

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА КОЛЕБАНИЙ

**Оптические микронаторы в квазигеометрическом
приближении.**

Выполнил студент 220 группы

Демченко Юрий Анатольевич.

Научный руководитель: Городецкий М. Л.

Москва 2009

Введение

Целью работы является изучение свойств оптических микрорезонаторов с модами типа шепчущей галереи [1] в лучевом приближении.

Особые спектральные характеристики резонаторов с модами типа шепчущей галереи, которые включают узкую линию, перестраиваемость и высокую стабильность по отношению к внешним условиям, делают их весьма привлекательными для множества практических применений.

Одним из наиболее быстро развивающихся направлений в исследовании микрорезонаторов с модами типа шепчущей галереи, вышедших на коммерческие применения, являются сегодня фотонные фильтры. При этом резонаторы оптического диапазона используются для создания фильтров, выделяющих и фильтрующих сигналы в СВЧ и радиочастотном диапазоне. Оптические микрорезонаторы также используются для стабилизации частоты в оптическом и микроволновом диапазоне.

Большая добротность и большое время циркуляции света в резонаторах открывают новые возможности для спектроскопии. Появляется возможность создания новых датчиков и сенсоров, в которых изменение добротности или резонансной частоты может служить для измерения свойств окружающей среды или малого объёма вещества.

Объёмным резонатором электромагнитных волн является некоторое устройство, в котором вследствие граничных условий образуется стоячая или бегущая по замкнутому пути волна, амплитуда которой затухает при отсутствии подкачки энергии за время много большее периода колебаний. В отличие от устройств с сосредоточенными параметрами типа колебательного контура или полуволнового отрезка длинной линии в объёмном резонаторе все размеры порядка или много больше длины волны в среде, заполняющей резонатор.

Свойства объёмного резонатора определяется свойствами его границ и заполняющей его среды.

Все электромагнитные свойства резонаторов следуют из уравнений Максвелла. Поле в резонаторе можно записать в виде:

$$E(\mathbf{r}, t) = a(t)e^{i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

При этом временная часть подчиняется дифференциальному уравнению колебаний, а пространственное уравнение подчиняется векторному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2)$$

Добротность.

Важнейшей величиной, характеризующей резонаторы, является добротность. Существуют различные эквивалентные определения этой величины. Одно из определений:

$$Q = \omega \frac{\text{Энергия, запасенная в резонаторе}}{\text{мощность потерь}} \quad (3)$$

В установившемся режиме мощность потерь равна мощности, закачиваемой в резонатор. Полная собственная добротность оптических микрорезонаторов определяется следующим соотношением:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{\text{излуч}}} + \frac{1}{Q_{\text{вн}}} + \frac{1}{Q_{\text{пов}}} . \quad (4)$$

$Q_{\text{изл}}$ описывает излучательные потери, обусловленные внутренним отражением от выпуклой поверхности.

$Q_{\text{вн}}$ описывает затухание поля внутри резонатора (потери на рассеяние и поглощение). Поглощение обусловлено взаимодействием излучения с атомными и решеточными переходами. На практике оно обычно связано с наличием примесей и дефектов в атомной структуре. Поглощение света происходит при взаимодействии фотонов с электронами и колебательными состояниями вещества.

$Q_{\text{пов}}$ описывает потери на поверхности резонатора. Свойства поверхности оказывают заметное влияние на свойства мод и на их добротность. В частности, остаточная шероховатость поверхности резонатора должна приводить к рассеянию и, следовательно, к ухудшению добротности. Поверхностное поглощение может быть вызвано, например, потерями в слое адсорбированной на поверхности резонатора воды.

Резонаторы с модами типа шепчущей галереи.

