1.31}$$

Из формулы (1.31) сразу следует, что дисперсия σ_u^2 случайного напряжения определяется интегралом:

$$\sigma_u^2 = B(0) = \int_0^\infty S_u(\omega)\,\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{1.32}$$

Это равенство можно переписать в виде $\sigma_u^2 = \sum \overline{\Delta u^2(\omega)}$ и тогда спектральную плотность можно понять как отношение среднего квадрата напряжения $\overline{\Delta u^2(\omega)}$, которое генерируется в узкой полосе $\Delta\omega/2\pi$, к этой полосе частот:

$$S_u(\omega) = 2\pi \lim_{\Delta\omega\to 0} \frac{\overline{\Delta u^2(\omega)}}{\Delta\omega} \tag{1.33}$$

Выражение (1.33) соответствует определению спектральной плотности через дисперсию случайной величины на выходе узкополосного фильтра.

Белый шум

Важным случаем шума является модель белого шума, для которого спектральная плотность не зависит от частоты, т.е. $S_u(\omega) = S_0$. Из (1.31), используя (1.16), получаем для автокорреляционной функции

$$B(\tau) = S_0\,\delta(\tau)/2\,. \tag{1.34}$$

Модель белого шума описывает случайный процесс *без памяти.* Чтобы продемонстрировать это, вспомним представление дельта-функции в виде предела некоторой обычной функции (это называют представлением дельта-функции, которых существует множество), например, такого:

$$\delta(t) = \lim_{\tau_0 \to 0} D(\tau, \tau_0), \tag{1.35}$$

$$D(\tau, \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0^2}} \exp\left(\frac{-\tau^2}{2\,\tau_0^2}\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, \tau_0)\, d\tau = 1$$

Из этого определения видно, что дельта-функцию можно понимать как “колокол” с центром в начале координат, ширина которого стремится к нулю при постоянной площади под “колоколом”. Функцию $D(\tau, \tau_0)$ часто называют “размазанной” дельта-функцией[3]. Ей полезно пользоваться для понимания свойств дельта-функции.

Теперь понятно, что если заменить дельта-функцию в (1.34) на $D(\tau, \tau_0)$, то получим время корреляции равное τ_0, а в пределе автокорреляционная функция (1.34) описывает случайный процесс с нулевым временем корреляции.

---

[3]Заметим, что дельта-функции соответствует множество таких “размазанных” функций (т.е. представлений дельта-функции), например

$$\delta(\tau) = \lim_{\tau_0 \to 0} \frac{\sin(\tau/\tau_0)}{\pi\,\tau}, \quad \text{или} \quad \delta(\tau) = \lim_{\tau_0 \to 0} \frac{\tau_0}{\pi(\tau^2 + \tau_0^2)}$$

Ниже для определенности и удобства мы будем пользоваться функцией $D(\tau, \tau_0)$

Полезно найти спектральную плотность для автокорреляционной функции B_D

$$B_D(\tau) = \frac{S_0\, D(\tau, \tau_0)}{2}, \tag{1.36}$$

$$S_D(\omega, \tau_0) = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} D(\tau, \tau_0) \exp\left(-i\omega\tau\right)\, d\tau = \\ = S_0 \exp\left(\frac{-\tau_0^2 \omega^2}{2}\right). \tag{1.37}$$

Мы видим, что ширина спектра $\Delta\omega_D = \sqrt{2}/\tau_0$ спектральной плотности S_D неограниченно увеличивается при $\tau_0 \to 0$.

Еще раз повторим, модель белого шума описывает случайный процесс без последействия. Конечно, введение дельта-функции — это абстракция. Реально в любых физических процессах есть конечное время "памяти" (в нашем примере это время τ_0). Конечное время "памяти" τ_0 приводит к тому, что спектральная плотность оказывается постоянной лишь до частот $\sim 1/\tau_0$ и уменьшается для бóльших частот. Однако, если диапазон интересующих нас частот много меньше, чем $\sqrt{2}/\tau_0$, то введение модели белого шума вполне оправдано.

Преобразование шума в линейных цепях

Рассмотрим как преобразуется шум в линейных цепях. Нас будут интересовать, естественно, шумовые характеристики.

Пусть на вход линейного устройства с коэффициентом передачи $K(\omega)$ (рис. 1.4) действует источник шума, спек-

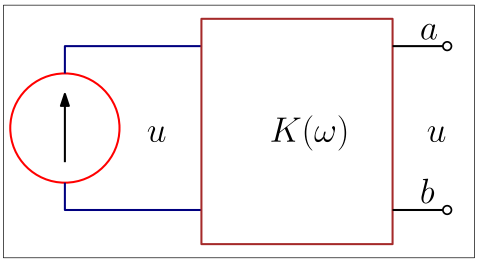

Рис. 1.4: Схема преобразования шума, проходящего через линейное устройство.

тральная плотность напряжения $S_{\text{ВХ}}(\omega)$ которого известна. Нам надо найти спектральную плотность шума на выходе устройства.

Можем записать для входного и выходного напряжения:

$$\begin{aligned}\overline{u_{\text{ВХ}}(\omega)\,u_{\text{ВХ}}(\omega')^*} &= 2\pi\,\delta(\omega-\omega')\times S_{\text{ВХ}}(\omega),\\ \overline{u_{\text{ВЫХ}}(\omega)\,u_{\text{ВЫХ}}(\omega')^*} &= 2\pi\,\delta(\omega-\omega')\times S_{\text{ВЫХ}}(\omega),\end{aligned}$$

Теперь, пользуясь связью входного и выходного напряжений, мы можем получить связь спектральных плотностей шума на входе и на выходе:

$$u_{\text{ВЫХ}}(\omega = K(\omega)\,u_{\text{ВХ}}, \tag{1.38}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = |K(\omega)|^2\,S_{\text{ВХ}}(\omega) \tag{1.39}$$

Формула (1.39) и описывает преобразование шума в линейных цепях.

Тепловой шум. Формула Найквиста

Благодаря хаотическому тепловому движению носителей заряда в проводнике возникают случайные токи внутри проводника, а следовательно, на концах его — случайные напряжения. Время корреляции такого шума малó и поэтому с хорошей степенью приближения его можно рассматривать как белый шум.

Для оценки времени корреляции, рассмотрим *внутри проводника* цилиндр площадью S и высотой d. Пусть на основаниях цилиндра случайно появились заряды, которые будут уменьшаться (релаксировать). Время релаксации зарядов (а значит, и время корреляции!) можно оценить представив цилиндр как RC цепочку:

$$R = \rho \cdot \frac{S}{d}, \quad C = \frac{\epsilon_0 \epsilon d}{S}, \tag{1.40}$$

где ρ — удельное сопротивление, ϵ — диэлектрическая проницаемость, $\epsilon_0 \simeq 9 \times 10^{-12}$ Ф м$^{-1}$ — электрическая постоянная вакуума. Время релаксации τ равно

$$\tau = RC = \epsilon_0 \epsilon\, \rho \tag{1.41}$$

Подчеркнем, мы получили, что τ *не зависит* от геометрии выбранного цилиндра. Для меди и алюминия $\rho_{Cu} = 1.7 \times 10^{-8}$ Ом·м, $\rho_{Al} = 2.7 \times 10^{-8}$ Ом·м, отсюда получаем оценку времени релаксации заряда в металле $\tau \simeq \big(1.5 \ldots 2.5\big) \cdot 10^{-17}$ с, которое приблизительно равно и времени корреляции теплового шума.

Любое сопротивление R можно рассматривать, как содержащее эквивалентный генератор шума — напряжения или тока, как показано на рис. 1.5 справа (само сопротивление,

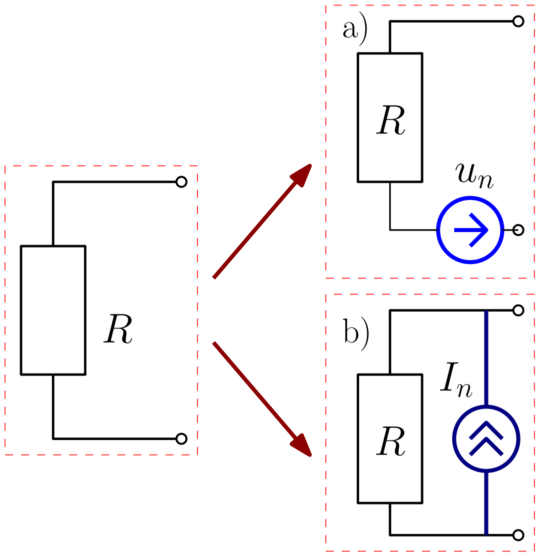

Рис. 1.5: Представление реального сопротивления R, как нешумящего сопротивления с шумовым генератором напряжения u_n (a) или тока I_n (b).

естественно, принимается нешумящим). Поскольку тепловой шум является белым, то спектральные плотности этих генераторов напряжения или тока не будут зависеть от частоты.

Односторонние спектральные плотности $S_u(\omega) = S_0$ эквивалентного генератора напряжения и $S_I(\omega)$ эквивалентного генератора тока теплового шума равнs[4]

$$S_u(\omega) = 4k_B TR, \quad S_I(\omega) = \frac{4k_B T}{R}, \tag{1.42}$$

где k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Формула (1.42) и есть формула Найквиста в рамках клас-

[4]Спектральная плотность $S_I(\omega)$ эквивалентного генератора тока будет при этом равна $S_I(\omega) = S_u(\omega)/R^2$ (это следует из теоремы об эквивалентном генераторе).

сической физики. В квантовом случае (т.е. $T \to 0$) эта формула должна быть переписана в виде:

$$S_u(\omega) = 4\kappa TR \Rightarrow 4R\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1}\right), \quad (1.43)$$

$$T = 300^\circ\text{K} \Rightarrow f_{\text{гр}} = \frac{\omega_{\text{гр}}}{2\pi} = \frac{\kappa T}{h} \simeq 6 \cdot 10^{12}\ \text{Гц}.$$

где $\hbar$ — постоянная Планка. Здесь мы привели оценку частоты $f_{\text{гр}}$, разделяющей квантовый и классический случаи при комнатной температуре. При $f \ll f_{\text{гр}}$ справедлива классическая формула Найквиста, при $f \gg f_{\text{гр}}$ можно пользоваться асимптотикой квантовой формулы, заменив в (1.42) $\kappa T \to \hbar\omega/2$, в промежуточном случае $f \sim f_{\text{гр}}$ надо пользоваться точной формулой (1.43).

Подчеркнем, что тепловые шумы являются фундаментальными и они существуют в любой системе с диссипацией, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Наличие параметра диссипации (сопротивление R) в формуле Найквиста можно качественно объяснить тем, что рассеяние энергии в системе тем больше, чем больше связь ее с термостатом. Величина этой же связи описывает случайное воздействие термостата на систему. Очевидно, что в системе без диссипации тепловые шумы будут отсутствовать, а чем больше диссипация — тем больше тепловые шумы.

Не случайно теорема Найквиста является частным случаем флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) [1, 2]. Физический смысл ФДТ заключается в том, что чем боль-

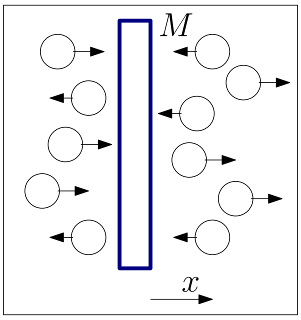

Рис. 1.6: Одномерная модель броуновской частицы массы M и поперечного сечения S, которая может двигаться только по оси x. Случайно ударяющиеся с обеих сторон молекулы создают случайную тепловую силу F_{fl}. Они же создают и вязкость.

ше потери в системе на данной частоте при внешем воздействии, тем больше спектральная плотность шумов на этой же частоте.

Формула Найквиста для механической системы

Рассмотрим механическую систему с диссипацией, например, одномерную броуновскую частицу массы M двигающуюся вдоль оси x (см. Рис. 1.6):

$$M\ddot{x} + H\dot{x} = F_{fl}. \tag{1.44}$$

Здесь H — коэффициент вязкости (сила вязкого трения $F_{тр} = -Hv$, $v = \dot{x}$ — скорость), F_{fl} — случайная сила тепловых флуктуаций. Для броуновской частицы мы можем считать спектральную плотность S_F силы F_{fl} постоянной — физически это означает, что за время релаксации $1/\delta$ ($\delta = H/M$ — затухание) происходит очень много соударений молекул. Иначе — время между соударениями много меньше времени $1/\delta$. Из этого предположения мы выведем саму величину S_F.

Пользуясь законом преобразования шума в линейных цепях (1.39) мы из (1.44) находим фурье-образ скорости $v(\omega)$, а затем спектральную плотность $S_v(\omega)$ скорости:

$$v(\omega) = \frac{F_{fl}(\omega)}{M\,(i\omega + \delta)}, \quad \Rightarrow \quad S_v(\omega) = \frac{S_F}{M^2\,(\omega^2 + \delta^2)} \tag{1.45}$$

Мы помним, что дисперсия скорости равна интегралу от спектральной плотности по всем частотам, откуда находим:

$$\left\langle v^2 \right\rangle = \int_0^\infty S_v(\omega)\,\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{S_F}{4MH} \tag{1.46}$$

Подчеркнем, здесь и везде ниже мы используем *одностороннее* определение спектральной плотности.

Но по теореме о равнораспределении мы знаем, что на каждую степень свободы в среднем приходится энергия $k_B T/2$, откуда и находим спектральную плотность S_F:

$$\frac{M\left\langle v^2 \right\rangle}{2} = \frac{k_B T}{2}, \quad \Rightarrow \quad S_F(f) = 4 k_B T H \quad \left[\frac{\text{Н}^2}{\text{Гц}}\right] \tag{1.47}$$

Формула (1.47) и есть формула Найквиста для механических систем (в квадратных скобках указана размерность спектральной плотности S_F). Физическая суть этой формулы та же, что и для электрических систем — диссипация является источником флуктуаций. Обобщение на квантовый случай выписывается аналогично (1.43).

Формула (1.47) означает, что дисперсия случайной силы, усредненной за время τ, может быть оценена по формуле

$$\Delta F^2 = 4k_B T H\,\Delta f \simeq \frac{4k_B T H}{\tau} \tag{1.48}$$

Рассмотрим пример на Рис. 1.6 более подробно. Пусть одномерная броуновская частицы имеет форму стенки площади S, на поверхность которой падают молекулы (масса каждой m, нормальная к стенке компонента скорости u, концентрация n). Рассчитаем силу случайную $F_{\rightarrow}$, создаваемую молекулами падающими слева направо:

$$F_{\rightarrow} = \frac{2mu}{\tau} N \frac{1}{2} = \frac{mu}{\tau} nSu\tau = nmu^2 S. \tag{1.49}$$

Здесь $N_{\rightarrow}/2$ — среднее число частиц, ударившихся слева о стенку за время τ. Очевидно, выражение для силы $F_{\leftarrow}$, создавемыми молекулами слева, будет таким же, надо только помнить, случайные силы $F_{\rightarrow}$ и $F_{\leftarrow}$ статистически независимы.

Если стенка движется со скоростью v, то появляется регулярная сила, которую можно рассматривать как силу вязкости:

$$F_H = nm(u-v)^2 S - nm(u+v)^2 S = -Hv, \quad H = 4mnuS \tag{1.50}$$

Число частиц, падающих на стенку, подчиняется распределению Пуассона: $N_{\rightarrow}/2 \pm \sqrt{N_{\rightarrow}/2}$ (для молекул упавших слева — аналогично). Флуктуационная компонента силы будет определяться общей (слева и справа) дисперсией отразившихся частиц $\langle \Delta N^2 \rangle = (N_{\rightarrow} + N_{\leftarrow})/2$:

$$\sqrt{\langle \Delta F^2 \rangle} = \frac{2mu}{\tau} \sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle} = \tag{1.51}$$

$$= \sqrt{\frac{4m^2u^3nS}{\tau}} = \sqrt{\frac{k_B TH}{\tau}} \tag{1.52}$$

В последнем равенстве мы использовали теорему о равнораспределении:

$$\left\langle \frac{mu^2}{2} \right\rangle = \frac{k_B T}{2} \tag{1.53}$$

Мы видим, что формула (1.52) совпадает с (1.48), но лишь с точностью до множителя. Поэтому приведенный вывод носит полу-качественный характер.

Минимальная обнаружимая сила

Зададимся вопросом: какая минимальная сила $F_{min}(t)$ (действующая на механический осциллятор) может быть обнаружена на фоне тепловых флуктуаций? Здравый смысл подсказывает, что надо измерять координату и только в той полосе частот Δf, где находится основная часть спектра силы. Тогда используя (1.52) получаем условие обнаружения в виде:

$$F_{min}(t) \geq \sqrt{4k_B TH\, \Delta f} \tag{1.54}$$

Например, пусть на высокодобротный механический осциллятор частоты ω_m действует резонансная сигнальная сила в виде цуга длительности $\tau \gg 1/\omega_m$:

$$F(t) = F_0 \cos \omega_m t, \quad 0 < t < \tau, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{1.55}$$

Тогда условие ее обнаружения выводится из сравнения с флуктуационной силой (1.54) в той же полосе $\Delta f \simeq 1/\tau$:

$$F_0^{min} \geq \sqrt{\frac{8\, m k_B T}{\tau \tau_m^*}} = \sqrt{\frac{4\, m \omega_m\, k_B T}{Q_m \tau}}, \tag{1.56}$$

$$Q_m = \frac{m\omega_m}{H}, \quad \tau_m^* = \frac{2m}{H} \tag{1.57}$$

Здесь мы ввели пока не упоминавшиеся характеристики диссипации: добротность Q_m и время релаксации τ_m^*.

Для уменьшения величины минимально измеримой силы F_0 из формул (1.56) сразу следуют рекомендации:

- Уменьшение температуры T.
- Увеличение времени τ действия силы.
- Увеличение времени релаксации τ_m^* (уменьшение диссипации).
- Увеличение добротности Q_m (это тоже уменьшение диссипации).

Сигнальное воздействие на высокодобротный механический осциллятор

Подчеркнем, что в рекомендациях, приведенных выше, нет конкретных указаний о процедуре измерения. Например, если по условиям эксперимента время релаксации τ_m^* может быть велико, а время действия силы τ ограничено. Пусть выполняется условие

$$\tau \ll \tau_m^* \tag{1.58}$$

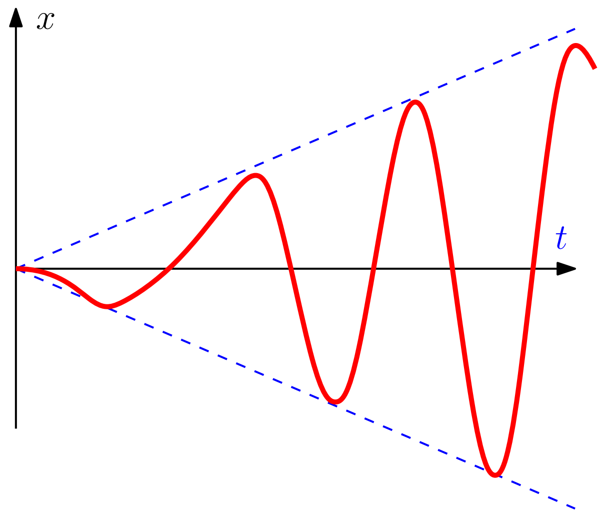

Рис. 1.7: График зависимости координаты осциллятора $x(t)$ под действием резонансной силы (1.59).

В этом случае сразу не ясно, как и что измерять.

Пусть условие (1.58) выполнено. Мы хотим зарегистрировать воздействие сигнальной силы, наблюдая за амплитудой колебаний координаты. При воздействии силы вида (1.55) на механический осциллятор можно не учитывать диссипацию и тогда легко получить решение для амплитуды координаты x_F ("сигнальный отклик"):

$$x(t) = x_F \sin \omega_m t, \quad x_F = \frac{F_0 \tau}{2m\omega}, \quad \tau^* \gg t > \tau. \tag{1.59}$$

См. график на рис. 1.7, см. также задачу "Резонанс".

Теперь нам надо рассчитать, на сколько изменится амплитуда Δx_τ колебаний осциллятора за то же самое время τ под воздействием тепловых шумов. Приведем следующий приближенный, но зато наглядный вывод. Разобьем время действия силы τ на интервалы T_0, которые больше периода, но меньше τ. Тогда на каждом таком интервале осциллятор будет получать случайные толчки, вызванные *узкополосной* случайной силой F_{fl}, амплитуду которой можно оценить из формулы Найквиста:

$$F_{fl} \simeq \sqrt{\frac{4k_B TH}{T_0}} \tag{1.60}$$

Воздействие каждой такой случайной силы изменит амплитуду на x_{fl}, которую можно рассчитать как воздействие короткой резонансной силы F_{fl}. В результате получим [3]:

$$x_{fl} \simeq \frac{F_{fl} T_0}{2m\omega_m} = \sqrt{k_B TH \frac{T_0}{m^2\omega_m^2}}. \tag{1.61}$$

Здесь x_{fl} — изменение амплитуды колебаний за время T_0 под действием силы F_{fl}. Теперь надо просуммировать их, как независимые случайные величины. Логично считать, что добавки к амплитуде x_{fl} на каждом отрезке T_0 не коррелированы и поэтому их сумма в среднем равно нулю. Складываться будут лишь дисперсии, поэтому средний квадрат вариации амплитуды за время τ будет равен:

$$\langle \Delta x_\tau^2 \rangle \simeq x_{fl}^2 \cdot N, \quad \sqrt{\langle \Delta x_\tau^2 \rangle} \simeq x_{fl} \sqrt{\frac{\tau}{T_0}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_m^2} \cdot \frac{2\tau}{\tau^*}} \tag{1.62}$$

Мы получили, что величина $\sqrt{\langle \Delta x_\tau^2 \rangle}$ *не зависит* от интервала T_0 — это говорит в поддержку приближенного метода.

