



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

---

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

кафедра физики колебаний

**УВЕЛИЧЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ  
ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОГО ДЕТЕКТОРА  
ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ФИЛЬТРУЮЩИХ РЕЗОНАТОРОВ.**

Дипломная работа студента 6-го курса  
Симакова Дмитрия Андреевича.

Допущен к защите " " декабря 2008 года

Научный руководитель

Зав. кафедрой физики колебаний  
профессор

доктор физ.-мат. наук  
профессор

А.С. Логгинов

Ф.Я. Халили

---

Москва 2008 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>1</b>
1.1	История поиска гравитационных волн. Initial LIGO. Advanced LIGO. . .	1
1.2	Квантовые шумы интерферометра Advanced LIGO. . . . .	6
1.3	Вариационное измерение. . . . .	7
<b>2</b>	<b>Постановка задачи.</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Оптимизация чувствительности детектора Advanced LIGO.</b>	<b>12</b>
3.1	Аналитическая оптимизация. . . . .	12
3.1.1	Оптимизация угла сжатия на входе. . . . .	12
3.1.2	Оптимизация вариационного измерения. . . . .	14
3.1.3	Асимптотика для фильтрующего резонатора при $\Omega \rightarrow 0$ . . . . .	17
3.2	Численная оптимизация. . . . .	19
<b>4</b>	<b>Результаты.</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Выводы.</b>	<b>22</b>
	<b>Приложения</b>	<b>23</b>
<b>A</b>	<b>Квантовые шумы детектора Advanced LIGO с гомодинным детекто- ром.</b>	<b>23</b>
<b>B</b>	<b>Схема с фильтрующим резонатором с потерями.</b>	<b>26</b>
<b>C</b>	<b>Схема с фильтрующим резонатором без потерь.</b>	<b>27</b>
<b>D</b>	<b>Код программы.</b>	<b>28</b>
	<b>Литература</b>	<b>42</b>

## Список иллюстраций

1	Схема гравитационно-волнового детектора Initial LIGO. . . . .	2
2	Схема гравитационно-волнового детектора Advanced LIGO. . . . .	5
3	Состояние света на фазовой плоскости. . . . .	8
4	Частотно-зависимый поворот эллипса при вариационном измерении. . .	8
5	Схема вариационного измерения. . . . .	9
6	Схема гравитационно-волнового детектора Advanced LIGO с одним филь- трирующим резонатором. . . . .	10
7	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с идеальной вариацией. Случай без потерь в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами. Светло-зеленой линией и розовой линиями обозначены кван- товый и полный шумы эталонной конфигурации, красной и голубой, соответственно, квантовый и полный шумы рассматриваемой конфи- гурации. Темно-зеленой линией обозначены технические шумы. $gain_{noise}$ - это величина $G_{S/N}$ . . . . .	44
8	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с идеальной вариацией. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами. . . . .	44
9	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные парамет- ры для схемы с фильтрующим резонатором без потерь. Случай с по- терями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами. . . . .	45
10	Зависимость выигрыша в отношении сигнал/шум схемы Advanced LIGO с фильтрующим резонатором от длины фильтрующего резонатора. Случай с потерями в основном резонаторе. Конфигурация с текущими шумами. . . . .	45
11	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные парамет- ры для схемы с фильтрующим резонатором с потерями. Длина резонатора 30 метров. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами. . . . .	46
12	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором с потерями. Длина резонато- ра 150 метров. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами. . . . .	46

13	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с идеальной вариацией. Случай без потерь в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами. . . . .	47
14	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с идеальной вариацией. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами. . . . .	47
15	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором без потерь. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами. . . . .	48
16	Зависимость выигрыша в отношении сигнал/шум схемы Advanced LIGO с фильтрующим резонатором от длины фильтрующего резонатора. Случай с потерями в основном резонаторе. Конфигурация с уменьшенными шумами. . . . .	48
17	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором с потерями. Длина резонатора 30 метров. Случай с потерями в фотодетекторе и основном резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами. . . . .	49
18	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором с потерями. Длина резонатора 150 метров. Случай с потерями в фотодетекторе и основном резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами. . . . .	49
19	Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором без потерь. Случай без потерь в фотодетекторе и основном резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами. . . . .	50

# 1 Введение

## 1.1 История поиска гравитационных волн. Initial LIGO. Advanced LIGO.

Гравитационные волны — это квадрупольное искривление пространства, распространяющееся со скоростью света. Источником гравитационных волн могут быть взрывы сверхновых, системы двойных звезд, пульсары и другие астрономические явления, в которых наблюдается квадрупольное распределение массы. Гравитационные волны несут в себе информацию о применимости общей теории относительности Эйнштейна, а также о поведении и свойствах материи в сильных гравитационных полях.

Первые эксперименты по обнаружению гравитационных волн были проведены в 1967 году Джозефом Вебером из Мэрилендского университета [33]. В его эксперименте антенна представляла собой подвешенный на стальных проволоках алюминиевый цилиндр длиной 2 м и диаметром 1 м. Резонансная частота антенны составляла 1660 Гц, а чувствительность пьезодатчиков — порядка  $10^{-16}$  м. При попадании гравитационной волны на этот детектор в нем могли возбуждаться резонансные колебания с амплитудой, достаточной для их обнаружения. Чтобы исключить влияние локальных шумов на сигнал, два таких детектора были установлены на расстоянии 2 км. Вебер сообщил в своей статье об обнаружении ряда одновременных сигналов с крайне малой вероятностью того, что они статистически случайны. По его словам, в некоторых случаях источником возбуждения могли быть гравитационные волны.

Впоследствии опыты Вебера неоднократно воспроизводились, но были получены отрицательные результаты: никаких сигналов обнаружено не было. При анализе всех полученных результатов был сделан вывод, что события, которые Вебер принял за гравитационные волны, были артефактами, возникшими из-за неправильной обработки данных [34]. Более того, сила и частота Веберовских сигналов требовала, чтобы окрестность Солнца изобиловала событиями уровня взрыва сверхновой. Тем не менее, благодаря Веберу внимание ученых было привлечено к проблеме обнаружения гравитационных волн.

Функционирующие в настоящее время гравитационно-волновые детекторы можно разделить на интерферометричные и твердотельные (с резонансной массой). К твердотельным относятся: MiniGRAIL, Explorer, Nautilus, AURIGA. [29, 30, 31]. Детектор, используемый Вебером, также был твердотельным. Интерферометричные детекторы — LIGO, GEO-600, TAMA-300, VIRGO, AIGO [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. В будущем планируется вывести в космос интерферометричный детектор LISA [32].

В рамках проекта LIGO [1, 35] были сооружены три синхронизированно функ-

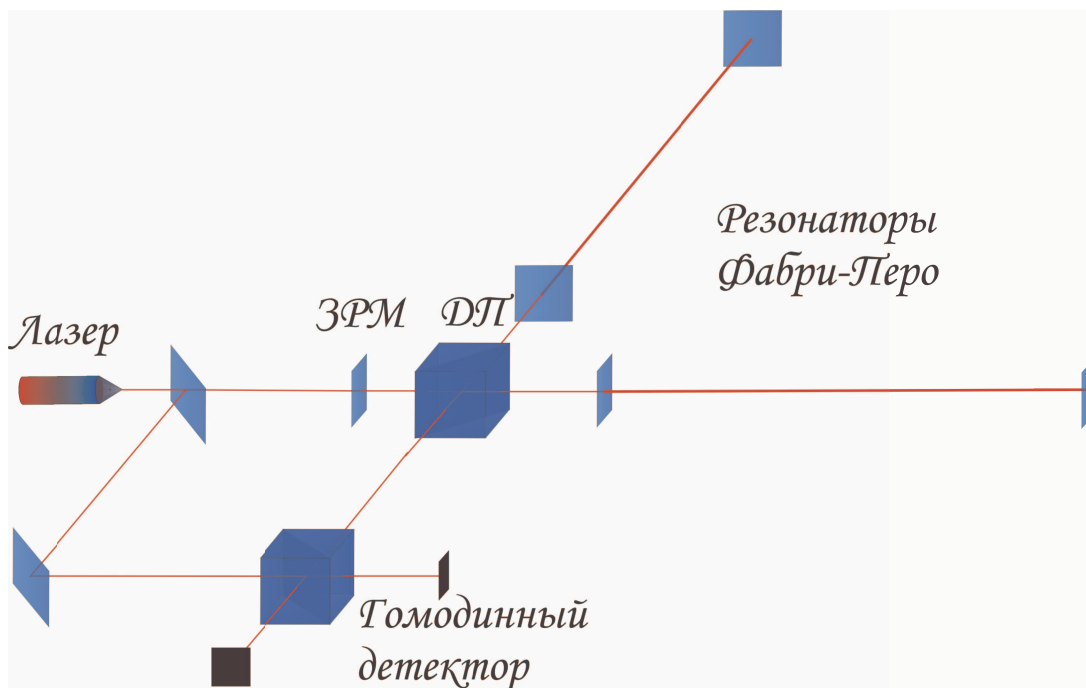


Рис. 1: Схема гравитационно-волнового детектора Initial LIGO.

ционирующих детектора: два — в Ханфорде (штат Вашингтон), а третий — в Ливингстоне (штат Луизиана). В Ханфорде один из детекторов имеет длину плеч 2 км, второй — 4 км. Длина плеч детектора в Луизиане составляют 4 км.

Основная цель данного проекта — обнаружение и изучение гравитационных волн, а также использование полученной информации в исследованиях по физике и астрономии. Основными источниками гравитационных волн, которые ученые рассчитывают обнаружить в ходе наблюдений, являются слияние компактных двойных систем (черных дыр и/или нейтронных звезд), взрывы сверхновых и пульсары. В цели проекта также входит измерение следующих параметров черных дыр и нейтронных звезд: масса, частота рождения, распространенность во Вселенной. Кроме того, предполагается исследование взрывов сверхновых и очень ранней Вселенной.

На данный момент завершена первая стадия проекта — функционирование детектора первого поколения Initial LIGO. Схема интерферометра Initial LIGO представлена на рис. 1. За основу проекта LIGO было взято использование интерферометра Майкельсона, который позволяет с очень большой точностью измерять разницу длин плеч. Проект Initial LIGO был рассчитан на чувствительность к растяжениям и сжатиям пространства порядка  $10^{-21}$ . Это означает, что изменение длины резонатора, которое необходимо было зафиксировать, составляет порядка  $10^{-18}$  м, что в тысячу раз меньше диаметра протона. Для достижения такой точности в классическую

конструкцию интерферометра Майкельсона было внесено несколько усовершенствований.

- Во-первых, в каждое плечо интерферометра были помещены резонаторы Фабри-Перо: два зеркала, также являющиеся пробными массами для гравитационных волн. Масса каждого зеркала — 10 кг. На входе резонатора было установлено частично пропускающее зеркало (входная пробная масса), а в торце — зеркало с высоким коэффициентом отражения (торцовая пробная масса). Резонаторы позволяют увеличить смещение фазы света для заданной амплитуды волны. Их использование в Initial LIGO позволяет — при частоте волны, равной 100 Гц — увеличить смещение фазы на величину порядка 100 по сравнению с классическим интерферометром Майкельсона.

- Во-вторых, для реализации техники рециркуляции мощности между источником лазера и делителем пучка добавлено еще одно частично-пропускающее зеркало — так называемое зеркало рециркуляции мощности (ЗРМ). Техника рециркуляции мощности использует гасящую интерференцию, на которую настроен выход интерферометра. При такой настройке почти вся мощность излучения, падающая на делитель пучка, возвращается обратно к источнику лазера. Подбирая коэффициент пропускания для ЗРМ в соответствии с потерями в интерферометре и настраивая резонатор рециркуляции в резонанс, можно существенно увеличить мощность излучения в интерферометре.

В LIGO используется лазер Nd:YAG со светодиодной накачкой и системой усиления мощности. Он излучает монохроматический сигнал с длиной волны, равной 1064 нм. Амплитуда и частота лазера активно стабилизируются и пассивно фильтруются, проходя через кольцевой резонатор. После этого луч проходит через очиститель моды, который обеспечивает стабильный, ограниченный по дифракции луч и дополнительную фильтрацию шума лазера, а также исполняет роль посредника при стабилизации частоты.

Оптика интерферометра, включая пробные массы, изготовлена из плавленого кварца со специальными малошумящими многослойными диэлектрическими покрытиями. Поверхности зеркал отполированы настолько, что размеры всех неровностей, в основном, не превышают 2 ангстрем. Уровень поглощения в покрытии — несколько фотонов на миллион (parts per million, ppm). Рассеяние при отражении от поверхности зеркала оценивается в 60–70 ppm.

Главные оптические компоненты и лучи, включая длинные плечи, находятся под очень глубоким вакуумом ( $10^{-8}$ – $10^{-9}$  торр) для акустической изоляции и уменьшения флуктуации фазы от рассеивания света на молекулах газа.

Каждый оптический элемент в Initial LIGO подвешен на системе стальных прово-

лок. Позиция и ориентация оптики контролируется электромагнитными приводами. Маятниковый подвес позволяет пробной массе свободно двигаться в полосе частот гравитационных волн и обеспечивает изоляцию вида  $f^{-2}$  от вибраций выше его собственных частот.

Основная часть изоляции от вибраций в диапазоне частот гравитационных волн осуществляется с помощью четырехуровневой изоляционной системы. Эта система обеспечивает изоляцию вида примерно  $f^{-8}$  выше 10 Гц. Кроме того, детектор в Луизиане, находящийся в зоне большей сейсмической активности, чем детекторы в Ханфорде, имеет активную предизоляцию между землей и системой подвеса. Эти изоляторы активно снижают уровень вибраций в полосе частот 0.1 - 10 Гц, причем в середине этой полосы интенсивность колебаний уменьшается почти в 10 раз.

Чувствительность прибора определяется шумами. Один из основных шумов в Initial LIGO — сейсмический, который представляет собой движение поверхности земли, вызванное ветром, океанскими волнами, человеческой активностью и слабыми землетрясениями. Частота сейсмической стены, ниже которой доминирует сейсмический шум, составляет приблизительно 45 Герц.

Механический тепловой шум — это более фундаментальный эффект, возникающий из-за конечности потерь и представленный во всех механических системах. Он вызывает шум длины резонатора через термальное возбуждение колебаний в маятнике с пробной массой (тепловой шум подвеса) и тепловые акустические волны, которые возмущают поверхность зеркал на пробных массах (тепловой шум зеркала). Большая часть тепловой энергии сконцентрирована на резонансных частотах, расположенных на максимальном расстоянии от детектируемой области. Вдали от резонансов уровень теплового движения пропорционален механической диссипации, связанной с этим движением. Достижение очень малых потерь в зеркале и его подвесе уменьшает шумы в полосе обнаружения гравитационных волн.

Кроме упомянутых сейсмического и механического шумов (далее — технические шумы), есть еще шумы, связанные с квантовой природой лазерного излучения (далее — квантовые шумы). Они будут рассмотрены в пункте 1.2.

Несмотря на достигнутую в рамках проекта Initial LIGO чувствительность детектора, гравитационно-волновому сообществу задолго до сооружения детекторов первого поколения было понятно, что они вряд ли смогут обнаружить гравитационную волну. Поэтому параллельно разрабатывались детекторы второго поколения. Advanced LIGO [16, 17, 18], по-видимому, будет первым детектором второго поколения. Схема детектора Advanced LIGO представлена на рис. 2. Его сооружение началось в 2008 году.

Планируется, что в Advanced LIGO чувствительность детектора повысится боль-



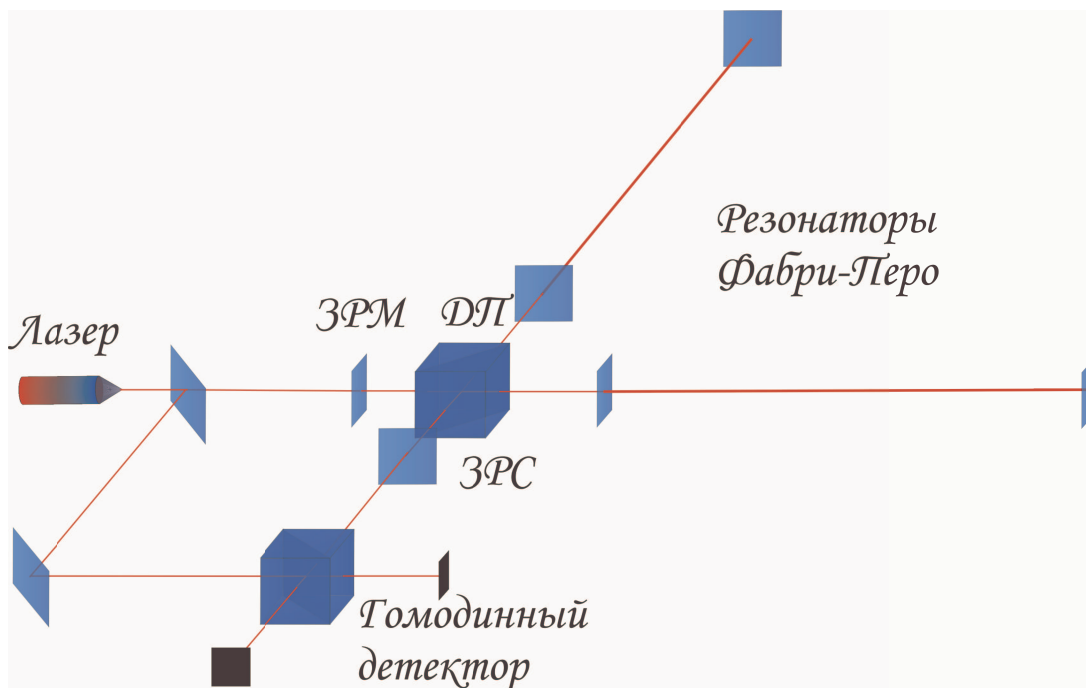


Рис. 2: Схема гравитационно-волнового детектора Advanced LIGO.