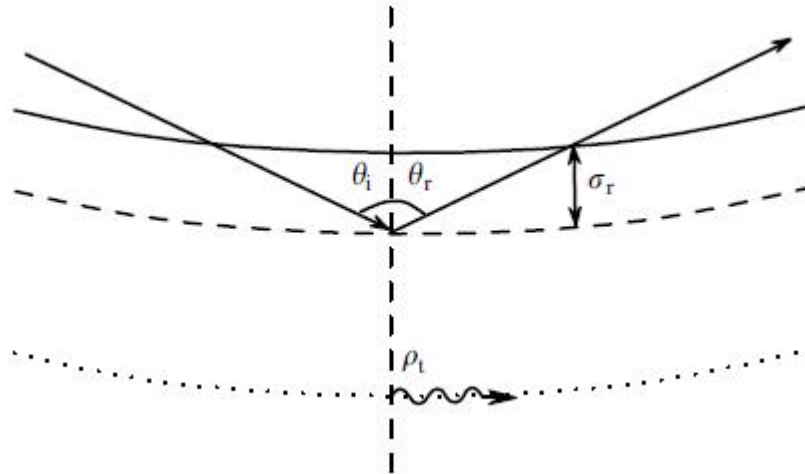
В экспериментальной физике и радиотехнике успешно применяют СВЧ-резонаторы, основанные на эффекте полного внутреннего отражения в осесимметричных диэлектрических телах, которые называются резонаторами с модами “шепчущей галереи”. Такое название моды получили по аналогии с акустическими эффектами в “шепчущей галерее” собора Святого Павла в Лондоне, где люди, стоящие под куполом далеко друг от друга могут общаться шепотом.

Главной особенностью таких резонаторов является высокая добротность, составляющая в сапфировых СВЧ резонаторах около 10^8 при температуре жидкого азота и 10^9 при околотемиельных температурах. Добротности такого же порядка и даже выше получаются в оптическом диапазоне в резонаторах из плавленого кварца и кристаллического флюорита без всякого охлаждения. Идея этих резонаторов состоит в том, чтобы радикально уменьшить потери при отражении от границ, перейдя от нормального падения лучей к скользящему.

По сравнению с резонаторами типа Фабри-Перо резонаторы с модами типа “шепчущей галереи” имеют некоторые преимущества. Во-первых, они имеют меньший размер при той же самой добротности. У резонаторов с модами типа “шепчущей галереи” добротность растет с размерами экспоненциально, а у резонаторов типа Фабри-Перо добротность возрастает с увеличением размера лишь линейно. Во-вторых, у резонаторов с модами типа “шепчущей галереи” высокая добротность сохраняется в широком диапазоне частот, в отличие от высокодобротных резонаторов типа Фабри-Перо, у которых суперзеркала могут работать только в узком интервале частот, для которого эти зеркала были изготовлены. В-третьих, микрорезонаторы с модами шепчущей галереи имеют меньшую чувствительность к внешним механическим и акустическим воздействиям.

Излучательные потери в лучевом приближении.

При падении луча света на плоскую поверхность раздела под углом, большим угла полного внутреннего отражения отражение будет практически полным. Потери возникают из-за выпадения поля волны. Выпадающее поле волны движется вдоль изогнутой поверхности с радиусом кривизны r_{cv} с тангенциальной скоростью $v_t = \omega / k_t = c / (n_i \sin \theta_i)$ (где c – скорость света во внешней среде) и при удалении от поверхности фазовые фронты двигаются с постоянной скоростью. Однако на расстоянии $\rho_t = r_{cv} c / v_t = r n \sin \theta$ от центра кривизны эта скорость сравнивается со скоростью света и “хвост” выпадающего поля, дошедший до этой границы излучается по касательной и не может вернуться поэтому назад в первую среду. В отличие от отражения от плоской поверхности, убывание выпадающего поля происходит не по экспоненте, а по закону



$$E = E_i \tau_f \exp(i \int k_p(\rho) d\rho), \text{ где} \quad (5)$$

$$k_p(\rho) = \sqrt{k^2 - \left(\frac{k_t r_{cv}}{\rho}\right)^2} = ik \sqrt{\left(\frac{r_{cv} n \sin \theta_i}{\rho}\right)^2 - 1}. \quad (6)$$

На расстоянии ρ_t затухание прекращается и k_p из мнимого становится действительным, а значит, начинается излучение. Таким образом, беря интеграл, мы получаем окончательное выражение [2]:

$$\tau = |T_f|^2 \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{n \cos \theta_i} \exp \left[-2k \int_{r_{cv}}^{\rho_t} \sqrt{\left(\frac{r_{cv} n \sin \theta_i}{\rho}\right)^2 - 1} d\rho \right] = \frac{2nP \cos \theta_i \sqrt{n^2 \sin^2 \theta_i - 1}}{n^2 - 1 - n^2(1 - P^2) \cos^2 \theta_i} e^{-2\psi(\theta_i)},$$

$$\text{где } \psi(\theta_i) = kr_{cv} \left[n \sin \theta \arccos h(n \sin \theta_i) - \sqrt{n^2 \sin^2 \theta_i - 1} \right]. \quad (7)$$

Здесь P – параметр, определяющий поляризацию волны. Он равен 1 для ТЕ волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения и $1/n^2$ для ТМ волны, поляризованной в плоскости падения.