Рисунок 1.8 иллюстрирует изменение средней амплитуды под действием тепловых флуктуаций для двух случаев: а)

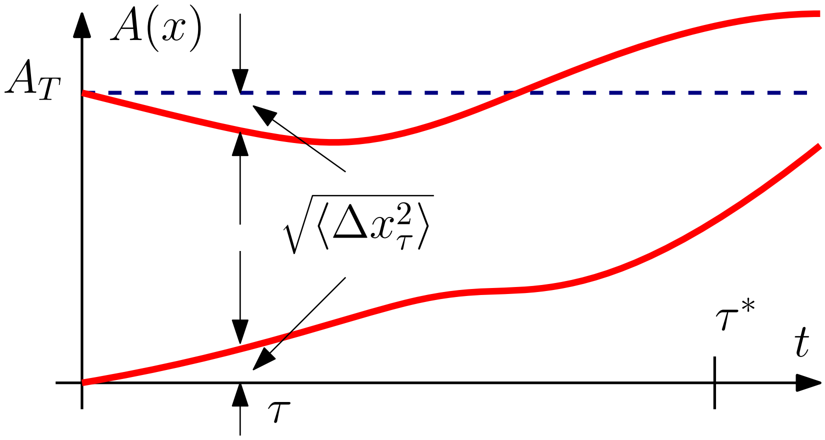

Рис. 1.8: Изменение амплитуды высокодобротного резонатора A под действием тепловых флуктуаций. Средняя тепловая амплитуда равна $A_T = \sqrt{\frac{\kappa T}{m\omega_m^2}}$.

начальная амплитуда равна средней $A_T = \sqrt{k_B T/m\omega_m^2}$; б) начальная амплитуда равна нулю.

Очевидно, что условие $x_F > \sqrt{\langle \Delta x_\tau^2 \rangle}$ будет условием обнаружения силы F. Подставляя, получаем:

$$x_F = \frac{F_0 \tau}{2m\omega} \geq \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_m^2} \cdot \frac{2\tau}{\tau^*}} \qquad (1.63)$$

Нетрудно увидеть, что это условие просто совпадает с (1.56). Однако теперь мы имеем еще и *рецепт* измерений — надо регистрировать *изменение амплитуды координаты.*

Очевидно, что условие (1.63) приближенно. Строгий расчет дает [3], что появляется множитель $\xi \simeq 2 \ldots 3$, зависящий от уровня достоверности α [5] и от значения начальной

[5]Величина $1 - \alpha$ есть вероятность того, что вариация амплитуды не превысит величину, даваемую (1.64) (в отсутствии сигнальной силы).

амплитуды колебаний x_0:

$$F_0^{min} \geq \xi(\alpha, x_0)\sqrt{\frac{8\,mk_BT}{\tau\tau_m^*}}. \tag{1.64}$$

Приведем типичные значения для ξ [3]:

α	$\xi(\alpha, x_0 = 0)$	$\xi(\alpha, x_0 = \sqrt{\frac{k_BT}{m\omega_m^2}})$
0.05	2.45	1.96
0.01	3.04	2.58

Мы видим, что для оценок можно держать в голове множитель ξ приблизительно равным 3.

Глава 2

Измерение в классической физике

До сих пор мы не обращали внимание на то, каким прибором будем измерять смещение, абстрактно считая считая его идеальным. В общем случае процесс измерения сводится к взаимодействию прибора и объекта. Поэтому подключение датчика смещений к механическому осциллятору может изменить динамические характеристики осциллятора (частоту, затухание). Это называется динамическим влиянием прибора. Кроме того, прибор характеризуется ошибкой измерения и обратным флуктуационным влиянием. Все это мы рассмотрим на примере емкостного датчика [3].

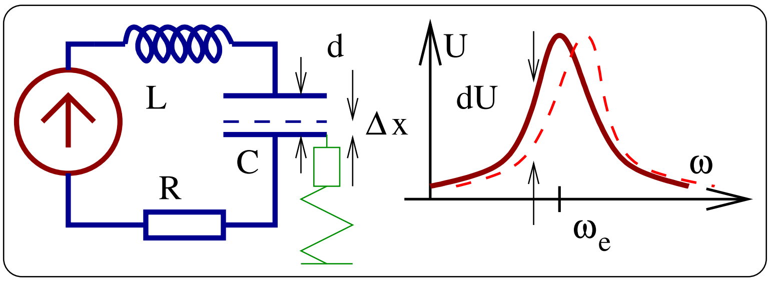

Рис. 2.1: Схема емкостного датчика. Смещение Δx механического осциллятора, прикрепленного к пластине конденсатора, вызывает изменение напряжения dU на конденсаторе.

Принцип работы емкостного датчика

Схема емкостного датчика представлена на рис. 2.1. Выберем частоту генератора ω_g так, чтобы она попадала на самую крутую часть склона резонансной кривой (задача “Склон резонансной кривой”):

$$\omega_g \simeq \omega_e \pm \frac{\omega_e}{2Q_e}, \quad Q_e = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.1}$$

где ω_e — частота, а Q_e — добротность LC-контура. Тогда изменение расстояния d между пластинами на малую величину $\Delta x \ll d$ вызовет изменение емкости ΔC (а, значит, и резонансной частоты $\Delta\omega_e$) и сдвиг резонансной кривой[1]. Это в свою очередь приведет к изменению амплитуды напряжения ΔU_c на емкости, что и может быть зарегистрировано. Очевидно, что чем более добротный контур, тем более крутую зависимость имеет резонансная кривая и тем сильнее изменится напряжение.

Мы предполагаем, что частота LC-контура ω_e много больше характерной частоты механической системы, в случае механического осциллятора с частотой ω_m это означает $\omega_e \gg \omega_m$. Но на самом деле условие на механическую частоту еще жестче — см. (2.3).

Сформулируем условия штатной работы емкостного датчика:

[1]Резонансная кривая — зависимость амплитуды вынужденных колебаний напряжения (например, на емкости) от частоты генератора.

- Выбираем настройку на склон, т.е. частота ω_g генератора накачки должна соотносится с частотой контура ω_e в соответствии с формулой (2.1). При этом изменение напряжения на конденсаторе из-за малого сдвига пластин будет максимальным.

- Сдвиг пластин Δx должен быть достаточно мал, так, чтобы резонансная кривая сдвигалась на величину много меньше, чем ширина кривой ω_e/Q_e. Это означает условие:
$$\Delta x \ll \frac{d}{Q_e} \tag{2.2}$$

- Смещение пластин должно быть достаточно медленным так, чтобы напряжение на конденсаторе успевало установиться. Поскольку время установления нового значения напряжения по порядку величины равно времени затухания τ_e^* контура, получаем условие медленности:
$$\partial_t d \ll \frac{d}{\tau_e^*}, \quad \Rightarrow \quad \omega_m \tau_e^* \ll 1, \quad \tau_e^* = \frac{2Q_e}{\omega_e} = \frac{2L}{R}, \tag{2.3}$$
где τ_e^* — время затухания колебаний в контуре.

В качестве пояснения рассмотрим пример. Пусть в добротном LC-контуре возбуждены вынужденные колебания и пусть его собственная частота скачком изменилась на небольшую величину: $\omega_e \to \omega_e + \delta\omega_e$. Этой новой частоте соответствуют вынужденные колебания с немного измененными амплитудой $A \longrightarrow A + \delta A$ и фазой $\phi \longrightarrow \phi + \delta\phi$. Но установятся эти новые амплитуда и фаза *не сразу*, а через время больше (или порядка) времени релаксации $\tau_e^* = 2Q_e/\omega_e$. Это как раз и соответствует условию (2.3).

Некоторые детали см. в задаче 9 “Условие работы емкостного датчика”.

Напомним формулы для последовательного LC-контура:

$$\omega_e^2 = \frac{1}{LC}, \quad C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} \tag{2.4}$$

Здесь S — площадь пластин конденсатора, d – зазор между ними.

Обратное динамическое влияние

Можно показать, что при условии (2.1) малый сдвиг пластин конденсатора на величину $\Delta x \ll d$ приведет к изменению амплитуды ΔU_C колебаний на емкости на величину (задача 8 “Емкостной датчик”):

$$\Delta U_C \simeq \pm \frac{Q_e}{2} \cdot \frac{\Delta x}{d} \cdot U_C \tag{2.5}$$

Здесь знак $(-)$ относится к настройке на левый склон, а $(+)$ — на правый.

Подчеркнем, что формула (2.5) справедлива лишь при выполнении условий (2.1, 2.2 и 2.3). Ниже будем считать, что эти условия выполнены.

Но при выборе частоты генератора по рецепту (2.1) изменение расстояния между пластинами вызовет также и изменение кулоновской (пондеромоторной) силы F притяжения между пластинами, а это означает внесение дополнительной электро-магнитной жесткости $K_{\text{доп}}$ в механический осциллятор. Глядя на рис. 2.1 сразу можно сказать, что на правом склоне при увеличении расстояния между пластинами возрастает сила притяжения между ними, т.е. вносится положительная жесткость — добавок силы противоположен по знаку смещению, $\Delta F \sim -\Delta x$. (Напомним, что именно так работает обычная пружина: упругая сила противоположна по знаку смещению.) На левом склоне — наоборот, вносится отрицательная жесткость.

Рассчитаем вносимую жесткость при настройке на правый склон. Для этого рассчитаем силу притяжения пластин F при изменении напряжения на емкости U_C на малую величину ΔU_C:

$$F = -\frac{\epsilon_0 S\, (U_C + \Delta U_C)^2}{2d^2} = \tag{2.6}$$
$$= -\frac{\epsilon_0 S\, \left(U_C^2 + +2U_c \Delta U_C + \Delta U_C^2\right)}{2d^2} = F_0 + \Delta F + \dots ,$$

$$F_0 = -\frac{\epsilon_0 S\, U_C^2}{2d^2}, \quad \Delta F = -\frac{\epsilon_0 S\, U_C\, \Delta U_C}{d^2}, \quad U_C = \frac{Q_e U_g}{\sqrt{2}}, \tag{2.7}$$

Здесь мы выделили постоянную силу F_0, интересующую нас силу ΔF, а силу, пропорциональную ΔU_C^2, опустили как малую второго порядка. Постоянную силу F_0 мы тоже не будем учитывать, полагая, что ее нетрудно скомпенсировать (если надо).

Теперь подставляем (2.5) в ΔF (2.7) и находим дополнительную жесткость $K_{доп}$:

$$\Delta F \simeq -\frac{\epsilon_0 S\, Q_e^3 U_g^2}{4d^3} \cdot \Delta x, \quad \Rightarrow \tag{2.8}$$

$$\Rightarrow \quad K_{доп} = \frac{-\Delta F}{\Delta x} = \frac{\epsilon_0 S\, Q_e^3 U_g^2}{4d^3} = Q_e \cdot \frac{C U_C^2}{2d^2} \tag{2.9}$$

Здесь S — площадь пластин. Повторим, что при настройке на левый склон знак жесткости будет отрицательный.

Поскольку U_C фактически есть амплитуда напряжения на емкости, мы можем переписать формулу (2.9) в виде

$$K_{доп} = Q_e \cdot \frac{\mathcal{E}_e}{d^2}, \quad \mathcal{E}_e = \frac{C U_C^2}{2}, \tag{2.10}$$

где $\mathcal{E}_e$ — энергия, запасенная в контуре.

Внесение электро-магнитного затухания

Подчеркнем, что наш вывод основывался на приближенных формулах, которые справедливы только при достаточно медленных (квазистационарных) движениях пластин. Конечно, сила притяжения при изменении Δx изменяется не мгновенно, а с запаздываением — сила притяжения "отстает" от смещения на время τ_e^* релаксации контура (задача 10 "Скачок"). Напомним, что условие (2.3) означает, что координата Δx *мало* изменяется за время τ_e^*. Тогда в уравнении для координаты x механического осциллятора мы должны учесть, что дополнительная жесткость вносится с запаздыванием τ_e^*:

$$m\ddot{x}(t) + H\dot{x}(t) + Kx(t) + K_{\text{доп}}x(t-\tau_e^*) = F. \tag{2.11}$$

Раскладываем в ряд $x(t-\tau_e^*) \simeq x(t) - \tau_e^*\,\dot{x}(t) + \ldots$ и подставляем в уравнение (2.11):

$$m\ddot{x}(t) + \Big(H - K_{\text{доп}}\tau_e^*\Big)\dot{x}(t) + \Big(K + K_{\text{доп}}\Big)x(t) = F. \tag{2.12}$$

Мы видим, что включение емкостного датчика приводит к внесению жесткости и затухания (верхний знак относится к правому склону, нижний — к левому)

$$K_{\text{доп}} = \pm\frac{\epsilon_0 S\, Q_e^3\, U_g^2}{4d^3}, \tag{2.13}$$

$$H_{\text{доп}} = -K_{\text{доп}}\tau_e^* = \mp\frac{\epsilon_0 S\, Q_e^4\, U_g^2}{2d^3\omega_e} \tag{2.14}$$

Причем на левом склоне вносится отрицательная жесткость и положительное затухание, на правом — положительная жесткость и отрицательное затухание.

Заметим, что динамическое влияние может быть отнюдь не малым. Для приведенных ниже численных значений величин (отнюдь не рекордных)

$$\begin{aligned} m &= 0.1\ \mathrm{kg}, \quad \omega_m = 6\cdot 10^3,\ \mathrm{s}^{-1}, \quad Q_m = 10^6; \\ Q_e &= 10^3, \quad \omega_e = 6\cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}, \\ S &= 10^{-2}\ \mathrm{m}^2, \quad U = 1\ \mathrm{V}, \quad d = 5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}; \end{aligned}$$

Мы получаем следующие оценки:

$$\frac{|K_{\text{доп}}|}{K} \simeq 0.05, \quad \frac{|H_{\text{доп}}|}{H} \simeq 9.8 \times 10^3 \ (!) \tag{2.15}$$

Видим, что изменение жесткости механического осциллятора незначительно, но внесенное затухание огромно!

Подчеркнем, что динамическое влияние прибора *полностью предсказуемо*, а значит, может быть либо исключено, либо корректно учтено. Поэтому динамическое влияние прибора *не* накладывает принципиальных ограничений на точность измерений.

Ошибка измерения

Любой прибор позволяет измерять физическую величину с некоторой ошибкой измерения. Рассмотрим, с какой предельной точностью может измерять координату емкостной датчик [3] на Рис. 2.1.

Предположим, что генератор напряжения идеален, т.е. флуктуации в генераторе пренебрежимо малы. Тогда принципиально неустранимыми шумами будут тепловые шумы в контуре. Спектральную плотность S_{U_C} шумов амплитуды напряжения на контуре можно найти, не принимая во внимание движение пластин:

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{q(t)}{C} = U_{\text{шум}}(t), \quad U_C(t) = \frac{q(t)}{C}. \tag{2.16}$$

Переходим на частотное описание:

$$q_C(t) = \int q(\omega)\, e^{i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}, \quad U_C(\omega) = \frac{q(\omega)}{C}, \tag{2.17}$$

$$U_C(\omega)\Big(1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2} + \frac{i\omega}{\omega_e Q_e}\Big) = U_{\text{шум}}(\omega), \tag{2.18}$$

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q_e = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{2.19}$$

Зная связь фурье-амплитуд, по формулам преобразования шума в линейных цепях мы мы можем выписать спектральную плотность:

$$S_{U_C}(\omega)\left\{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_e Q_e}\right)^2\right\} = 2k_B T_e R, \tag{2.20}$$

Здесь мы использовали формулу Найквиста $2k_B T_e R$ (а не $4k_B T_e R$), T_e — температура сопротивления в LC-контуре.

Для объяснения этого напомним, что речь идет об измерении квадратуры (как при настройке на склон, так и при резонансной накачке). Действительно, напряжение на емкости можно записать в виде

$$U_C = (U_0 + u_{fl1})\cos\omega t + u_{fl2}\sin\omega t, \tag{2.21}$$

где член при косинусе будем называть амплитудной квадратурой, а при синусе — фазовой. “Традиционная” формула Найквиста ($4k_B T_e R$) относится к спектральной плотности, которая отвечает за сумму дисперсий $\langle u_{fl1}^2 + u_{fl2}^2\rangle$. Очевидно, что в силу симметрии по отдельности они равны

$\langle u_{fl1}^2 \rangle = \langle u_{fl2}^2 \rangle$. Поэтому для квадратур надо ставить в правую часть спектральную плотность в два раза меньше.

Если генератор накачки настроен на склон резонансной кривой (2.1), то

$$\frac{\omega_g}{\omega_e} = 1 \pm \frac{1}{2Q_e} \quad \Rightarrow \quad S_{U_C}(\omega_g) = k_B T_e R Q_e^2. \tag{2.22}$$

При резонансной накачке

$$\frac{\omega_g}{\omega_e} = 1 \quad \Rightarrow \quad S_{U_C}(\omega_g) = 2k_B T_e R Q_e^2. \tag{2.23}$$

Напомним, что режим работы емкостного датчика таков, что он успевает "отработать" изменение механической координаты

$$\omega_m \tau_e^* \ll 1. \tag{2.24}$$

Ср. (2.3). На частотном языке это означает, что в полосе $\omega \in \omega_g \pm \omega_m$ спектральную плотность S_{U_C} можно считать постоянной. Значит, сигнал ΔU_C (2.5) наблюдается на фоне практически белых шумов и условие обнаружения будет иметь вид:

$$\Delta U_C > \sqrt{S_{U_C} \Delta f}, \quad \Delta f \simeq \frac{1}{\tau}. \tag{2.25}$$

При настройке на склон получаем

$$\Delta x > \xi\, x_{min}, \quad x_{min}^{\text{slope}} \simeq \frac{2d}{U_C} \sqrt{\frac{k_B T_e R}{\tau}}, \tag{2.26}$$

Здесь τ — время наблюдения, U_C — амплитуда напряжения на емкости, ξ — множитель немного больший единицы, зависящий от уровня достоверности.

Перепишем условие (2.26) несколько в других обозначениях, вводя мощность W выделяемую в контуре (на сопротивлении R):

$$W = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{\omega_g^2 (CU_c)^2 R}{2} \simeq \frac{\omega_e^2 (CU_c)^2 R}{2}, \tag{2.27}$$

$$\frac{x_{\min}^{\text{slope}}}{d} = 2\xi \sqrt{\frac{2k_B T_e R}{U_C^2 \tau}} \underbrace{=}_{(2.27)} 2\xi \sqrt{\frac{2k_B T_e R \cdot \omega_e^2 C^2 R}{2W\tau}}, \tag{2.28}$$

$$\frac{x_{\min}^{\text{slope}}}{d} = \frac{2\xi}{Q_e} \sqrt{\frac{k_B T_e}{\mathcal{E}}}. \tag{2.29}$$

Здесь $\mathcal{E} = W\tau$ — энергия, поглощенная в контуре за время τ. Ее можно назвать "использованной" энергией.

Таким образом мы получили два ограничения на минимально различимое механическое смещение: (1.63) и (2.29). Оба ограничения связаны с фундаментальными шумами: первое (1.63) — с тепловыми шумами в механическом осцилляторе, второе (2.26 или 2.29) — с тепловыми шумами в LC-контуре емкостного датчика.

Обратное флуктуационное влияние

Предположим, что тепловые шумы в механическом осцилляторе ничтожно малы ($H \to 0$ или $T_{\text{мех}} \to 0$) и основные шумы создает сам емкостной датчик. Измерительный шум датчика мы рассмотрели в предыдущем разделе. Кроме этого сам датчик создает дополнительный шум обратного флуктуационного влияния (back action noise), который неконтролируемым образом возмущает поведение механического осциллятора [3]. Конкретным механизмом для емкостного датчика являются флуктуации силы $F_{\text{кул}}$ кулоновского притяжения между пластинами:

$$F_{\text{кул}} = \frac{\epsilon_0 S\left(U_C + U_{C\,\mathrm{fl}}\right)^2}{2d^2} = \frac{\epsilon_0 S U_C^2}{2d^2} + \underbrace{\frac{\epsilon_0 S U_C U_{C\,\mathrm{fl}}}{d^2}}_{\delta F_{\mathrm{ba}}} + \dots \tag{2.30}$$

Здесь первый член описывает постоянную составляющую силы (ее мы не учитываем ниже), второй — флуктуационную компоненту, член $\sim U_{C\,\mathrm{fl}}^2$ опущен как величина второго порядка малости.

Выписываем флуктуационную компоненту силы, используя спектральную плотность флуктуаций напряжения на емкости (2.25) при настройке на склон:

$$\delta F_{\mathrm{ba}}^{\mathrm{slope}} = \frac{\epsilon_0 S U_C \sqrt{S_{U_C}\Delta f}}{d^2} = \frac{\epsilon_0 S U_C Q_e}{d^2} \times \sqrt{\frac{k_B T_e R}{\tau}}. \tag{2.31}$$

Подчеркнем, что для осциллятора шумы обратного влияния представляют собой случайную силу, спектр которой практически не зависит от частоты (в силу условий штатной работы емкостного датчика, см. также пояснения в разделе 2.3).

Важно, что величина этой случайной силы пропорциональна U_C — растет с увеличением накачки. Вспомним, что измерительные шумы уменьшаются с ростом накачки (см.

формулы (2.26, 2.29)). Поэтому должно быть оптимальное значение стационарной амплитуды напряжения U_C^{opt} на емкости, при котором суммарный шум (измерительный и обратного влияния) будет минимален.