ше, чем на порядок, по сравнению с Initial LIGO. Такое существенное изменение чувствительности возможно благодаря следующим улучшениям.

- В Advanced LIGO будет введена новая система антисейсмической изоляции. Она будет иметь 3 уровня активной изоляции и 4 — пассивной, что позволит уменьшить частоту сейсмической стены с 45 Гц до 10 Гц.

- Планируется вместо стальных проволок, применявшихся в Initial LIGO, использовать в качестве подвеса оптических элементов кварцевые нити. Это уменьшит тепловые шумы подвеса.

- На выходе интерферометра планируется поместить дополнительное зеркало рециркуляции сигнала (ЗРС). Включение техники рециркуляции сигнала в существующее устройство детектора относительно просто, так как требует добавления только одного зеркала на выходной порт интерферометра. Это зеркало отражает выходящие из интерферометра боковые частоты сигнального поля обратно в плечевые резонаторы, или «рециркулирует» их. Таким образом, увеличится эффективное время пребывания фотона в резонаторе и смещение его по фазе. Установка ЗРС обогащает динамику интерферометра, обеспечивая дополнительную степень свободы в регулировке квантового шума и подстройке кривой чувствительности детектора, что даёт возможность получить оптимизированную форму этой кривой для реализации поставленных задач.

## 1.2 Квантовые шумы интерферометра Advanced LIGO.

В интерферометрах LIGO лазерное излучение подается на резонаторы после прохождения серии фильтров, и его можно считать монохроматическим и когерентным. Но даже в этом случае излучение, вследствие своей квантовой природы, имеет флуктуации фазы и мощности. Флуктуации фазы вызывают дробовой шум. Этот шум возникает вследствие того, что из-за квантовой неопределенности в каждый момент времени фаза фотона, падающего на детектор - случайная величина. Флуктуация числа фотонов, падающих на пробную массу, вызывает флуктуацию силы, с которой излучение действует на нее. Это явление называется шумовой силой.

Дробовой шум обратно пропорционален интенсивности излучения, поэтому для его уменьшения целесообразно увеличивать интенсивность. А шумовая сила прямо пропорциональна интенсивности излучения, и для ее уменьшения нужно мощность, напротив, уменьшать. В этом противостоянии существует баланс — некоторая мощность, которая позволяет поддерживать оптимальный уровень шумов. Поэтому проект Advanced LIGO предусматривает увеличение оптической мощности, циркулирующей в плечах интерферометра внутри резонаторов Фабри-Перо, до значения 840 МВт, соответствующего оптимальным шумам на частоте сигнала, равной 100 Гц.

Такое увеличение мощности усиливает оптомеханическое взаимодействие между накачкой и зеркальным покрытием, нанесённым на пробные массы. Это оказывает существенное влияние на динамику этих пробных масс, «превращая» их из свободных тел в осцилляторы. Такое утверждение справедливо в полосе частот  $\sim 10 \div 10^4$  Гц, которая в нашем случае совпадает с полосой обнаружения гравитационного сигнала. Данный эффект известен как пондермоторная жёсткость [9, 14, 19, 20, 21], которая появляется в случае отстройки от резонансного положения зеркал интерферометра. Оптическое поле создаёт эффективную возвращающую силу, которая является функцией смещения зеркал. Таким образом, можно сказать, что накачка создаёт частотнозависимую механическую жёсткость [13, 20, 14, 15, 22, 23].

Существует такое явление, как стандартный квантовый предел (СКП) измерения величины для прибора со свободными массами [10]. Он обусловлен обратным действием прибора на систему в случае, если прибор реагирует на мгновенное значение координаты. В Initial LIGO зеркала на частотах сигнала вели себя как свободные массы, поэтому СКП был фундаментальным пределом его чувствительности. Например, при измерении координаты, как в нашем случае, СКП можно преодолеть с помощью подходящей корреляции между сопряженными наблюдаемыми прибора. Такую корреляцию вносит вышеупомянутая оптическая жесткость. Благодаря ей в узкочастотном диапазоне можно достичь чувствительности ниже стандартного квантового предела.

### 1.3 Вариационное измерение.

Как известно, состояние излучения, имеющее какую-то отстройку от несущей частоты, может быть представлено как состояние квантового осциллятора. На фазовой плоскости это состояние может быть проиллюстрировано с помощью эллипса и круга, как частного случая эллипса. Каждая ось на фазовой плоскости соответствует квадратурной компоненте, а проекция эллипса на эту ось — квантовой неопределенности этой квадратуры (рис. 3). При прохождении излучения через резонатор Фабри-Перо под давлением этого излучения свободные массы, на которых крепятся зеркала, отклоняются. Чем больше интенсивность, тем дальше отклоняются свободные массы и тем больше смещается фаза. Это явление, называемое обратным флуктуационным влиянием в основных резонаторах, приводит к появлению сжатого излучения, которое на фазовой плоскости может быть представлено в виде эллипса. При подаче на вход сжатого состояния эллипс под действием обратного флуктуационного влияния испытывает дополнительное сжатие и поворачивается. Каждая квадратурная компонента в этой интерпретации представляет собой ось, наклоненную к фазовым осям под определенным углом. Измеряемая квадратурная компонента в LIGO определяется гомодинным углом фотодетектора. Проекция эллипса на эту ось характеризует квантовую неопределенность при измерении этой наблюдаемой. Каждую из частот остройки электромагнитного излучения от резонанса можно охарактеризовать таким эллипсом, имеющим свой угол наклона к осям фазовой плоскости (угол сжатия). Гомодинный угол фотодетектора, аналог угла наклона к осям фазовой плоскости, определяет одну измеряемую наблюдаемую для всех частот. И так же, как для сжатого состояния квантового осциллятора от выбора наблюдаемой зависит квантовая неопределенность, так и для сжатого состояния электромагнитного излучения от гомодинного угла зависят шумовые характеристики.

Чтобы измерить оптимальную квадратурную компоненту на всех частотах, перед гомодинным детектированием надо повернуть эллипсы на всех частотах вдоль одной линии (рис. 4). Это эквивалентно тому, что для каждой частоты сигнала подбирается такой "гомодинный" угол, что шум меньше, чем в условиях, когда вариационное измерение не применяется (см. формулу (58)). Иллюстрация вариационного измерения приведена на рис. 5.

В предыдущих работах оптимизацию, проводимую с помощью вариационного измерения, предлагалось реализовать с помощью двух резонаторов. В частности, в работе [25] предлагалось использовать два резонатора длиной 4 км. Два резонатора были необходимы для проведения вариационного измерения на всей полосе частот детектора, а значительная длина — для уменьшения влияния оптических потерь.

Сигнал от системы сливающихся нейтронных звезд — один из самых ожидаемых

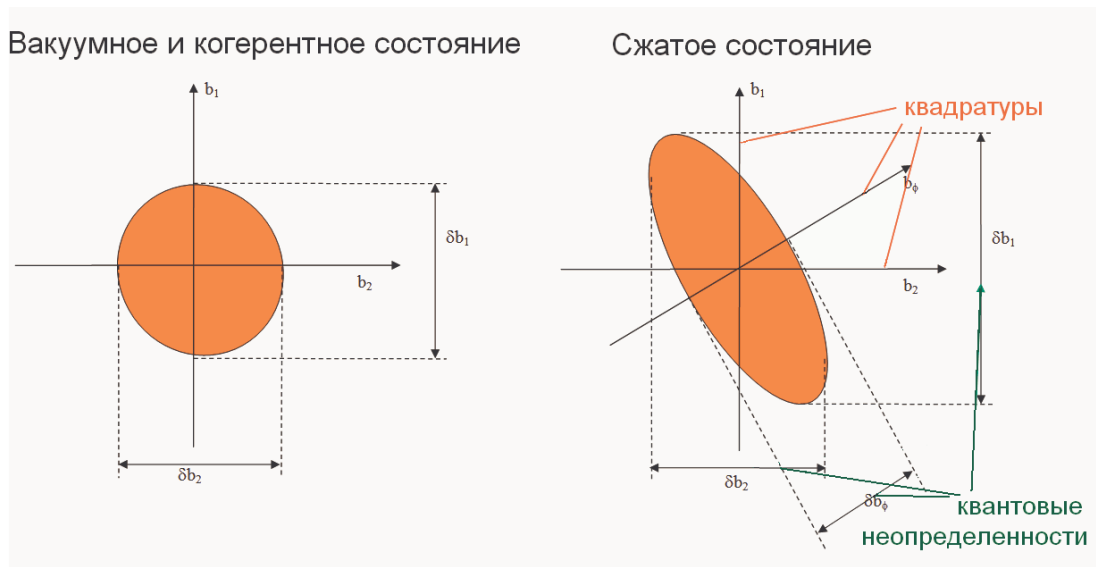


Рис. 3: Состояние света на фазовой плоскости.

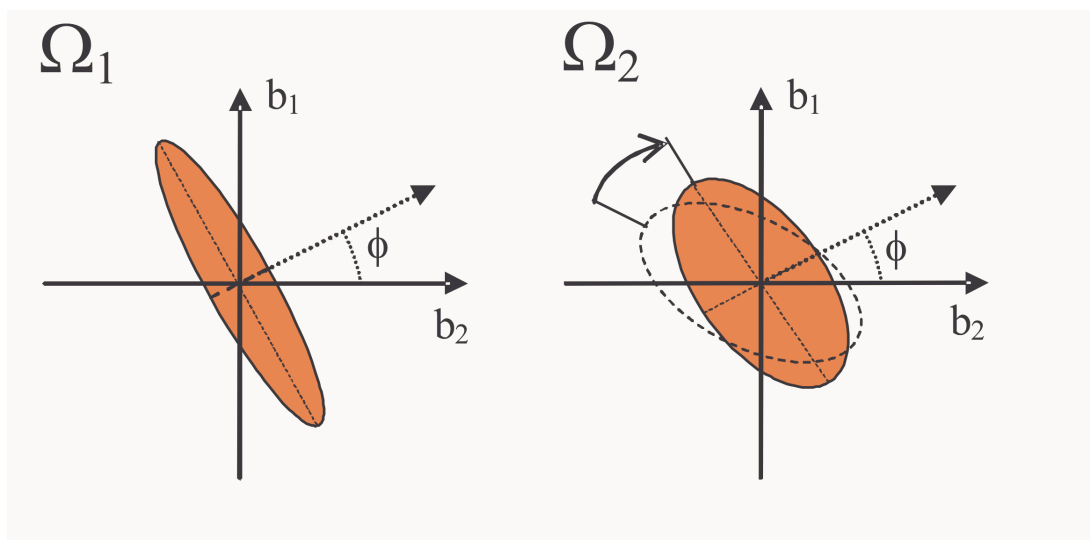


Рис. 4: Частотно-зависимый поворот эллипса при вариационном измерении.

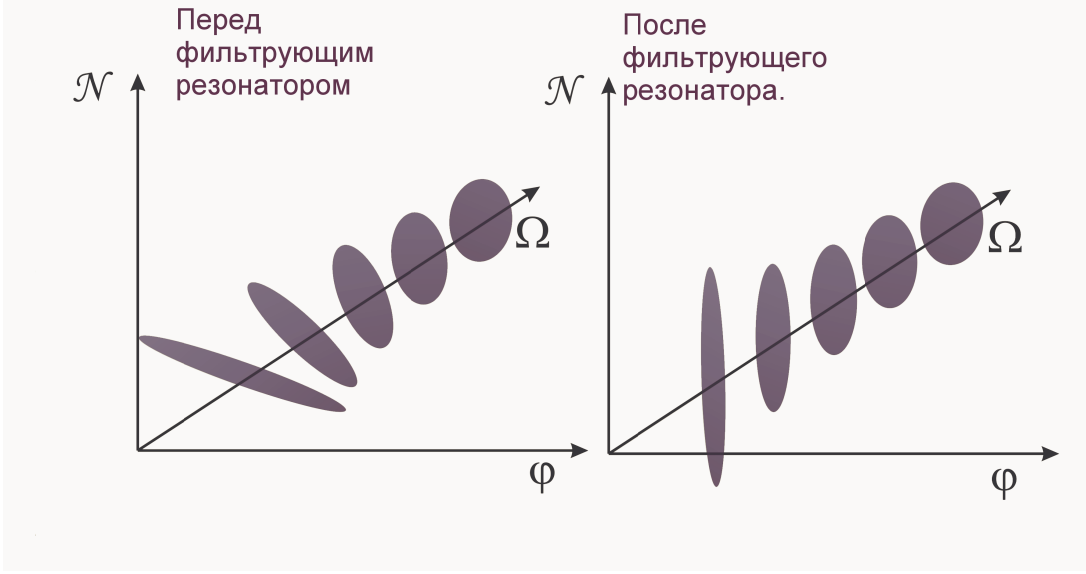


Рис. 5: Схема вариационного измерения.

сигналов. Спектральная плотность этого сигнала имеет вид  $S_{sign}(\Omega) \propto \frac{1}{f^{7/3}}$ . Это сигнал низкочастотный. Для их обнаружения предлагается использовать вариационное измерение только на низких частотах. Для этого будем использовать конфигурацию Advanced LIGO с коротким фильтрующим резонатором. Такая схема была рассмотрена в работах [26] и [27] в случае без жесткости в основных резонаторах ( $\delta = 0$ ). Схема Advanced LIGO с фильтрующим резонатором представлена на рис. 6.

## 2 Постановка задачи.

В данной работе проводится изучение конфигурации Advanced LIGO со сжатым светом на входе и вариационным измерением. Рассматриваются случаи идеального вариационного измерения, фильтрующего резонатора без оптических потерь и короткого фильтрующего резонатора с оптическими потерями. Изучается влияние потерь в фильтрующем резонаторе на получаемый в результате оптимизации выигрыш. Результаты сравниваются с тем, что можно получить в случае идеального вариационного измерения.

Критерии оптимизации обсуждаются в 3.

В разделе 3.1 объединены аналитические расчеты, связанные с оптимизацией Advanced LIGO.

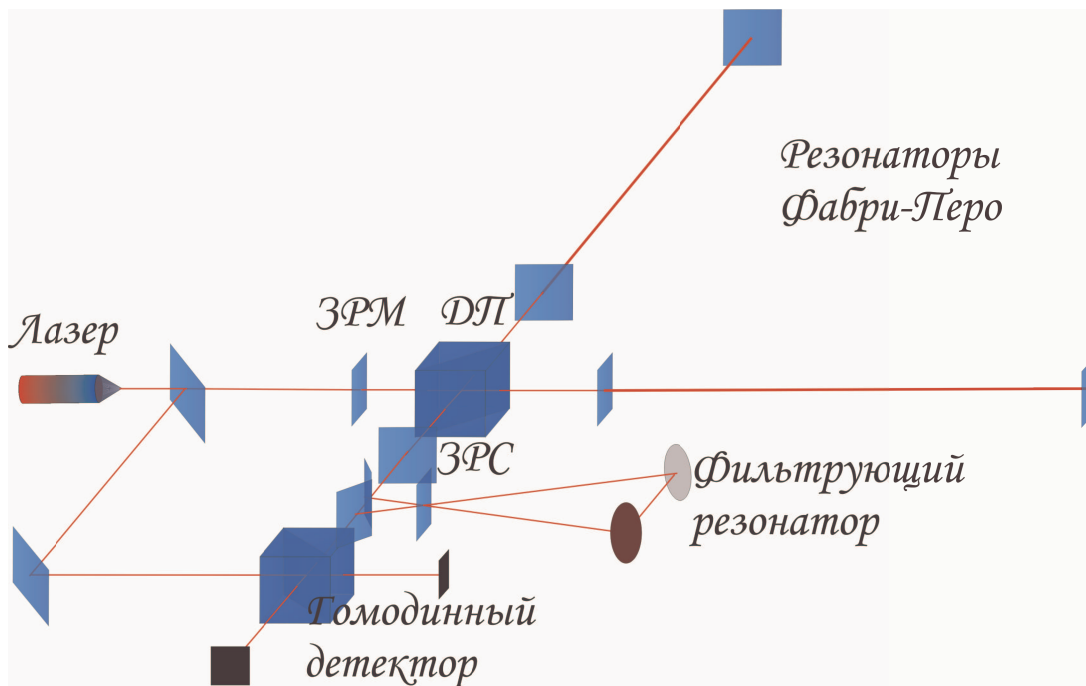


Рис. 6: Схема гравитационно-волнового детектора Advanced LIGO с одним фильтрующим резонатором.

