Использование сверхпроводящих квантовых систем для охлаждения механических колебаний

Обзор литературы на основе статьи:

"Ground-state cooling of a nanomechanical resonator via a Cooper-pair box qubit"

Konstanze Jähne[1, 2], Klemens Hammerer[1, 2] and Margareta Wallquist[1, 2]

[1] Institut für Theoretische Physik, Universität Innsbruck, 6020 Innsbruck, Österreich

[2] Institut für Quantenoptik und Quanteninformation — Österreichische Akademie der Wissenschaften, 6020 Innsbruck, Österreich

Ш.Л. Данилишин

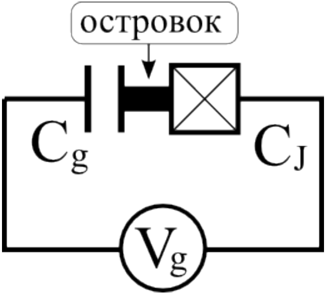
МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра физики колебаний

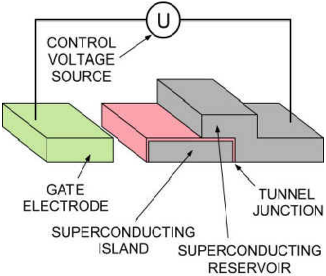
27 февраля 2009 г.

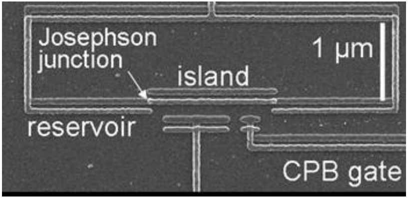
Outline

1. Что такое Cooper-Pair Box?
2. Физика охлаждения
3. Охлаждение механического осциллятора с помощью CPB

Что из себя представляет Cooper-Pair Box (CPB)?



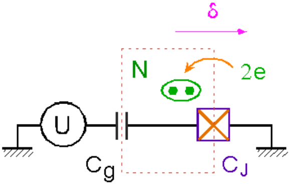




CPB это:

"островок" из сверхпроводника, соединенный с массивным сверхпроводящим резервуаром через один или два джозефсоновских контакта (ДК) и с источником управляющего напряжения V_g через емкость затвора C_g

Что из себя представляет Cooper-Pair Box (CPB)?



1 degree of freedom: $[\delta, N] = i$

1 control knob: U or $N_g = C_g U/2e$

Характеристические энергии CPB:

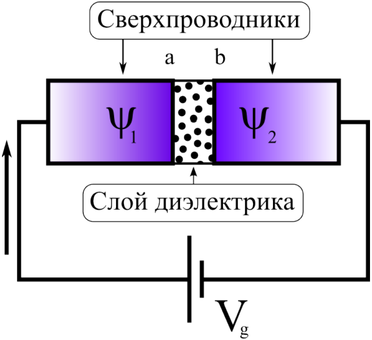
1. $E_C = \dfrac{(2e)^2}{2(C_g + C_j)}$,
2. $E_J = \dfrac{\hbar \Delta_s}{8e^2 R_j}$,

Если параметры ДК (емкость C_j и сопротивление потерь R_j) и емкость затвора C_g подобраны так, что

- Энергия 1 куперовской пары на “островке” $E_C \ll \Delta_s$ энергетической щели сверхпроводника, и
- Температура низка настолько, чтобы $kT \ll E_C$, тогда

куперовские пары туннелируют на островок по одной и состояния $|N\rangle$ и $|N+1\rangle$ с зарядом островка, отличающимся на $2e$, обладают определенными энергиями, переходы между которыми сопровождаются испусканием или поглощением СВЧ-фотонов джозефсоновским контактом (ДК).