Оптимальная накачка

Величина этой оптимальной амплитуды будет зависеть от конкретного вида сигнальной силы. Пусть сигнальная сила представляет собой резонансный цуг длительности τ:

$$F_s(t) = F_0 \sin \omega_m t, \quad 0 < t < \tau. \tag{2.32}$$

Тогда можно найти выражение для обнаружимой силы F_0^{det}:

$$F_0^{\mathrm{det}} = \sqrt{\langle(\delta F_{\mathrm{ba}})^2\rangle + \langle(\delta F_{\mathrm{meas}})^2\rangle}, \tag{2.33}$$

с учетом шумов обратного флуктуационного влияния δF_{ba} (2.31) и ошибки измерения δF_{meas} (2.26)). При настройке на склон имеем:

$$\langle(\delta F_{\mathrm{ba}}^{\mathrm{slope}})^2\rangle \simeq \left(\xi \frac{\epsilon_0 S U_C Q_e}{d^2}\right)^2 \frac{k_B T_e R}{\tau}, \tag{2.34}$$

$$\langle(\delta F_{\mathrm{meas}}^{\mathrm{slope}})^2\rangle \simeq \left(\frac{2m\omega_m x_{\mathrm{min}}^{\mathrm{slope}}}{\tau}\right)^2 = \left(\xi \frac{4m\omega_m d}{U_C \tau}\right)^2 \frac{k_B T_e R}{\tau}. \tag{2.35}$$

F_0^{det} минимальна при оптимальной накачке, т.е. при оптимальном напряжении на конденсаторе:

$$C(U_C^{\mathrm{opt}})^2 = \frac{4m\omega_m d^2}{Q_e\tau}, \quad W^{\mathrm{opt}} = \frac{C(U_C^{\mathrm{opt}})^2}{2}\frac{\omega_e}{Q_e} = \frac{2m\omega_m\omega_e d^2}{Q_e^2\tau}, \tag{2.36}$$

Подставляем оптимальное напряжение и находим минимальную обнаружимую силу

$$\begin{aligned} F_0^{\mathrm{det}}\Big|_{\min} &= \xi\sqrt{2}\,\frac{CQ_e}{d}\sqrt{\frac{4m\omega_m d^2}{CQ_e\tau}}\sqrt{\frac{k_B T_e R}{\tau}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}\,\xi}{\tau}\sqrt{k_B T_e R m\omega_m C Q_e} = \frac{2\sqrt{2}\,\xi}{\tau}\sqrt{\frac{m\,k_B T_e\,\omega_m}{\omega_e}} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Подчеркнем, формула (2.37) дает выражение для минимальной силы, которая определяется только тепловыми шумами емкостного датчика, здесь T_e есть температура именно датчика, собственными тепловыми шумами механического осциллятора мы пренебрегли.

При комнатной температуре для следующих параметров емкостного датчика и механического осциллятора:

$$\begin{aligned} &m = 0.1\ \mathrm{kg}, \quad \omega_m = 10^2\ \mathrm{s}^{-1}, \quad \tau = 10^3\ \mathrm{s}^{-1}, \\ &Q_e = 10^3, \quad \omega_e = 6\cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}, \quad S = 10^{-2}\ \mathrm{m}^2, \quad d = 5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} F_0^{\min} &\simeq 3.3\times 10^{-16}\ \text{Н} = 3.3\times 10^{-9}\ \text{дин}, \\ W^{\mathrm{opt}} &\simeq 3\times 10^{-6}\ \text{Вт}, \quad U_C = 0.075\ \text{В} \end{aligned}$$

Приведенные параметры обычны для физической лаборатории. Для оценки резерва чувствительности используем следующие параметры (Физфак МГУ 1965, принцип эквивалентности[2])

$$\begin{aligned} m &= 10^{-7}\ \mathrm{kg}, \quad \omega_m = 10^{-2}\ \mathrm{s}^{-1}, \quad \tau = 10^{6}\ \mathrm{s}^{-1}, \\ Q_e &= 10^{3}, \quad \omega_e = 6\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}^{-1}, \quad S = 10^{-2}\ \mathrm{m}^2, \quad d = 5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}; \end{aligned}$$

и получаем значительно более высокую чувствительность:

$$\begin{aligned} F_0^{\mathrm{min}} &\simeq 3.3\times 10^{-25}\ \text{Н} = 3.3\times 10^{-18}\ \text{дин}, \\ W^{\mathrm{opt}} &\simeq 3\times 10^{-17}\ \text{Вт}, \quad U_C = 2.7\times 10^{-8}\ \text{В} \end{aligned}$$

Таким образом мы показали, что ограничения из-за тепловых шумов являются фундаментальными и определяют *предельную чувствительность* измерителей смещений. С другой стороны надо помнить, что достижение такой чувствительности является сложной экспериментальной задачей.

Емкостной датчик с настройкой на резонанс

Выше мы рассматривали емкостной датчик, настроенный на склон резонансной кривой — в этом случае смещение пластин вызывает изменение *амплитуды* напряжения на емкости, которое легко зарегистрировать простым амплитудным детектором. Зададимся вопросом, а можно ли использовать

[2]С тех пор в гравитационных измерениях чувствительность улучшилась, но не разительно.

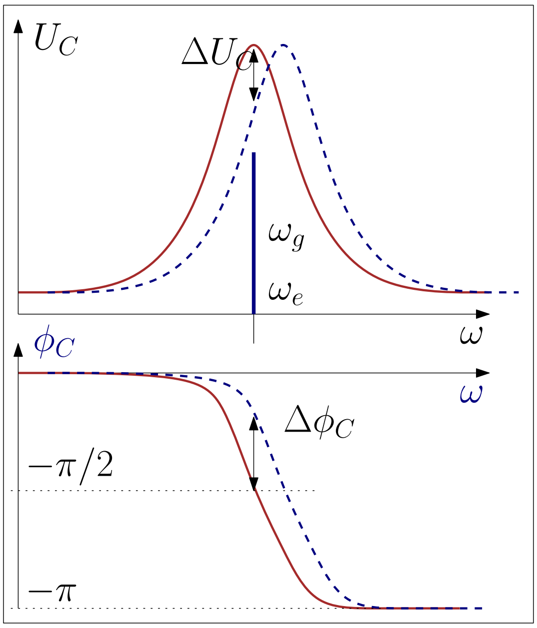

Рис. 2.2: При смещении Δx пластин емкостного датчика амрплитудно-частотная (вверху) и фазово-частотная (внизу) характеристики смещаются. При резонансной настройке ($\omega_g = \omega_e$) амплитуда напряжения на емкости изменяется слабо ($\Delta U_C \sim (\Delta x)^2$), но значительно изменяется фаза ($\Delta\phi_C \sim \Delta x$).

резонансную накачку (частота генератора ω_g равна резонансной частоте ω_e контура)?

Зависимость напряжения U_C на емкости от частоты генератора ω_g (см. (2.18)) имеет вид:

$$\frac{U_C(\omega_g)}{U_g} = K(\omega_g, \omega_e), \tag{2.38}$$

$$K(\omega_g, \omega_e) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_g^2}{\omega_e^2} + \frac{i\omega_g}{\omega_e Q_e}\right)}, \tag{2.39}$$

где K — комплексный коэффициент передачи.

Напомним, введение комплексного коэффициента передачи удобно математически, переход к описанию в “реальном мире" производится по формуле:

$$u_c(t) = \mathrm{Re}\left\{U_g K(\omega_g, \omega_e)\, e^{i\omega_g t}\right\} = \tag{2.40}$$

$$= U_g \mathrm{Re}\{K(\omega_g, \omega_e)\} \cos\omega_g t - U_g \mathrm{Im}\{K(\omega_g, \omega_e)\} \sin\omega_g t\,. \tag{2.41}$$

Здесь мы считаем U_g действительным числом.

Очевидно, что при резонансной накачке изменение амплитуды из-за вариации расстояния d мало (оно пропорционально *квадрату* смещения $\Delta U_C \sim (\Delta x)^2$, поскольку

$$\left.\frac{\partial\left|K(\omega_e, \omega_g)\right|}{\partial\omega_e}\right|_{\omega_g=\omega_e} = 0, \tag{2.42}$$

что легко проверяется прямым вычислением. Это видно из рис. 2.2, на котором показано, как сдвигаются амплитудно-частотная $\left|K\right|$ и фазово-частотная ($\phi_C = \arg K$) характеристики при вариации ω_e.

Однако, при резонансной накачке сильно изменяется фаза ϕ_C напряжения на емкости при вариации расстояния d между пластинами. Из (2.38) получаем:

$$\phi_C = -\arctan\left(\frac{\frac{\omega_g}{\omega_e Q_e}}{1-\frac{\omega_g^2}{\omega_e^2}}\right), \tag{2.43}$$

$$\Delta\phi_C \simeq \left.\frac{\partial\phi_C}{\partial d}\right|_{\omega_g=\omega_e} \cdot \Delta x = \tag{2.44}$$

$$= \left(\frac{\partial\phi_C}{\partial\omega_e}\cdot\frac{\partial\omega_e}{\partial C}\cdot\frac{\partial C}{\partial d}\right)_{\omega_g=\omega_e} \cdot \Delta x = Q\cdot\frac{\Delta x}{d} \tag{2.45}$$

Запишем, как будет изменяться что напряжение на емкости $u_c(t)$, записанное во временном и действительном виде:

$$u_c(t) = U_C \sin\left(\omega_e t + \phi_C\right) \simeq U_C \sin\omega_e t + \delta U_C \cos\omega_e t, \tag{2.46}$$

$$\delta U_c = U_C \phi_C = U_C Q \cdot \frac{\Delta x}{d} \tag{2.47}$$

Здесь $U_C = Q_e U_g$ — стационарная амплитуда колебаний на емкости, ϕ_C есть медленная функция времени, которая и содержит информацию о смещении. Естественно, мы считаем, что выполнены условия штатной работы емкостного датчика (2.2, 2.3), перечисленные в разделе 2.1.

Сравнивая (2.47) с (2.5) видим, что относительное изменение напряжения при настройке в резонанс в 2 раза больше, чем при настройке на склон. Это безусловно является преимуществом резонансной настройки. Другое преимущество — малое обратное динамическое влияние. Это понятно, потому что при резонансной накачке амплитуда напряжения на емкости слабо изменяется при сдвиге пластин ($\sim (\Delta x)^2$, см. (2.42)).

Недостатком резонансной накачки является необходимость регистрировать фазовую квадратуру, что несколько сложнее, чем регистрировать амплитудную. Если для измерения амплитудной квадратуры требуется лишь простейший амплитудный детектор, то для измерения фазовой квадратуры нужен более сложный фазовый детектор, содержащий генератор опорного сигнала.

Фазовый детектор

Для детектирования фазово-модулированного (ФМ) сигнала нужно опорное колебание. Пусть входное ФМ напряжение имеет вид $u_c(t)$ (2.46), считаем, что $\delta U_C \ll U_C$.

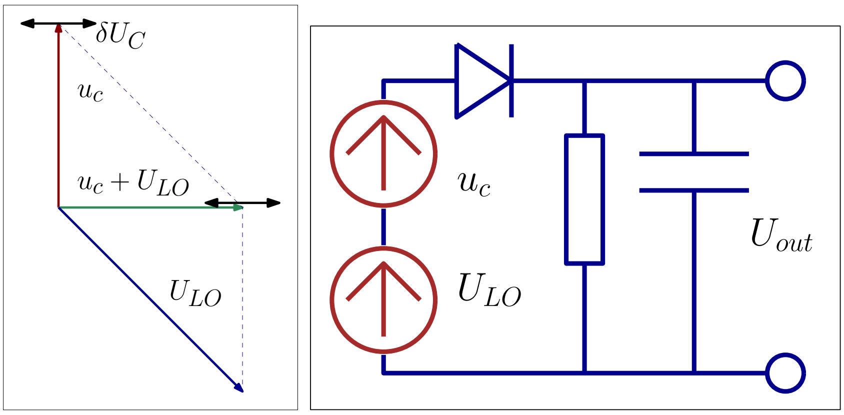

Рис. 2.3: Слева: фазовая диаграмма, показывающая, что сумма ФМ сигнала и опорного снапряжения может быть АМ сигналом (при правильно подобранной фазе опорного напряжения). Справа: принципиальная схема фазового детектора.

Принцип детектирования ФМ сигнала заключается в том, чтобы *до детектирования* сначала превратить ФМ сигнал в амплитудно-молдулированный (АМ) сигнал, который потом детектировать уже известным нам способом. Для превращения ФМ в АМ к ФМ сигналу добавляют опорное напряжение на частоте несущей ω_g:

$$U_{LO} = U_1 \cos \omega_g t + U_2 \sin \omega_g t \, . \tag{2.48}$$

В англоязычной литературе опорный генератор имеет название “local oscillator”, отсюда индекс $_{LO}$ в (2.48). Фаза опорного напряжения (т.е. соотношение между U_1 и U_2) должна быть выбрана оптимальным образом — это показано на фазовой диаграмме на рис. 2.3 слева.

Выпишем суммарное напряжение:

$$U(t) = u_c(t) + U_{LO}(t) = \tag{2.49}$$

$$= \left(U_C + U_2\right)\sin\omega_g t + \left(\delta U_C + U_1\right)\cos\omega_g t \tag{2.50}$$

Мы видим, что можно выбрать так фазу опорного генератора, что то суммарное напряжение $U(t)$ имеет вид АМ сигнала:

$$U_C + U_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad U(t) = U_1\left(1 + \frac{\delta U_C}{U_1}\right)\cos\omega_g t. \tag{2.51}$$

А его уже можно детектировать с помощью обычного амплитудного детектора, как это показано на рис. 2.3 справа. Фаза опорного напряжения определяется соотношением между U_0 и U_1.

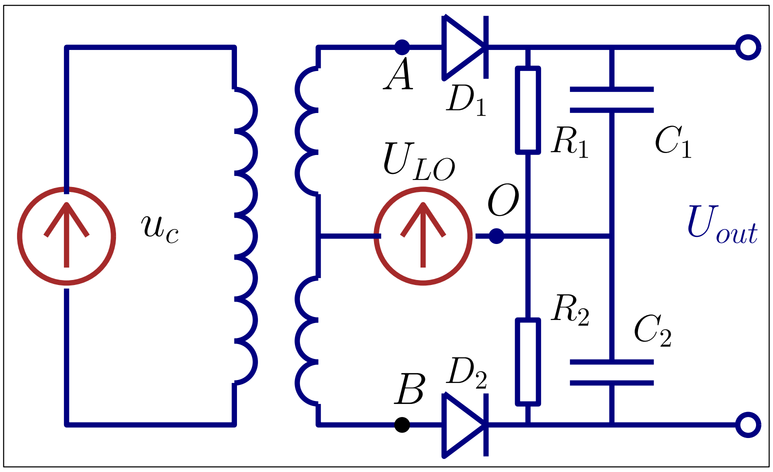

Рис. 2.4: Принципиальная схема балансного фазового детектора.

Балансный фазовый детектор

Рассмотрим схему балансного фазового детектора, изображенную на рис. 2.4. Она сложнее, но имеет преимущества перед обычным фазовым детектором, о которых поговорим ниже.

Важно, чтобы оба плеча балансного детектора были идентичны друг другу (отсюда и термин “балансный”), т.е. сопротивления и емкости равны:

$$R_1 = R_2, \; C_1 = C_2, \tag{2.52}$$

а также детекторы D_1 и D_2 имеют одинаковые характеристики. Кроме того, катушки трансформатора подобраны так, что на вход каждого детектора подаются одинаковые напряжения. Ниже будем считать, что они просто равны измеряемому напряжению u_C.

В этой схеме на вход каждого детектора подаются напряжения

$$U_{A0} = U_{LO} + u_c, \quad U_{B0} = U_{LO} - u_c\,. \tag{2.53}$$

Пусть детекторы квадратичные, т.е токи в детекторах пропорциональны *квадрату* напряжения. Тогда на выходе мы получим напряжение пропорциональное *разности квадратов* напряжений $U_{A0}^2 - U_{B0}^2$:

$$U_{out} \sim (U_{LO} + u_c)^2 - (U_{LO} - u_c)^2 = 4U_{LO}u_c \tag{2.54}$$

Пусть сигнальное напряжение u_c имеет и амплитудную, и фазовую модуляцию:

$$u_c = (U_C + \delta U_a) \sin \omega_g t + \delta U_{ph} \cos \omega_g t \tag{2.55}$$

Подставляя (2.55, 2.48) в (2.54) и исключая высокочастотные члены (они отфильтровываются RC-цепочками на рис. 2.4) получаем:

$$U_{out} \sim 2U_2(U_C + \delta U_a) + 2U_1 \delta U_{ph} \tag{2.56}$$

Таким образом меняя фазу опорного напряжения (т.е соотношение между U_1 и U_2) можно измерять *любую квадратуру*, т.е. детектировать АМ-, ФМ- сигналы или сигнал, содержащий комбинацию АМ и ФМ.

Ошибка измерения при резонансной накачке

Опять считаем, что единственными шумами в емкостном датчике являются тепловые шумы из-за потерь в контуре. Тогда используя (2.47) и (2.23) нетрудно получить для ошибки измерения смещения:

$$\frac{\Delta x_{\text{err}}^{\text{res}}}{d} = \frac{\xi}{U_C} \sqrt{\frac{2k_B T_e R Q_e^2}{\tau}} = \frac{1}{Q_e} \sqrt{\frac{2k_B T_e}{W \tau}} \tag{2.57}$$

Где W — средняя мощность, поглощаемая в сопротивлении контура, τ — время измерения. Ошибка измерения в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем при настройке на склон, ср. с (2.29).

Обратное флуктуационное влияние

Аналогично получаем выражение для силы обратного флуктуационного влияния:

$$\delta F_{\text{ba}}^{\text{res}} = \frac{C U_C Q_e}{d} \times \sqrt{\frac{2k_B T_e R}{\tau}} = \frac{Q_e}{d}\sqrt{\frac{4k_B T_e W}{\omega_e^2 \tau}} \tag{2.58}$$

Подчеркнем, что при резонансной накачке шумы измерения смещения определяют шумы *фазовой* квадратуры напряжения на емкости, тогда как обратное флуктуационное влияние — шумы амплитудной квадратуры. Таким образом, мы ясно видим, что шумы измерения и обратного флуктуационного влияния *не коррелированы.*

Оптимальная накачка

Мы видим, что ошибка измерения (2.57) уменьшается при увеличении накачки W, а сила обратного флуктуационного влияния (2.58) — наоборот увеличивается. Значит, есть оптимальная величина накачки, которую мы и найдем.

Выписываем выражение для амплитуды F_0 обнаружимой силы с учетом ошибки измерения и обратного флуктуационного влияния:

$$F_0 = \xi\sqrt{\langle(\delta F_{\text{ba}}^{\text{res}})^2\rangle + \langle(\delta F_{\text{meas}}^{\text{res}})^2\rangle}, \quad \delta F_{\text{meas}}^{\text{res}} = \frac{2m\omega_m}{\tau}\cdot\Delta x_{\text{err}}^{\text{res}} \tag{2.59}$$

Подставляя (2.57) и (2.58) получаем

$$[F_0]^2 \simeq \frac{4m^2\omega_m^2}{\tau}\cdot\frac{2d^2 k_B T_e}{Q_e^2 W\tau} + \frac{4k_B T_e Q_e^2 W}{d^2\omega_e^2\tau} \tag{2.60}$$

Отсюда сразу находим минимум, который достигается при оптимальной мощности $W_{\rm opt}$:

$$F_0^{\rm min} = \frac{2\xi}{\tau} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2} m\omega_m k_B T}{\omega_e}} \tag{2.61}$$

$$W_{\rm opt} = \frac{\sqrt{2}\, m\omega_m\omega_e d^2}{Q_e\tau} \tag{2.62}$$

Мы видим, что при настройке на резонанс минимальная сила чуть меньше (в $2^{1/4}$ раз), чем в случае настройки на склон — ср. с (2.37).

Глава 3

Квантовые измерения

Соотношения неопределенности Гейзенберга

Соотношения неопределенности Гейзенберга записывают в разных формах, которые мы ниже и рассмотрим. Мы начнем с понятия фотона.

Свойства фотона

После Планка, показавшего, что черное тело излучает и поглощает энергию порциями — фотонами, и Эйнштейна, применившего понятие кванта для объяснения фотоэффекта, физики привыкли приписывать отдельному фотону энергию $\hbar\omega$. После опытов Лебедева, измерившего давление света, физики стали уверенно приписывать фотону энергию $\mathcal{E}$ и импульс $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \qquad \mathcal{P} = \frac{\hbar\omega}{c} \tag{3.1}$$

Однако при этом пока никто не говорил про размеры фотона. Правда, из опытов по фотоэффекту, где фотон поглощался фактически атомом размера порядка $\sim 10^{-10}$ m, можно было заключить, что “длина” фотона должна быть $L \gg 10^{-10}$ m.

Однако, если вспомнить, как вводится понятие фотона в квантовой механике, то может возникнуть кажущееся противоречие. Ниже мы напомним логику квантования электромагнитного поля.

Логика квантования электромагнитного поля

В процедуре квантования поля (в которой вводится понятие полевого осциллятора) рассматривается куб пространства со стороной L и вводится базис собственных мод, поля которых представляют собой набор бегущих или стоячих волн, удовлетворяющих граничным условиям (электрическое поле на границе обращается в нуль для стоячих волн или трансляционное условие $\Psi(x = 0) = \Psi(x = L)$ для бегущих). Для наиболее простого одномерного случая (квантование длинной линии длины L) собственные моды определяются соотношением (разложение по бегущим волнам)

$$\Psi_n^{\pm}(x) = e^{\pm i\omega_n x/c}, \quad \omega_n = n \cdot \frac{\pi c}{L}, \quad n \text{ — целое число} \tag{3.2}$$

Далее доказывается, что любое электромагнитное поле излучения $\Phi(x, t)$ можно разложить по этим модам, а для коэффициентов разложения (зависящих от времени) справедливо уравнение гармонического осциллятора. В частности, в одномерном случае:

$$\Phi(x,t) = \sum_n a_n^{\pm}(t)\Psi_n^{\pm}(x), \quad \ddot{a}_n^{\pm} + \omega_n^2 a_n^{\pm} = 0. \tag{3.3}$$

Заметим, что уравнения для $a_n^{\pm}$ совпадают с уравнениям для осциллятора. Пока все рассуждения — в рамках классической (не квантовой) физики.

В этом месте вводится понятие полевого осциллятора, т.е. мы можем представить, что электромагнитное поле раскладывается по полевым осцилляторам, амплитуда которых есть $a_n(t)$.

Собственно квантование происходит, когда мы объявляем полевые осцилляторы квантовыми, а вместо амплитуд a_n вводим гейзенберговские операторы $\hat{a}_n(t)$.

Последний шаг — устремляем размер квантования L к бесконечности, тогда разложение (3.3) в виде суммы превращается в разложение в виде интеграла.