Чтобы оценить собственную добротность мод типа шепчущей галереи в квазиклассическом приближении нужно учесть потери внутренних лучей при каждом отражении от поверхности резонатора. Добротность определяется выражением $Q = \frac{2\pi n}{\alpha \lambda}$, где α соответствует потерям на единицу длины пути луча. Путь можно представить в виде отрезков ломаной, длина каждого из которых $L_n = 2r_{cv} \cos \theta$, где r_{cv} – радиус

кривизны геодезической кривой на поверхности. Пусть потери энергии при отражении на данном отрезке равны $\alpha_n = \frac{\tau(\theta, r_{cv})}{L_n}$. Усредняя α_n по одному витку геодезической кривой, касающейся верхнего каустического контура на расстоянии z_m от экватора, спускающегося вниз до нижнего каустического контура $-z_m$ и возвращающегося назад, получим полные потери:

$$Q = \frac{2\pi n L_g}{\lambda} \left[\oint \frac{\tau(\theta)}{2r_{cv}(\theta) \cos\theta} dl \right]^{-1} = \frac{2\pi n L_g}{\lambda} \left[\int_{-z_m}^{z_m} \frac{\tau(\theta)}{r_{cv}(\theta) \cos\theta} \frac{dl}{dz} dz \right]^{-1}. \quad (8)$$

Это выражение можно использовать для оценки добротности в произвольных диэлектрических резонаторах с модами типа шепчущей галереи, причем не только для вычисления излучательной добротности, но и для расчета потерь на рассеяние и поглощение на поверхности.

Метод эйконала

Аналогом квазиклассического приближения в волновой оптике является приближение геометрической оптики, которое математически выражается в методе эйконала. Такое асимптотическое приближение позволяет не только весьма просто описывать распространение излучения в неоднородных средах, но и решать различные граничные задачи, например, дифракционное рассеяние. Лучевое приближение рассматривается как асимптотическое решение скалярного волнового уравнения Гельмгольца.

Асимптотическое решение волнового уравнения в приближении медленного в масштабе длины волны изменения показателя преломления и граничных условий можно искать в виде плоских волн с медленно меняющимися в пространстве амплитудами и фазами. Можно воспользоваться разложением поля по обратным степеням волнового числа k_0 , которое предложил Дебай:

$$\psi(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(r)}{(ik_0)^m} e^{ik_0 S(r)}. \quad (9)$$

После подстановки этого ряда в уравнение Гельмгольца и приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях k_0 получается бесконечная система связанных уравнений:

$$\begin{aligned} (\nabla S)^2 &= n^2 \\ 2(\nabla A_0 \nabla S) + A_0 \Delta S &= 0 \\ 2(\nabla A_m \nabla S) + A_m \Delta S &= -2m A_m \nabla S \cdot \nabla \left(\frac{1}{k_0} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Функцию $S(r)$ называют эйконалом, а первое уравнение системы принято называть уравнением эйконала. Эйконал S имеет размерность длины и имеет смысл оптического пути. Полученная система проще исходного уравнения Гельмгольца второго порядка, поскольку состоит из уравнений в частных производных первого порядка. С помощью этой системы в принципе можно получить решение уравнения Гельмгольца с любой точностью. Для анализа мод типа шепчущей галереи можно воспользоваться первым уравнением, не рассматривая остальные. Как было показано, рассматриваемый практически в работе лучевой подход тесно связан с методом эйконала.

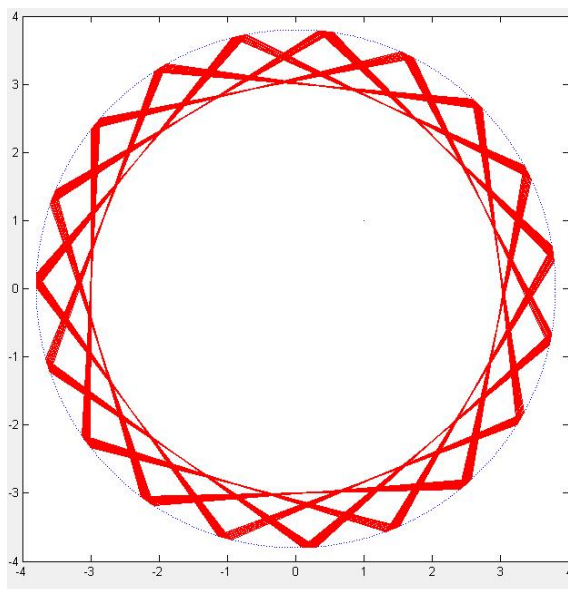
Практическая часть.