В разделе 3.1.1 рассмотрена задача аналитического поиска оптимального угла сжатия на входе темного порта детектора.

В разделе 3.1.2 решена аналитическая задача оптимального вариационного измерения.

В разделе 3.1.3 рассмотрен случай короткого резонатора на выходе Advanced LIGO и аналитически показано, что при  $\Omega \rightarrow 0$  этот случай асимптотически стремится к случаю с идеальной вариацией, рассмотренному в 3.1.2.

Все аналитические расчеты проводятся для квантового шума без учета технических шумов.

В разделе 3.2 объединены численные способы оптимизации оптических параметров. Первая численная задача этой работы заключается в оптимизации  $\gamma$  и  $\delta$  конфигурации Advanced LIGO с оптимальным вариационным измерением. В работе также рассматривается конфигурация Advanced LIGO с коротким фильтрующим резонатором. Вторая численная задача - оптимизировать эту конфигурацию по параметрам  $\gamma$ ,  $\delta$  основного резонатора,  $\phi$  угла гомодинного детектора и  $\gamma_f$  и  $\delta_f$  фильтрующего резонатора, и, исходя из потерь, оценить разумную длину для этого резонатора. Численные расчеты проводятся с учетом технических шумов.

В разделе 4 приведены оптимальные оптические параметры и шумовые харак-

Величина	Значение для оценки	Описание
$c$	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$	Скорость света.
$M$	40 kg	Масса зеркал
$\omega_p$	$1.8 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$	Частота оптической накачки.
$L$	4000 m	Длина измеряющего резонатора.
$T^2$	$5 \cdot 10^{-5} \div 1.6 \cdot 10^{-1}$	Пропускание входного зеркала осн.резонатора.
$W$	840 kW	Оптическая мощность, циркулирующая в осн.резонаторе
$L_f$	30 $\div$ 750	Длина фильтрующего резонатора
$T_f^2$	$0 \div 10^{-2}$	Пропускание входного зеркала фильтр.резонатора.
$A_f^2$	$10^{-5}$	Потери в фильтр.резонаторе за один проход света

Таблица 1: Обозначения, используемые в этом разделе

$\gamma_I = \frac{cT^2}{4l}$	$\gamma_{fI} = \frac{cT_f^2}{4l_f}$
$\gamma = \gamma_I$	$\gamma_{fE} = \frac{cA_f^2}{4l_f}$
$\delta$ — расстройка осн.резонатора	$\gamma_f = \gamma_{fI} + \gamma_{fE}$
$J = \frac{4 = \omega_p W}{mcL}$	$\delta_f$ — расстройка фильтр.резонатора
	$\kappa(\omega) = \frac{\omega}{c}$

Таблица 2: Дополнительные обозначения

теристики разных конфигураций Advanced LIGO: со сжатым излучением на входе, с идеальным вариационным устройством, с коротким фильтрующим резонатором с потерями и без потерь. Кроме того, показана зависимость чувствительности детектора от этих потерь.

В приложении А в общем виде выводится формула для квантовых шумов в квантовом измерительном устройстве координаты. Приводятся частные подстановки, соответствующие Advanced LIGO с гомодинным детектором. В приложении В приводятся подстановки, соответствующие конфигурации Advanced LIGO с гомодинным детектором и фильтрующим резонатором с потерями. В приложении С рассматривается случай, когда в фильтрующем резонаторе потерь нет.

Обозначения, используемые в дипломе, приведены в двух таблицах: 1 и 2.

### 3 Оптимизация чувствительности детектора Advanced LIGO.

Чтобы было удобно сравнивать разные конфигурации, целесообразно ввести одну величину, которая будет характеризовать чувствительность. В рамках оптимального обнаружения сигнала [11, 12] и при условии применения оптимальной фильтрации, такой величиной является отношение сигнал-шум, введенное по правилу:

$$(S/N) = \int_0^{f_{merge}} \frac{df}{f^{7/3} S_h(f)}, \quad (1)$$

где  $S_{sign}(f) \sim \frac{1}{f^{7/3}}$  — спектр мощности сигнала, образовавшегося от слияния двух нейтронных звезд (ns-binary),  $f_{merge}$  — верхний предел этого спектра,  $S_h(f)$  — общая спектральная плотность шума, которая находится по формуле:

$$S_h(f) = S_q^h(\Omega) + S_{tech}(f), \quad (2)$$

где  $S_q^h(\Omega)$  — спектральная плотность квантовых шумов в эквиваленте метрики, которая находится по формуле (54),  $\Omega = 2\pi f$ , а  $S_{tech}$  — спектральная плотность технических шумов так же в эквиваленте метрики. В этой работе технические шумы считаются заданными и берутся из программы bench, а шумы квантовые вычисляются в зависимости от оптических параметров схемы. Это отношение характеризует чувствительность детектора к спектру сигнала ns-binary.

Введем нормированное отношение сигнал-шум:

$$G_{S/N} = \frac{(S/N)}{(S/N)_0}, \quad (3)$$

где  $(S/N)_0$  — отношение сигнал-шум некоторой конфигурации Advanced LIGO, взятое за эталонное ( $\gamma = 640$ ,  $\delta = 1860$ ,  $\phi = 1.9017$ ).

#### 3.1 Аналитическая оптимизация.

В этой секции будет проводиться аналитическая оптимизация квантового шума интерферометра Advanced LIGO с рециркуляцией сигнала с модифицированной оптикой на входе и на выходе: будут найдены оптимальные частотно-зависимые функции для угла сжатия на входе и гомодинного угла на выходе.

##### 3.1.1 Оптимизация угла сжатия на входе.

Квантовые шумы излучения на выходе описывается уравнением (54) из приложения А. Если на темный вход интерферометра вместо вакуума направить сжатый



вакуум со степенью сжатия  $R$  и углом сжатия  $2\theta$ , это уравнение модифицируется до следующей формы, представленной в [15]:

$$S^x(\Omega) = \sqrt{\frac{\hbar}{2MJ\gamma}} \frac{\Phi^+(\phi)\mathcal{C}(\Omega)\mathcal{S}(r, 2\theta)\mathcal{C}^+(\Omega)\Phi(\phi)}{(\gamma \cos(\phi) - \delta \sin(\phi))^2 + \Omega^2 \cos^2(\phi)}. \quad (4)$$

Здесь верхний индекс  $x$  означает, что шум приводится к смещению подвижного зеркала.

Здесь

$$\mathcal{C}(\Omega) = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \delta^2 + \Omega^2 - j(\Omega)\delta, & -2\gamma\delta - 2j(\Omega)\gamma \\ 2\gamma\delta, & \gamma^2 - \delta^2 + \Omega^2 - j(\Omega)\delta \end{pmatrix}, \quad (5a)$$

$$\mathcal{S}(r, 2\theta) = R^+(\theta)\mathcal{S}(r)R(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(r) + \sinh(r) \cos(2\theta), & \sinh(r) \sin(2\theta) \\ \sinh(r) \sin(2\theta), & \cosh(r) - \sinh(r) \cos(2\theta) \end{pmatrix}, \quad (5b)$$

$$\Phi(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad (5c)$$

$$j(\Omega) = \frac{MJ}{Z(\Omega)}, \quad (5d)$$

$$Z(\Omega) = -M\Omega^2. \quad (5e)$$

$\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\phi$  в этих формулах — оптические параметры интерферометра,  $J$  — приведенная мощность в резонаторе Фабри-Перо,  $M$  — масса одного зеркала,  $r$  — степень сжатия,  $2\theta$  — угол сжатия. Отметим, что в рассматриваемом случае эффективность фотодетектора берется равной единице.

Видно, что в этом выражении от угла сжатия зависит только числитель:

$$f(\theta) = \Phi^+(\phi)\mathcal{C}(\Omega)\mathcal{S}(r, 2\theta)\mathcal{C}^+(\Omega)\Phi(\phi). \quad (6)$$

$\Phi(\phi)$  и  $\mathcal{C}(\Omega)$  можно заменить следующим образом:

$$f(\theta) = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix} \mathcal{S}(r, 2\theta) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \cosh(r)|\psi_1|^2 + \cosh(r)|\psi_2|^2 + \cos(2\theta)(\sinh(r)|\psi_1|^2 - \sinh(r)|\psi_2|^2) + \sin(2\theta)(\sinh(r)\psi_1^*\psi_2 + \psi_1\psi_2^*). \quad (7)$$

Условие экстремума для  $\theta$ :  $f'(\theta) = 0$ .

$$-2 \sin(2\theta)(\sinh(r)|\psi_1|^2 - \sinh(r)|\psi_2|^2) + 2 \cos(2\theta) \sinh(r)(\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*) = 0. \quad (8)$$

Удобно найти решение относительно тангенса  $2\theta$ :

$$\tan(2\theta_{opt}) = \frac{\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*}{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}. \quad (9)$$

Из этого выражения, учитывая, что  $\psi_1$  и  $\psi_2$  - действительные функции, получим явный вид для синуса и косинуса:

$$\sin(2\theta_{opt}) = \frac{2\psi_1\psi_2}{\psi_1^2 + \psi_2^2}, \quad (10a)$$

$$\cos(2\theta_{opt}) = \frac{\psi_1^2 - \psi_2^2}{\psi_1^2 + \psi_2^2}. \quad (10b)$$

Тогда оптимальное выражение для квантового шума:

$$S^x(\Omega) = \sqrt{\frac{\hbar}{2MJ\gamma}} \frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)e^{-r}}{(\gamma \cos(\phi) - \delta \sin(\phi))^2 + \Omega^2 \cos^2(\phi)}. \quad (11)$$

Вспоминая обозначения для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , получим

$$S^x(\Omega) = \sqrt{\frac{\hbar}{2MJ\gamma}} \frac{\Phi^+(\phi)\mathcal{C}(\Omega)\mathcal{C}^+(\Omega)\Phi(\phi)e^{-r}}{(\gamma \cos(\phi) - \delta \sin(\phi))^2 + \Omega^2 \cos^2(\phi)}. \quad (12)$$

Сравнивая это уравнение с (4) сделаем вывод, что сжатие при оптимально подобранном частотно-зависимом угле сжатия добавляет в шум множитель  $e^{-r}$ .

### 3.1.2 Оптимизация вариационного измерения.

Запишем формулы (54) и (55), описывающие квантовые шумы, из приложения А:

$$S_q^h(\Omega) = \frac{8}{M^2\Omega^4L^2} (S_F + 2\Re([M\Omega^2 - K(\Omega)]^* S_{x_F}) + |M\Omega^2 - K(\Omega)|^2 S_x), \quad (13)$$

где

$$\kappa(\Omega) = \frac{MJ\delta}{D(\Omega)}, \quad (14a)$$

$$S_F(\Omega) = \frac{\hbar MJ\gamma(\gamma^2 + \delta^2 - \Omega^2)}{|D(\Omega)|^2}, \quad (14b)$$

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{4MJ\gamma\eta} \frac{|D(\Omega)|^2}{(\gamma \cos \phi - \delta \sin \phi)^2 + \Omega^2 \cos^2 \phi}, \quad (14c)$$

$$S_{xF}(\Omega) = \frac{\hbar(\gamma + i\Omega) \sin \phi + \delta \cos \phi}{2(\gamma - i\Omega) \cos \phi - \delta \sin \phi}, \quad (14d)$$

$$D(\Omega) = (\gamma - i\Omega)^2 + \delta^2. \quad (14e)$$

Для спектральных плотностей квантовых шумов выполняется следующее неравенство:

$$S_x S_F - |S_{xF}|^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (15)$$

Можно показать, что потери во всех оптических элементах Advanced LIGO можно свести к ненулевому коэффициенту пропускания торцового зеркала. Эти потери и конечную эффективность фотодетектора учитывает величина  $\eta$ . Неравенство 15 при  $\eta = 1$  переходит в равенство.

Рассмотрим случай, при котором отсутствуют оптические потери в основном резонаторе и на фотодетекторе. Рассчитаем формулу для идеальной вариации в предположении  $\eta = 1$ . Для этого выразим из уравнения (15)  $S_x$  через  $S_F$  и  $S_{xF}$ :

$$S_x = \frac{\frac{\hbar^2}{4} + |S_{xF}|^2}{S_F}.$$

Выразим следующие комплексные величины через модуль и фазу:

$$S_{xF} = |S_{xF}| e^{i\xi}, \quad (16a)$$

$$[\kappa(\Omega) - M\Omega^2]^* = |\kappa(\Omega) - M\Omega^2| e^{i\psi} \quad (16b)$$

Тогда уравнение (13) принимает вид:

$$S_q^h = \frac{8}{M^2 L^2 \Omega^4} \left[ S_F(\Omega) + 2 |\kappa(\Omega) - M\Omega^2| |S_{xF}| \cos(\psi + \xi) + \right. \\ \left. + |\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2 \frac{\frac{\hbar^2}{4} + |S_{xF}|^2}{S_F} \right]. \quad (17)$$

Заметим, что в этом уравнении от  $\phi$  зависит только  $S_{xF}$ . Или, что то же самое,  $|S_{xF}|$  и  $\xi$ . Вместо поиска экстремума  $S^F$  по  $\phi$  можно найти экстремум  $S_q^h$  по  $|S_{xF}|$  и  $\xi$ .

Видим, что условие экстремума  $S_q^h$  по  $\xi$  — это  $\cos(\psi + \xi) = -1$ . Тогда имеем:

$$S_q^h = \frac{8}{M^2 L^2 \Omega^4} \left[ S_F(\Omega) - 2 |\kappa(\Omega) - M\Omega^2| |S_{xF}| + \right. \\ \left. + |\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2 \frac{\hbar^2}{4S_F} + |\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2 \frac{|S_{xF}|^2}{S_F} \right]. \quad (18)$$

Найдем экстремум по величине  $S_{xF}$ :

$$\frac{\partial S_q^h}{\partial |S_{xF}|} = -\frac{8}{M^2 L^2 \Omega^4} \left[ 2 |\kappa(\Omega) - M\Omega^2| + 2 |\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2 \frac{|S_{xF}|}{S_F} \right] = 0, \quad (19)$$

$$|S_{xF}| = \frac{S_F}{|\kappa(\Omega) - M\Omega^2|}.$$

Получаем:

$$S_{opt}^h = \frac{8}{M^2 L^2 \Omega^4} \left[ |\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2 \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{S_F} \right]. \quad (20)$$

Рассмотрим случай, в котором оптические потери в основном резонаторе и на фотодетекторе существуют, то есть эффективность фотодетектора меньше 1. В случае, когда  $\eta \neq 1$  неравенство (15) сводится к уравнению вида:

$$\eta S_x S_F - |S_{xF}|^2 = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (21)$$

Отсюда

$$S_x = \frac{1}{\eta} \frac{\frac{\hbar^2}{4} + |S_{xF}|^2}{S_F}.$$

Тогда, используя замену (16) в уравнении (13) получаем:

$$S_q^h = \frac{8}{M^2 L^2 \Omega^4} \left[ S_F(\Omega) + 2 |\kappa(\Omega) - M\Omega^2| |S_{xF}(\Omega)| \cos(\psi - \xi) + \right. \\ \left. + |\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2 \cdot \frac{\frac{\hbar^2}{4} + |S_{xF}(\Omega)|^2}{\eta S_F(\Omega)} \right]. \quad (22)$$

Очевидно,  $S_q^h$  минимально, если выполняется условие:

$$\cos(\psi + \xi) = -1. \quad (23)$$

Получаем:

$$S_q^h = \frac{8}{M^2 L^2 \Omega^4} \left[ S_F(\Omega) - 2 |\kappa(\Omega) - M\Omega^2| |S_{xF}(\Omega)| + \right. \\ \left. + \frac{1}{\eta S_F(\Omega)} |\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2 \frac{\hbar^2}{4} + \frac{|\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2}{\eta S_F(\Omega)} |S_{xF}(\Omega)|^2 \right]. \quad (24)$$

Условие экстремума  $S^F$  по  $|S_{xF}|$ :

$$\frac{\partial S_q^h}{\partial |S_{xF}|} = -\frac{8}{M^2 L^2 \Omega^4} \left[ 2 |\kappa(\Omega) - M\Omega^2| + 2 |\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2 \frac{|S_{xF}(\Omega)|}{\eta S_F(\Omega)} \right] = 0, \quad (25)$$

Получаем:

$$|S_{xF}| = \frac{\eta S_F}{|\kappa(\Omega) - M\Omega^2|}. \quad (26)$$

Значит оптимальная спектральная плотность эквивалентного шума метрики:

$$S_q^h = \frac{8}{M^2 L^2 \Omega^4} \left[ S_F(1 - \eta) + \frac{1}{\eta S_F} \frac{\hbar^2}{4} |\kappa(\Omega) - M\Omega^2|^2 \right]. \quad (27)$$