В итоге после квантования мы имеем описание электромагнитного поля (излучения) в виде интеграла от *бесконечных* бегущих волн, амплитуда которых описывается оператором, подчиняющимся квантовому уравнению гармонического осциллятора. В этой картине описания рассмотрим возбуждение *одного* полевого осциллятора: допустим, что все осцилляторы находятся в основном состоянии $|0\rangle$, кроме одного под номером N, который в состоянии с одним квантом $|\Psi_N\rangle = |1\rangle$. Но это означает, что состояние поля с одним фотоном описывается *бесконечной* волной и говорить

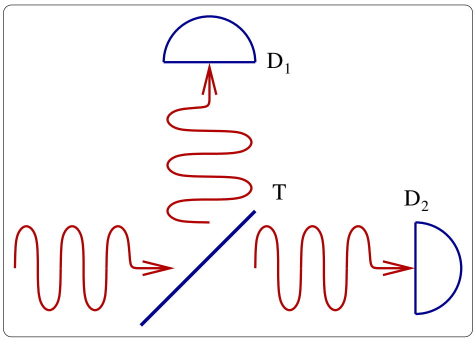

Рис. 3.1: При достаточно слабом потоке фотонов (строго говоря, когда на вход падает однофотонное состояние) на полупропускающее зеркало всегда щелкает только один детектор: или D_1, или D_2.

о локализации фотона вроде бы нельзя.

Локализованные фотоны: соотношение неопределенности "энергия-время"

Сначала отметим, что факт существования квантов как порций энергии легко проверяется (и проверен) на опыте, схема которого изображена на рис. 3.1. При достаточно слабом потоке фотонов на полупропускающее зеркало (коэффициент прозрачности $T = 0,5$) всегда щелкает только один из детекторов, одновременно они не срабатывают. Это означает, что если на зеркало падает только один фотон (для этого и нужен слабый поток света), то он пойдет *либо* на детектор D_1 — *либо* на детектор D_2. этим опытом подтверждается факт "корпускулярности" света.

Возвращаясь к локализованности фотонов — фотон становится "бесконечным" когда возбужден только только один полевой осциллятор. Заметим, что тот же результат будет и в классике, если возбужден только *один классический по-*

левой осциллятор. А чему в классике соответствует ограниченный цуг волны? Формально это есть возбуждение набора полевых осцилляторов. Причем, чем более короткий цуг длины τ, тем шире спектр $\Delta\omega$ возбуждаемых полевых осцилляторов — это просто свойство преобразования Фурье.

Но тогда в квантовом случае для локализованного фотона должно быть что-то аналогичное, т.е возбуждение полевых осцилляторов в полосе частот $\Delta\omega$, определяемой длительностью цуга τ. Главное — сумма квадратов амплитуд полевых осцилляторов (она пропорциональна числу квантов) должна быть фиксирована и равна 1. Это означает возбуждение только одного фотона, но частота его не определена и лежит в полосе, определяемой длительностью цуга — см. подробности в [4].

Очевидно, что для такого локализованного фотона его длительность τ и ширина спектра $\Delta\omega$ связаны очевидным соотношением (это просто свойство преобразования Фурье):

$$\Delta\omega\,\tau \geq 1 \tag{3.4}$$

Но тогда, коли энергия фотона пропорциональна частоте, получаем

$$\Delta\mathcal{E} = \hbar\,\Delta\omega, \quad \Rightarrow \Delta\mathcal{E}\,\tau \geq \hbar, \tag{3.5}$$

$$\mathcal{E} = \hbar\omega \pm \frac{\hbar}{2\tau} \tag{3.6}$$

Таким образом можно говорить о длительности τ или о длине фотона $c\tau$ (c — скорость света). При этом чем лучше

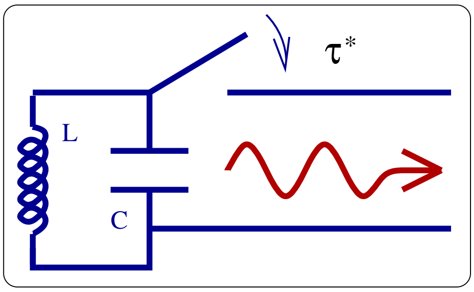

Рис. 3.2: Иллюстрация к мысленному примеру: фотон из контура излучается в длинную линию приблизительно за время релаксации τ^*.

локализован фотон, тем хуже определена его энергия

Для примера можно представить такой мысленный опыт. В LC-контуре частоты ω_0 первоначально находился один фотон. Мы соединяем этот контур с длинной линией и фотон излучается в нее. Соединение контура с линией можно характеризовать временем релаксации τ^* (так называемое "нагруженное" время релаксации — время, за которое амплитуда колебаний в контуре уменьшается в e раз). Таким образом "длительность" фотона будет $\sim \tau^*$. Следовательно, энергия фотона, излученного в линию будет определяться формулой (3.6) с подстановками $\omega = \omega_0$, $\tau = \tau^*$.

Заметим, что первоначально в контуре был *точно* один квант определенной частоты — неопределенность энергии была равна нулю. Спрашивается, откуда взялась неопределенность энергии? Ответ — в момент подключения происходит неконтролируемый обмен энергии, фактически это параметрическое взаимодействие, при котором может быть добавлена или отнята энергия.

По схеме Д. Клышко [5] (рис. 3.3) был проведен опыт

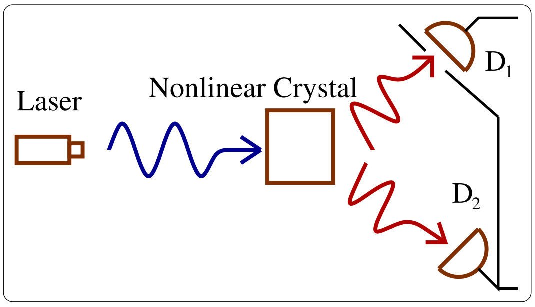

Рис. 3.3: Схема Д.Н. Клышко по рождению бифотонов.

(Мандель и Хонг) с "локализованными" фотонами. Фотоны от лазера накачки в нелинейном кристалле превращались в пары фотонов (бифотоны), которые были коррелированы — при срабатывании одного из детекторов (D_2) открывался оптический затвор и детектор D_1 регистрировал фотон. Появление одного фотона было строго коррелировано с появлением другого. Можно было двигать один из детекторов вдоль по направлению движения фотона и таким образом определить время корреляции τ фотонов ("длительность" фотона) — в таких опытах время корреляции определяется длиной L кристалла: $\tau \simeq L/c \simeq 10^{-11}$ с[1] при $L = 3$ мм.

Таким образом можно говорить о локализованном фотоне: мы точно знаем, что фотон один, но частота его (а значит, и энергия) определена не точно, по формуле (3.6).

[1]На самом деле меньше $\tau \simeq L(n_e - n_o)/c$, где n_e, n_o показатели преломления необыкновенного и обыкновенного лучей в нелинейном кристалле. Автор благодарен К.Г. Катамадзе за это уточнение.

Локализованные фотоны: соотношение неопределенности “координата — импульс”

Используя формулы (3.5, 3.6) можно получить для неопределенности координаты $\Delta x = c\tau$ фотона и неопределенности его импульса Δp:

$$\mathcal{P} = \frac{\hbar\omega}{c} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \frac{\hbar\,\Delta\omega}{c}, \tag{3.7}$$

$$\Delta x = c\tau \geq \frac{c}{\Delta\omega}, \quad \text{использовано } \Delta\omega \cdot \tau = 1 \tag{3.8}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta p\,\Delta x \geq \hbar \tag{3.9}$$

Подчеркнем, что это соотношение неопределенностей относится к фотону как к частице.

Микроскоп Гейзенберга

Под микроскопом Гейзенберга понимают мысленный опыт по измерению координаты макроскопического тела с помощью рассеяния на нем частиц, описываемых квантовомеханически — фотонов или электронов. Вообще таких схем измерений много, мы рассмотрим одну из них [6].

Дифракция на щели

Пусть свет с длиной волны λ падает нормально на щель ширины d, как показано на рис. 3.4. Пока будем считать, что щель закреплена. Свет, как известно, будет дифрагировать с характерным дифракционным углом $\theta \simeq \lambda/d$. Поэтому детекторы, расположенные за щелью, зафиксируют

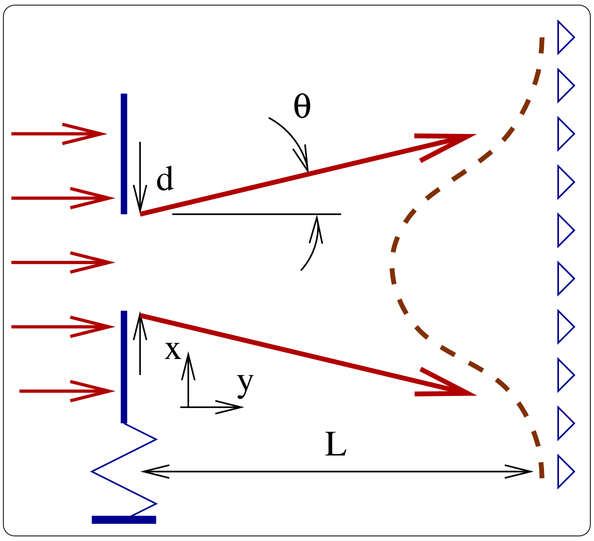

Рис. 3.4: Одна из схем микроскопа Гейзенберга.

свет с распределением, соответствующим этому углу. Пусть теперь мы уменьшили поток света так, что лишь изредка щелкает *только* один детектор. Это значит, что каждый раз рассеивается на щели лишь один фотон. При этом общая статистика фотоотсчетов соответствует классическому распределению интенсивностей. Тогда мы можем заключить, что после пролета неопределенность *поперечного* импульса каждого фотона равна

$$\Delta p_{\perp} \simeq \frac{\hbar\omega}{c}\,\theta \simeq \frac{\hbar}{d} \tag{3.10}$$

(Здесь в последнем равенстве мы “подогнали” численный множитель, но надо помнить, что строгое рассмотрение дает именно этот результат.) В момент пролета через щель неопределенность $\Delta x_{\perp}$ *поперечной* координаты фотона очевидно определяется шириной щели:

$$\Delta x_{\perp} \simeq \frac{d}{2} \tag{3.11}$$

Сравнивая эти две формулы, мы находим, что

$$\Delta p_\perp \Delta x_\perp \simeq \frac{\hbar}{2} \tag{3.12}$$

Это соотношение неопределенностей внешне совпадает с (3.9), но оно написано для *поперечного* импульса и *поперечной* координаты фотона.

Измерение координаты с помощью микроскопа Гейзенберга.

Пусть мы хотим измерить координату щели (теперь это масса механического осциллятора), наблюдая распределение поглощения прошедших через щель фотонов по фотодетекторам.

Будем считать, что дифракция на щели незначительно изменяет распределение поглощенных фотонов, т.е. плоскость фотодетекторов расположена достаточно близко:

$$L\theta = \frac{Ld}{\lambda} \ll d \tag{3.13}$$

Тогда по одному поглощенному фотону можно сделать заключение о поперечной координате щели с точностью $\pm d/2$. Если же за время наблюдения прошло много $N \gg 1$ фотонов, то центр распределения поглощенных фотонов (а именно он несет информацию о координате щели) будет известен точнее (это фактически среднее от нескольких измерений с нулевым средним):

$$\Delta x_{\text{изм}} \simeq \frac{d}{2\sqrt{N}} \tag{3.14}$$

Очевидно, что это есть ошибка измерения координаты.

Отметим, что на щель падает плоская волна перпендикулярно плоскости щели — следовательно, поперечный импульс фотонов *до* щели можно считать нулевым. Мы показали, что *после* прохождения щели фотоны получают случайный поперечный импульс. Из закона сохранения импульса мы должны заключить, что такой же, но противоположно направленный случайный импульс получает щель (масса осциллятоора). Тогда случайный импульс, полученный щелью после пролета N фотонов, будет равен:

$$\Delta p_{\text{возм}} \simeq \Delta p_{\perp}\sqrt{N} = \frac{\hbar\sqrt{N}}{d} \tag{3.15}$$

Из (3.14, 3.15) получаем "измерительное" соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x_{\text{изм}}\Delta p_{\text{возм}} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{3.16}$$

Здесь важно, что связываются ошибка измерения $\Delta x_{\text{изм}}$ координаты и величина возмущения $\Delta p_{\text{возм}}$ импульса — квантовый аналог шумов обратного влияния.

Квантовый измеритель скорости

Фон Нейман предложил квантовую схему измерения скорости пробного тела [7], которую мы рассмотрим ниже, см. также рис. 3.5.

Пусть на пробное тело, движущееся со скоростью v_0, падает и отражается фотон частоты ω. Тогда из-за эффекта

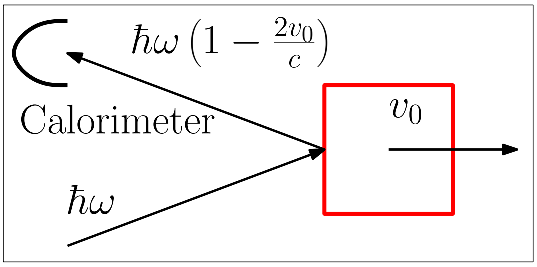

Рис. 3.5: Схема квантового измерения скорости по эффекту Доплера, предложенная фон Нейманом в качестве мысленного эксперимента.

Доплера частота отраженного фотона будет изменена:

$$\omega_{\text{отр}} = \omega\left(1 - \frac{2v_0}{c}\right) \tag{3.17}$$

Следовательно, также будет изменена и энергия отраженного фотона. Энергию отраженного фотона можно в принципе точно измерить — например, поглотить в детекторе-калориметре.

Мы уже знаем, что фотоны “локализованы” в пространстве и эта локализация связана с неопределенностью их энергии (частоты). Пусть длительность падающего фотона равна τ, а неопределенность энергии — $\hbar\Delta\omega \simeq \hbar/\tau$. Тогда нетрудно написать ошибку измерения скорости:

$$\hbar\omega\,\frac{2\Delta v_{\text{изм}}}{c} = \hbar\Delta\omega \quad\Rightarrow\quad \Delta v_{\text{изм}} \simeq \frac{c}{2}\,\frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq \frac{c}{2\omega\tau} \tag{3.18}$$

Фотон, отражаясь от пробного тела, передает ему импульс $2\hbar\omega/c$. Однако момент передачи не определен — эта неопределенность порядка τ. Поэтому пробное тело в результате нашего измерения *неконтролируемым* образом сдвинется, т.е. его координата возмутится на величину

$$\Delta x_{\text{возм}} \simeq \frac{2\hbar\omega}{mc}\tau \qquad (3.19)$$

Очевидно, что ошибка измерения скорости (импульса) (3.18) и возмущение координаты (3.19) будут связаны соотношением неопределенностей:

$$\Delta p_{\text{изм}} \Delta x_{\text{возм}} = m \Delta v_{\text{изм}} \Delta x_{\text{возм}} > \frac{\hbar}{2} \qquad (3.20)$$

Заметим, что это почти то же самое соотношение неопределенностей, что и (3.16). Отличие заключается “в индексах”: в одной схеме координата измеряется, а импульс возмущается, во второй — наоборот.

Свойства квантового измерения

После вышесказанного можно сформулировать следующие свойства квантового измерения [7, 8, 9, 10].

1. В результате квантового измерения всегда происходит извлечение информации о наблюдаемой. Это может быть, например:

    - Координата в микроскопе Гейзенберга;
    - Импульс в доплер-измерителе скорости фон Неймана;
    - Энергия.

2. В результате квантового измерения происходит возмущение другой наблюдаемой, например:

- Возмущение импульса в микроскопе Гейзенберга;
- Возмущение координаты в доплер-измерителе скорости фон Неймана;
- Возмущение фазы при измерении энергии.

3. В квантовом измерении всегда присутствует необратимый процесс на макроскопическом уровне. Этот необратимый процесс связан с так называемой *квантовой считывающей системой* (КСС) — системой, с которой взаимодействует измеряемая система в течение ограниченного времени. Например, в микроскопе Гейзенберга и доплер-измерителе скорости фон Неймана роль КСС играют падающие фотоны: после взаимодействия они уносят информацию о координате или импульсе, которая считывается после их разрушающего измерения (фотон “убивается”).

Стандартный квантовый предел

Все рассмотренные выше схемы измерений относятся к одному-единственному измерению. Этого обычно недостаточно для практических целей обнаружения внешнего воздействия.Для обнаружения малой классической силы, действующей на механический осциллятор или на свободную массу, надо непрерывно измерять координату (обычно в течение времени действия силы). Однако математически непрерывное измерение координаты описывается довольно громоздко [8].

Два измерения координаты

Для простоты мы будем рассматривать два измерения координаты, разнесенных на время τ действия силы. Будем рассматривать координату механического осциллятора или свободной массы: до (x_1) и после (x_2) воздействия силы и судить по силе о разности $X = x_2 - x_1$. Будем проводить измерение координаты с помощью прибора типа микроскопа Гейзенберга. Будем считать, что оба измерения проводятся практически мгновенно (т.е. за время $\ll \tau$).

СКП для свободной массы m

Пусть ошибка первого измерения равна Δx_1. При этом, как мы помним, будет сообщен случайный импульс (импульс обратного влияния, back action по-английски)

$$\Delta p_1 = \frac{\hbar}{2\Delta x_1}.$$

Этот импульс проявится во время второго измерения в виде добавочного возмущения координаты

$$\Delta x_{\rm add} = \frac{\Delta p_1\,\tau}{m} = \frac{\hbar\tau}{2m\,\Delta x_1}$$

Пусть ошибка второго измерения равна Δx_2. Тогда ошибка измерения разности X будет складываться из трех частей

$$\Delta X^2 = \Delta(x_2 - x_1)^2 = \left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta x_2\right)^2 + \left(\Delta x_{\rm add}\right)^2 = \tag{3.21}$$

$$= \left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\hbar\tau}{2m\,\Delta x_1}\right)^2 + \left(\Delta x_2\right)^2 \tag{3.22}$$

Из последнего соотношения видно, что для уменьшения общей ошибки ΔX можно беспрепятственно уменьшать ошибку второго измерения $\Delta x_2 \to 0$. Однако для ошибки первого измерения существует оптимум, при которой общая ошибка минимальна:

$$\Delta x_2 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta X^2|_{\rm min} = \left(\frac{\hbar\tau}{m}\right), \quad \text{при} \quad \left(\Delta x_{1\,\rm opt}\right)^2 = \frac{\hbar\tau}{2m}, \tag{3.23}$$

$$\Delta X_{\rm СКП} = \sqrt{\Delta X^2|_{\rm min}} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}}. \tag{3.24}$$

Эта минимальная ошибка измерения носит название стандартного квантового предела (СКП), по-английски Standard Quantum Limit (SQL). Под СКП понимается семейство пределов, которые мы ниже рассмотрим. Идея СКП была предложена В. Б. Брагинским в 1967 г. [3, 11], сам термин СКП (SQL) был позже введен К. С. Торном (K. S. Thorne).

Если мы измеряем изменение импульса P за время τ (тем же способом через два мгновенные измерения координаты), то нетрудно получить СКП для импульса:

$$P \;=\; \frac{m(x_2 - x_1)}{\tau}, \quad \Rightarrow \quad \Delta P_{\rm СКП} = \frac{m\,\Delta X_{\rm СКП}}{\tau} = \sqrt{\frac{m\,\hbar}{\tau}} \tag{3.25}$$

Если изменение импульса вызвано сигнальной силой $P = F\tau$, то можно получить СКП для силы[2]:

$$\Delta F_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{m\hbar}{\tau^3}} \tag{3.26}$$

СКП для механического осциллятора массы m и частоты ω_m

Простейшим аналогом непрерывного измерения координаты осциллятора является процедура из двух мгновенных измерений через четверть периода плюс целое число периодов $\tau = \pi/2\omega_m + 2\pi n/\omega_m$ (n — целое). Опять первое измерение с ошибкой Δx_1 будет сопровождаться случайным импульсом обратного влияния

$$\Delta p_1 = \frac{\hbar}{2\Delta x_1}. \tag{3.27}$$

Этот импульс проявится во время второго измерения в виде добавочного возмущения координаты

$$\Delta x_{\text{add}} = \frac{\Delta p_1 \sin \omega_m \tau}{m\omega_m} = \frac{\hbar}{2m\omega_m \Delta x_1} \tag{3.28}$$

[2]Надо заметить, что случай постоянной силы требует отдельного рассмотрения. В частности, при неограниченном времени наблюдения можно сколь угодно точно измерить такую силу (действующую в течение конечного времени). Мы здесь рассматриваем случай, когда время наблюдения равно времени действия силы.

Ошибка измерения разности X будет складываться из трех частей

$$\Delta X^2 = \Delta(x_2 - x_1)^2 = \left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta x_2\right)^2 + \left(\Delta x_{\mathrm{add}}\right)^2 = \qquad (3.29)$$
$$= \left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{2m\omega_m \Delta x_1}\right)^2 + \left(\Delta x_2\right)^2$$

Уменьшаем ошибку второго измерения $\Delta x_2 \to 0$ [3] и находим оптимальную величину ошибки первого измерения:

$$\left(\Delta x_{1\,\mathrm{opt}}\right)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_m}, \qquad (3.30)$$

$$\Delta X_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}} \qquad (3.31)$$

Для механического осциллятора частоты $\omega_m = 10^3\ s^{-1}$ и массы $m = 10$ г получаем оценку

$$\Delta X_{\text{СКП}} \simeq 10^{-16}\ \mathrm{cm} \qquad (3.32)$$

Аналогично нетрудно получить СКП для импульса:

$$P = m\omega_m(x_1 - x_2), \quad \Delta P_{\text{СКП}} = \sqrt{m\omega_m\hbar} \qquad (3.33)$$

Можно получить СКП для резонансной силы $F_0 \cos \omega_m t$, действующей в течение времени τ:

$$X = \frac{F_0 \tau}{2m\omega_m} \sin \omega_m \tau, \quad \Rightarrow \quad \Delta F_{\text{СКП}} = \frac{2}{\tau}\sqrt{m\omega_m\hbar} \qquad (3.34)$$

[3] Это можно делать, поскольку возмущение импульса из-за второго измерения нам уже не помешает.