Физика эффекта Джозефсона



$$J = J_0 \sin\delta$$
$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V_g$$

Эффект Джозефсона

Эффект Джозефсона — явление протекания сверхпроводящего тока через тонкий слой диэлектрика, разделяющий два сверхпроводника

- постоянного при $V_g = 0$ (DC-эффект)
- и переменного с частотой $\dot{\delta} = 2eV_g/\hbar$ при ненулевом постоянном V_g (AC-эффект)

Волновые функции:

$$\Psi_i \equiv \sqrt{\rho_i} e^{i\theta_i(x)}$$

Разность фаз волновых функций:

$$\delta = \theta_b - \theta_a - \frac{2e}{\hbar}\int_a^b \boldsymbol{A} d\boldsymbol{x}$$

$$J = J_0 \sin\delta$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V_g$$

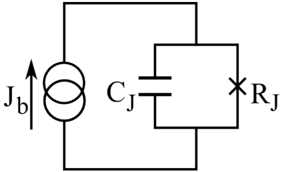
Нелинейная индуктивность ДК

$$V_J = \frac{\hbar}{2eJ_0 \cos\delta} \frac{dJ}{dt} = L_J(\delta) \frac{dJ}{dt}$$

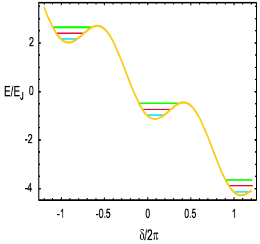
Энергия, запасённая в джозефсоновском контакте (ДК)

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} JV_J \, dt = -\frac{J_0 \hbar}{2e} \cos\delta(t) = -E_J \cos\delta$$

Джозефсоновский контакт имеет эффективные ёмкость C_J и сопротивление потерь R_J



"Tilted washboard":



При наличии внешнего источника тока можно управлять потенциальной энергией ДК:

$$J_b = J_0 \sin\delta + \frac{V_J}{R_J} + C_J\frac{dV_J}{dt}$$

и учитывая соотношение $V_J = \frac{\hbar}{2e}\dot{\delta}$, получим:

$$m\ddot{\delta} + \gamma\dot{\delta} = -\partial U/\partial x$$

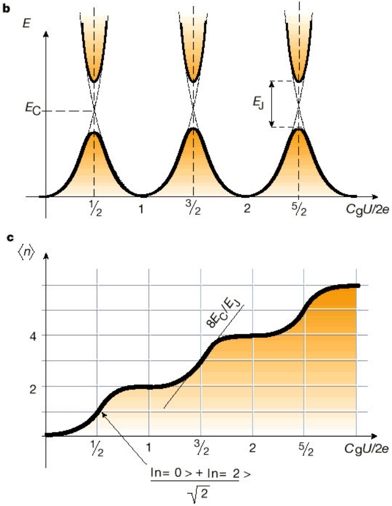
где эффективная потенциальная энергия ДК:

$$U(\delta) = -E_J\cos\delta - \frac{\hbar I_b}{2e}\delta\,,$$

Эффективные "масса" и "затухание":

$$m = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C_J, \quad \gamma = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2\frac{1}{R_J}$$

Гамильтониан для СРВ



M. Devoret, R.Schölkopf, Nature 406, 1039-1046 (2000)

Гамильтониан системы:

$$\hat{H} = E_C(\hat{N} - N_g)^2 - E_J \cos\delta\,,$$

где

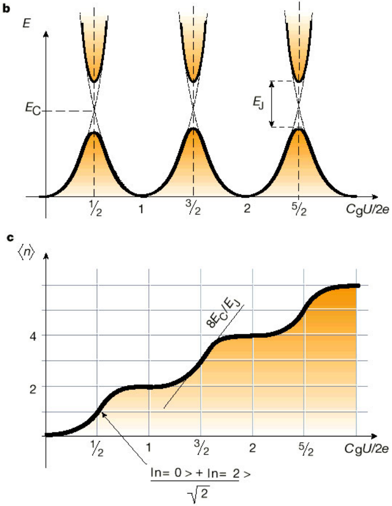
$$(\hat{N} - N_g)^2 = \sum_N (N - N_g)^2 |N\rangle\langle N|\,,$$

$$\cos\delta = 1/2 \sum_N |N\rangle\langle N+1| + |N+1\rangle\langle N|\,.$$

Здесь $N = \frac{1}{2e}[(C_J + C_g)V_J - C_g V_g]$ — число избыточных куперовских пар на островке, является сопряжённой δ наблюдаемой, т.е.