### 3.1.3 Асимптотика для фильтрующего резонатора при $\Omega \rightarrow 0$ .

Покажем же, что при  $\Omega \rightarrow 0$  фильтрующий резонатор в пределе может стать прибором для идеального вариационного измерения. Формулы, по которым описываются квантовые шумы конфигурации Advanced LIGO приведены в приложениях В и С. Приведем (14d) на выходе эквивалентного резонатора в пределе  $\Omega \rightarrow 0$  к виду:

$$\begin{aligned} S_{xF}(\Omega) &= \frac{\hbar \gamma \sin \phi + \delta \cos \phi}{2 \gamma \cos \phi - \delta \sin \phi} = \frac{\hbar \sin \phi + \tan \beta \cos \phi}{2 \cos \phi - \tan \beta \sin \phi} = \\ &= \frac{\hbar \tan \phi + \tan \beta}{2 (1 - \tan \beta \tan \phi)} = \frac{\hbar}{2} \tan(\beta + \phi), \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\beta = \arctan(\frac{\delta}{\gamma})$ . После фильтрующего резонатора  $\phi$  меняется на  $\phi_f$ , зависящее от  $\Omega$  и связанное с  $\phi$  формулой (59) из приложения С. Получается, что

$$S_{xF} = \frac{\hbar}{2} \tan(\beta + \phi_f). \quad (29)$$

Подставим  $\phi_f$  в  $\tan(\beta + \phi_f)$ :

$$\begin{aligned} \tan(\beta + \phi_f) &= \frac{\tan \beta + \tan \phi_f}{1 - \tan \beta \tan \phi_f} = \frac{\left[ \frac{(\Omega^2 + X) \tan \phi + Y}{\Omega^2 + X - Y \tan \phi} \right] + \tan \beta}{1 - \tan \beta \left[ \frac{(\Omega^2 + X) \tan \phi + Y}{\Omega^2 + X - Y \tan \phi} \right]} = \\ &= \frac{\Omega^2 (\tan \phi + \tan \beta) + X (\tan \phi + \tan \beta) + Y (1 - \tan \beta \tan \phi)}{\Omega^2 (1 - \tan \beta \tan \phi) + X (1 - \tan \beta \tan \phi) - Y (\tan \phi + \tan \beta)} = \\ &= \frac{(\Omega^2 + X) \frac{\tan \beta + \tan \phi}{1 - \tan \beta \tan \phi} + Y}{\Omega^2 + X - Y \frac{\tan \beta + \tan \phi}{1 - \tan \beta \tan \phi}} = \frac{(\Omega^2 + X) \tan(\beta + \phi) + Y}{\Omega^2 + X - Y \tan(\beta + \phi)} \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку  $\beta$  и  $\phi$  — константы и, более того, величину  $\phi$  мы можем задать на свое усмотрение, мы положим  $\phi = -\beta$ . Таким образом, получим:

$$\tan(\beta + \phi_f) = \frac{Y}{\Omega^2 + X}. \quad (31)$$

Теперь подойдем к этому вопросу со стороны идеального вариационного измерения и посмотрим, что с ним будет на малых частотах. Найдем асимптотики для (14е), (14а) , (14б):

$$D(\Omega) = (\gamma - i\Omega)^2 + \delta^2 \approx \gamma^2 + \delta^2, \quad (32a)$$

$$\kappa(\Omega) = \frac{MJ\delta}{D(\Omega)} \approx \frac{MJ\delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \quad (32b)$$

$$S_F(\Omega) = \frac{\hbar MJ\gamma(\gamma^2 + \delta^2 - \Omega^2)}{|D(\Omega)|^2} \approx \frac{\hbar MJ\gamma(\gamma^2 + \delta^2)}{(\gamma^2 + \delta^2)^2} = \frac{\hbar MJ\gamma}{\gamma^2 + \delta^2}. \quad (32c)$$

Теперь разберемся с величиной  $S_{xF}$ . Согласно (26), мы знаем ее модуль. Определим ее фазу:

$$[\kappa(\Omega) - M\Omega^2]^* \approx \left[ \frac{MJ\delta}{\gamma^2 + \delta^2} - M\Omega^2 \right]^*. \quad (33)$$

Из этого уравнения видно, что  $[\kappa(\Omega) - M\Omega^2]$  — величина действительная и она равна своей сопряженной и своему модулю. То есть,  $\psi$  в формуле (16) , фаза сопряженной этой величины, равна нулю. Тогда из (23):

$$\cos(\psi + \xi) = \cos(\xi) = -1. \quad (34)$$

Отсюда,  $\xi = \pi$ , тогда из (16):

$$S_{xF} = |S_{xF}| e^{i\xi} = \frac{\eta S_F}{|\kappa(\Omega) - M\Omega^2|} e^{i\pi} = -\frac{\eta S_F}{|\kappa(\Omega) - M\Omega^2|}. \quad (35)$$

Подставляем сюда (32):

$$\begin{aligned} S_{xF} &= -\frac{\eta S_F}{|\kappa(\Omega) - M\Omega^2|} = -\eta \frac{\hbar MJ\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} \cdot \frac{\gamma^2 + \delta^2}{MJ\delta - M\Omega^2(\gamma^2 + \delta^2)} = \\ &= -\frac{\hbar J\gamma}{J\delta - \Omega^2(\gamma^2 + \delta^2)} = \frac{\frac{\eta \hbar J\gamma}{\gamma^2 + \delta^2}}{\Omega^2 - \frac{J\delta}{\gamma^2 + \delta^2}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Теперь приравняем  $S_{xF}$  из (36) и (29) с учетом (31):

$$\frac{\hbar}{2} \frac{Y}{\Omega^2 + X} = \frac{\frac{\eta \hbar J\gamma}{\gamma^2 + \delta^2}}{\Omega^2 - \frac{J\delta}{\gamma^2 + \delta^2}}. \quad (37)$$

Отсюда:

$$\frac{Y}{\Omega^2 + X} = \frac{\frac{2\eta J\gamma}{\gamma^2 + \delta^2}}{\Omega^2 - \frac{J\delta}{\gamma^2 + \delta^2}}. \quad (38)$$

Отсюда видно, что при параметрах фильтрующего резонатора, равных:

$$X = -\frac{J\delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \quad (39a)$$

$$Y = \frac{2\eta J\gamma}{\gamma^2 + \delta^2}, \quad (39b)$$

фильтрующий резонатор становится устройством для идеального вариационного измерения.

Заметим теперь, что в этой части диплома мы предполагали наличие потерь в эквивалентном резонаторе и отсутствие их в фильтрующем. Вспомним, что потери в фильтрующем резонаторе вычисляются по формуле  $\gamma_{fE} = \frac{A_f^2 c}{4L_f}$ . Потери ( $\gamma_{fE}$ ) равны нулю, если длина фильтрующего резонатора ( $L_f$ ) бесконечна. Теперь сделаем окончательный вывод: фильтрующий резонатор бесконечной длины обеспечивает на низких частотах идеальное вариационное измерение.

### 3.2 Численная оптимизация.

Для решения поставленных задач, необходимо задать аналитическое выражение  $G_{S/N}$  для всех упомянутых в ней схем: схемы с фильтрующим резонатором с потерями, схемы с фильтрующим резонатором без потерь и схемы с идеальной вариацией. Величина  $G_{S/N}$ , которая в случае с интерферометром без фильтрующего резонатора и вариационного измерения определяется по формулам (3), (1) и (2), в случае со схемами, содержащими фильтрующий резонатор и идеальную вариацию, считается по этим же формулам. Различие будет заключаться в величине  $S(\Omega)$ , заданной в формуле (2). Обозначим формулы, которые использовались при численной оптимизации для нахождения  $S(\Omega)$

В схеме с фильтрующим резонатором с потерями значения  $S(\Omega)$  вычисляются по формулам (54), (55с), (55f), (55b), (56) и (57).

В схеме с фильтрующим резонатором без потерь значения  $S(\Omega)$  вычисляются по тем же формулам, что и в схеме с фильтрующим резонаторе с потерями, только с  $\gamma_{fE} = 0$ .

В схеме с идеальной вариацией значения  $S(\Omega)$  вычисляются по формулам (27) и (14b).

Чтобы предположить отсутствие потерь в основном резонаторе, в формулы (55с), (27) и (14b) подставляется значение  $\eta = 1$ .

Во всех схемах значения технических шумов  $S_{tech}$  берутся из программы bench 6.1. В таком виде  $S_{tech}$  представляет из себя 1500 значений в зависимости от частоты  $f$ .  $S(\Omega)$  вычисляется для тех же значений, для каких задан  $S_{tech}$ .  $\Omega$  и  $f$  связаны очевидным отношением  $\Omega = 2\pi f$ .

Чтобы посчитать интеграл, входящий в (1), была реализована схема численного интегрирования по методу Симпсона.

В схеме с фильтрующим резонатором с потерями есть 5 оптических параметров, которые мы можем менять без больших затрат усилий:  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $\gamma_{fI}$ ,  $\delta_f$ . Каждому набору этих величин соответствует свой спектр шума эквивалентной метрики  $S(\Omega(f))$ ,

и, следовательно,  $G_{S/N}$ . Значит, чтобы для каждого значения потерь  $\gamma_{fE}$  найти оптимальную конфигурацию, нам необходимо найти такие значения  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $\gamma_{fI}$  и  $\delta_f$ , чтобы  $G_{S/N}$  было максимальным. Такая задача в этой работе решается последовательным перебором этих величин в определенных пределах с определенным числом равномерных шагов и вычислением  $G_{S/N}$  для каждого шага.  $\gamma$  меняется в пределах от  $\text{с}^{-1}$  до  $3000 \text{ с}^{-1}$ , с шагом  $149,95 \text{ с}^{-1}$ ;  $\delta$  в пределах от  $-3000 \text{ с}^{-1}$  до  $3000 \text{ с}^{-1}$  с шагом  $300 \text{ с}^{-1}$ ;  $\phi$  меняется в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  с шагом  $\pi/20$ ;  $\gamma_{fI}$  меняется в пределах от  $0 \text{ с}^{-1}$  до  $1000 \text{ с}^{-1}$  с шагом  $50 \text{ с}^{-1}$ ;  $\delta_f$  меняется в пределах  $-1000 \text{ с}^{-1}$  до  $1000 \text{ с}^{-1}$  с шагом  $40 \text{ с}^{-1}$ . Потом из получившегося набора значений  $G_{S/N}$  выбирается максимальное, а также соответствующий ему набор значений  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $\gamma_{fI}$  и  $\delta_f$ . Вычисляя таким образом  $G_{S/N}$  в зависимости от  $\gamma_{fE}$  и вспомнив, что  $\gamma_{fE}$  обратно пропорционально длине  $L_f$  фильтрующего резонатора, мы можем найти зависимость  $G_{S/N}$  от  $L_f$ .

В схеме с идеальной вариацией мы ищем максимальную  $G_{S/N}$  меняя только два параметра  $\gamma$  и  $\delta$ . От других параметров эта величина, как можно легко убедиться, зависеть не будет.

Код программы, проводящей оптимизацию, приведен в приложении D.

## 4 Результаты.

Результаты работы приведены в таблице 3. После оптимизации увеличение радиуса обнаружения сигнала пропорционально  $\sqrt{G_{S/N}}$ , поэтому частота обнаружения сигнала, связанная просматриваемой областью, увеличивается в  $G_{S/N}^{3/2}$  раз. Оптимизация схемы с идеальной вариацией позволяет увеличить частоту обнаружения сигналов в 1,7 раза. К сожалению, такой хороший результат соответствует только идеальным основному резонатору и фотодетектору. Оптимизация схемы с идеальной вариацией даже с небольшими потерями ( $\eta = 0,9$ ) дает увеличение частоты обнаружения примерно 1,5. Основная доля этих потерь появляется за счет конечности чувствительности фотодетектора. Преодоление этих шумов, таким образом, является многообещающей, хотя и проблемной, областью деятельности по увеличению чувствительности детектора.

Результат, полученный в работе в результате оптимизации схемы Advanced LIGO с фильтрующим резонатором без потерь, с большой точностью совпадает с результатом оптимизации схемы с идеальной вариацией. Это совпадение подтверждает предположения, сделанного в разделе 3.1.3, о том, что при низкочастотных сигналах, а сигнал от сливающихся двойных нейтронных звезд является как раз низкочастотным сигналом, фильтрующий резонатор без потерь играет роль инструмента для идеальной вариации.



Схема гравитационного детектора.	$G_{S/N}$ и графики для текущих технических шумов.	$G_{S/N}$ и графики для уменьшенных технических шумов.
Идеальная вариация, $\eta = 1$	1.45, (рис. 7)	2.02, (рис. 13)
Фильтрующий резонатор без потерь, $\eta = 1.0$ .	1.44, (рис. 19)	2.00
Идеальная вариация, $\eta = 0.9$	1.32, (рис. 8)	1.56 (рис. 14)
Фильтрующий резонатор без потерь, $\eta = 0.9$ .	1.29, (рис. 9)	1.52 (рис. 15)
Фильтрующий резонатор с потерями, $\eta = 0.9$	рис. 10, (рис. 11, 12)	рис. 16, (рис. 17, 18)

Таблица 3: Результаты оптимизации для исследуемых схем гравитационно-волнового детектора

Используя рисунок (10), можно оценить разумную длину для фильтрующего резонатора. Эта длина примерно 150 метров. Дальнейшее увеличение длины резонатора будет нецелесообразно.

Сравнивая результаты этой работой со статьей [25], мы видим несоответствие в значениях. Если в статье [25] был получен выигрыш в отношении сигнал-шум на порядок, то в текущей работе был получен выигрыш всего на несколько десятков процентов. Поскольку, в [25] был получен выигрыш без учета технических шумов, складывается впечатление, что именно они являются причиной такого слабого выигрыша. Еще одно соображение, подтверждающее негативное влияние технических шумов на чувствительность схемы можно привести, глядя на (рис. 7). На этом графике видно, что спектральная плотность квантового шума, которую позволяет достичь идеальная вариация, гораздо ниже технического шума, особенно на низких частотах, которые соответствуют спектру сигнала. В этой работе была сделана оценка влияния технических шумов на выигрыш. Для этого технические шумы во всех вычислениях (включая вычисление эталонного спектра) были уменьшены в 3 раза. Квантовый шум в эталонном спектре был оставлен прежним.

При уменьшенных технических шумах, как и при текущих, также проявляется

влияние потерь в основном резонаторе на получаемый от оптимизации выигрыш. Было подтверждено предположение о том, что на низких частотах фильтрующий резонатор без потерь играет роль прибора для идеальной вариации. Используя график (16), можно оценить разумную длину для фильтрующего резонатора. Эта длина примерно 150 метров. Дальнейшее увеличение длины резонатора будет, как и в случае с текущими шумами, нецелесообразно.

## 5 Выводы.

Численно рассчитан выигрыш чувствительности к сигналу от системы компактных двойных звезд конфигураций детектора Advanced LIGO с: 1) фильтрующим резонатором без оптических потерь. 2) фильтрующим резонатором с оптическими потерями. 3) с устройством для идеальной вариации.

Численно и аналитически показано, что в случае низкочастотного сигнала фильтрующий резонатор - это прибор для идеальной вариации в хорошем приближении. Численно показано, что выигрыш, получаемый от использования фильтрующего резонатора, может быть улучшен с помощью: 1) увеличения эффективности фотодетектора и уменьшения оптических потерь в резонаторах Advanced LIGO. 2) уменьшения технических шумов. Рассчитано влияние этих двух факторов на чувствительность. Оценена разумная длина для фильтрующего резонатора с потерями  $L \approx 150$  м. Аналитически показано, что использование сжатого света на входе позволяет уменьшить шумы на высоких частотах до уровня технических шумов.

## А Квантовые шумы детектора Advanced LIGO с гомодинным детектором.

В статье [15] показано, что квантовые шумовые характеристики интерферометра Майкельсона с резонаторами Фабри-Перо в плечах и зеркалом рециркуляции сигнала могут быть сведены к системе из трех зеркал, затем к одному расстроенному резонатору. Спектральная плотность шума может быть описана с помощью трех оптических параметров: оптической резонансной частотой  $\omega_{rez}$ , временем релаксации  $\tau$  и мощностью лазера, циркулирующего в резонаторе  $W_0$ . В нашей работе мы используем другие величины, однозначно связанные с этими тремя: расстройку резонатора  $\delta = \omega_{rez} - \omega_p$ , полуширину полосы пропускания  $\gamma = \frac{1}{\tau}$  и приведенную мощность  $J = \frac{4\omega_p W_0}{cLM}$ . В статье [14] показано, что собственная частота и время релаксации могут регулироваться путём изменения отстройки и отражающей способности ЗРС. В Advanced LIGO используется фотодетектор, который характеризуется гомодинным углом  $\phi$ .

Получим из общих соображений общую формулу для спектральной плотности шумов, приведенных ко входу схемы гравитационно-волнового детектора с рециркуляцией сигнала. Подробный вывод приведен в [26] и [27].