Для выполнения практической части была написана программа с помощью пакета Matlab, которая рассчитывает добротность двумерного резонатора (или, что эквивалентно, трехмерного цилиндрического, колебания в котором не зависят от z) на основе выражений (7) с некоторыми приближениями. Во-первых, рассматривается приближение лучевой оптики. Свет отражается строго от внутренней поверхности резонатора. И при каждом отражении часть энергии волны теряется.

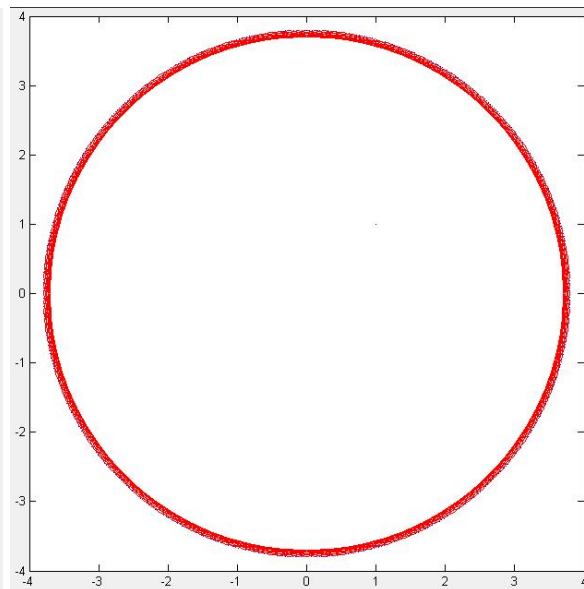
Для работы программы необходимо задать форму резонатора, которая задается параметрически (задается функция координаты x и y от угла поворота относительно оси ox). Длина волны света остается для определенности неизменной, и равной 0.63 мкм (длина волны гелий-неонового лазера). Пользователь также может задать отношение начальной и конечной энергии волны, когда вычисления нужно остановить. Для корректной работы программы необходимо, чтобы число отражений было как можно больше. При расчете добротности предполагается, что при большом числе отражений интенсивность луча ($I \sim E^2$) затухает в зависимости от пройденного пути экспоненциально.

$I = I_0 \exp(-\alpha L)$, где L пройденный путь, а α - затухание на единицу длины. Поэтому, чем больше отражений, тем с большей точностью потери можно считать непрерывными.

В программе предусмотрена возможность находить добротность тела, в котором свет пускается под заданным углом, и увидеть ход лучей в резонаторе.