$$[\hat{\delta}, \hat{N}] = i$$

Гамильтониан для СРВ



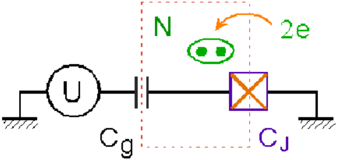
M. Devoret, R.Schölkopf, Nature 406, 1039-1046 (2000)

- Нелинейность спектра энергии СРВ по $N \Rightarrow$ уровни $N = 0, 1$ образуют двухуровневую систему с симметризованными энергиями:

$$E_{0,1} = \mp\frac{1}{2}E_C(1 - 2N_g)$$

и частотой перехода $\omega_{01} = E_C(1 - 2N_g)/\hbar$

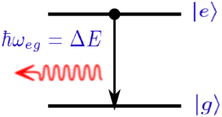
- Туннелирование куперовских пар с энергией $E_J \Rightarrow$ переходы между уровнями $\Rightarrow$ состояния с $N = 0$ и $N = 1$ избыточными куперовскими парами на островке не являются стационарными



СРВ как двухуровневая система

Условия: $E_C \gg k_B T$ и $\Delta_s > E_C/4$, т.е. тепловая энергия должна быть мала по сравнению с кулоновской, а энергетическая щель Δ_s сверхпроводника, наоборот, велика. Тогда можно считать, что СРВ - двухуровневая система с энергией:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}E_C(1-2N_g)\left[|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right] - \frac{1}{2}E_J\left[|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|\right] = -\frac{\Delta E}{2}\left[|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|\right]$$



где $|1\rangle$ и $|0\rangle$ — состояния с $N=0$ и $N=1$ избыточными куперовскими парами на островке, соответственно, а $|g\rangle$ и $|e\rangle$ — основное и возбужденное стационарные состояния СРВ

$$|g\rangle = \cos\frac{\eta}{2}|1\rangle + \sin\frac{\eta}{2}|0\rangle\,,$$
$$|e\rangle = -\sin\frac{\eta}{2}|1\rangle + \cos\frac{\eta}{2}|0\rangle\,,$$

с энергиями, разделенными энергетической щелью

$$\Delta E = \sqrt{E_J^2 + E_C^2(1-2N_g)^2}$$

а $\eta = \arctan(E_J/(E_C(1-2N_g)))$, .

Параметрически связанные осцилляторы

Более эффективный метод охлаждения:

Использовать параметрическую связь между двумя осцилляторами с сильно различающимися частотами для перекачки энергии от низкочастотного осциллятора к высокочастотному, скорость релаксации которого много выше, чем скорость прекачки и скорость релаксации низкочастотного осциллятора.

Доклады Академии наук СССР
1977. Том 234, № 6

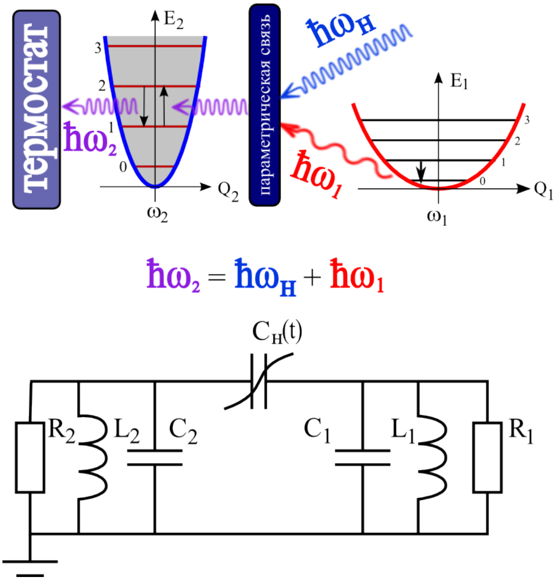
УДК 536.33+535.14 **ФИЗИКА**

С. П. ВЯТЧАНИН

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ОХЛАЖДЕНИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 9 XII 1976)

Рассматривается возможность понижения эффективной температуры квантового осциллятора (или двухуровневой системы), параметрически связанного с осциллятором (или двухуровневой системой) более высокой частоты и большего затухания (на возможность охлаждения двухуровневых систем указывал также Я. Б. Зельдович ([1])). Физический смысл эффекта на квантовом языке прост.