Сигнал, получаемый на выходе - это сумма отклика системы на реальное смещение зеркала  $X(\Omega)$  с некоторым коэффициентом и шума от воздействия на детектор света, связанным с квантовой его природой:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{detect}(t) &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{r}(\Omega) + k(\Omega)X(\Omega)] e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} k(\Omega) [\hat{x}_{fluct} + X(\Omega)] e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь  $\hat{x}_{fluct}$  - это оператор рождения, приведенный к величине смещения.

Величина смещения  $X(\Omega)$  состоит из смещения, вызванного внешней силой (будем считать, что это гравитационная волна) и смещения, вызванного световым давлением:

$$m\ddot{x}(t) = \frac{ML}{2}\ddot{h}(t) + \hat{F}_{fl}(t). \quad (41)$$

Фурье образы от величины смещения зеркала и изменения метрики:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{-i\Omega t} dt, \quad (42)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega) e^{-i\Omega t} dt. \quad (43)$$

Здесь  $h$  - это изменение метрики, вызываемое гравитационной волной.

Пондеромоторная сила, или флуктуации силы светового давления:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{fl}(t) = \hat{F}(t) - F_0 = \hbar \int_0^{\infty} \kappa(\omega) E^* V(\omega) \hat{a}(\omega) e^{-i(\omega - \omega_p)t} \frac{d\omega}{2\pi} + \\ + \hbar \int_0^{\infty} \kappa^2(\omega) |E|^2 W(\omega) X(\omega_p - \omega) e^{-i(\omega - \omega_p)t} \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (44)$$

В этом выражении  $\hbar$  - постоянная планка,  $E$  - электрическая напряженность накачки в Фабри-Перо резонаторе,  $\kappa(\omega) = \frac{\sqrt{\omega\omega_p}}{c}$ ,  $\omega_p$  - частота накачки,  $c$  - скорость света в вакууме.  $V(\omega)$  и  $W(\omega)$  — это выражения из уравнения, связывающего разность операторов рождения падающего ( $\hat{e}$ ) и отраженного ( $\hat{f}$ ) от зеркала света, оператор рождения света на входе в резонатор ( $\hat{a}$ ) и движение дальнего зеркала  $X(\omega_p - \omega)$ :

$$\hat{e} - \hat{f} = V(\omega) \hat{a} + \kappa(\omega) E W(\omega) X(\omega_p - \omega) \quad (45)$$

В выражении (44) слагаемое, содержащее  $\hat{a}$  - это часть флуктуации силы, связанная с квантовыми флуктуациями количества фотонов. Обозначим ее  $\hat{y}_F(\Omega)$ .

Учитывая, что  $\Omega = \omega_p - \omega$ , получаем спектральное представление для (41):

$$\begin{aligned} -M\Omega^2 X(\Omega) = -\frac{M\Omega^2 L}{2} h\Omega + \hat{y}_F(\Omega) + \hbar \kappa^2(\omega_p - \Omega) |E|^2 W(\omega_p - \Omega) X(\Omega) + \\ + \hbar \kappa(\omega_p + \Omega) |E|^2 W^*(\omega_p + \Omega) X(\Omega). \end{aligned} \quad (46)$$

Выразим в явном виде координату:

$$X(\Omega) = \frac{-\frac{M\Omega^2 L}{2} h(\Omega) + \hat{y}_F(\Omega)}{M\Omega^2 + \hbar |E|^2 (\kappa^2(\omega_p - \Omega) W(\omega_p - \Omega) - \kappa^2(\omega_p + \Omega) W^*(\omega_p + \Omega))}. \quad (47)$$

Сделаем переобозначение:

$$K(\Omega) = -\hbar |E|^2 (\kappa^2(\omega_p - \Omega) W(\omega_p - \Omega) - \kappa^2(\omega_p + \Omega) W^*(\omega_p + \Omega)). \quad (48)$$

Получаем явное выражение для координаты:

$$X(\Omega) = \frac{h(\Omega) \frac{M\Omega^2 L}{2} - \hat{y}_F(\Omega)}{M\Omega^2 - K(\Omega)} \quad (49)$$

Выражение для сигнала на выходе:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{detect}(t) &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} k(\Omega) \left[ \hat{x}_{fluct} + \frac{h(\Omega) \frac{M\Omega^2 L}{2} - \hat{y}_F(\Omega)}{M\Omega^2 - K(\Omega)} \right] e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M\Omega^2 L k(\Omega)}{2(M\Omega^2 - K(\Omega))} \left[ \frac{2(M\Omega^2 - K(\Omega))}{M\Omega^2 L} \hat{x}_{fluct} + h(\Omega) - \frac{2}{M\Omega^2 L} \hat{y}_F(\Omega) \right] e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}.\end{aligned}\quad (50)$$

Отсюда сигнал, приведенный ко входу:

$$\hat{h}_{fl} = \frac{2M\Omega^2 - K(\Omega)}{M\Omega^2 L} \hat{x}_{fluct} + \frac{2}{M\Omega^2 L} \hat{y}_f(\Omega).\quad (51)$$

Учитывая, что

$$S_q^h(\Omega) 2\pi\delta(\Omega - \Omega') = \langle 0 | \hat{h}_{fl}(\Omega) \hat{h}_{fl}^+(\Omega) | 0 \rangle_{symm},\quad (52a)$$

$$S_x(\Omega) 2\pi\delta(\Omega - \Omega') = \langle 0 | \hat{x}_{fluct} \hat{x}_{fluct}^+(\Omega) | 0 \rangle_{symm},\quad (52b)$$

$$S_{xF}(\Omega) 2\pi\delta(\Omega - \Omega') = \langle 0 | \hat{x}_{fluct}^+ \hat{y}_F(\Omega) | 0 \rangle_{symm},\quad (52c)$$

$$S_F(\Omega) 2\pi\delta(\Omega - \Omega') = \langle 0 | \hat{y}_F(\Omega) \hat{y}_F^+(\Omega) | 0 \rangle_{symm}.\quad (52d)$$

Получаем в итоге выражение для спектральной плотности квантового шума метрики в резонаторе Фабри-Перо:

$$S^h(\Omega) = \frac{4}{M^2\Omega^4 L^2} (S_F + 2\Re([M\Omega^2 - K(\Omega)]^* S_{xF}) + |M\Omega^2 - K(\Omega)|^2 S_x).\quad (53)$$

В этом выражении  $\Re$  означает действительную часть комплексной величины. Эквивалентный квантовый шум вариации метрики — это шум, приведенный к его входу (условный шум метрики, который дал бы на выходе из детектора такой же результат, что все квантовые шумы резонатора). В детекторе два резонатора Фабри-Перо, поэтому можно показать, что шум удваивается. Получаем:

$$S_q^h(\Omega) = \frac{8}{M^2\Omega^4 L^2} (S_F + 2\Re([M\Omega^2 - K(\Omega)]^* S_{xF}) + |M\Omega^2 - K(\Omega)|^2 S_x),\quad (54)$$

где

(55a)

$$\kappa(\Omega) = \frac{MJ\delta}{D(\Omega)}, \quad (55b)$$

$$S_F(\Omega) = \frac{\hbar MJ\gamma(\gamma^2 + \delta^2 - \Omega^2)}{|D(\Omega)|^2}, \quad (55c)$$

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{4MJ\gamma\eta} \frac{|D(\Omega)|^2}{(\gamma \cos \phi - \delta \sin \phi)^2 + \Omega^2 \cos^2 \phi}, \quad (55d)$$

$$S_{xF}(\Omega) = \frac{\hbar(\gamma + i\Omega) \sin \phi + \delta \cos \phi}{2(\gamma - i\Omega) \cos \phi - \delta \sin \phi}, \quad (55e)$$

$$D(\Omega) = (\gamma - i\Omega)^2 + \delta^2. \quad (55f)$$

Здесь  $\eta$  — величина, характеризующая потери в эквивалентном резонаторе. Если потерь нет,  $\eta = 1$ . Таким образом, видим, что каждому набору значений  $\gamma$ ,  $\delta$ , и  $\phi$  соответствует спектральная плотность шума (зависимость  $S(\Omega)$ ), а значит, и шумовая кривая.

## В Схема с фильтрующим резонатором с потерями.

Поставим же перед гомодинным детектором фильтрующий резонатор с потерями. Если мы в схему включим фильтрующий резонатор с потерями, согласно [26] и [27], спектральная плотность шума будет по-прежнему вычисляться по формуле (54). Величины  $S_F(\Omega)$ ,  $D(\Omega)$  и  $\kappa(\Omega)$ , входящие в нее, будут также вычисляться по уже знакомым формулам: (55c)(55f)(55b), соответственно. Величины же  $S_x(\Omega)$  и  $S_{xF}(\Omega)$  будут вычисляться гораздо сложнее:

$$S_x = \frac{\hbar}{4MJ\gamma\eta} \frac{1}{|C_f(\Omega, \phi)|^2}, \quad (56a)$$

$$S_{xF} = \frac{\hbar}{2} \left[ \frac{S_f(\Omega, \phi)}{C_f(\Omega, \phi)} \right]^*, \quad (56b)$$

где

$$S_f(\Omega, \phi) = R_{f+}(\Omega, \phi)S(\Omega) + R_{f-}(\Omega, \phi)C(\Omega), \quad (57a)$$

$$C_f(\Omega, \phi) = R_{f+}C(\Omega, \phi) - R_{f-}(\Omega, \phi)S(\Omega), \quad (57b)$$

$$R_{f+}(\Omega, \phi) = R_{f+}(\Omega) \cos(\phi) - R_{f-}(\Omega) \sin(\phi), \quad (57c)$$

$$R_{f-}(\Omega, \phi) = R_{f+}(\Omega) \sin(\phi) + R_{f-}(\Omega) \cos(\phi), \quad (57d)$$

$$C(\Omega) = \frac{\gamma - i\Omega}{D(\Omega)}, \quad (57e)$$

$$S(\Omega) = \frac{\delta}{D(\Omega)}, \quad (57f)$$

$$R_{f+}(\Omega) = \frac{X + 2i\gamma_{fE}\Omega + \Omega^2}{D_f(\Omega)}, \quad (57g)$$

$$R_{f-}(\Omega) = \frac{Y}{D_f(\Omega)}, \quad (57h)$$

$$D_f(\Omega) = (\gamma_{fI} + \gamma_{fE} - i\Omega)^2 + \delta^2, \quad (57i)$$

$$X = \gamma_{fI}^2 - \gamma_{fE}^2 - \delta_f^2, \quad (57j)$$

$$Y = 2\gamma_{fI}\delta_f. \quad (57k)$$

Здесь  $\gamma_{fI}$  и  $\delta_f$  — ширина пропускания и отстройка фильтрующего резонатора,  $\gamma_{fE} = \frac{A_f^2 c}{4L_f}$  — потери в фильтрующем резонаторе.  $A_f^2$  — потери в фильтрующем резонаторе за один проход света,  $c$  — скорость света в вакууме,  $L_f$  — длина резонатора.

Видно, что формулы (56) и (57) не добавляют в нашу жизнь простоты, однако, как будет показано позднее, они добавляют чувствительности в детектор.

## С Схема с фильтрующим резонатором без потерь.

Сделаем же шаг к упрощению уравнений (56) и (57), и положим в них величину потерь ( $\gamma_{fE}$ ) равной нулю. Таким образом, мы получаем фильтрующий резонатор без потерь. Цепью несложных, но громоздких преобразований можно показать, что при этом предположении уравнения (56) и (57) сводятся к уравнениям, практически повторяющим (55d) и (55e):

$$S_x(\Omega) = \frac{\hbar}{4M\gamma J\eta} \frac{|D(\Omega)|^2}{(\gamma \cos \phi_f(\Omega) - \delta \sin \phi_f(\Omega))^2 + \Omega^2 \cos^2 \phi_f(\Omega)}, \quad (58a)$$

$$S_{xF}(\Omega) = \frac{\hbar (\gamma + i\Omega) \sin \phi_f(\Omega) + \delta \cos \phi_f(\Omega)}{2 (\gamma + i\Omega) \cos \phi_f(\Omega) - \delta \sin \phi_f(\Omega)}. \quad (58b)$$

Здесь:

$$\phi_f(\Omega) = \frac{\arctan((\Omega^2 + X) \cdot \tan(\phi) + Y)}{(\Omega^2 + X - Y \cdot \tan(\phi))}, \quad (59)$$

где  $\phi$  — гомодинный угол, а  $X$  и  $Y$  вычисляются по формулам, аналогичным (57j) и (57k):

$$X = \gamma_{fI}^2 - \delta_f^2, \quad (60a)$$

$$Y = 2\gamma_f\delta_f, \quad (60b)$$

## D Код программы.

Файл `nashbenchlost6.m`, оптимизирующий схему Advanced LIGO с фильтрующим резонатором с потерями:

```
function nashbenchj(varargin)
global f;
global J;
global beta;
global f;
global ifo;
global ysdim;
global intz;
global gammaFIMax;
global deltaFMax;
global gammaFE;
global ys;
global y1;
global queen;
time = [0 0 86400 3600 60 1];

load noises1;
ifo = IFOModel1;
ys = y1 + y2 + y3 + y4 + y9 + y10;
ysdim = ys - y1;
% ysdim = ysdim./3;
ys = ysdim+y1;

gammaFE = 3;
```



```

Titm = ifo.Optics.ITM.Transmittance;
hbar = ifo.Constants.hbar;
ro = sqrt(1-.06);
c = ifo.Constants.c;
L = ifo.Infrastructure.Length;
gamARM = c.*Titm./4./L;
fiSRC = (pi - 0.09)./2;
beta = .78540;
Omega = 2 .* pi .* f;
tettaSRC = atan((1-ro)/(1+ro)*tan(fiSRC));
J = (2*pi*100)^3;
intz = zagotovka;
etanol = (1./ys)*intz';
besta = 0;
bestA = 0;
X0=0;
Y0=0;
ind=0;

Zagruzhatore = 0;

gammaMax = 21;
fimax = 21;
deltaMax = 21;
gammaFIMax = 21;
deltaFMax = 21;

totalp = gammaMax*fimax*deltaMax;

stepGammaFI = 1000/(gammaFIMax-1);
gammaFI = 0:stepGammaFI:1000;

stepDeltaF = 2000/(deltaFMax-1);
deltaF = -1000:stepDeltaF:1000;

stepDelta = 6000/(deltaMax-1);

```

```

delta = -3000:stepDelta:3000;

fi0a = -pi/2:pi/(fimax-1):pi/2;

stepGamma = 2999/(gammaMax-1);
gamma = 1:stepGamma:3000;

tbeg = clock;

l1 = 0;
if Zagruzhatore == 1,
    load totalnoises31;
end
while (l1 < deltaMax),
    l1 = l1+1
    k1 = 0;
    while (k1 < gammaMax),
        k1 = k1+1;
        ji = 0;
        while (ji < fimax),
            ji = ji+1;
            fi0 = fi0a(ji);
            a = [];
            Titm = ifo.Optics.ITM.Transmittance;
            hbar = 1e-34;
            M = 40;
            L = 4000;
            eta = .9;

            D = gamma(k1).^2 + delta(l1).^2 - Omega.^2 - 2.*i.*gamma(k1)
.*Omega;
            kappa = J.*delta(l1)./D;
            sigma_F = J.*gamma(k1).*(gamma(k1).^2+delta(l1).^2+Omega.^2)
./(D.*conj(D));
            C_1 = (gamma(k1)-i.*Omega)./D;
            S_1 = delta(l1)./D;
            bestA = 0;

```

```

bestA_loss = 0;
q = 0;
while (q < gammaFIMax),
    q = q+1;
    w = 0;
    while (w < deltaFMax),
        w = w+1;
        Y = 2.*gammaFI(q).*deltaF(w);
        t1 = clock;
        X_L = gammaFI(q).^2 - gammaFE.^2 - deltaF(w).^2;

        gammaF_L = gammaFE + gammaFI(q);
        D_f_L = (gammaF_L - i.*Omega).^2 + deltaF(w).^2;
        R_fMinus_L = Y./D_f_L;
        R_fPlus_L = (X_L+2.*i.*gammaFE.*Omega+Omega.^2)./D_f_L;
        R_fMinus1_L = R_fPlus_L.*sin(fi0)+R_fMinus_L.*cos(fi0);
        R_fPlus1_L = R_fPlus_L.*cos(fi0)-R_fMinus_L.*sin(fi0);
        S_f1_L = R_fPlus1_L.*S_1+R_fMinus1_L.*C_1;
        C_f1_L = R_fPlus1_L.*C_1-R_fMinus1_L.*S_1;
        sigma_x_loss = 1./(4.*J.*gamma(k1).*eta.*abs(C_f1_L).^2);
        sigma_xF_loss = 1./2.*conj(S_f1_L./C_f1_L);
        S_loss = 8.*hbar.*(sigma_F + 2.*real(conj(kappa-Omega.^2)
.*sigma_xF_loss) + conj(kappa-Omega.^2).*(kappa-Omega.^2).*sigma_x_loss)
./(M.*L.^2.*Omega.^4);
        n_loss = real(S_loss);
        ys_loss = ysdim + n_loss;
        a_lossin(q,w) = (1./ys_loss)*intz';
        if (bestA_loss < a_lossin(q,w))
            bestA_loss = a_lossin(q,w);
            bestGammaFI = gammaFI(q);
            bestDeltaF = deltaF(w);
        end
    end
end
a_loss(ji) = bestA_loss;
gamFI(ji) = bestGammaFI;
delF(ji) = bestDeltaF;