В заключение приведем СКП для энергии. Здесь мы имеем в виду следующую задачу: с какой ошибкой можно измерить изменение энергии механического осциллятора по измерению его координаты дважды: в моменты времени $t = 0$ и $t = t_1 = \pi/2\omega_m + 2\pi n/\omega_m$ (n — целое). Считаем, что оба измерения проводятся с оптимальной ошибкой $\Delta x_{1\,\text{opt}}$ (3.30).

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{m\omega_m^2 x_{t=0}^2}{2} + \frac{p_{t=0}^2}{2m} = \frac{m\omega_m^2}{2}\left(x_{t=0}^2 + x_{t=\pi/2\omega_m}^2\right), \\ \Delta\mathcal{E}^2 &= m^2\omega_m^4\left(x_{t=0}^2(\Delta x_1)^2 + x_{t=t_1}^2\left(\frac{\hbar}{2m\omega_m\Delta x_1}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

Подставим (3.30) вместо Δx_1:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_{\text{СКП}}^2 &\le m^2\omega_m^4 \times (x_{t=0}^2 + x_{t=t_1}^2)\left(\frac{\hbar}{2m\omega_m}\right) = \hbar\omega_m\,\mathcal{E}, \\ \Rightarrow \quad \frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{СКП}}}{\mathcal{E}} &\le \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{\mathcal{E}}} = \sqrt{\frac{1}{\langle N\rangle}}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

где $\langle N\rangle$ — среднее число квантов в осцилляторе (оно может быть дробным). Таким образом, при непрерывном измерении координаты мы можем измерить энергию с относительной ошибкой не меньше $1/\sqrt{\langle N\rangle}$.

СКП для LC контура

Пользуясь электромеханической аналогией между механическим осциллятором и LC-контуром

$$\begin{aligned}
m &\Leftrightarrow L, \\
k &\Leftrightarrow \frac{1}{C} \\
x &\Leftrightarrow q, \quad \text{(заряд)} \\
v &\Leftrightarrow I, \quad \text{(электрический ток)} \\
p = mv &\Leftrightarrow \Phi = LI, \quad \text{(магнитный поток)}
\end{aligned}$$

можно сразу получить стандартные пределы для заряда q конденсатора и потока Φ в индуктивности контура, имеющего собственную частоту ω_e:

$$\Delta q_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_e}}, \tag{3.37}$$

$$\Delta \Phi_{\text{СКП}} = \sqrt{\hbar\omega_e L} \tag{3.38}$$

Заряд является обобщенной координатой, а поток — обобщенным импульсом в LC контуре [4].

Условия "квантовости"

Рассмотрим вопрос, когда можно считать осциллятор квантовым? (Тогда в качестве предельной ошибки измерения

[4]Конечно, обобщенными координатой и импульсом можно выбрать и другие величины, например, напряжение U на конденсаторе как координату и $C^2L\dot{U}$ как импульс Другой пример — можно выбрать поток Φ как координату и $C\dot{\Phi} = q$ как импульс.

воздействия на него считать СКП.) Сразу подчеркнем, что на первый взгляд очевидное условие $k_B T < \hbar\omega$ в общем случае *неверно.* — ниже мы это покажем.

Чтобы ответить на этот вопрос надо просто сравнить формулы (1.63 и 3.24) и выписать условие, когда осциллятор можно считать квантовым:

$$\Delta x_T \simeq \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_m^2}\cdot\frac{2\tau}{\tau^*}}, \quad \Delta X_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}}, \tag{3.39}$$

$$\Delta X_{\text{СКП}} > \Delta x_T, \quad \Rightarrow \quad \frac{2k_B T\tau}{\omega_m\tau^*} < \hbar, \quad \frac{k_B T\tau}{Q_m} < \hbar \tag{3.40}$$

Для механического осциллятора добротности $Q = 10^9$ (это близко к величине рекордной добротности, достигнутой для механических систем) и времени $\tau = 10^{-3}$ сек получаем, что условие (3.40) выполняется при температуре $T < 3$ K.

Для пояснения можно переписать условие (3.40) в виде

$$\frac{2k_B T\tau}{\tau^*} < \hbar\omega_m, \tag{3.41}$$

которое показывает, что для “квантовости” тепловая энергия, поступающая в осциллятор за время τ, должно быть меньше энергии механического кванта.

Аналогично можно получить условие, когда свободную массу можно считать квантовой:

$$\Delta x_T \simeq \sqrt{\frac{k_B T\tau^3}{m\tau^*}}, \quad \Delta X_{\text{СКП}} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{m}}, \tag{3.42}$$

$$\Delta X_{\text{СКП}} > \Delta x_T, \quad \Rightarrow \quad \frac{k_B T\tau^2}{\tau^*} < \hbar. \tag{3.43}$$

Для свободной массы с временем релаксации $\tau^* \simeq 10^5$ с (это близко к рекордной величине для механических систем) и времени $\tau = 10^{-4}$ сек получаем, что условие (3.43) выполняется при температуре $T < 30$ K.

Мы видим, что в условие "квантовости" входит не только температура (характеризующая среднюю энергию термостата), но и затухание (связь с термостатом).

3 измерения координаты

Рассмотрение с 2-мя измерениями, приведенное выше, носит предварительный характер, поскольку не учитывает влияния начальных условий, и приведено нами для введения в проблему. Чтобы понять его ограниченность рассмотрим проблему обнаружения действия постоянной силы (амплитуды F_0 и длительности 2τ) на свободную пробную массу [12].

Проблема начальных условий заключается в том, что *перед* измерением у пробного тела неизвестны начальная координата x_0 и импульс p_0. Поэтому измеряя разность координат $X = x_2 - x_1$ мы получаем ненужную информацию о начальном импульсе (в величину X входит член $\sim p_o\tau/m$) — это дает дополнительную ошибку. Заметим, что влияние неопределенной начальной координаты исключается. Чтобы исключить влияние начального импульса мы должны предварительно *приготовить* состояние пробной массы так, чтобы ее импульс был достаточно мал. Это усложняет даже мыслимый эксперимент. Чтобы избежать этого, обычно рассматривают схему с тремя измерениями.

В схеме с тремя измерениями мы проводим три короткие измерения $x_1,\ x_2,\ x_3$ координаты в моменты времени $0,\ \tau,\ 2\tau$. Выпишем результаты этих измерений:

$$x_1 = x_0 + x_{1\,\text{изм}}, \tag{3.44a}$$

$$x_2 = x_0 + x_{2\,\text{изм}} + \frac{(p_0 + p_1)\tau}{m} + \frac{F_0\tau^2}{2m}, \tag{3.44b}$$

$$\begin{aligned} x_3 = x_0 + x_{3\,\text{изм}} + \frac{(p_0 + p_1)}{m} \cdot 2\tau + \\ + \frac{p_2}{m}\tau + \frac{F_0}{2m} \cdot (2\tau)^2. \end{aligned} \tag{3.44c}$$

Здесь величины $x_{i\ \text{изм}}$ описывают ошибку измерения прибора в каждом измерении, а и p_i — импульсы обратного влияния при каждом измерении. Более детально: третий член в (3.44b и 3.44c) — влияние начального импульса и импульса обратного влияния от первого измерения, четвертый член в (3.44c) — влияние импульса обратного влияния от второго измерения, последние члены в (3.44b и 3.44c) — смещение вызванное сигнальной силой F_0 (сигнал).

Глядя на выражения (3.44a — 3.44c), нетрудно сообразить, что влияние начальных условий будет полностью исключено, если мы будем измерять величину:

$$\begin{aligned} a &= x_1 - 2x_2 + x_3 = \\ &= x_{1\,\text{изм}} - 2x_{2\,\text{изм}} + x_{3\,\text{изм}} + \frac{p_2}{m}\cdot\tau + \frac{F_0}{m}\cdot\tau^2 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Очевидно, что величина a пропорциональна дискретной второй производной.

Глядя на вид (3.45) нетрудно сообразить, что первое и третье измерения можно произвести с абсолютной точностью (т.е. ошибки $\Delta x_{1\ \text{изм}}$, $\Delta x_{3\,\text{изм}} \to 0$), а величину $\Delta x_{2\,\text{изм}}$ надо выбрать оптимальной. Тогда для величины минимально обнаружимой силы получаем

$$\left(\Delta x_{2\,\text{изм opt}}\right)^2 = \frac{2\hbar\tau}{m}, \tag{3.46}$$

$$F_{0\,\text{min}} = 2\sqrt{\frac{2m\hbar}{\tau^3}} \tag{3.47}$$

Мы получили ответ совпадающий с (3.26) с точностью до множителя (напомним, что здесь время действия силы равно 2τ).

Квантовые измерения, преодоление СКП

Пусть тепловые шумы не огранчивают точности измерений, т.е. условия (3.43, 3.40) выполнены с запасом. Тогда может возникнуть *неправильное* впечатление, что СКП определяет предельную точность, достижимую в квантовых измерениях. Ниже мы покажем, что это не так (!).

Сразу подчеркнем, что СКП справедлив *только* для определенной схемы измерений, а именно — для измерения координаты (в том числе и обобщенной). Ведь ограничение СКП проистекает от неустранимого обратного флуктуационного влияния в координатном измерении, которое мешает последующим измерениям.

Квантовый осциллятор в энергетическом состоянии

Мы можем взять задачник по квантовой механике (например, Кривченкова и Гольдмана) и найти решение для такой задачи:

> Пусть на квантовый осциллятор, находящийся в состоянии $|n\rangle$ (состояние с точно определенной энергией) действует резонансная сила. Какова вероятность того, что через время τ осциллятор может быть найден в состояниях $|n \pm 1\rangle$ с достоверной вероятностью (допустим, 10%)?

Сразу приведем ответ: амплитуда силы должна быть порядка

$$F_0 > \frac{2}{\tau}\sqrt{\frac{m\hbar\omega_m}{n}} \tag{3.48}$$

Очевидно, что эта формула дает величину силы *меньше*, чем СКП силы для осциллятора (3.34). Но для того, чтобы воспользоваться этим результатом, надо уметь *точно* измерять энергию осциллятора.

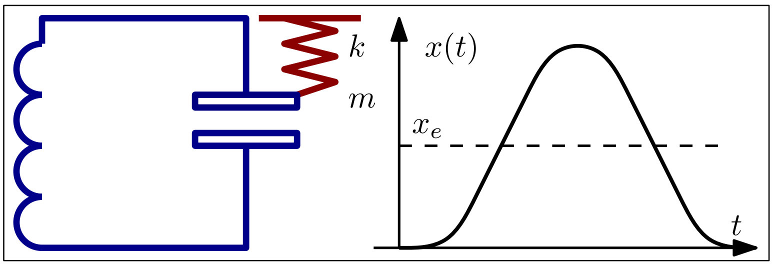

Рис. 3.6: Схема пондеромоторного измерителя энергии. Энергию в LC-контуре измеряют по воздействию на механический осциллятор, координату которого регистрируют с точностью СКП (измеритель координаты не показан).

Как мы уже видели, измерение энергии через измерение координаты *не* позволяет точно измерить энергию (см. ф-лу (3.36) — ошибка существенно больше кванта $\mathcal{E}_{\text{СКП}} \gg \hbar\omega_m$ или $\Delta n \simeq \sqrt{n} \gg 1$). Поэтому нужна другая схема измерения, которая позволяет *прямо* измерять энергию, "без посредников".

Схема подеромоторного измерителя энергии

Рассмотрим задачу измерения энергии в квантовом э.м. LC-контуре по смещению подвижной пластины кондесатора [14] из-за силы притяжения между пластинами (см. схему на рис. 3.6). Важно, что эта пондеромоторная сила пропорциональна *энергии* в контуре, т.е. реализуется изменение "без посредников". Положение пластины мы измеряем координатным измерителем (не показан на рис. 3.6), его точность определяется СКП. Считаем, что частота механических колебаний много меньше частоты электрических колебаний: $\omega_m \ll \omega_e$.

Пусть вначале подвижная пластина была закреплена и в начальный момент ее отпускают. После этого она начинает колебания вокруг нового положения равновесия x_e, которое определяется энергии $\mathcal{E}$ в контуре:

$$x_e = \frac{\mathcal{E}}{2dk}, \tag{3.49}$$

где $k = m\omega_m^2$ — жесткость пружины, d — зазор между пластинами. Если мы измеряем величину x_e с ошибкой СКП, то ошибка измерения энергии будет равна:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} \simeq 2kd\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}} \tag{3.50}$$

Однако при смещении пластины возмущается энергия в контуре (параметрическое воздействие) на величину:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{возм}} = \mathcal{E}\,\frac{\Delta\omega_e}{\omega_e} \simeq \mathcal{E}\cdot\frac{\Delta x}{2d} \simeq \frac{\mathcal{E}}{2d}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}} \tag{3.51}$$

Мы видим, что ошибка измерения и возмущение энергии будут равны друг другу при $\mathcal{E} \simeq 4kd^2$. Но при этом величина постоянного смещения x_e оказывается слишком большой: $x_e > d$. Поэтому будем считать, что

$$\mathcal{E} \simeq \alpha\, kd^2, \quad \alpha \ll 1 \tag{3.52}$$

где α — численый множитель. При этом сразу имеем, что возмущение будет мало́:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{возм}} = \frac{\alpha}{4}\,\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} \ll \Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} \tag{3.53}$$

Переписываем выражение (3.50) для ошибки энергии:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} \simeq \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}}\,2k\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\alpha k}} = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega_m\,(n+1/2)\,\hbar\omega_e}{\alpha}} = \tag{3.54}$$

$$= \hbar\omega_e\,2\sqrt{n+\frac{1}{2}}\,\underbrace{\sqrt{\frac{\omega_m}{\omega_e\alpha}}}_{\ll 1} = 2\,\Delta\mathcal{E}_{\text{СКП}}\cdot\sqrt{\frac{\omega_m}{\omega_e\alpha}} \tag{3.55}$$

Мы видим, что точность измерения энергии в контуре может быть *меньше* СКП.

Более того, при условии

$$\sqrt{\frac{4\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_m}{\omega_e\alpha}} \ll 1 \tag{3.56}$$

(а оно вполне выполнимо) энергия в контуре может быть измерена с ошибкой *меньше* одного кванта:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} \ll \hbar\omega_e, \quad \Delta n_{\text{изм}} \ll 1 \tag{3.57}$$

Таким образом мы показали, что возможно измерение энергии с ошибкой *меньше* СКП.

Теперь рассмотрим, а какова “плата” за точное измерение энергии? Сразу скажем ответ: возмущение фазы $\Delta\phi$. Ведь во время измерения частота контура изменяется неконтролируемым образом. Полагая, что время измерения равно периоду механического осциллятора $\tau = 2\pi/\omega_m$, получаем возмущение частоты:

$$\frac{\Delta\omega_e}{\omega_e} = \frac{\Delta x}{2d}, \quad \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}} \tag{3.58}$$

Отсюда находим возмущение фазы:

$$\Delta\phi_{\text{возм}} = \Delta\omega_e\tau = \frac{\omega_e\tau\,\Delta x}{2d} = \frac{\pi\omega_e}{\omega_m}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m\,d^2}} \overset{(3.52)}{\overbrace{=}} \tag{3.59}$$

$$= \frac{\pi\omega_e}{\omega_m}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}\,\frac{\alpha k}{\hbar\omega_e(n+1/2)}} = \pi\sqrt{\frac{\alpha\omega_e}{(n+1/2)\omega_m}} \tag{3.60}$$

Сравнивая (3.60 и 3.54), выписываем:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}}}{\hbar\omega_e}\cdot\Delta\phi_{\text{возм}} = 2\pi. \tag{3.61}$$

Мы получили известное соотношение неопределенностей “число квантов – фаза” (с точностью до численного множителя):

$$\Delta n_{\text{изм}}\cdot\Delta\phi_{\text{возм}} > 1 \tag{3.62}$$

Таким образом, измерение энергии возмущает фазу. Однако возмущение фазы *не мешает* неограниченно уменьшать ошибку измерения энергии.

Квантовые невозмущающие измерениия

Разобранная нами схема измерения относится к классу *невозмущающих* квантовых измерений (КНИ), по-английски quantum non-demolition mesurements (QND).

Идея квантовых невозмущаемых измерений была предложена В. Б. Брагинским в 1977 г. [14] и сейчас абревиатура QND является общепринятым термином.

Теорема. Для реализации КНИ надо измерять так называемую КНИ-переменную (в пондеромоторном измерителе — это энергия в контуре), которая при свободной эволюции системы является *интегралом движения* (т.е. не изменяется со временем). Эту теорему мы приводим без доказательства.

Очевидно, что энергия (осциллятора или свободной массы) являются КНИ-наблюдаемыми, а координата или импульс осциллятора — нет.

Подчеркнем, что импульс свободной частицы — тоже КНИ-наблюдаемая. Именно поэтому импульс свободной частицы можно измерить сколь угодно точно с помощью допплер-измерителя скорости фон-Неймана, с ошибкой *меньше* СКП. При этом неизбежное возмущение координаты *не мешает* измерению импульса. Этот же допплер-измеритель скорости фон-Неймана позволяет измерить и энергию свободной частицы с ошибкой *меньше* СКП, поскольку для свободной частицы энергия зависит только от импульса:

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}. \tag{3.63}$$

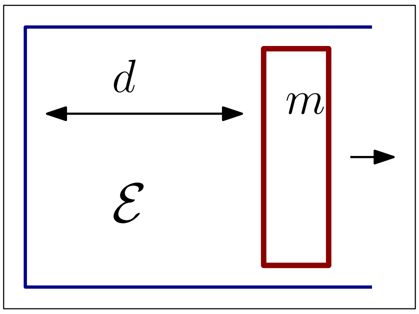

Рис. 3.7: Другая схема пондеромоторного измерителя энергии $\mathcal{E}$.

Пондеромоторный измеритель э.м. энергии $\mathcal{E}$ с допплер-измерителем скорости фон-Неймана

Рассмотрим э.м. резонатор (см. рис. 3.7), в котором одна из стенок является подвижным поршнем, который мы будем рассматривать как свободную массу m. Пусть в начальный момент поршень отпускают на время τ и он под действием давления со стороны поля в резонаторе приобретает импульс

$$p = \frac{\mathcal{E}\tau}{d} \tag{3.64}$$

Измерив импульс поршня, мы определим энергию в резонаторе. После измерения мы возвращаем поршень на место. Пусть импульс мы измеряем с помощью допплер-измерителя скорости фон-Неймана (см. подраздел 3.1.2) с ошибкой $\Delta p_{\text{изм}}$ (сам измеритель не показан на рис. 3.7):

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}} = \frac{d}{\tau}\Delta p_{\text{изм}}, \tag{3.65}$$

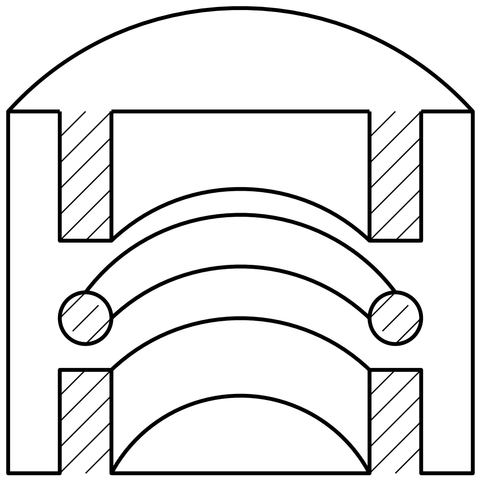

Рис. 3.8: Схема пондеромоторного измерителя световой энергии в кольцевом диэлектрическом резонаторе с использованием нелинейности диэлектрической проницаемости.

При этом за счет внесенного возмущения координаты возмущается фаза э.-м. колебаний:

$$\Delta\phi_{\text{возм}} = \Delta\omega_e \tau = \omega_e \frac{\Delta x_{\text{возм}}}{d} \tau, \tag{3.66}$$

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{изм}}}{\hbar\omega_e} \cdot \Delta\phi_{\text{возм}} = \frac{\Delta p_{\text{изм}} \Delta x_{\text{возм}}}{\hbar} > \frac{1}{2} \tag{3.67}$$

Мы видим, что возмущение фазы происходит в соответсвии с соотношением неопределенностей. Заметим, что частота э.м. резонатора на рис. 3.7 изменяется при сдвиге поршня как $\Delta\omega_e/\omega_e \simeq \Delta x_{\text{возм}}/d$.

Измеритель энергии с использованием квадратичной нелинейности

Мы видим, что в обоих измерителях энергии используется так называемая пондеромоторная нелинейность — частота резонатора зависит от энергии в нем из-за изменения его размеров под действием пондеромоторной силы (пропорциональной энергии). Для КНИ энергии можно использовать и другую нелинейность, например, зависимость диэлектрической проницаемости ϵ от электрического поля E. Пусть, например,

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \alpha E^2). \tag{3.68}$$

Тогда можно реализовать КНИ оптической энергии в СВЧ резонаторе, имеющем емкостную часть, который изображен на рис. 3.8. В емкостной части помещено диэлектрическое кольцо (или диск), оно же диэлектрический оптический резонатор на эффекте полного внутреннего отражения. Энергию в оптическом резонаторе мы можем измерить, поскольку появление оптических квантов в нем вызовет изменение диэлектрической проницаемости, а следовательно, и собственной частоты СВЧ резонатора:

$$\frac{\Delta\omega_{\text{СВЧ}}}{\omega_{\text{СВЧ}}} \simeq \frac{\alpha E^2}{2} \simeq \frac{4\pi\,\alpha\,\hbar\omega_{\text{opt}} n_{\text{opt}}}{V_{\text{opt}}} \tag{3.69}$$

Если диэлектрический резонатор изготовлен из кварца ($\alpha \simeq 10^{-13}$ СГСЭ), то за счет малого объема ($V \simeq 10^{-8}$ см) величина относительного сдвига частоты может быть порядка

$$\frac{\Delta\omega_{\text{СВЧ}}}{\omega_{\text{СВЧ}}} \simeq 1 \cdot 10^{-15} \tag{3.70}$$

Такую величину можно обнаружить в современном эксперименте.