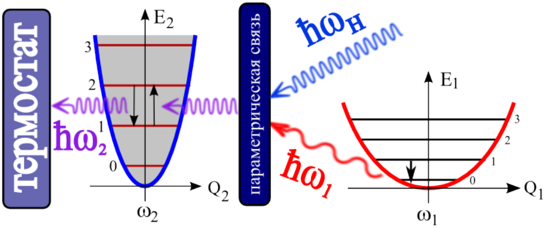


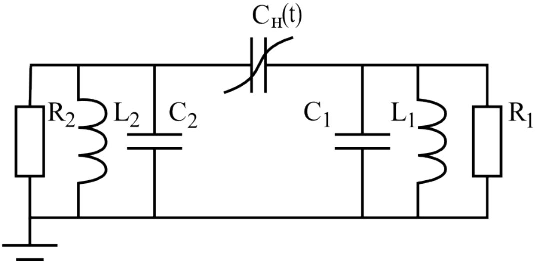
Принцип параметрического охлаждения

1. Два осциллятора с сильно различающимися частотами: $\omega_1 \ll \omega_2$
2. Параметрическая связь $\Longleftrightarrow$ обмен энергией между осцилляторами со скоростью $\propto G$ - константе связи
3. Скорости релаксации осцилляторов и скорость обмена энергией должны удовлетворять соотношению:

$$\gamma_2 \gg G \gg \gamma_1$$

Параметрически связанные осцилляторы

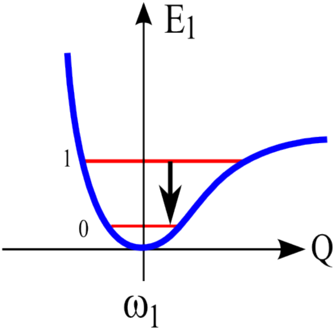


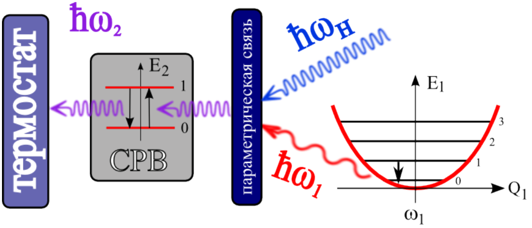


Принцип параметрического охлаждения

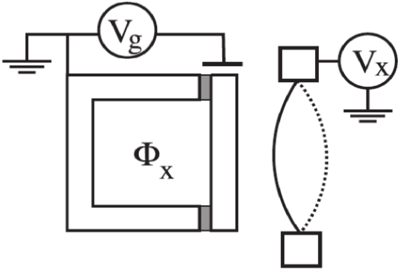
4. Вероятность процесса НЧО $\xrightarrow{\hbar\omega_1}$ ВЧО
$$p_{1\to 2} \propto N_1 \simeq \frac{k_B T}{\hbar\omega_1}$$
5. Вероятность процесса ВЧО $\xrightarrow{\hbar\omega_2}$ НЧО
$$p_{2\to 1} \propto N_2 \simeq \frac{k_B T}{\hbar\omega_2} \ll N_1$$
6. Правильный подбор времен релаксации и обмена энергией позволяет достигнуть $T_{1\mathrm{eff}} \ll T_{\mathrm{bath}}$

Охлаждение с помощью Cooper-Pair Box (CPB)





$$\hbar\omega_2 = \hbar\omega_H + \hbar\omega_1$$



Параметрическая связь между CPB и механическим осциллятором дает тот же эффект, что и 2 связанных осциллятора!