```

```

        end
        [bestafi(k1),inda]=max(a_loss);
        bestGamFI(k1) = gamFI(inda);
        bestDelF(k1) = delF(inda);
        bestfifi(k1) = fi0a (inda);
        bestafi(k1);
        asurf(k1,l1)=bestafi(k1);
    end
    [bestagamma(l1),inda]=max(bestafi);
    bestGamFIgamma(l1) = bestGamFI(inda);
    bestDelFgamma(l1) = bestDelF(inda);
    bestfigamma(l1) = bestfifi(inda);
    bestgammagamma(l1) = gamma(inda);
    bestagamma(l1);

    l1/deltaMax*100
    save totalnoises31;
end

[besta,inda]=max(bestagamma);
bestGamFI = bestGamFIgamma(inda);
bestDelF = bestDelFgamma(inda);
bestfi = bestfigamma(inda);
bestGamma = bestgammagamma(inda);
bestDelta = delta (inda);
curr = clock;
curr - tbeg
besta
save totalnoises41;
bestGamFI
gammaFE
bestDelF
bestGamma
bestDelta
bestfi

bestgamma = sqrt(bestGamma^2+bestDelta^2);

```

```

bestbeta = atan(bestDelta/bestGamma);

noisegraph4 (bestGamFI,gammaFE,bestDelF,bestGamma,bestDelta,bestfi);

figure;
asurf = asurf/1e20;
surf (delta, gamma,asurf);
axis on;
xlabel('delta');
ylabel('gamma');

rnew = 9.19e-21.* sqrt(besta)
rold = 9.19e-21.* sqrt(etanol)
rotn = rnew./rold
save totalnoises4;
return

function vdan = zagotovka();
fs = 10;
fn = 1570;
N=3000;
for i = 1:N
    A = fs*(fn/fs)^(-1/(N-1));
    B = log(fn/fs)/(N-1);
    vdan (i)= 1/(f1(i)^(7/3))*A*B*exp(B*i);
end
return

function yz = f1(n);
fs = 10;
fn = 1570;
N=3000;
yz = fs*(fn/fs)^((n-1)/(N-1));
return

```

Файл BenchIdeal1.m, оптимизирующий схему Advanced LIGO с идеальным вариационным измерением:

```

function nashbenchj(varargin)
global f;
global J;
global beta;
global f;
global ifo;
global ysdim;
global intz;
tbeg = clock;
global ys;
global y1;

load noises1;
ifo = IFOModel1;
ys = y1;
ysdim = 0;

gammaFE =0;

Titm = ifo.Optics.ITM.Transmittance;
hbar = ifo.Constants.hbar;
ro = sqrt(1-.06);
c = ifo.Constants.c;
L = ifo.Infrastructure.Length;
gamARM = c.*Titm./4./L;
fiSRC = (pi - 0.09)./2;
beta = .78540;
Omega = 2 .* pi .* f;
tettaSRC = atan((1-ro)/(1+ro)*tan(fiSRC));
Gamma = 3250;
J = (2*pi*100)^3;
intz = zagotovka;
etanol = (1./ys)*intz';
besta = 0;
bestA = 0;

```

```

X0=0;
Y0=0;
ind=0;

gammaMax = 21;
deltaMax = 21;

stepDelta = 6000/(deltaMax-1);
delta = -3000:stepDelta:3000;
stepGamma = 2999/(gammaMax-1);
gamma = 1:stepGamma:3000;

for l1 = 1:deltaMax;
    for k1 = 1:gammaMax;
        ind = ind+1
        curr = clock;
        curr-tbeg
        [a(k1)] = optimization(gamma(k1), delta(l1));
    end
    [bestagamma(l1), inda]=max(a);
    bestgammagamma(l1) = gamma(inda);
    bestagamma(l1);
end
[besta, inda]=max(bestagamma);
bestGamma = bestgammagamma(inda);
bestDelta = delta (inda);

besta
bestGamma
bestDelta

noisegraph2 (bestGamma,bestDelta);

```

```

save totalnoises4;
return

function [bestA]=optimization(gamma,delta)
global J;
global gammaFIMax;
global deltaFMax;
global f;
global ifo;
global ysdim;
global intz;
global gammaFE;
global ys;
global y1;
load noises1;
bestA = 0;
a = [];

    Titm = ifo.Optics.ITM.Transmittance;
    hbar = 1e-34;
    M = 40;
    L = 4000;
    eta = .9;

    Titm = ifo.Optics.ITM.Transmittance;
    hbar = 1e-34;
    M = 40;
    L = 4000;
    eta = .9;

    Omega = 2 .* pi .* f;
    D = (gamma - i.*Omega).^2+delta^2;
    kappa = M.*J.*delta./D;
    S_F = hbar.*M.*J.*gamma.*(gamma.^2+delta.^2+Omega.^2)./abs(D).^2;
    S = 8./(M.^2.*L.^2.*Omega.^4).*(abs(kappa-M.*Omega.^2).^2.*hbar^2/4
./S_F./eta+S_F.*(1-eta));

    S = real(S);

```



```

    h = sqrt(S);
    n = (h).^2;

    ynew=n;
    ys = y1;
    ysdim = ys - y1;
    ysnew = ysdim + n;
    bestA = (1./ysnew)*intz';

return

function vdan = zagotovka();
fs = 10;
fn = 1570;
N=3000;
for i = 1:N
    A = fs*(fn/fs)^(-1/(N-1));
    B = log(fn/fs)/(N-1);
    vdan (i)= 1/(f1(i)^(7/3))*A*B*exp(B*i);
end
return

function yz = f1(n);
fs = 10;
fn = 1570;
N=3000;
yz = fs*(fn/fs)^((n-1)/(N-1));
return

```

Файл noisegraph4.m, рисующий графики:

```

function noisegraph4 (gammaFI,gammaFE,deltaF,gamma,delta,fi0)
load noises1;
ifo = IFOModel1;
X = gammaFI.^2-deltaF.^2;
Y = 2.*gammaFI.*deltaF;

```

```

Gamma = sqrt(gamma^2+delta^2);
beta = atan(delta/gamma);

J=(2*pi*100)^3;
intz = zagotovka;
Titm = ifo.Optics.ITM.Transmittance;
hbar = 1e-34;
M = 40;
L = 4000;
eta = .9;

Omega = 2 .* pi .* f;
Y = 2.*gammaFI.*deltaF;
phi = atan(((Omega.^2 + X).*tan(fi0)+Y)./(Omega.^2 + X - Y .* tan(fi0)));
D = Gamma.^2 - Omega.^2 - 2.*i.*Gamma.*Omega.*cos(beta);
kappa = J.*Gamma.*sin(beta)./D;
sigma_F = J.*Gamma.*(Gamma.^2+Omega.^2).*cos(beta)./(D.*conj(D));

X_L = gammaFI.^2 - gammaFE.^2- deltaF.^2;
C_1 = (Gamma.*cos(beta)-i.*Omega)./D;
S_1 = Gamma.*sin(beta)./D;
gammaF_L = gammaFE + gammaFI;
D_f_L = (gammaF_L - i.*Omega).^2 + deltaF.^2;
R_fMinus_L = Y./D_f_L;
R_fPlus_L = (X_L+2.*i.*gammaFE.*Omega+Omega.^2)./D_f_L;
R_fMinus1_L = R_fPlus_L.*sin(fi0)+R_fMinus_L.*cos(fi0);
R_fPlus1_L = R_fPlus_L.*cos(fi0)-R_fMinus_L.*sin(fi0);
S_f1_L = R_fPlus1_L.*S_1+R_fMinus1_L.*C_1;
C_f1_L = R_fPlus1_L.*C_1-R_fMinus1_L.*S_1;
sigma_x_loss = 1./(4.*J.*Gamma.*cos(beta).*eta.*abs(C_f1_L).^2);
sigma_xF_loss = 1./2.*conj(S_f1_L./C_f1_L);
S_loss = 8.*hbar.*(sigma_F + 2.*real(conj(kappa-Omega.^2).*sigma_xF_loss)
+ conj(kappa-Omega.^2).*(kappa-Omega.^2).*sigma_x_loss)
./(M.*L.^2.*Omega.^4);

gamFE = gammaFE;

```

```

gammaFE=0;
X = gammaFI.^2 - gammaFE.^2- deltaF.^2;
gammaF = gammaFE + gammaFI;
D_f = (gammaF - i.*Omega).^2 + deltaF.^2;
R_fMinus = Y./D_f;
R_fPlus = (X+2.*i.*gammaFE.*Omega+Omega.^2)./D_f;
R_fMinus1 = R_fPlus.*sin(fi0)+R_fMinus.*cos(fi0);
R_fPlus1 = R_fPlus.*cos(fi0)-R_fMinus.*sin(fi0);
S_f1 = R_fPlus1.*S_1+R_fMinus1.*C_1;
C_f1 = R_fPlus1.*C_1-R_fMinus1.*S_1;
sigma_x = 1./(4.*J.*Gamma.*cos(beta).*eta.*abs(C_f1).^2);
sigma_xF = 1./2.*conj(S_f1./C_f1);
S = 8.*hbar.*(sigma_F + 2.*real(conj(kappa-Omega.^2).*sigma_xF)
+ conj(kappa-Omega.^2).*(kappa-Omega.^2).*sigma_x)
./(M.*L.^2.*Omega.^4);

S = real(S);
h = sqrt(S);
n = (h).^2;

S_loss = real(S_loss);
h_loss = sqrt(S_loss);
n_loss = (h_loss).^2;

ynew_loss=n_loss;
ys = y1 + y2 + y3 + y4 + y9 + y10;
ysdim = ys - y1;
ysdim = ysdim/3;
ys_loss = ysdim + ynew_loss;
ys = y1 + ysdim;

ysnew = ysdim+ n;

etanol = (1./ys)*intz';
a = (1./ysnew)*intz'
a_loss = (1./ys_loss)*intz'

```

```

figure;
hndls = loglog(f,sqrt(n),'b-',...      % New quantum noise
              f,sqrt(y1),'g-',...      % Old quantum noise
              f,sqrt(ys),'m-',...% Old total noise
              f,sqrt(ysdim),'y-',...%better technical noise
              f,sqrt(ysnew),'k-',...   % New total noise
              f,sqrt(ynew_loss),'r-',... % Loss quantum noise
              f,sqrt(ys_loss),'c-')    % Loss total noise

    set(hndls(1:7),'LineWidth',3);

dF = num2str(deltaF);
gFI = num2str(gammaFI);
gm = num2str(gamma);
dl = num2str(delta);
fi = num2str(fi0);
gain_noise = num2str(a_loss/etanol);
gain_noisless = num2str(a/etanol);
str1 = strcat(['\delta_f = ' dF ' , \gamma_{fI} = ' gFI ' , \gamma = ' gm]);
str2 = strcat(['\delta = ' dl ' , \phi0 = ' fi ]);
str3 = strcat(['gain_{noise} = ' gain_noise , ' ,
gain_{noisless}' gain_noisless]);
legend('New quantum noise',...
      'Old quantum noise',...
      'Old total noise',...
      'technical noise',...
      'New total noise',...
      'Loss quantum noise',...
      'Loss total noise',...
      str1,...
      str2,...
      str3);

xlabel('\it Frequency (Hz)');
ylabel('h(f) / Hz^{1/2}');
grid;
axis([f(1),f(3000),1e-25,3e-21]);
b = num2str(gamFE);
c = strcat({'\gamma_f_E = '},b);
c = strcat({'Optimisation result for '},c);

```

```

title(c);
return

function vdan = zagotovka();
fs = 10;
fn = 1570;
N=3000;
for i = 1:N
    A = fs*(fn/fs)^(-1/(N-1));
    B = log(fn/fs)/(N-1);
    vdan (i)= 1/(f1(i)^(7/3))*A*B*exp(B*i);
end
return

function yz = f1(n);
fs = 10;
fn = 1570;
N=3000;
yz = fs*(fn/fs)^((n-1)/(N-1));
return

```

## Список литературы

- [1] A.Abramovici *et al*, Science **256**, 325 (1992).
- [2] B. Caron *et al.*, Classical and Quantum Gravity **14**, 1461 (1997).
- [3] Ando M. *et al.*, Physical Review Letters **86**, 3950 (2001).
- [4] B.Willke *et al.*, Classical and Quantum Gravity **19**, 1377 (2002).
- [5] <http://www.ligo.caltech.edu>.
- [6] <http://geo600.aei.mpg.de>.
- [7] <http://tamago.mtk.nao.ac.jp>.
- [8] <http://wwwcascina.virgo.infn.it>.
- [9] V.B.Braginsky, A.B.Manukin, M.Y.Tikhonov, "Sov. Phys. JETP"**58**, **1550** (1970)
- [10] V.B.Braginsky, Yu.I.Vorontsov UFN, **114**, 41-53 (1974)
- [11] N.Wiener, P.Massani The prediction theory of multivariable stochastic processes. Acta Math, June 1958
- [12] С.А.Ахманов, Ю.Е.Дьяков, А.С.Чиркин Введение в статистическую радиофизику и оптику. Москва, «Наука», 1981
- [13] A.Buonanno, Y.Chen, Phys. Rev. D **64**, 042006 (2001)
- [14] A.Buonanno, Y.Chen, Phys. Rev. D **65**, 042001 (2002)
- [15] A.Buonanno, Y.Chen, Phys. Rev. D **67**, 062002 (2003)
- [16] Kondrashov et al. arXiv:0806.1505v2 (2008) [gr-qc]
- [17] K.S.Thorne, The scientific case for mature ligo interferometers, 2000, ([www.ligo.caltech.edu/docs/P/P000024-00.pdf](http://www.ligo.caltech.edu/docs/P/P000024-00.pdf)).
- [18] <http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO>.
- [19] V.B.Braginsky, F.Ya.Khalili, Physics Letters A **257**, 241 (1999).
- [20] F.Ya.Khalili, Physics Letters A **288**, 251 (2001).
- [21] I.A.Bilenko, A.A.Samoilenko, Vestnik Moscovskogo Universiteta, series 3 **4**, 39 (2003).