КНИ квадратурной компоненты

Как мы уже говорили, КНИ переменной должен быть интеграл движения (величин. не меняющаяся со временем при свободной эволюции). Для квантового осциллятора кроме энергии интегралами движения являются начальная координата x_0 и начальный импульс p_0. Поэтому можно измерить с любой сколь угодно малой ошибкой любую из этих величин (но не обе одновременно, поскольку они не коммутируют). Иногда также говорят про КНИ квадратурной компоненты. Это связано со следующим. Зависящий от времени оператор координаты можно записать в виде

$$x(t) = x_0 \cos\omega_m t + \frac{p_0}{m\omega_m}\sin\omega_m t, \tag{3.71}$$

$$x(t) = x_1 \cos\omega_m t + x_2 \sin\omega_m t, \tag{3.72}$$

Величины x_1, x_2 называют квадратурными компонентами, они определяются как

$$x_1 = x_0, \quad x_2 = \frac{p_0}{m\omega_m}. \tag{3.73}$$

Для квадратурных компонент справедливы коммутационные соотношения:

$$\big[x_0, p_0\big] = i\hbar, \quad \Rightarrow \quad \big[x_1, x_2\big] = \frac{i\hbar}{m\omega_m} \tag{3.74}$$

Очевидно, что при свободной эволюции квадратурные компоненты не изменяются. Мы рассмотрим две схемы измерения квадратурной компоненты.

Стробоскопическое измерение. Пусть мы измеряем координату осциллятора дважды: в момент времени $t_1 = 0$ с ошибкой Δx_1 и через пол-периода в момент времени $t_2 = \pi/\omega_m$ с ошибкой Δx_2. Тогда ошибка измерения их разности $X = x_2 - x_1$ будет равна:

$$\Delta X^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \left(\frac{\hbar}{2\Delta x_1\, m\omega_m}\right)^2 \underbrace{\sin^2 \omega_m t_2}_{=0} = \\ = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 \qquad (3.75)$$

Мы видим, что если разнести измерения на время *точно кратное* половине периода, то обратное флуктуационное влияние не мешает сделать общую ошибку измерения сколь угодно малой. Это связано со свойством эволюции осциллятора. Если за время между двумя измерениями действовала малая сигнальная сила, то ее действие может быть обнаружено с неограниченной точностью (по крайней мере, теоретически).

Недостатком стробоскопического измерения является необходимость точно измерить координату за короткое время — это требует большой накачки и технически трудно реализуемо.

Измерение квадратурной компоненты. Запишем уравнения эволюции осциллятора:

$$x(t) = x_1 \cos\omega_m t + x_2 \sin\omega_m t, \tag{3.76}$$

$$\frac{p(t)}{m\omega_m} = -x_1 \sin\omega_m t + x_2 \cos\omega_m t, \tag{3.77}$$

Можно формально разрешить эту систему относительно x_1 и x_2:

$$x_1 = x(t) \cos\omega_m t - \frac{p(t)}{m\omega_m} \sin\omega_m t, \tag{3.78}$$

$$x_2 = x(t) \sin\omega_m t + \frac{p(t)}{m\omega_m} \cos\omega_m t \tag{3.79}$$

Отсюда мы можем заключить, что для реализации КНИ мы можем *непрерывно* измерять не координату или импульс, а их линейную комбинацию, задаваемую выражением (3.78) или (3.79). Тогда ошибка измерения не ограничена и возможно сколь угодно точное измерение внешней силы. Заметим, что измеряя сколь угодно точно квадратуру, скажем, x_1 мы столь же сильно возмущаем другую квадратуру x_2, но это возмущение нам не мешает.

Такое "прямое" измерение квадратурной позволяет использовать непрерывное измерение компоненты, однако реализовать его технически довольно сложно. Подчеркнем, что надо прямо измерять комбинацию (3.78) с коэффициентами, *зависящими от времени* (отдельное измерение координаты и импульса и последующее их комбинирование не подходят).

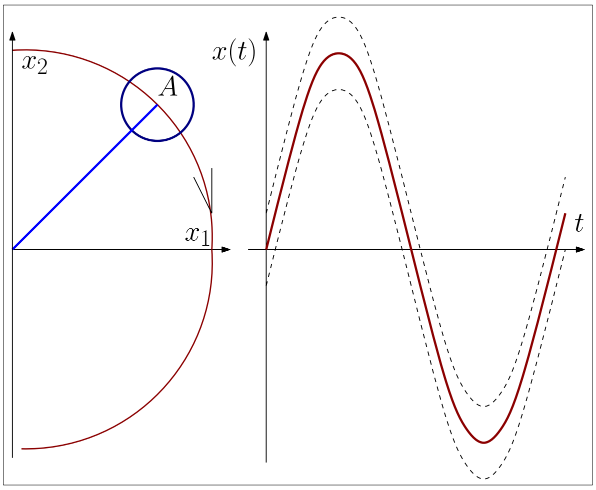

Рис. 3.9: Фазовый портрет и временная эволюция когерентного состояния: средняя величина (точка A) эволюционирует по классическим законам, а флуктуации квадратурных компонент постоянны и не коррелированы (круг на фазовом портрете)

Фазовые портреты Измерение квадратурных компонент связано с так называемыми сжатыми состояниями (squeezed states). Эти состояния можно проиллюстрировать (нестрого, но наглядно) с помощью фазовых портретов.

Начнем с когерентного состояния. В когерентном состоянии неопределенность координаты и импульса такие же, как и в основном состоянии осциллятора, а средние координата и импульс изменяются по классическому закону. Можно выписать гейзенберговские уравнения эволюции для операторов координаты $\hat{x}(t)$ и нормированного импульса $\hat{y}(t) = \frac{\hat{p}}{m\omega_m}$:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_1 \cos\omega_m t + \hat{x}_2 \sin\omega_m t, \qquad (3.80)$$

$$\hat{y}(t) = -\hat{x}_1 \sin\omega_m t + \hat{x}_2 \cos\omega_m t. \qquad (3.81)$$

Здесь $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ — операторы квадратурных компонент, факти-

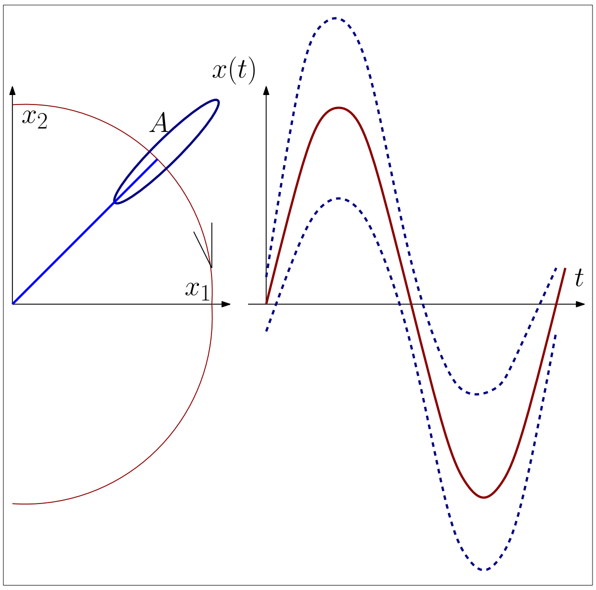

Рис. 3.10: Фазовый портрет (слева) и временная эволюция (справа) сжатого *по фазе* состояния: средняя величина эволюционирует по классическим законам, а флуктуации квадратурных компонент НЕ постоянны (эллипс на фазовом портрете)

чески это начальная координата и нормированный начальный импульс, которые не зависят от времени. Предположим, что флуктуации квадратурных компонент не коррелируют друг с другом, т.е. $\langle \Delta x_1 \, \Delta x_2 \rangle = 0$. Тогда можно сразу выписать для средних и дисперсий:

$$\langle \hat{x}(t) \rangle = \langle \hat{x}_1 \rangle \, \cos \omega_m t + \langle \hat{x}_2 \rangle \, \sin \omega_m t, \tag{3.82}$$

$$\langle \hat{y}(t) \rangle = -\langle \hat{x}_1 \rangle \, \sin \omega_m t + \langle \hat{x}_2 \rangle \, \cos \omega_m t, \tag{3.83}$$

$$\Delta x^2(t) = \Delta x_1^2 \, \cos^2 \omega_m t + \Delta x_2^2 \, \sin^2 \omega_m t, \tag{3.84}$$

$$\Delta y^2(t) = \Delta x_1^2 \, \sin^2 \omega_m t + \Delta x_2^2 \, \cos^2 \omega_m t \tag{3.85}$$

Глядя на эти уравнения, можно изобразить фазовый портрет когерентного состояния, для которого

$$\Delta x_1^2 = \Delta x_2^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_m}, \tag{3.86}$$

как вращающееся *круглое* пятно, диаметр которого равен Δx_1^2 — см. рис. 3.9 (a). В классике состояние системы описывается точкой, в нашей иллюстрации точка превращается в пятно — это отражает квантовую неопределенность. Очевидно, что когерентное состояние является наиболее близким к классическому. Заметим, что неопределенность когерентного состояния практически совпадает с СКП — ср. (3.86) и (3.31). Более подробное изложение приведено в Приложении B

Сжатое состояние характеризуется тем, что неопределенность одной квадратурной компоненты значительно больше (или меньше) другой. Поэтому пятно, соответствующее флуктуациям сжатой по одной оси и растянуто по другой так, что площадь его не изменяется, неизменность площади соответствует выполнению соотношений неопределенностей (3.74).

Фазовый портрет и эволюция состоячния, сжатого *по фазе*, представлены на рис. 3.10. Фазовый портрет и эволюция состоячния, сжатого *по амплитуде*, представлены на рис. 3.11. При измерении квадратурной компоненты состояние осцилляторв редуцируется в сжатое.

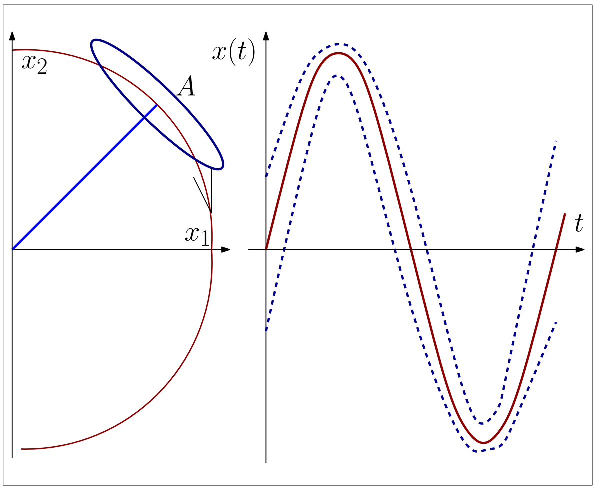

Рис. 3.11: Фазовый портрет (слева) и временная эволюция (справа) сжатого по *амплитуде* состояния: средняя величина эволюционирует по классическим законам, а флуктуации квадратурных компонент НЕ постоянны (эллипс на фазовом портрете)

Квантовое вариационное измерение

Для дальнейшего изложения нам будет важно понять, что измерительные шумы и шумы обратного влияния можно сделать коррелированными.

Рассмотрим еще раз миркоскоп Гейзенберга (рис. 3.4). Мы говорили, что экран (плоскость фотодетекторов) должна быть расположена на близком расстоянии от щели так, что размер пятна на экране практически совпадает с размером щели. Зададимся вопросом: а что мы будем измерять, если экран расположен дальше? Ведь в этом случае размер пятна на экране из-за дифракции будет больше, и, казалось бы, это ухудшит точность. Однако это не совсем так. Ведь, рассуждая квази-классически, координата Y точки экрана, где был поглощен фотон, несет информацию и о точке щели

x, “через которую прошел” фотон, и о поперечном импульсе p_x, приобретенном фотоном после прохождения щели:

$$x_э = x + \frac{p_x L}{mc} \tag{3.87}$$

Таким образом, мы получаем информацию о *линейной комбинации* ошибки измерения и импульса обратного влияния.

Заметим, что отведя экран на бесконечность, мы получим возможность измерять точно импульс обратного влияния, который можем в принципе полностью компенсировать. Правда, при этом не будет никакой информации о координате щели. Наоборот, при близко расположенном экране мы получаем информацию о координате щели, но ничего не знаем про обратное флуктуационное влияние.

Таким образом мы видим, что при небольшой модификации обычный измеритель координаты может измерять не координату, а *линейную комбинацию* ошибки измерения и импульса обратного влияния:

$$x_э = x + \alpha p_x \tag{3.88}$$

Важно, что коэффициент α можно выбирать произвольным образом.

Принцип квантового вариационного измерения легко понять на примере схемы из трех измерений, в которой во втором измерении включим измерение линейной комбинации координаты и импульса обратного влияния, т.е. $\alpha_2 \neq 0$:

$$x_1 = x_0 + x_{1\,\text{изм}}, \tag{3.89}$$

$$x_2 = x_0 + x_{2\ \text{изм}} + \frac{(p_0 + p_1)}{m} \cdot \tau + \alpha_2 p_2 + \frac{F_0}{2m} \cdot \tau^2, \tag{3.90}$$

$$x_3 = x_0 + x_{3\ \text{изм}} + \frac{(p_0 + p_1)}{m} \cdot 2\tau + \frac{p_2}{m} \cdot \tau + \frac{F_0}{2m} \cdot 4\tau^2. \tag{3.91}$$

Возьмем комбинацию измерений X, соответствующую численной второй производной:

$$X = x_3 + x_1 - 2x_2 = \tag{3.92}$$

$$= x_{1\ \text{изм}} + x_{3\ \text{изм}} - 2x_{2\ \text{изм}} + p_2 \left(\frac{\tau}{m} - 2\alpha_2\right) + \frac{F_0}{m\tau^2}$$

Мы видим, что при правильном выборе параметра

$$\alpha_2 = \frac{\tau}{2m} \tag{3.93}$$

в измеряемую комбинацию X импульс обратного влияния не входит. Таким образом, мы получили процедуру, свободную от обратного флуктуационного влияния. Отметим, что состояние пробной массы, конечно, сильно возмущается импульсами обратного влияния, однако процедура построена таким образом, что прибор "не видит" этого возмущения.

Отметим, что в квантовом вариационном измерении в отличие от КНИ нет не возмущаемой наблюдаемой. Именно это обстоятельство не позволяет отнести вариационное к КНИ.

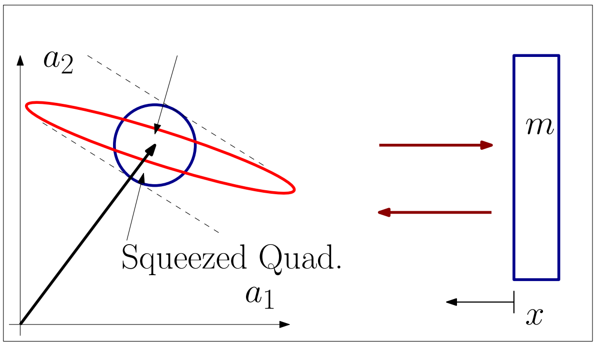

Рис. 3.12: Простейший оптический датчик.

Простейший оптический датчик

Рассмотрим простейший оптический датчик смещений, изображенный на рис. 3.12, в качестве примера датчика наиболее близкого к эксперименту.

Пусть от пробной (свободной) массы отражается импульс э.м. волны. Будем считать, что длительность импульса τ_0 мала, т.е. за время τ_0 пробная масса практически не сдвигается, Однако длительность τ_0 много больше периода волны ($\omega_e\tau_0 \gg 1$). Фаза ϕ отраженной волны зависит от координаты x пробного тела и начальная неопределенность фазы $\Delta\phi$ в импульсе будет определять ошибку измерения координаты Δx:

$$\phi = \frac{2\omega_e x}{c}, \quad \Delta x_{\text{изм}} = \frac{c\,\Delta\phi}{2\omega_e} \tag{3.94}$$

При этом обратное флуктуационное влияние проявится в неопределенности импульса силы светового давления (оно определяется неопределенностью энергии в э.м. импульсе):

$$\Delta p_{\text{возм}} = \frac{2\Delta\mathcal{E}}{c} = \frac{2\hbar\omega_e\,\Delta n}{c} \tag{3.95}$$

Пусть падающая световая волна находится в когерентном состоянии, для которого, как мы видели, флуктуации квадратурных компонент равны. Поэтому на фазовой плоскости такое состояние может быть изображено в виде круглого пятна, квадрат диаметра которого равен дисперсии любой крадратурной компоненты (см. рис. 3.12), в частности, неопределенность фазы $\Delta\phi$

$$\Delta\phi \simeq \frac{1}{2\sqrt{n}} \tag{3.96}$$

равна относительной неопределенности амплитуды $\Delta A/A$:

$$\frac{\Delta A}{A} = \Delta\phi = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \Rightarrow \quad \Delta n = \sqrt{n} \tag{3.97}$$

Здесь $n = \mathcal{E}/\hbar\omega_e$ — среднее число квантов в оптическом импульсе.

Пользуясь этими соотношениями и (3.94, 3.95, 3.97) можно показать. что выполняется соотношение неопределенностей (обычное для измерителей координаты):

$$\Delta x_{\text{изм}}\, \Delta p_{\text{возм}} = \hbar\, \Delta n\, \Delta\phi \simeq \frac{\hbar}{2} \tag{3.98}$$

Балансная гомодинная схема

Для измерения фазы отраженной волны обычно используют балансную гомодинную схему, изображенную на рис. 3.13. Точнее, эта схема используется для разрушающего измерения *квадратурной компоненты* световой волны. На полупрозрачное зеркало направляют сигнальную волну (в

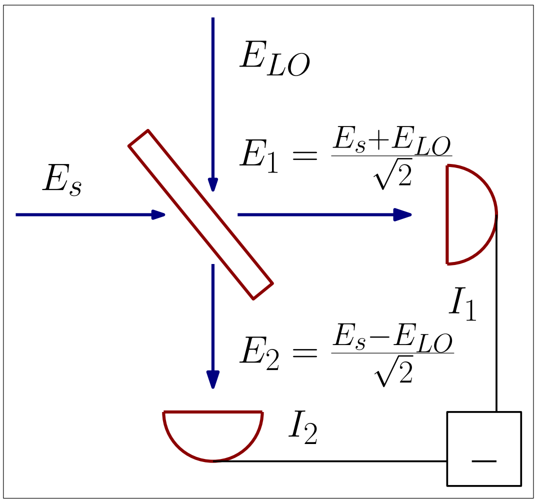

Рис. 3.13: Балансная гомодинная схема разрушающего измерения квадратурной компоненты сигнальной волны E_s. Амплитуда E_{LO} опорного генератора велика: $E_{LO} \gg E_s$.

нашем случае это волна. отраженная от пробного тела)

$$E_s = A\, e^{-i\omega_e t} + \text{к.с.} \tag{3.99}$$

и мощная волна опорного генератора (по-английски — local oscillator)

$$E_{LO} = B\, e^{-i\theta - i\omega_e t} + \text{к.с.}, \quad |B| \gg |A|, \tag{3.100}$$

фазу которого можно задавать произвольным образом (вводя нужную задержку). После прохождения полупрозрачного зеркала (50 % света проходит, 50% — отражается) получаются две волны E_1 и E_2

$$E_1 = \frac{E_s + E_{LO}}{\sqrt{2}}, \quad E_2 = \frac{E_s - E_{LO}}{\sqrt{2}}. \tag{3.101}$$

Эти волны поглощаются на детекторах, токи I_1, I_2 которых пропорциональны квадрату падающего поля:

$$I_1 = kE_1^2 = \frac{k}{2}\Big(E_s^2 + 2E_sE_{LO} + E_{LO}^2\Big), \tag{3.102}$$

$$I_2 = kE_2^2 = \frac{k}{2}\Big(E_s^2 - 2E_sE_{LO} + E_{LO}^2\Big), \tag{3.103}$$

где k — контанта. Далее эти токи подаются на вычитающее устройство, на выходе которого мы измеряем разностный ток

$$J \;=\; I_1 - I_2 = 4kE_sE_{LO} \tag{3.104}$$

Пусть теперь комплексные амплитуды и сигнальной, и опорной волн могут быть представлены как большая средняя величина (мы обозначаем ее индексом $_0$) и малые флуктуации. Тогда можно получить выражение для разностного тока с точностью до членов нулевого и первого порядка малости после усреднения по периоду $2\pi/\omega_e$ (т.е. опускаем члены $\sim e^{\pm 2i\omega_e t}$):

$$A = A_0 + a, \quad |a| \ll |A_0|, \tag{3.105}$$

$$B = B_0 + b, \quad |b| \ll |B_0|, \tag{3.106}$$

$$J \simeq 4k\Big(A_0\big(b\,e^{-i\theta} + b^*\,e^{i\theta}\big) + B_0\big[a\,e^{i\theta} + a^*\,e^{-i\theta}\big]\Big) \simeq \tag{3.107}$$

$$\simeq 4k\,B_0\big[a\,e^{i\theta} + a^*\,e^{-i\theta}\big] \tag{3.108}$$

Здесь мы приняли для простоты, что $A_0 = A_0^*$ и $B_0 = B_0^*$ (это не приводит к потере общности) и опустили постоянный член, описывыающий постоянный ток:

$$J_0 = 4kA_0B_0(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \tag{3.109}$$

В последнем формуле (3.107) мы отбросили член $\sim A_0$, используя условие $B_0 \gg A_0$ (мощность опорной волны много больше мощности сигнальной).

Подчеркнем, что в результате мы получили, что разностный ток J пропорционален квадратурной компоненте в сигнальной волне:

$$J \sim q_\theta = a\, e^{i\theta} + a^*\, e^{-i\theta} = \tag{3.110}$$

$$= \underbrace{(a + a^*)}_{\Delta A} \cos\theta - \underbrace{\frac{a - a^*}{i}}_{A\Delta\phi} \sin\theta \tag{3.111}$$

Очевидно, что при $\theta = 0$ в схеме измеряется амплитудная квадратурная компонента сигнальной волны, а при $\theta = \pi/2$ — фазовая квадратурная компонента. Подчеркнем, что гомодинный угол θ определяется фазой опорного генератора.

Задача 20.