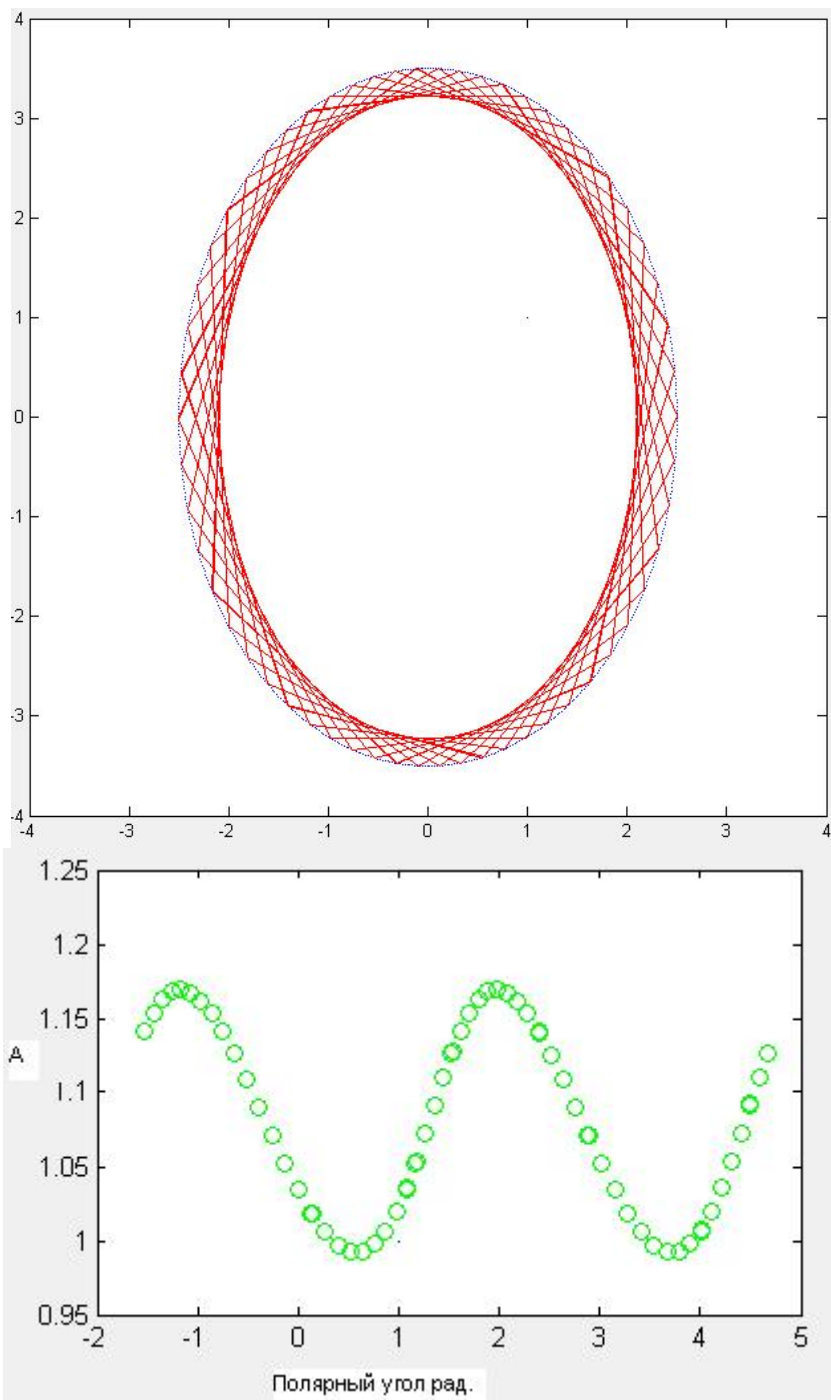


Угол падения 37,9 градуса



Угол падения 13 градусов

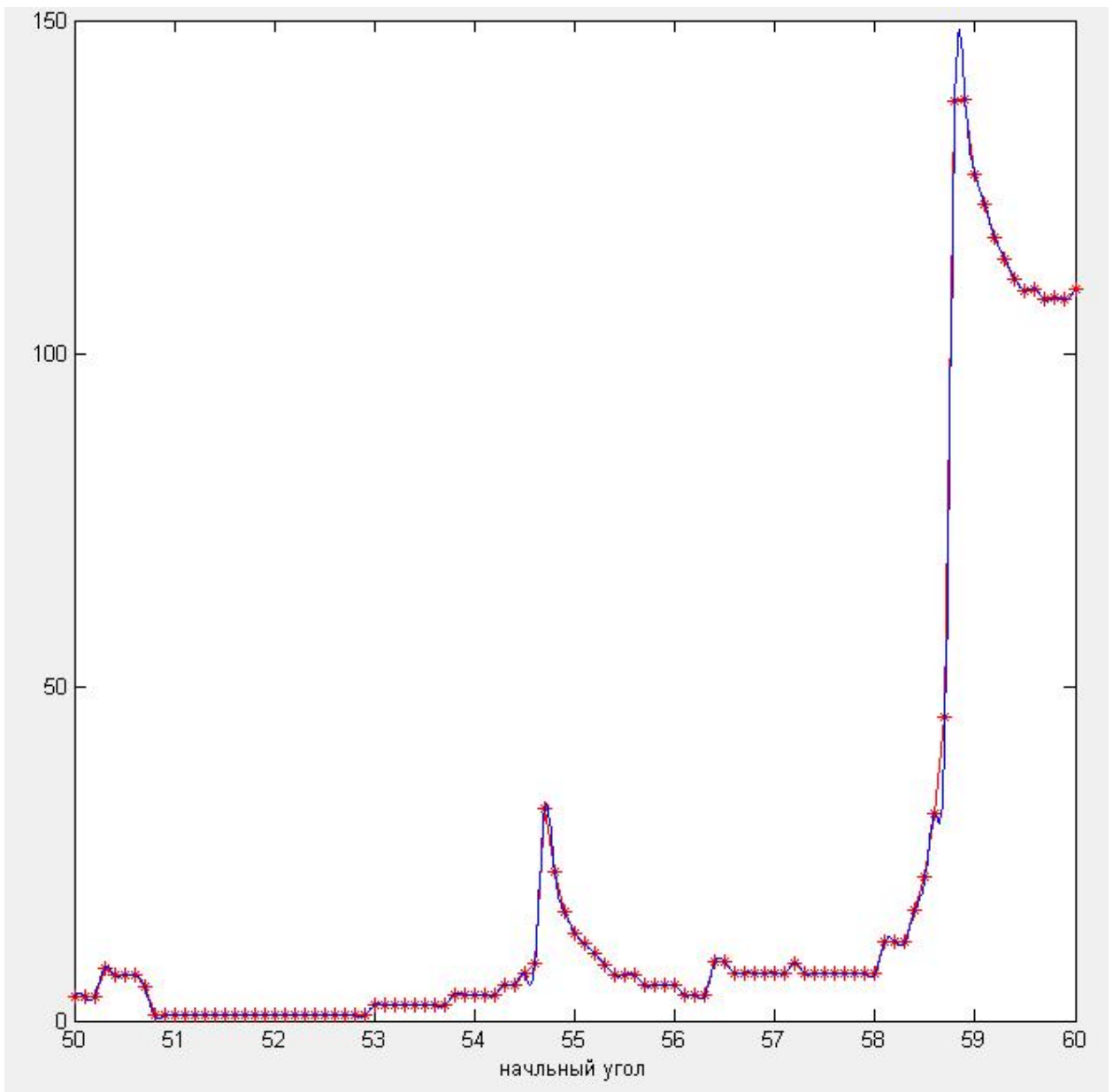
Круг - наиболее простая фигура и угол между касательной к поверхности и направлением распространения света остается постоянным. В других телах, например в эллипсе, угол между касательной к поверхности и направлением распространения света может изменяться:



Начальный угол 27 градусов.

A – угол между касательной к поверхности в точке падения света и направлением его распространения.

Также есть возможность получить график зависимости добротности резонатора в зависимости от исходно направления луча, который задается в некоторых пределах. С помощью этого графика можно отследить динамику изменения добротности в зависимости от угла падения. Например, для того же эллипса:



По оси у откладывается добротность. В данном примере кривизна тела большая, поэтому при больших углах почти вся энергия излучается при первом или втором отражении, поэтому график имеет горизонтальные участки.

Для некоторых тел, например для диэлектрического шара, добротность можно посчитать аналитически. Для заданного количества волн на окружности существуют формула, позволяющая найти угол падения волны: $\cos\theta = \frac{0.5+l}{nx}$, где x приблизительно равно числу длин волн на окружности, а строго он рассчитывается из характеристического уравнения. Для $l = 100$ получены теоретические результаты, данные в таблице, данной ниже.

С помощью программы были проверены теоретические результаты, полученные аналитически.

В таблице столбик Q_1 – теоретические результаты, а Q_2 – практические.

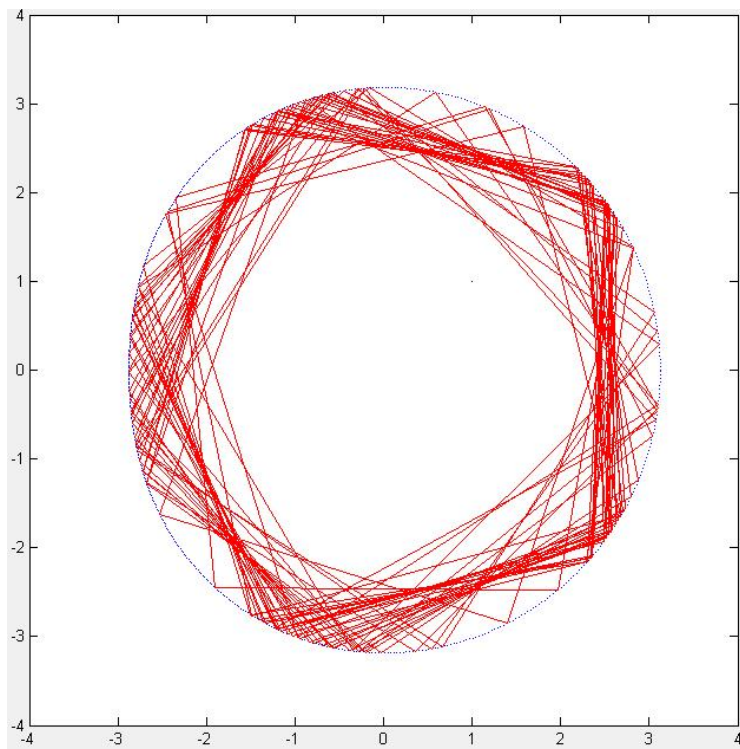
Тип	x	Q1	Q2
TE	96.102926	$7,144 \cdot 10^2$	$9,34 \cdot 10^2$
TE	89.627687	$1,206 \cdot 10^5$	$1,15 \cdot 10^5$
TE	82.721724	$3,280 \cdot 10^8$	$3,217 \cdot 10^8$
TE	78.752969	$9,907 \cdot 10^{10}$	$9,574 \cdot 10^{10}$
TE	74.053609	$2,422 \cdot 10^{14}$	$2,397 \cdot 10^{14}$
TM	98.966633	$2,330 \cdot 10^2$	$7,1 \cdot 10^1$
TM	90.037841	$6,892 \cdot 10^4$	$6,796 \cdot 10^4$
TM	83.159929	$2,066 \cdot 10^8$	$2,072 \cdot 10^8$
TM	79.2158	$6,423 \cdot 10^{10}$	$6,457 \cdot 10^{10}$
TM	74.536459	$1,690 \cdot 10^{14}$	$1,701 \cdot 10^{14}$

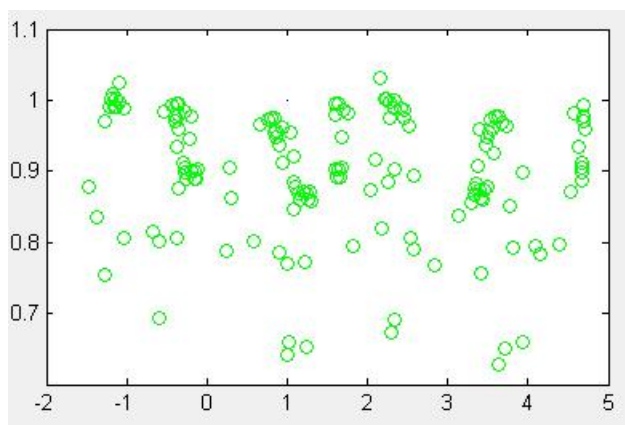
Наибольшая ошибка появляется при расчете малых и больших добротностей. Во-первых, это может быть связано с недостаточной точностью расчетов и накоплением ошибки по мере расчетов. Во-вторых, приближение геометрической оптики могут плохо работать для больших добротностей.

Следовательно, не учитываемые физические явления в остальных случаях не вносят значительную поправку, поэтому можно воспользоваться программой для расчета какого-нибудь тела, моды в котором не считаются аналитически. Возьмем, для примера неосесимметричную кривую, называемой лимаконом, которая задается выражением

$$\rho = a + b \cos\phi. \quad (11)$$

Известно, что начиная с некоторых углов падения в такой системе ход лучей становится хаотическим.





Угол падения 30 градусов.

Ход лучей в лимакоме при больших углах падения близких к хаотическому режиму. Для получения больших добротностей, порядка $10^6 - 10^{14}$ необходимо, чтобы угол падения был достаточно мал.

Например, при параметрах лимакона $\rho = 8 + 3 \cos(\phi)$ и угле 15 градусов добротность получается порядка $5,1 \times 10^6$. В силу несимметричности тела при практически таких же размерах, что и у круга, добротность получается на много порядков меньше.

Для сравнения в эллипсе с полуосями 6 и 9 добротность при угле падения 15 градусов получается примерно $9,5 \times 10^8$.

Заключение

В силу своих особенностей резонаторы с модами типа шепчущей галереи широко применяются на практике. С помощью написанной программы можно легко оценивать излучательную добротность двумерного резонатора произвольной формы. Программа может быть доработана для расчета 3D резонаторов.

Литература

1. Спецкурс «оптические микрорезонаторы» Лектор Д. ф-м. н. Городецкий М.Л.
2. М.Л. Городецкий, А.Е. Фомин, [Собственные частоты и добротность в геометрической теории мод шепчущей галереи](#), *Квантовая электроника*, **37**, 167 (2007)