Рассматриваемая система

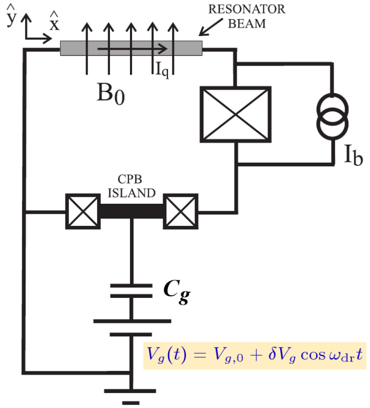
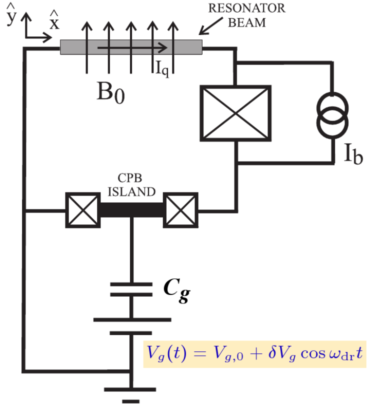


Схема предлагаемого эксперимента

- Симметричный CPB с двумя ДК и включенным в схему проводящим упругим стержнем накачивается переменным сдвиговым напряжением:

$$V_g(t) = V_{g,0} + \delta V_g \cos\omega_{\rm dr} t$$

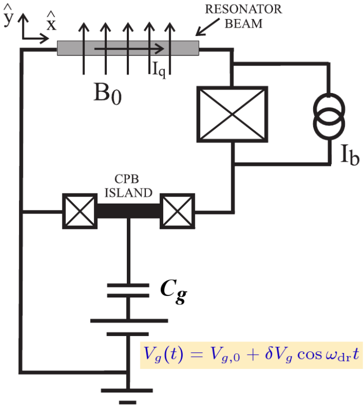
  так, что $N_{g,0} = C_g V_{g,0}/(2e) = 1/2$
- Внешнее магнитное поле B_0, лежащее в плоскости контура действует на стержень с силой Лоренца $\hat{F}_L = B_0 \hat{J}_q L$
- Состояния $|g\rangle$ и $|e\rangle$ соответствуют сверхтокам $\pm J_q$, протекающим по и против часовой стрелки, соответственно.



Гамильтониан системы: $\hat{H} = \hat{H}_q + \hat{H}_m + \hat{H}_{\rm int}$ где

- $\hat{H}_q = \hbar/2(-\Delta\hat{\sigma}_z + \Omega\hat{\sigma}_x)$ - энергия контура, а $\Delta = \omega_{\rm dr} - 2E_J/\hbar$ — расстройка и $\Omega = E_C\delta N_g/\hbar$ — мощность накачки
- $\hat{H}_m = \hbar\omega_m\hat{a}^\dagger\hat{a}$ — энергия мех. колебаний
- $\hat{H}_{\rm int} = \hat{F}_L\hat{z} = \hbar g\hat{\sigma}_z(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ — энергия взаимодействия, а $g = B_0 J_q L/\sqrt{2\hbar m\omega_m}$ — константа связи

Рассматриваемая система



Параметры

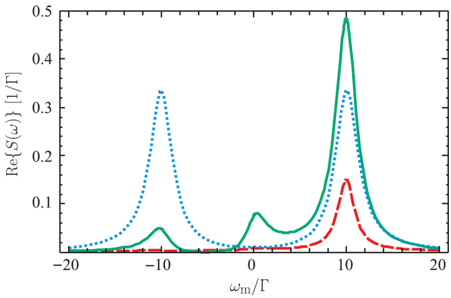
Стержень: размеры $L \times h = 1\ \mu m \times 0.3\ nm$
частота колебаний $\omega_m = 10$ МГц,
добротность $Q_m = 10^5$
материал — алюминий
Контур: температура $T = 15$ мК
($N_m \simeq 200$),
энергия перехода $E_J/\hbar \sim 20$ ГГц,
затухание $\Gamma = 1$ МГц,
сверхток $J_q \simeq 10$ нА,
внешнее поле $B_0 \simeq 10$ мТл
Константа связи $g \simeq 100$ кГц $\ll \Gamma$

Как это работает?

- СРВ выполняет роль дополнительного теплового резервуара для механической системы, при условии, что 1) его собственное затухание $\Gamma \gg g$ — характерной скорости перекачки энергии между СРВ и осциллятором, и 2) собственное затухание осциллятора таково, что $\gamma_m N_m \ll \Gamma$, то есть скорость поглощения осциллятором тепловых квантов резервуара много меньше скорости релаксации СРВ.
- Охлаждение эффективно при условии, что частота механических колебаний совпадает с эффективной расстройкой СРВ:

$$\omega_m = \bar{\Delta} = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} = \sqrt{\left(\omega_{\mathrm{dr}} - \frac{2E_J}{\hbar}\right)^2 + \frac{E_C^2 \delta N_g^2}{\hbar^2}}$$

В итоге, СРВ накачивается с отрицательной расстройкой ($\Delta < 0$), поэтому недостающую энергию, необходимую для перехода в возбужденное состояние, он получает от механического осциллятора за счёт связи через силу Лоренца и релаксирует быстрее, чем успевает вернуть ее осциллятору ($g \ll \Gamma$).



Реальная часть $S(\omega)$ для $\omega_m = 10$ МГц,
$\Gamma = 1$ МГц, $\bar{\Delta} = 10$ МГц,
$\Omega = 4$ МГц (красная),
$\Omega = 8.5$ МГц (зелёная),
$\Omega = 10$ МГц (синяя).

$$S(\omega) = \int_0^\infty d\tau\,, e^{i\omega\tau}\langle\delta\hat{\sigma}_z(\tau)\delta\hat{\sigma}_z\rangle$$

где $\delta\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z - \langle\hat{\sigma}_z\rangle_{\rm ss}$

Скорости испускания и поглощения тепловых квантов:

$$A_- = 2[g^2\Re\{S(\omega_m)\} + \gamma_m(N_m+1)]$$
$$A_+ = 2[g^2\Re\{S(-\omega_m)\} + \gamma_m N_m]$$

Среднее число тепловых квантов меняется согласно уравнению:

$$\frac{d}{dt}\langle N\rangle = -(A_- - A_+)\langle N\rangle + A_+$$

Скорость охлаждения:

$$W = (A_- - A_+) = 2\gamma_m[1+\beta f(\varphi)]\,,$$

и равновесное число квантов:

$$\langle N\rangle_f = \frac{A_+}{W}\,,\quad \beta = \frac{g^2}{\gamma_m\Gamma}\,,\quad \tan\varphi = \Omega$$

Результаты

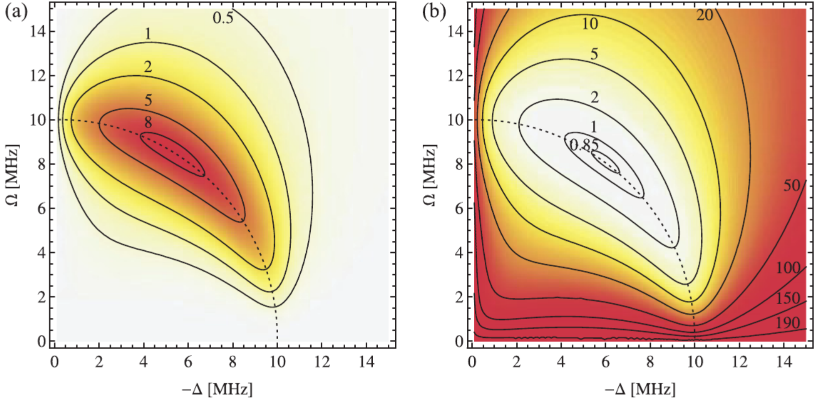


Figure 4. Contour plot of (a) the cooling rate (in units of kHz) and (b) the final occupation number as a function of the detuning Δ and the drive strength Ω for the following choice of parameters: $N_{\mathrm{m}} = 195$, $\gamma_{\mathrm{m}} = 17\,\mathrm{Hz}$, $\Gamma = 1\,\mathrm{MHz}$, $\omega_{\mathrm{m}} = 10\,\mathrm{MHz}$ and $g = 0.1\,\mathrm{MHz}$. The dotted line shows the special value $\Omega^2 + \Delta^2 = \omega_{\mathrm{m}}^2$, where cooling is optimal.

Результаты

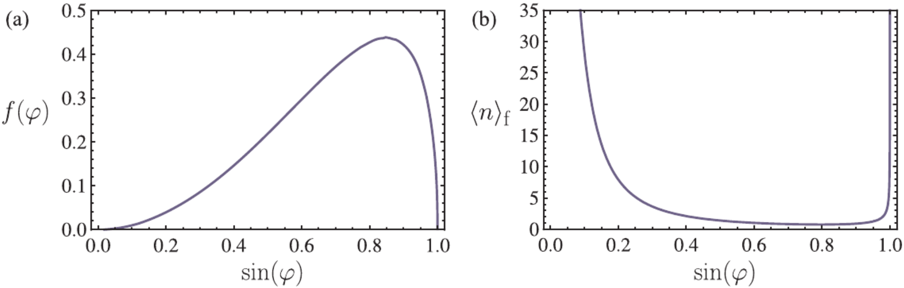


Figure 5. (a) The dimensionless function $f(\varphi)$ plotted as function of $\sin\varphi = \Omega/\omega_m$ with $\Omega^2 + \Delta^2 = \omega_m^2$. The maximum is obtained for $\sin\varphi = 0.85\omega_m$. (b) The final occupation number as a function of the drive strength $\sin\varphi = \Omega/\omega_m$ for a specific set of parameters: $\omega_m = 10$ MHz: $g = 0.1$ MHz, $\gamma_m = 17$ Hz, $\Gamma = 1$ MHz and $N_m = 195$. The minimum is in this specific case achieved for $\sin\varphi = 0.80$, with the minimum occupation number 0.8.

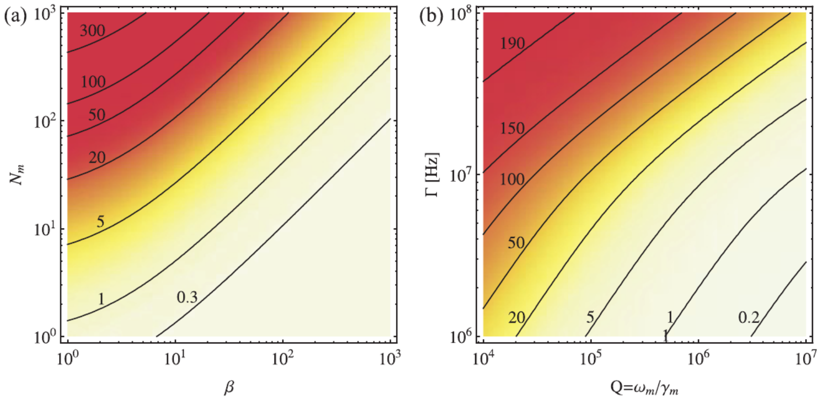


Figure 6. Contour plot of the final occupation number (a) as a function of the universal parameter $\beta = g^2/(\gamma_m\Gamma)$ and the initial occupation number of the nanorod N_m and (b) as a function of the quality factor Q of the nanorod and the decay rate Γ of the qubit for the following choice of parameters: $N_m = 195$, $g = 0.1$ MHz. In both plots each point has been optimized for the detuning Δ and the drive strength Ω.

Выводы

1. СРВ может служить для охлаждения механического осциллятора до основного состояния при условии, что накачка и механическая частота согласованы так, чтобы обеспечивать резонансное возбуждение СРВ.
2. Существует оптимальное соотношение расстройки Δ и мощности накачки Ω СРВ, дающее максимальную скорость охлаждения при прочих равных условиях
3. Скорость охлаждения тем больше, чем больше отношение $\beta = \frac{g^2}{\gamma_m \Gamma}$ при $\Gamma \ll \bar{\Delta} = \omega_m$
4. Равновесное число тепловых квантов в осцилляторе после охлаждения $\langle N \rangle_f$ тем меньше, чем меньше начальная температура и чем больше β
5. Охлаждение до основного состояния спомощью СРВ возможно только при сильно нерезонансной накачке с отрицательной расстройкой (aka “resolved sideband limit“)!