Квантовое вариационное измерение для оптического датчика

Теперь вернемся к нашему оптическому датчику и вспомним, что флуктуации фазовой квадратурной компоненты отвечают за ошибку измерения координаты, а флуктуации амплитудной квадратуры — за импульс обратного флуктуационного влияния. Поэтому измеряя фазу, получаем датчик смещений. Однако, измеряя квадратуру q_θ при произвольном угле опорного генератора θ мы получаем возможность измерять произвольную *линейную комбинацию* ошибки измерения (3.94) и импульса обратного влияния (3.95), которую необходимо измерять к квантовом вариационном измерении. Мы видим на примере этого оптического датчика, что небольшая модификация координатного измерителя превращает его в измеритель для квантового вариационного измерения.

Можно также взглянуть на этот процесс измерения по-другому. Для падающей волны подвижное зеркало представляет собой пондеромоторную нелинейность — фаза $\phi_{\text{отр}}$ отраженной волны зависит от смещения зеркала, которое в свою очередь зависит от силы давления, пропорциональной квадрату поля

$$\phi \sim E_s^2 \sim A\Delta A. \tag{3.112}$$

Аналогичная ситуация возникает при распространении э.м. волны в среде с кубической нелинейностью, диэлектрическая проницаемость которой пропорциональна квадрату поля: $\epsilon = \epsilon_0(1 + \alpha E^2)$. Там тоже выполняется соотношение (3.112) поскольку скорость распространения волны в такой среде не постоянна, а зависит от амплитуды волны.

Таким отразом отраженная вона из-за самовоздействия будет преобразована, как показано на рисунке 3.12 слева: флуктуационное круглое пятно трансформируется в эллипс. Таким образом мы получим *сжатое* состояние. Заметим, что измерение сжатой компоненты как раз соответствует измерению *линейной комбинации* ошибки измерения (3.94) и импульса обратного влияния (3.95) (!).

Глава 4

Элементы теории вероятности

В данной главе приводится краткий обзор статистических методов обработки экспериментальных данных. Изложение построено в “инженерном” стиле — приводятся полезные формулы, но без вывода. Фактически это введение, которое может быть полезно при обработке экспериментальных данных.

Напоминание теории вероятности

Предментом теории вероятности является описание случайных процессов. Пусть x является случайной величиной. Она может быть

- непрерывной и неограниченной

$$-\infty < x < \infty$$

- непрерывной и ограниченной

$$a \leq x \leq b$$

- дискретной

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3, \dots x_N$$

Плотность вероятности

Важнейшей величиной, описывающей поведение случайной величины, является плотность вероятности $p(x)$. Вероятность P того, что случайная величина x лежит в пределах $x_a \le x \le x_b$ определяется формулой

$$P(x_a \le x \le x_b) = \int_{x_a}^{x_b} p(\zeta)\, d\zeta \tag{4.1}$$

Очевидно, выполняются условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\zeta)\, d\zeta = 1, \tag{4.2}$$

$$\int_{a}^{b} p(\zeta)\, d\zeta = 1, \tag{4.3}$$

$$\sum_i p(\zeta_i) = 1 \tag{4.4}$$

соответственно для непрерывных неограниченных, непрерывных ограниченных и дискретных случайных переменных.

Будем определять генеральную вероятность $\mathbb{P}(a)$ как

$$\mathbb{P}(a) \equiv P(a \le x) = \int_{-\infty}^{a} p(\zeta)\, d\zeta \tag{4.5}$$

Генеральное среднее и дисперсия

Генеральное среднее обозначается по-разному:

$$M(x) \equiv \langle x \rangle \equiv \mathcal{E}(x) \equiv \xi = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta\, p(\zeta)\, d\zeta \underbrace{=}_{\text{или}} \sum_i \zeta_i\, p(\zeta_i) \tag{4.6}$$

Обозначения для дисперсии и ее определение

$$\sigma^2 \equiv \sigma^2(x) \equiv D(x) \equiv M\left[(x-\xi)^2\right] = \tag{4.7}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \zeta)^2\, p(\zeta)\, d\zeta \underbrace{=}_{\text{или}} \sum_i (\xi - \zeta_i)^2\, p(\zeta_i) \tag{4.8}$$

Свойство линейности. Если случайная переменная y линейно зависит от другой случайной переменной x, то

$$y = \alpha + \beta x, \quad \Rightarrow \quad M(y) = \alpha + \beta M(x), \quad \sigma^2(y) = \beta^2 \sigma^2(x), \tag{4.9}$$

где $\alpha,\ \beta$ — постоянные.

Часто вводят нормированную случайную переменную u:

$$u = \frac{x - \xi}{\sigma}, \quad \Rightarrow \quad M(u) = 0, \quad \sigma^2(u) = 1 \tag{4.10}$$

На опыте экспериментатор имеет n результатов измерений x_i. Из них он вычисляет оценку среднего $\bar{x}$ и оценку дисперсии *серии измерений*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \tag{4.11}$$

Заметим, что оценка дисперсии *среднего* $\bar{x}$ меньше, чем дисперсия *серии измерений*, она рассчитывается по формуле

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2(x)}{n} \tag{4.12}$$

Доверительные интервалы

Естественный вопрос, который возникает при любом эксперименте, каково вероятное отклонение оценки среднего $\bar{x}$ от ξ и оценки дисперсии S^2 от σ^2.

В самом тяжелом случае, когда мы *ничего* не знаем о случайной величине, остается использовать неравенство Чебышева:

$$P\left\{\left|\frac{x-\xi}{\sigma}\right| \le \alpha\right\} > 1 - \frac{1}{\alpha^2}, \tag{4.13}$$

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x}-\xi}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le \alpha\right\} > 1 - \frac{1}{\alpha^2}, \quad \Rightarrow \quad \xi = \bar{x} \pm \alpha \left.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right|_{1-1/\alpha^2} \tag{4.14}$$

Последнее равенство задает доверительные границы для ξ с вероятностью $1 - 1/\alpha^2$. Но надо знать σ (!)

Рассмотрим пример. Пусть получили из опыта результаты

$$x = 5,\ 7,\ 6,\ 6,\ 7,\ 8,\ 8,\ 12,\ 10, \tag{4.15}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = 8,\ S^2 = 4.1, \quad \text{положим } \sigma^2 = 4.1 \text{ (!)} \tag{4.16}$$

Тогда, используя (4.14) получаем доверительные интервалы для разного уровня вероятности

$$\xi = 8 \pm 2.9|_{0.95,\ \alpha=5} = 8 \pm 6.4|_{0.99,\ \alpha=10} = \tag{4.17}$$

$$= 8 \pm 12.8|_{0.998,\ \alpha=20} \tag{4.18}$$

Напомним, мы сделали довольно сильное предположение ($S = \sigma$), обычно при $n > 30$ это выполнятся, но не всегда.

Мы видим, что при попытке сделать вероятность повыше доверительный интервал растет довольно сильно. Это плата за то, что в приведенном примере мы ничего не знаем о плотности вероятности.

К счастью, в теории вероятности есть центральная предельная теорема (ЦПТ), которая звучит так:

> Пусть случайная величина x есть сумма большого числа n независимых случайных величин y_i. Тогда при $n \to \infty$ распределение вероятности стремится к гауссовому:
>
> $$x = \sum_{i=1\ldots n} y_i, \Rightarrow\ p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4.19}$$

Гауссово распределение (4.19) имеет очень привлекательное свойство — экспоненциально быстро спадает на бесконечности.

Обычно предполагают, что распределение гауссово. Мы тоже везде ниже будем предполагать, что ЦПТ выполнена и функция распределения вероятности имеет гауссов вид (4.19).

Для нормированной случайной величины u (4.10) имеем плотность распределения вероятности

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-u^2/2}, \quad \mathbb{P}\big(|u \geq a\big) = 2\int_a^\infty \Phi(\xi)\, d\xi\,. \tag{4.20}$$

Формула (4.20) есть фактически интеграл ошибок, который определяется как

$$\mathrm{erf}\ (x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\, dt \tag{4.21}$$

Используя таблицы для интеграла ошибок, можно получить

$$\mathbb{P}\big(|u \geq 1.96\big) = 0.05, \quad \mathbb{P}(|u \geq 2.58) = 0.01 \tag{4.22}$$

Формулы (4.22) важны для нас, они определяют вероятности доверительных интервалов. Так для нашего примера, если принять, что действует ЦПТ, то вместо (4.17) получим значительно более узкие доверительные интервалы

$$\xi = 8 \pm 1.32|_{0.95} = 8 \pm 1.74|_{0.99} \tag{4.23}$$

(Конечно, в предположении, что $S = \sigma$).

u - критерий значимости

Пусть у нас есть серия x_i из n измерений и нам точно известно, что распределение нормальное и его генеральная

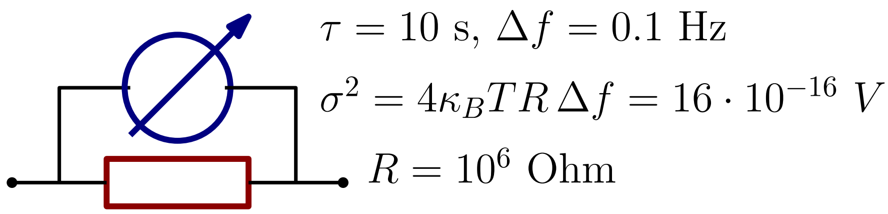

Рис. 4.1: Схема измерения тока.

дисперсия равна σ. Пусть существует гипотеза, что среднее равно ξ_0. Тогда мы можем записать для гипотезы ξ_0 доверительные границы с вероятностью 0.95

$$\left(\xi_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1.96 \le \bar{x} \le \xi_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1.96\right)_{0.95} \tag{4.24}$$

В качестве примера такой постановки задачи рассмотрим схему на рис. 4.1. Пусть нужно измерить ток, протекающий через сопротивление R, предсказание теории $I = 1 \cdot 10^{-13}$ А. Мы измеряем напряжение, поэтому предсказание постоянного напряжения $U = 1 \cdot 10^{-7}$ В. Пусть ошибка измерения определяется только тепловыми шумами, которые можно рассчитать по формуле Найквиста

$$\sigma^2 = 4\kappa_B T R \Delta f = 16 \cdot 10^{-16}\ \text{V}, \quad \tau = 10\,\text{s},\ \Delta f = 0.1\,\text{Hz}. \tag{4.25}$$

При числе измерений $n = 50$ мы получаем доверительные границы для измерения среднего напряжения $\bar{U}$

$$0.86 \cdot 10^{-7}\ \text{В} \le \bar{U} \le 1.14 \cdot 10^{-7}\ \text{В} \tag{4.26}$$

Повторим, это в предположении, что верна гипотеза ξ_0.

Значимое различение двух гипотез. Пусть есть другая гипотеза (от конкурирующего теоретика), которая утверждает, что среднее должно быть ξ_1 (а не ξ_0). Пусть мы приняли гипотезу ξ_0, а на самом деле справедлива гипотеза ξ_1. Введем мощность критерия:

$$\Pi(\xi_1) = \mathbb{P}\left\{\left|\frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > 1.96; M(x) = \xi_1\right\} \tag{4.27}$$

и введем статистическую ошибку II-ого рода

$$\beta = 1 - \Pi(\xi_1) \tag{4.28}$$

Рис. 4.2 иллюстрирует определение ошибки II-ого рода.

Введем нормированную разницу λ между гипотезами

$$\frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \xi_1}{\sigma/\sqrt{n}} + \lambda, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\xi_1 - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{4.29}$$

Тогда мощность критерия (4.27) можно записать в виде:

$$\Pi(\xi_1) = \mathbb{P}\{|u + \lambda| > 1.96\} \tag{4.30}$$

Для примера положим ошибку первого рода равной $\alpha = 0.05$. Тогда для таблиц u–распределения можно рас-

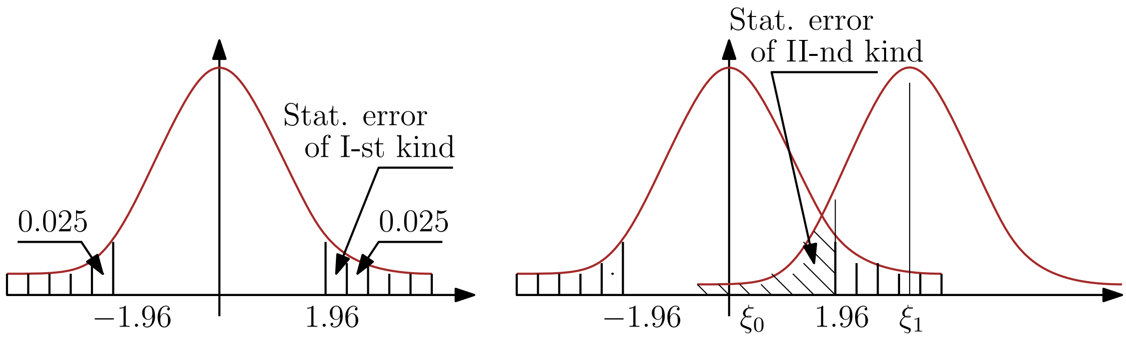

Рис. 4.2: Статистические ошибки первого и второго рода.

считать ошибку β второго рода для разных величин λ

α	0.05					
λ	0.5	1.0	2.0	3.0	3.5	4.0
β	0.91	0.83	0.48	0.15	0.06	0.02

Полагая, что $\beta \simeq \alpha$ (на самом деле это не обязательно, но часто практикуется), мы видим, что нормированная разница между гипотезами должна быть около 3.5

Для примера приведем таблицу при $\alpha = 0.01$

α	0.01					
λ	0.5	1.0	2.0	3.0	3.5	4.0
β	1	0.99	0.80	0.60	0.15	0.06

Заметим, что приведенные выше таблицы получены при использовании u - распределения, которое имеет ограниченное применение, поскольку предполагает знание дисперсии. Однако та же логика справедлива и для других распределений, например, для распределения Стьюдента, не предполагающее априорное знание дисперсии.

χ^2 – критерий

Для нормально случайного процесса x выпишем оценку дисперсии

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_n (x_i - \bar{x})^2, \tag{4.31a}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_n (x_i - \xi)^2 \tag{4.31b}$$

Здесь формула (4.31b) относится к случаю, когда нам заранее известно генеральное среднее ξ, а (4.31a) — когда неизвестное среднее априорно не известно и заменено его оценкой $\bar{x}$.

Для пояснения, как вводится величина χ^2, перепишем формулу (4.31b) в виде

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_n (x_i - \xi)^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sum_n \left(\frac{x_i - \xi}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n} \underbrace{\sum_n u_i^2}_{\chi^2} \tag{4.32}$$

Приведем без вывода точную формулу распределения плотности вероятности $P(\chi^2)$ для разных n:

$$P(\chi^2) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot \chi^{n-2} \exp(-\chi^2) \tag{4.33}$$

На рис. 4.3 приведены графики $P(\chi^2)$ для разных n.

Распределение вероятности (4.33) имеет особенности:

- $P(\chi^2)$ определена только для положительного аргумента, что естественно

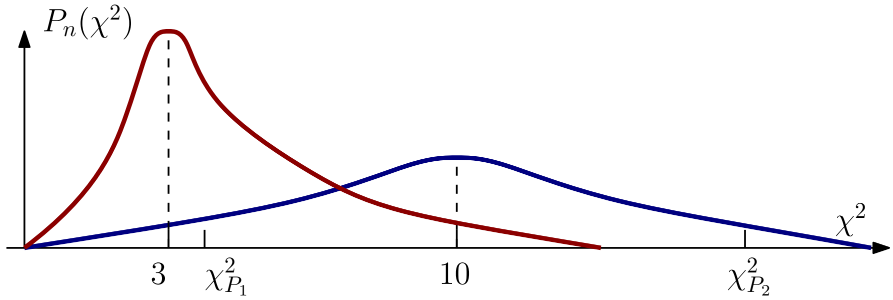

Рис. 4.3: Распределение плотности вероятности $P(\chi^2)$ для разных $n = 3$ и $n = 10$.

- Среднее $\langle\chi^2\rangle$ не равно нулю

$$\langle\chi^2\rangle \equiv \int_0^\infty P(\chi^2)\,\chi^2\,d\chi^2 = n \tag{4.34}$$

- Распределение $P(\chi^2)$ имеет довольно большие "хвосты". См. пояснения ниже.

Для определения доверительных интервалов введем вероятность того, что $\chi^2 < \chi^2_{P_1}$:

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{P_1}\right) = \int_0^{\chi^2_{P_1}} P(\chi^2)\,d\chi^2 \tag{4.35}$$

Поэтому вероятность того, что $\chi^2_{P_1} < \chi^2 < \chi^2_{P_2}$ равна

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{P_1} < \chi^2 < \chi^2_{P_2}\right) = \mathbb{P}\left(\chi^2_{P_2}\right) - \mathbb{P}\left(\chi^2_{P_1}\right) \tag{4.36}$$

Рассмотрим пример. Величины $\mathbb{P}\left(\chi^2_{P_{1,2}}\right)$ протабулированы для разных n, есть соответствующие таблицы в математических справочниках [15]. Пусть $n = 10$. Потребуем

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{P_1}\right) = 0.02, \;\Rightarrow\; \chi^2_{P_1} = 3.06, \tag{4.37}$$

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{P_2}\right) = 0.98, \;\Rightarrow\; \chi^2_{P_1} = 21.16 \tag{4.38}$$

Теперь можем записать доверительные границы для χ^2 с вероятностью

$$\mathbb{P}\left(3.06 < \chi^2 < 21.16\right) = 0.98 - 0.02 = 0.96, \tag{4.39a}$$

$$(4.32) \;\Rightarrow\; \mathbb{P}\left(3.06 < \frac{n\widehat{S}^2}{\sigma^2} < 21.16\right) = 0.96 \tag{4.39b}$$

$$\Rightarrow\; \mathbb{P}\left(0.306 < \frac{\widehat{S}^2}{\sigma^2} < 2.116\right) = 0.96 \tag{4.39c}$$

Мы видим, что нижняя и верхняя границы отличаются друг от друга почти в 7 раз (!).

Пример. Пусть для проверки формулы Найквиста измеряется шумовое напряжение на сопротивлении, параметры эксперимента:

$$\Delta f = 0.1\,\text{Гц},\;\; \tau = 10\,\text{сек},\;\; R = 10^3\,\text{Ом}\;\; T = 300\,\text{K},\;\; n = 10 \tag{4.40}$$

(Количество измерений n выбрано так, чтобы использовать оценки (4.39).) Тогда предсказание теории, которое нужно проверить —

$$\sigma_u^2 = 4k_B TR\,\Delta f \simeq 1.66 \cdot 10^{-18}\,\text{В}^2 \tag{4.41}$$

Пусть результаты измерений есть

$$U_i^2 = \Big(2.0,\; 1.5,\; 2.2,\; 1.3,\; 1.4,\; 3.0,\; 2.0,\; 3.0,\; 1.6,\; 2.0\Big) \cdot 10^{-18}\,\text{В}^2$$

Так что оценка дисперсии равна

$$\hat{S}^2 = 2.0 \cdot 10^{-18}\ \text{В}^2 \tag{4.42}$$

Используя результаты (4.39) найдем доверительные границы:

$$\mathbb{P}\left(0.51 \times 10^{-18}\,\text{В}^2 < \hat{S}^2 < 3.43 \times 10^{-18}\,\text{В}^2\right) = 0.96 \tag{4.43}$$

Видим, что для проверки формулы Найквиста 10 измерений совершенно недостаточно.

ЦПТ. В силу центральной предельной теоремы χ^2 - распределение будет стремиться к нормальному при увеличении числа измерений $n \to \infty$, причем в качестве нормированной переменной u будет

$$u \simeq \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1} \tag{4.44}$$

Отсюда используя, например,

$$\mathbb{P}\left(|u| < 1.96\right) = 0.95 \tag{4.45}$$

можно получить

$$\chi^2_{0.975} - \chi^2_{0.025} \simeq 5.5 \cdot \sqrt{n}, \quad \left\langle \sqrt{\chi^2} \right\rangle \simeq \sqrt{n - \frac{1}{2}} \tag{4.46}$$

Пусть надо измерить дисперсию с процентной точностью с уровнем достоверности 95 %, т.е

$$\zeta = \left.\frac{\Delta(\sigma^2)}{\sigma^2}\right|_{\alpha=0.05} \tag{4.47}$$

Нетрудно оценить, что для этого требуется $n \simeq 7.5 \cdot 10^4$ измерений.

Если генеральное среднее не известно? Строго говоря, изложенное рассмотрение относится к случаю, когда априори известно среднее. Однако при большом числе измерений $n \gg 1$ заменяют (см. (4.31))

$$\hat{S}^2 \Rightarrow S^2, \quad n \;\rightarrow\; f = n - 1 \tag{4.48}$$

и вместо числа измерений n используют число степеней свободы f. При этом оценка среднего $\bar{x}$ заменяет генеральное среднее ξ.

Критерий Фишера. Обычно экспериментальные данные состоят из отдельных серий (скажем, в разные дни или до и после обеда). Закон экспериментальной этики гласит, что

> Полученные результаты (серии) можно использовать только целиком. Выкидывать отдельные точки (или вставлять "от фонаря") категорически запрещается.

Известно, что выбирая из серии "нужные" точки и отбрасывая "не нужные", можно получить практически любую зависимость. Отсюда и проистекает этот запрет.

Однако, поскольку серии данных получены в разное время, возможно, изменились условия (скажем, появились дополнительные наводки или шумы). Тогда можно выкинуть "подозрительную" серию (подчеркнем, именно *всю* серию). Но делать это можно лишь аргументированно.

В качестве аргумента часто используют ν^2 - распределение, для которого применяют критерий Фишера. Пусть мы имеем две серии, дисперсии в которых равны:

$$S_1 = \sigma^2 \cdot \frac{\chi_1^2}{f_1}, \quad S_2 = \sigma^2 \cdot \frac{\chi_2^2}{f_2} \tag{4.49}$$

Пусть в серии 1 дисперсия больше, чем в серии 2. Нам надо понять *значимо* ли они отличаются, или нет? Для этого вычисляем отношение

$$F = \frac{\text{большая оценка дисперсии}}{\text{меньшая оценка дисперсии}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \tag{4.50}$$

Эту величину надо сравнить с ν^2:

$$\nu^2(f_1, f_2) = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\chi_1^2}{f_1} \Big/ \frac{\chi_2^2}{f_2} \tag{4.51}$$

Для величины ν^2 вычислено распределение, пользователь может из математических таблиц для распределения Фишера (ν^2 - распределение) найти граничное значение $\nu_P^2(f_1, f_2)$.