- [22] V.I.Lazebny, S.P.Vyatchanin, Physics Letters A **344**, 7 (2005).
- [23] F.Ya.Khalili, V.I.Lazebny, and S.P.Vyatchanin, Physical Review D **73**, 062002 (2006).
- [24] S.P.Vyatchanin and A.B.Matsko, Sov.Phys. JETP **83**, 690 (1996).
- [25] H.J.Kimble, Yu.Levin, A.B.Matsko, K.S.Thorne and S.P.Vyatchanin, Physical Review D **65**, 022002 (2002).
- [26] F.Ya.Khalili, Physical Review D **75**, 082003 (2007).
- [27] F.Ya.Khalili, arXiv:gr-qc/0609058 (2006).
- [28] L. R. Y. Konstantin A. Postnov, Living Reviews in Relativity **9** (2006).
- [29] <http://www.minigrail.nl/>
- [30] <http://www.lnf.infn.it/esperimenti/rog/home.html>
- [31] <http://www.auriga.lnl.infn.it/>
- [32] <http://lisa.nasa.gov/>
- [33] Joseph Webber, Phys. Rev. Lett. **20**, 1307 (1968).
- [34] James L. Levine, Physics in Perspective **6**, 42 (2004).
- [35] The LIGO Scientific Collaboration arXiv:0711.3041 (2007) [gr-qc]

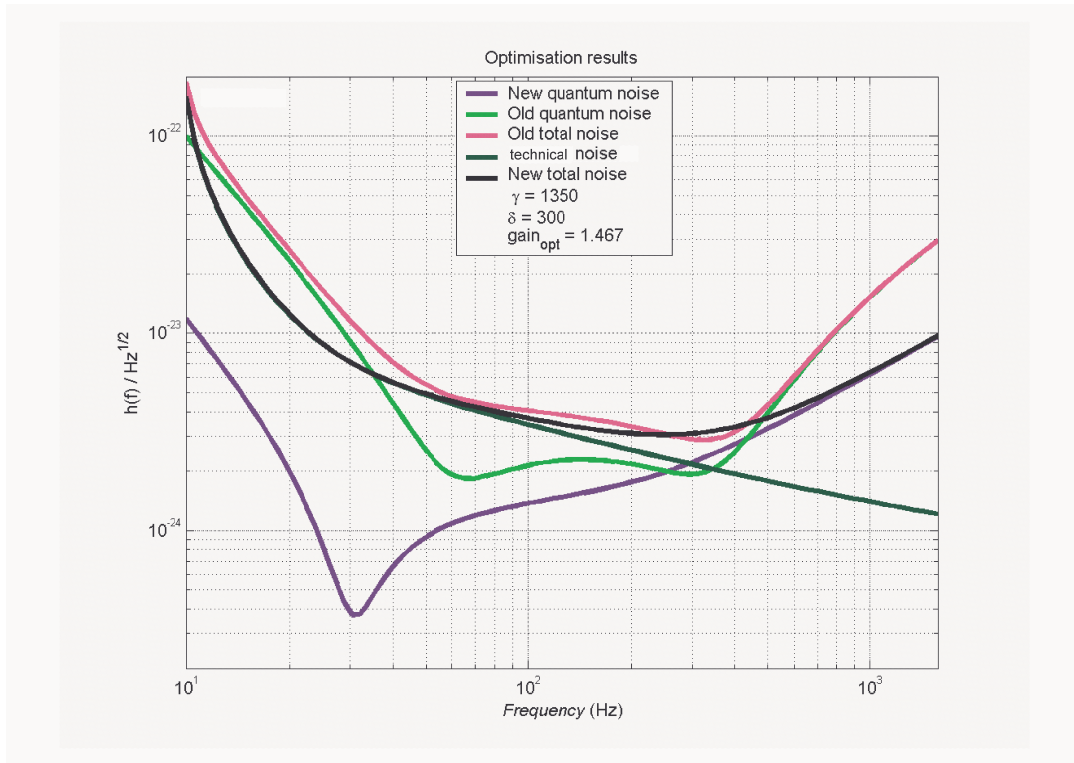


Рис. 7: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с идеальной вариацией. Случай без потерь в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами. Светло-зеленой линией и розовой линиями обозначены квантовый и полный шумы эталонной конфигурации, красной и голубой, соответственно, квантовый и полный шумы рассматриваемой конфигурации. Темно-зеленой линией обозначены технические шумы.  $gain_{noise}$  - это величина  $G_{S/N}$

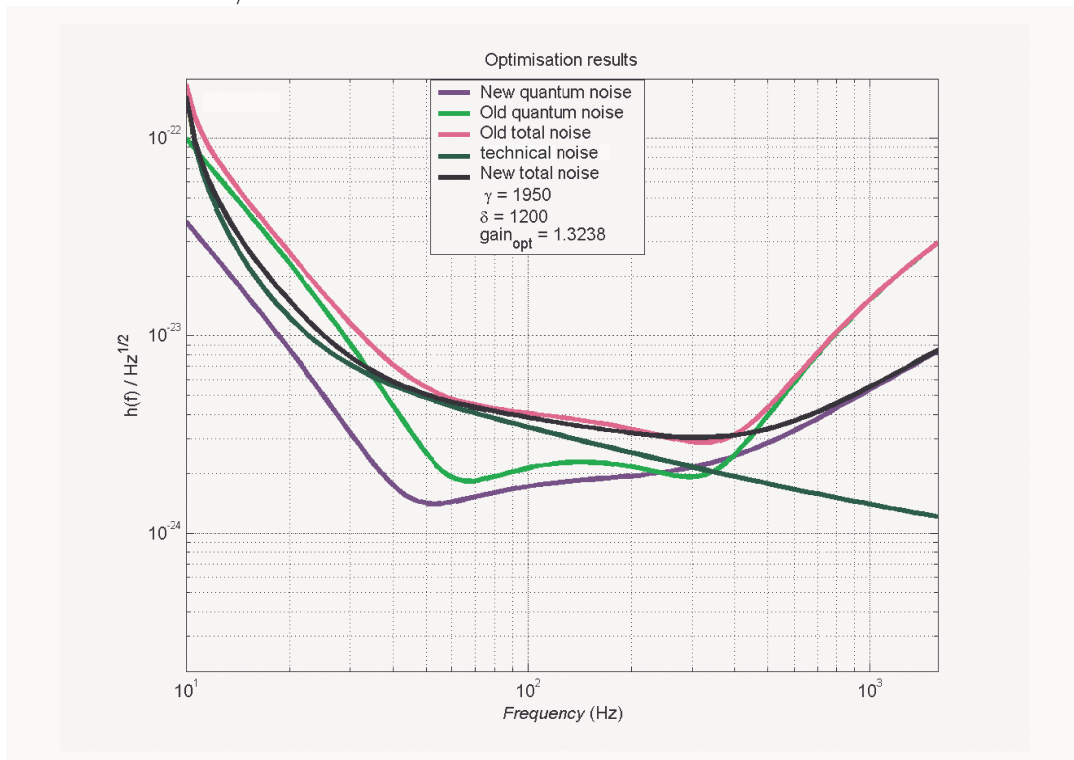


Рис. 8: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с идеальной вариацией. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом



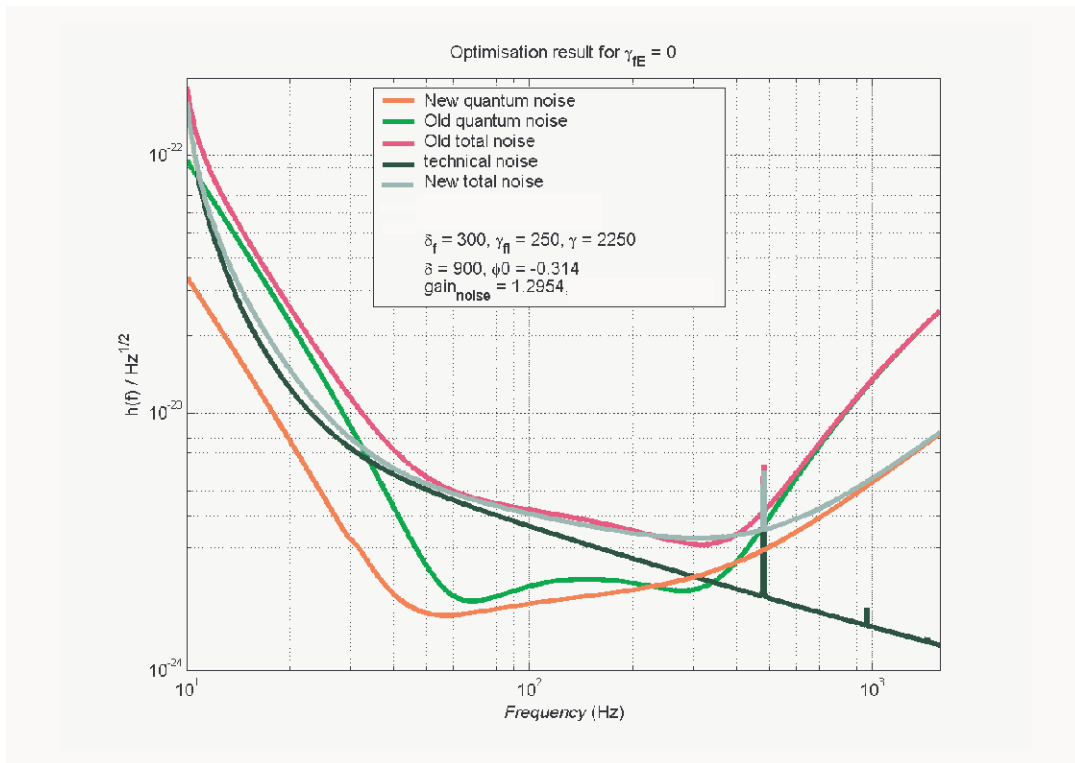


Рис. 9: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором без потерь. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами.

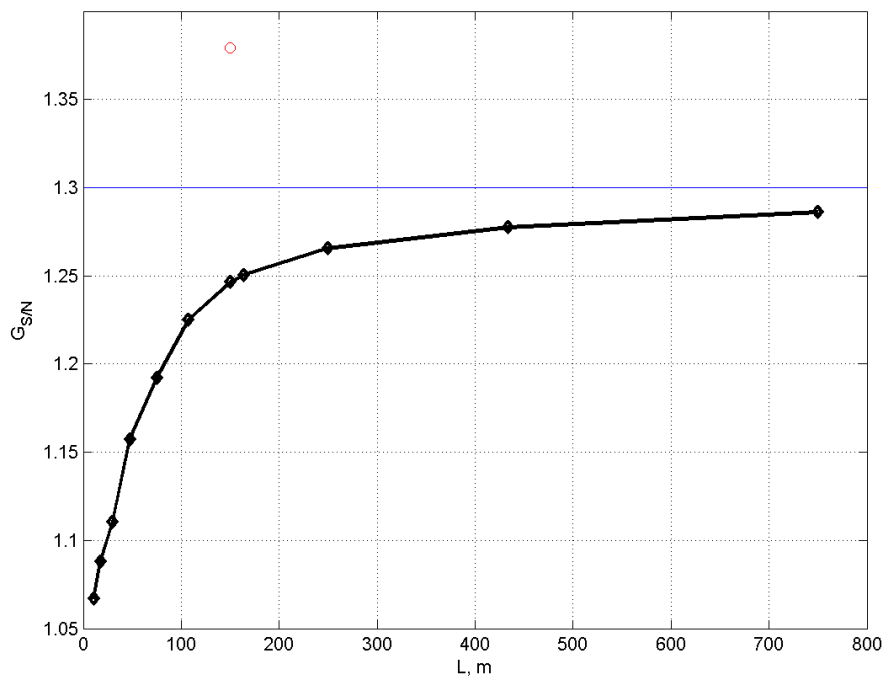


Рис. 10: Зависимость выигрыша в отношении сигнал/шум схемы Advanced LIGO с фильтрующим резонатором от длины фильтрующего резонатора. Случай с потерями в основном резонаторе. Конфигурация с текущими шумами.

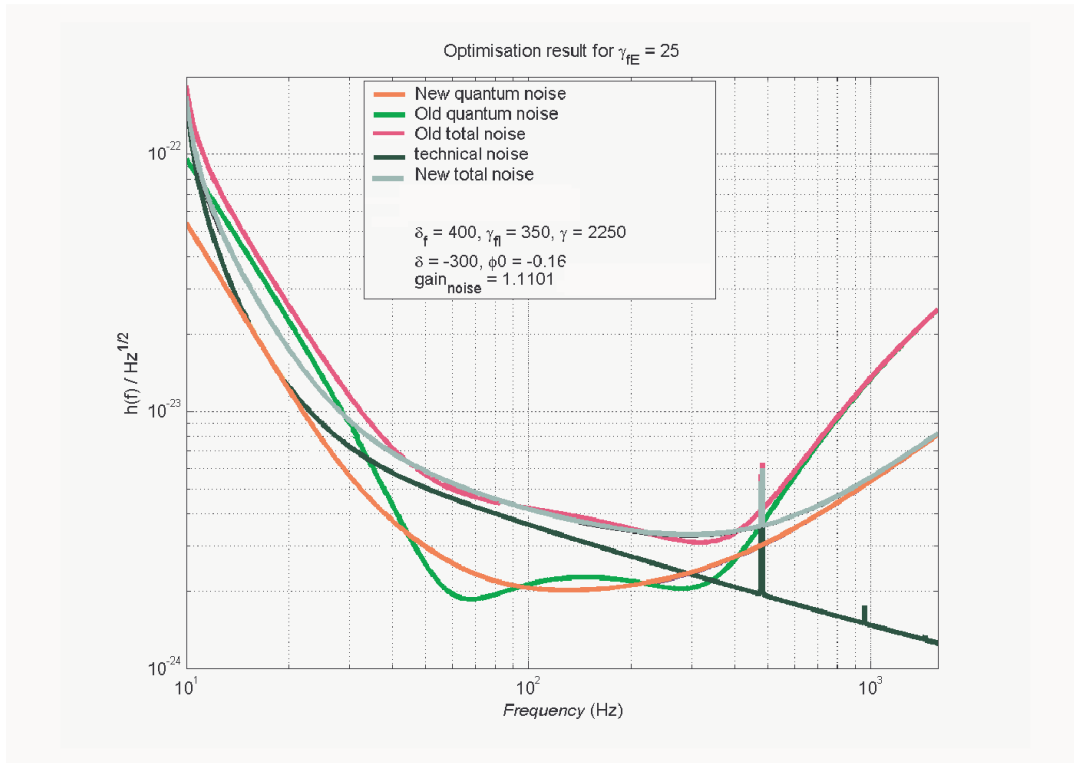


Рис. 11: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором с потерями. Длина резонатора 30 метров. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами.

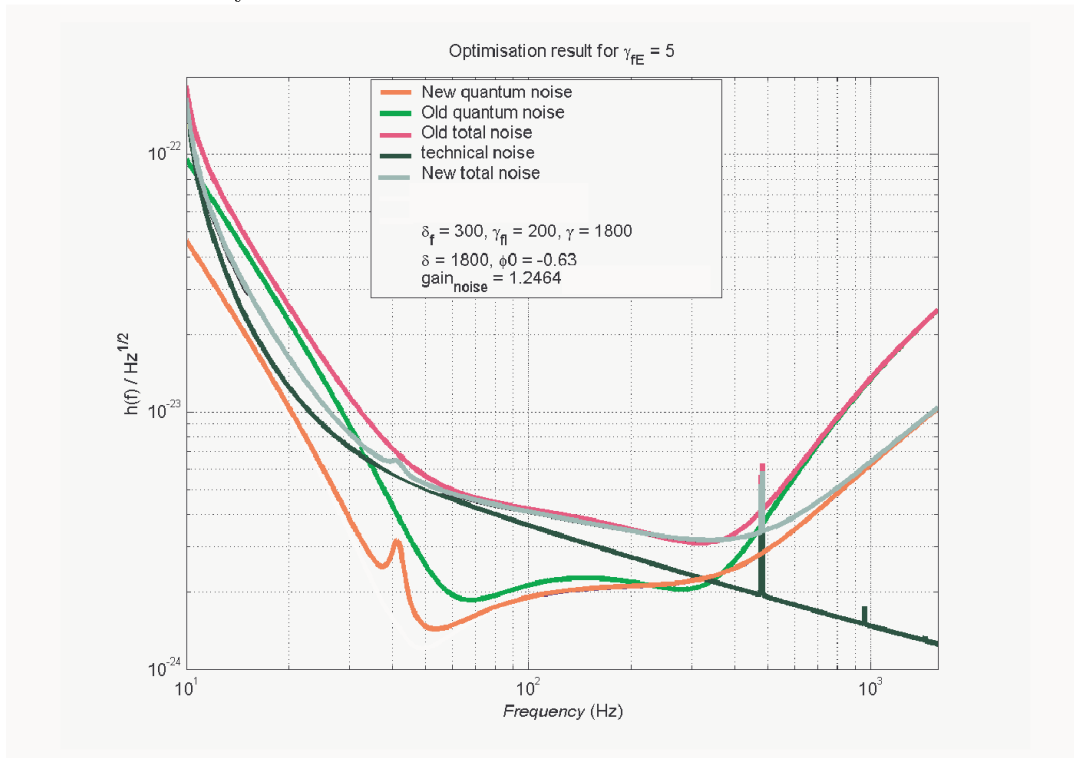


Рис. 12: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором с потерями. Длина резонатора 150 метров. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами.

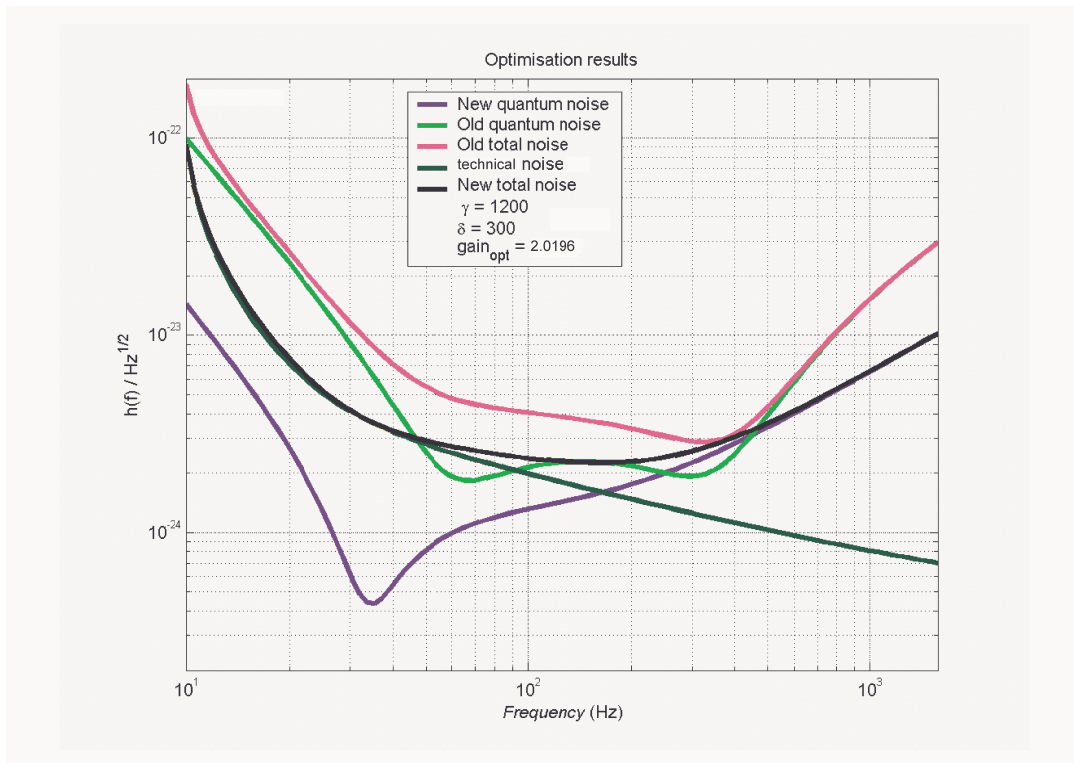


Рис. 13: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с идеальной вариацией. Случай без потерь в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами.

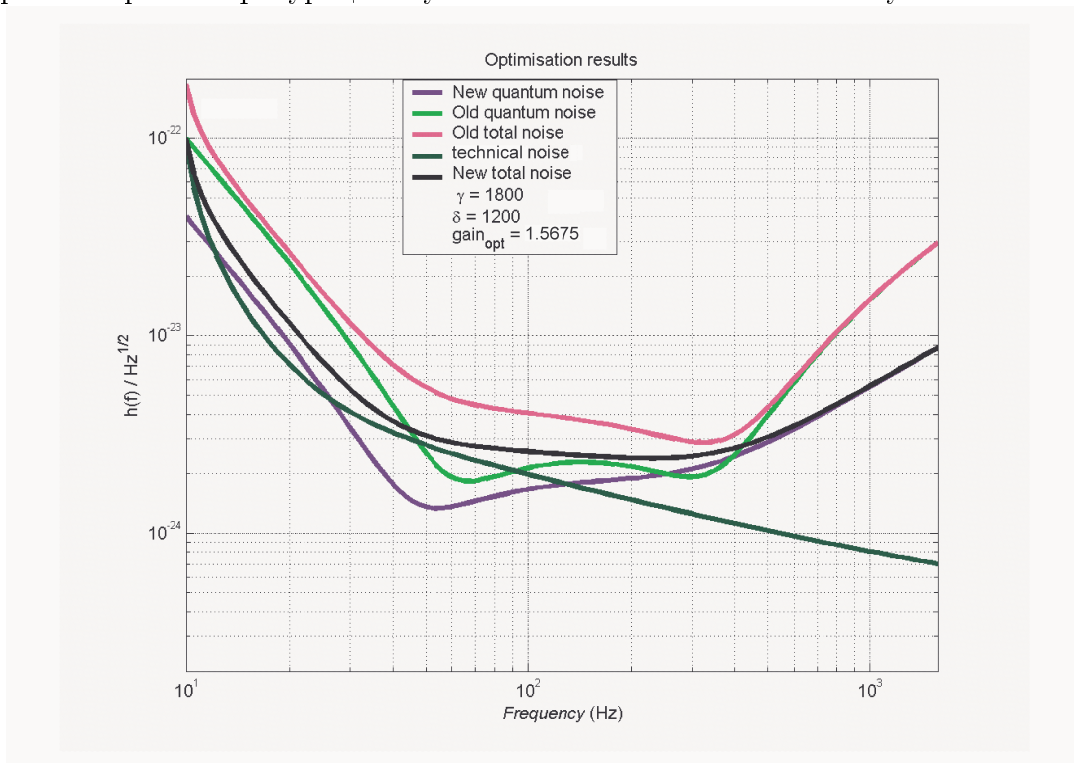


Рис. 14: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с идеальной вариацией. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами.

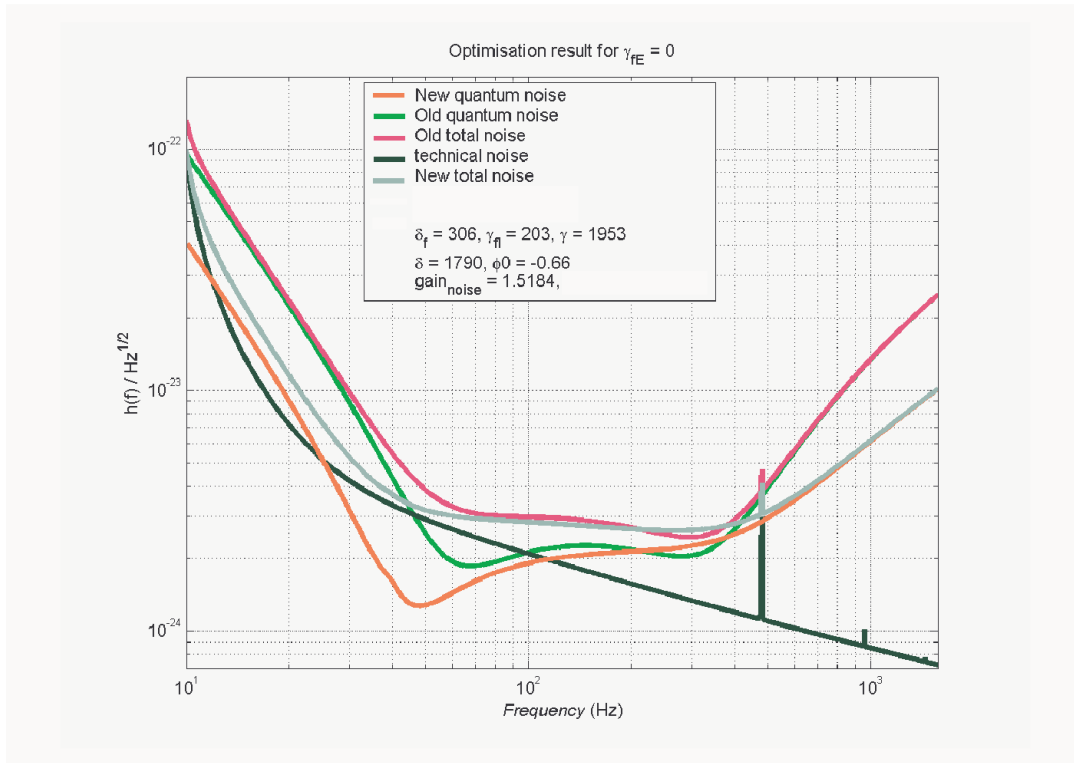


Рис. 15: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором без потерь. Случай с потерями в фотодетекторе и эквивалентом резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами.

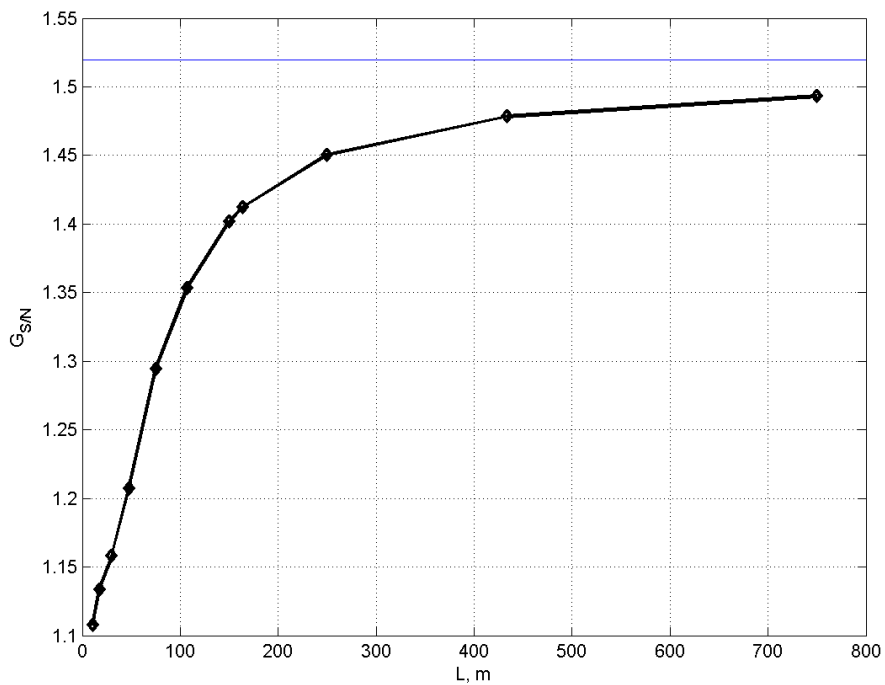


Рис. 16: Зависимость выигрыша в отношении сигнал/шум схемы Advanced LIGO с фильтрующим резонатором от длины фильтрующего резонатора. Случай с потерями в основном резонаторе. Конфигурация с уменьшенными шумами.

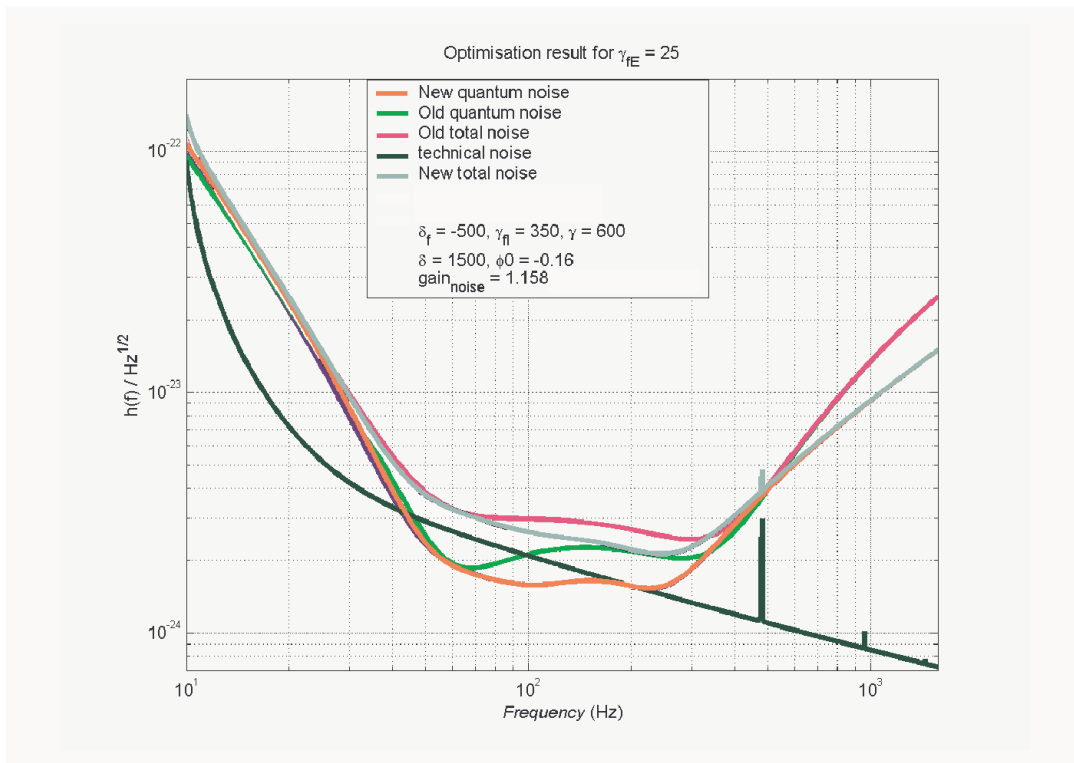


Рис. 17: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором с потерями. Длина резонатора 30 метров. Случай с потерями в фотодетекторе и основном резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами.

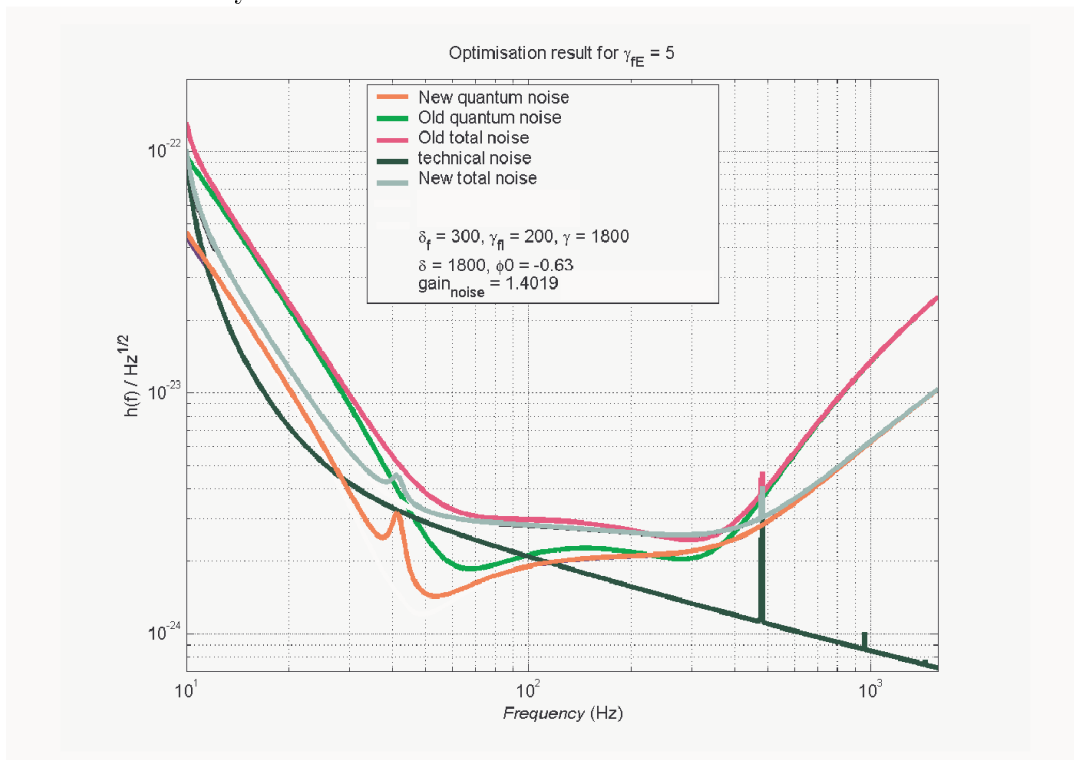


Рис. 18: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором с потерями. Длина резонатора 150 метров. Случай с потерями в фотодетекторе и основном резонаторе. Конфигурация с уменьшенными техническими шумами.

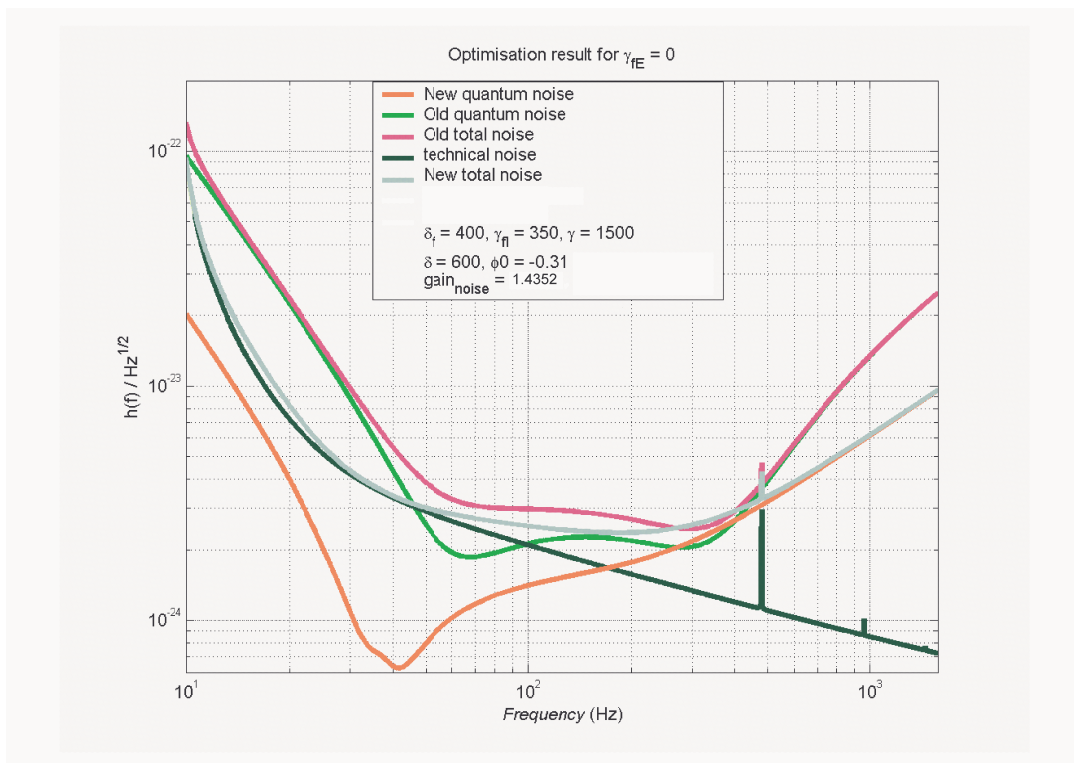


Рис. 19: Оптимальная спектральная плотность и оптимизированные параметры для схемы с фильтрующим резонатором без потерь. Случай без потерь в фотодетекторе и основном резонаторе. Конфигурация с текущими техническими шумами.