Например, из таблицы можно найти $\nu_{0.05}^2(12, 9) = 3.07$. Это означает, что если для степеней свободы $f_1 = 12,\ f_2 = 9$ величина $F = 3$ (т.е. $F < \nu_P^2(f_1, f_2)$), то с вероятностью 95% дисперсии разных серий *не значимо* отличаются друг от друга. Если же $F = 3.11$ (т.е. $F > \nu_P^2(f_1, f_2)$), то с вероятностью 95% (вероятность ошибиться 5%) дисперсии отличаюся *значимо.*

Подчеркнем, граничные значения сильно зависят от уровня достоверности, например,

$$\nu^2_{0.005}(12, 9) = 6.23 \tag{4.52}$$

Это означает, что если вы хотите сделать суждение о значимости различия дисперсий в сериях с вероятностью ошибиться 0.5% (а не 5%), то дисперсии должны отличаться сильнее, более чем 6 раз (а не 3.07 раза).

t - распределение Стьюдента

В статистике t-распределение было впервые получено как апостериорное распределение в 1876 году Фридрихом Гельмертом. и Якобом Люротом. В англоязычной литературе распределение берёт название из статьи Уильяма Госсета в журнале Пирсона «Биометрика», опубликованной под псевдонимом "Стьюдент". Оно стало известным благодаря работе Роналда Фишера, который называл распределение «распределением Стьюдента», а величину — буквой t.

Напомним, что мы рассматриваем только нормальные случайные процессы. Рассмотренный выше u - критерий относится к случаю, когда дисперсия σ^2 известна, χ^2 - критерий — к случаю, когда известно среднее ξ. Теперь мы рассматриваем распределение Стьюдента, требующее только нормальность процесса.

Напомним определение безразмерной переменной u:

$$u = \frac{x - \xi}{\sigma} = \frac{\bar{x} - \xi}{(\sigma/\sqrt{n})}$$

Переменная t распределения Стьюдента вводится как

$$t = \frac{x-\xi}{S} = \frac{\bar{x}-\xi}{(S/\sqrt{n})} = \frac{\bar{x}-\xi}{(\sigma/\sqrt{n})} \cdot \frac{1}{(S/\sigma)} = \frac{u}{\sqrt{\chi^2/f}}$$

Приведем без вывода распределение Стьюдента (оно зависит от t и числа степеней f)

$$f(t,f) = \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi f}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}}. \qquad (4.53)$$

Здесь Γ —гамма -функция Эйлера. График t - распределения подобен графику u - распределения, но шире. Причем чем больше f, тем меньше разница. Справедливо соотношение

$$\lim_{f\to\infty} t = u \qquad (4.54)$$

Для сравнения u - распределением возьмем t - распределение для $f = 9$:

$$\mathbb{P}_{f=9}\left(|t| < 2.26\right) = 0.95, \quad \mathbb{P}\left(|u| < 1.96\right) = 0.95. \qquad (4.55)$$

Уже для числа степеней свободы $f = 9$ t - и u - распределения не сильно отличаются.

Для доверительных интервалов получаем.

$$\mathbb{P}\left(-2.26 < \frac{\bar{x}-\xi}{(S/\sqrt{10})} < 2.26\right) = 0.95, \qquad (4.56)$$

$$\text{или} \quad \xi = \bar{x} \pm 2.26 \cdot \frac{S}{\sqrt{10}}\bigg|_{0.95} \qquad (4.57)$$

Обычно в справочниках приводятся таблицы для числа степеней свободы вплоть до $f = 40$ (иногда до $f = 100$). Для

$f > 40$ доверительные границы для t - и u - распределений отличаются лишь в 3-м знаке.

Значимое различение средних в двух сериях. Пусть мы имеем две серии измерений:

$$\text{Серия 1:}\ \ \bar{x}_1,\ S_1^2,\ f_1 = n_1 - 1, \tag{4.58}$$

$$\text{Серия 2:}\ \ \bar{x}_2,\ S_2^2,\ f_2 = n_2 - 1 \tag{4.59}$$

Предположим, что оценки дисперсий S_1^2 и S_2^2 значимо не отличаются. Нас интересует вопрос вопрос: при каких условиях можно считать, что $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2$ *значимо* отличаются друг от друга?

Напомним, для заранее известных дисперсий вводится нормированная разница λ (4.29) и она оценивается по u - критерию — см. раздел 4.3.

Для нашего случая, когда дисперсии не известны и надо пользоваться их оценками, нормированная разница λ_t между средними вводится следующим образом:

$$\lambda_t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}, \qquad S^2 = \frac{f_1 S_1^2 + f_2 S_2^2}{f_1 + f_2} \tag{4.60}$$

Случайная величина λ_t распределена по t - распределению с $f = f_1 + f_2$ степенями свободы.

Как и в разделе 4.3, вводятся статистические ошибки I и II рода, только для вычисления границ доверительных интервалов используется t - распределение с f степенями свободы (а не u - распределение).

Для значимого различения средних с вероятностью 95% нормированная разница должна быть $\lambda_t > 4$. Это очень приблизительная оценка, точная граница значимости для λ_t зависит от количества измерений в сериях.

$K(\lambda)$ критерий Колмогорова

Везде выше в этой главе мы предполагали нормальность случайного процесса. Если у экспериментатора возникает сомнение в нормальности, он может использовать один из множества разработанных критериев. В данном разделе мы рассмотрим один из таких критериев — $K(\lambda)$ критерий Колмогорова.

Пусть получена серия измеренных данных $\{x_i\}$, $1 \leq i \leq n$. Экспериментатор сначала должен упорядочить в порядке возрастания:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n \tag{4.61}$$

и построить ступенчатую функцию:

$$P_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{k}{n} & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 1 & x > x_n \end{cases} \tag{4.62}$$

Для нормального случайного процесса функция $P_n(x)$ при больших n должна стремиться к интегральной веро-

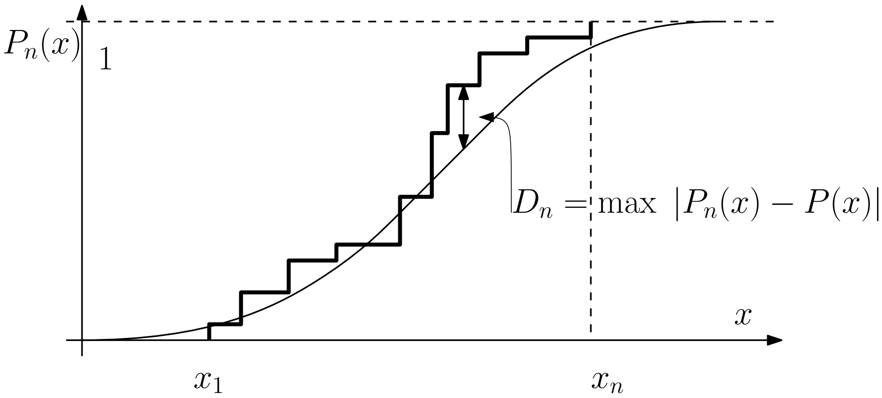

Рис. 4.4: Графики функций $P_n(x)$ и $\mathbb{P}(x)$, D_n — их максимальное отклонение друг от друга.

ятности $\mathbb{P}(x)$

$$P_n(x) \to \mathbb{P}(x) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(u)\,du, \quad \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-u^2/2} \tag{4.63}$$

Это иллюстрируют графики на рис. 4.4. Максимальное их отклонение D_n

$$D_n = \max|P_n(x) - \mathbb{P}(x)| \tag{4.64}$$

является мерой отличия $P_n(x)$ от $\mathbb{P}(x)$. D_n является случайной величиной, для нее доказано соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(D_n\sqrt{n} \leq \lambda\right) = \mathbb{K}(\lambda), \quad \mathbb{K}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2} \tag{4.65}$$

Сейчас не представляет особого труда численно на компьютере посчитать $\mathbb{K}(\lambda)$ как функцию λ.

Приведем пару примеров.

- Пусть для $n = 100$ получено $D_n = 0.03$, что соответствует $D_n\sqrt{n} = 0.3$. Это обычный случай, *нет причин* беспокоиться о ненормальности случайного процесса.

- Пусть для $n = 50$ получено $D_n = 0.3$, что соответствует $D_n\sqrt{n} = 2.1$. Это очень редкий случай. Поэтому надо внимательно присмотреться, нет ли каких-то причин дополнительных *не гауссовых* шумов.

Приложение А

Задачи

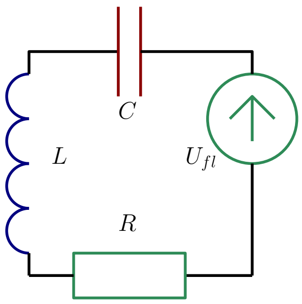

Рис. А.1: Параллельный колебательный контур. Наличие сопротивления R является причиной тепловых шумов в контуре (генератор U_{fl}).

1. "Вязкое трение". Пользуясь распределением Максвелла для скоростей молекул, вывести формулу для вязкого трения свободно движущегося кубика с ребром a в идеальном газе.

2. "Резонанс". На механический резонатор (масса m и собственная частота ω_0), находящийся в покое, начинает действовать резонансная сила:

$$F(t) = F_0 \begin{cases} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{cases} \tag{A.1}$$

Найти зависимость координаты $x(t)$ осциллятора от времени.

3. "Резонанс с диссипацией". На механический резонатор с затуханием (масса m, собственная частота ω_0, добротность Q), находящийся в покое, начинает действовать резонансная сила:

$$F(t) = F_0 \begin{cases} \cos \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t \end{cases} \tag{A.2}$$

Найти зависимость координаты $x(t)$ осциллятора от времени.

4. "Резонанс с диссипацией и расстройкой". На механический резонатор с затуханием (масса m, собственная частота ω_0, добротность Q), находящийся в покое, начинает действовать *гармоническая* сила:

$$F(t) = F_0 \begin{cases} \cos(\omega_0 + \Delta)t \\ \sin(\omega_0 + \Delta)t \end{cases} \tag{A.3}$$

Найти зависимость координаты $x(t)$ осциллятора от времени и *построить графики* для малых расстроек $\Delta \ll \omega_0$. Рассмотреть частные случаи $\Delta = \pm\,\omega_0/Q, \quad \Delta = \pm\,5 \cdot \omega_0/Q$.

5. "Тепловые дисперсии". Найдите дисперсию тока и напряжения в колебательном контуре (рис. A.1), вызванных классичекими тепловыми шумами.

6. “Квантовые дисперсии”. Найдите дисперсию тока и напряжения в колебательном контуре (рис. A.1) в квантовом пределе $k_B T \to 0$.

7. “Склон резонансной кривой”. В последовательный высокодобротный LC-контур включен генератор синусоидального напряжения $U_g e^{i\omega t}$ (см. также рис. 2.1). Расстояние между пластинами конденсатора изменяется от d до $d + \Delta x$. Показать, что при этом максимальное изменение амплитуды напряжения на емкости будет при
$$\omega_g \simeq \pm \frac{\omega_e}{2Q_e} \tag{A.4}$$
где ω_e и $Q_e \gg 1$ — собственная частота и добротность контура.

Указание:
$$\omega_e = \frac{1}{LC}, \quad \frac{d\omega_e}{dd} = \frac{\omega_e}{2d},$$
$$U_C(\omega_g) = \frac{U_g}{R + i\left(L\omega_g - \frac{1}{\omega_g C}\right)} \times \frac{1}{i\omega_g C} = \frac{U_g y^2}{\frac{iy}{Q_e} + y^2 - 1}, \quad y = \frac{\omega_e}{\omega_g},$$
$$|U_C| = \frac{|U_g| y^2}{\sqrt{\frac{y^2}{Q_e^2} + (y^2 - 1)^2}}, \quad \frac{d|U_C|}{d\omega_e} = \frac{1}{\omega_g}\frac{d|U_C|}{dy},$$
$$\text{Экстремум } \frac{d|U_C|}{dy} \Rightarrow y_{1,2} = \ldots$$

8. “Емкостной датчик”. Доказать формулу (2.5) и сформулировать условия ее применимости. См. указание к задаче 7.

9. "Условие работы емкостного датчика". Пусть в емкостном датчике расстояние $D(t)$ между пластинами изменяется по закону

$$D(t) = d + \Delta x(t), \quad \Delta x = x_0 \cos \Omega t$$

Найдите, при каких величинах x_0, Ω будут справедливы формулы (2.1 и 2.5).

10. "Скачок". Пусть в емкостном датчике в момент времени $t = 0$ расстояние d между пластинами конденсатора *скачком* изменяется на величину

$$\Delta x \ll d$$

Найдите, как при этом изменится амплитуда и фаза вынужденных колебаний в контуре (через какое время установятся их новые значения)? Разобрать два случая: а) в момент времени $t = 0$ заряд на конденсаторе равен нулю; б) в момент времени $t = 0$ заряд на конденсаторе максимален.

11. "Обратное динамическое влияние". Вывести формулу (2.9) для жесткости, вносимой емкостным датчиком. Какой знак жесткости на левом (правом) склоне резонансной кривой?

12. "Резонансная накачка". Вывести формулу (2.45) для сдвига фазы напряжения на емкости из-за смещения пластин резонатора при резонансной накачке.

13. “Балансный фазовый детектор”. Сформулируйте условия, при которых балансный фазовый детектор измеряет фазу сигнального напряжения.

14. “Эффект Доплера”. Найти изменение частоты света, отраженного от движущегося со скоростью $v \ll c$ зеркала.

15. “Стандартный квантовый предел энергии осциллятора”. С какой ошибкой можно измерить энергию механического осциллятора по измерению его координаты дважды: в моменты времени $t = 0$ и $t = t_1 = \pi/2\omega_m + 2\pi n/\omega_m$ (n — целое).

16. “Обобщенная координата”. Пусть обобщенной координатой в LC-контуре выбрано а) напряжение U на конденсаторе; б) ток I через индуктивность. Что тогда является обобщенным импульсом?

17. “5 измерений”. Рассмотреть схему пяти измерений свободной массы как обобщение схемы (3.44). Какую комбинацию измерений надо брать, чтобы исключить обратное флуктуационное влияние и неопределенность начальных условий?

18. “Квантовый осциллятор”. Квантовый осциллятор (масса m, частота ω) находится в энергетическом состоянии $|n\rangle$. На него действует резонансная сила $F = F_0 \cos \omega t$. Найдите оценку амплитуды F_0 достаточной для того,

чтобы перевести осциллятор в состояние $|n \pm 1\rangle$.

Указание: методом последовательных приближений найти амплитуды вероятности состояний $|n \pm 1\rangle$ и формально приравнять их модуль к 1.

19. "Мощность СКП". Дайте оценку мощности световой волны, падающей на отражающую свободную массу (простейший оптический датчик), при которой достигается СКП.

20. "Балансный гомодинный детектор". Найти, как надо выбрать амплитуду и фазу накачки балансного гомодинного детектора, чтобы в сигнальной волне волне измерять квадратуру

$$a_\theta = a_{\mathrm{amp}} \cos\theta + a_{\mathrm{phase}} \sin\theta \tag{A.5}$$

Приложение В

Когерентное состояние

В этом разделе мы приводим качественное описание квантового осциллятора в когерентном состоянии.

Найдем энергию осциллятора (масса m, собственная частота ω) в основном состоянии. В этом состоянии средние координата и импульс равны нулю, не равны нулю только дисперсии Δx^2 и Δp^2. Тогда энергия осциллятора равна

$$\mathcal{E} = \frac{m\omega^2 \Delta x^2}{2} + \frac{\Delta p^2}{2m} \tag{B.1}$$

В силу принципа неопределенности $\Delta x^2 \, \Delta p^2 \geq \hbar^2/4$ энергия не может быть равна нулю, найдем ее минимальное значение:

$$\mathcal{E} = \frac{m\omega^2 \Delta x^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8m\Delta x^2} \geq \mathcal{E}_{\min}, \quad \mathcal{E}_{\min} = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{B.2}$$

Минимум энергии достигается при оптимальных дисперсиях

$$\Delta x_0^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \Delta p_0^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} \tag{B.3}$$

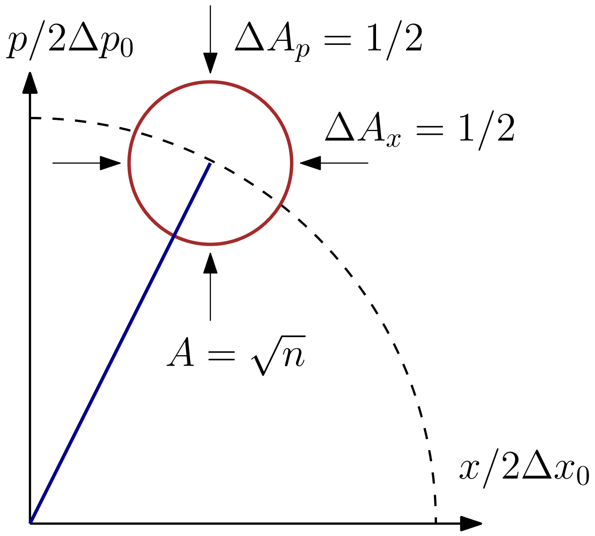

Рис. B.1: Фазовый портрет когерентного состояния квантового осциллятора.

Заметим, вклады в энергию $\mathcal{E}_{\min}$ нулевых колебаний равны

$$\frac{m\omega^2\Delta x_0^2}{2} = \frac{\hbar\omega}{4}, \quad \frac{\Delta p_0^2}{2m} = \frac{\hbar\omega}{4} \tag{B.4}$$

Можно сказать, что в основном состоянии средняя потенциальная энергия ($\sim \Delta x_0^2$) и средняя кинетическая энергия ($\sim \Delta p_0^2$) равны друг другу и равны $\hbar\omega/4$.

На фазовой плоскости это состояние можно изобразить как эллиптическое пятно в начале координат. Если по вертикальной оси откладывать $p/(m\omega)$ (как на рис. 3.9 или B.1) то пятно будет круглым.

Когерентное состояние можно представить, как флуктуационное пятно основного состояния, сдвинутое из начала координат на расстояние A. Нормировку A выберем так,чтобы

$$\langle\mathcal{E}\rangle = \hbar\omega A^2, \quad \Rightarrow \quad A^2 = n, \tag{B.5}$$

где n – среднее число квантов энергии. Тогда в единицах A флуктуационное пятно будет иметь размеры ΔA_x по горизонтальной оси и ΔA_p по вертикальной (см. рис. B.1)

$$\hbar\omega\, \Delta A_x^2 = \frac{m\omega^2 \Delta x_0^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad \Delta A_x = \frac{1}{2}, \tag{B.6}$$

$$\hbar\omega\, \Delta A_p^2 = \frac{\Delta p_0^2}{2m}, \quad \Rightarrow \quad \Delta A_p = \frac{1}{2} \tag{B.7}$$

Здесь были использованы соотношения (B.4). То, что $\Delta A_x = \Delta A_y$ свидетельствует о том, что в такой нормировке флуктуационное пятно круглое — см рис. B.1. В дальнейшем будем просто писать ΔA без индекса.

Теперь можем найти неопределенность фазы и числа квантов осциллятора в когерентном состоянии

$$\Delta\phi \simeq \frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \Delta n = \Delta(A^2) \simeq 2A\, \Delta A = \sqrt{n} \tag{B.8}$$

Эти соотношения широко используются в литературе.

Подчеркнем, соотношения (B.8) справедливы и для цуга электро-магнитной волны в квантовом когерентном состоянии, только теперь под n надо понимать среднее число квантов $n = \mathcal{E}/\hbar\omega$, где $\mathcal{E}$ — средняя энергия цуга, а ω — средняя (несущая) частота.

Литература

[1] H.B. Callen and T.A. Welton, *Phys. Rev.* **83**, 34 (1951).

[2] М.Л. Левин, С.М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, Москва, Наука, 1967.

[3] В. Б. Брагинский, Физические измерения с пробными телами, Москва, Наука, 1970.

[4] В. Б. Брагинский, Ф. Я. Халили, Частотно-антикоррелированные квантовые состояния, Журнал экспериментальной и теоретической физики, **94**, 151-158 (1988).

[5] Д. Н. Клышко, Фотоны и нелинейная оптика. Москва, Наука, 1980.

[6] S. P. Vyatchanin and A. Yu. Lavrenov, Heisenberg microscope and quantum variation measurement, Physics Letters A, **231**, 38-46 (1997).
Более подробный вариант см.: S. P. Vyatchanin, Quantum variation measurement and Heisenberg

microscope, Optics and Spectroscopy, **87**, 532-540 (1999).

[7] И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, Москва, Наука, 1064.

[8] V.B.Braginsky, F.Ya.Khalili, Quantum Measurement, Cambridge University Press, 1992.

[9] Ю. И. Воронцов, Теория и методы макроскопических измерений, Москва, Наука, 1989.

[10] Д. Бом, Квантовая теория, Физматгиз, 1961,

[11] В. Б. Брагинский, Классические и квантовые ограничения при обнаружении слабых воздействий на макроскопический осциллятор, ЖЭТФ, **53**, 1434-1441 (1967).

[12] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, F. Ya. Khalili, A. B. Matsko, K. S. Thorne and S. P. Vyatchanin, The noise in gravitational-wave detectors and other classical-force measurements is not influenced by test-mass quantization, Physical Review D, **67**, 082001-1/18 (2003).

[13] H.J.Kimble, Yu.Levin, A.B.Matsko, K.S.Thorne and S.P.Vyatchanin, Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics, Physical Review D, **65**, 022002 (2002).

[14] В. Б. Брагинский, Ю. И. Воронцов, Ф. Я. Халили, Квантовые особенности пондеромоторного измерителя электромагнитной энергии, ЖЭТФ, **73**, 1340-1343 (1977).

[15] Абрамовиц М., Стиган И. (Abramowitz, Stegun) Справочник по специальным функциям. Москва. Наука, 1979.

Объем 8,7 п.л.
Тираж 110 экз.
Заказ № ____
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва.ГСП-1, ленинские горы, д.1, стр.2

Отпечатано в отделе оперативной печати
Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова