

## Генерирование электрических колебаний

Коэффициент усиления с обратной связью:

$$K_{\beta} = \frac{K}{1 - \beta K}$$

$K$  и  $\beta$  — комплексные величины.

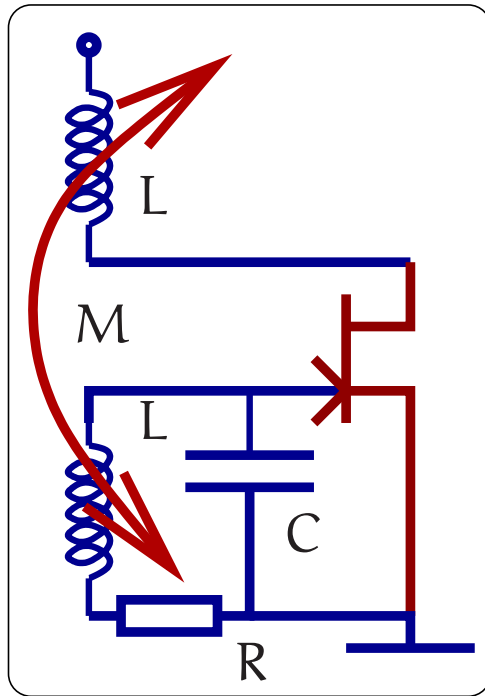
Условия самовозбуждения:

**баланс амплитуд:**  $|K| |\beta| = 1,$  (1)

**баланс фаз:**  $\varphi_K + \varphi_{\beta} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2 \dots$  (2)

Баланс амплитуд (1) и баланс фаз (2):

“выживают” только те колебания, у которых баланс есть.



### Простейший генератор

$q$  — заряд на конденсаторе  $C$ :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = M \frac{dI_{СИ}}{dt},$$

В лин. прибл.:  $I_{СИ} = S U_{ЗИ} = Sq/C$ ,

$$L\ddot{q} + \left( R - \frac{MS}{C} \right) \dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

В линейном приближении:

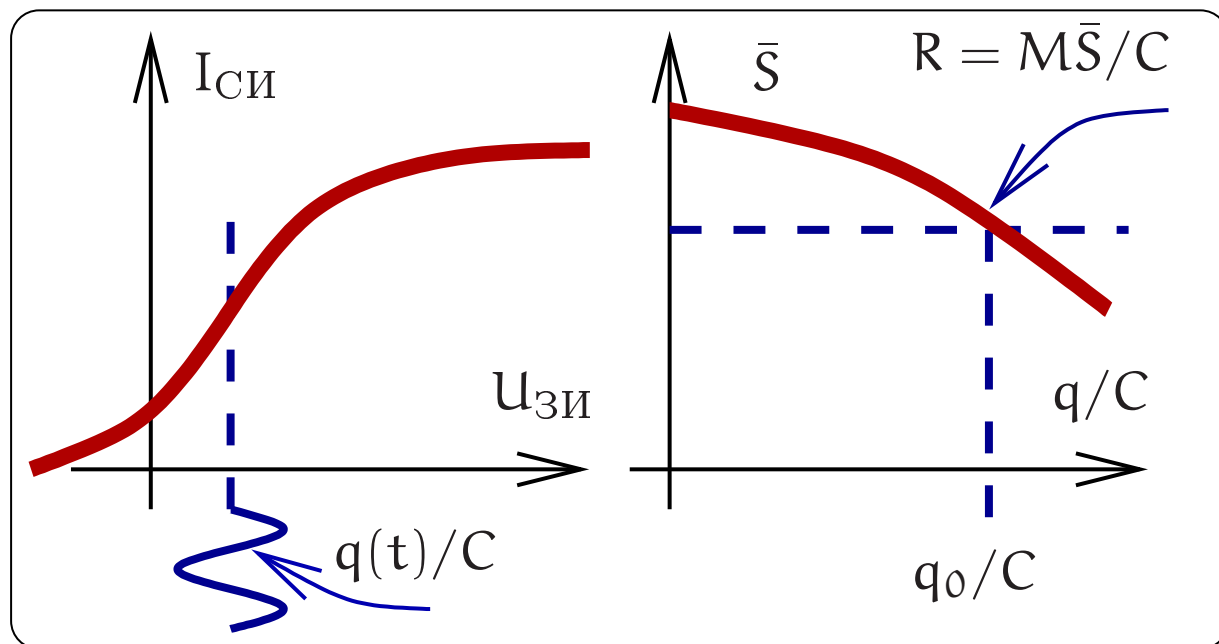
$$q(t) = q_0 \exp\left(-\left[R - \frac{MS}{C}\right] \frac{t}{L}\right) \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Это корректно, если  $[R - \frac{MS}{C}] / L \ll \frac{\omega_0}{2\pi}$ ,  $\omega_0 \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

В общем случае:  $S(q, U_{\pm})$  — **нелинейная** функция.

Учтем нелинейную зависимость  $S(q)$ .

### Мягкий режим возбуждения

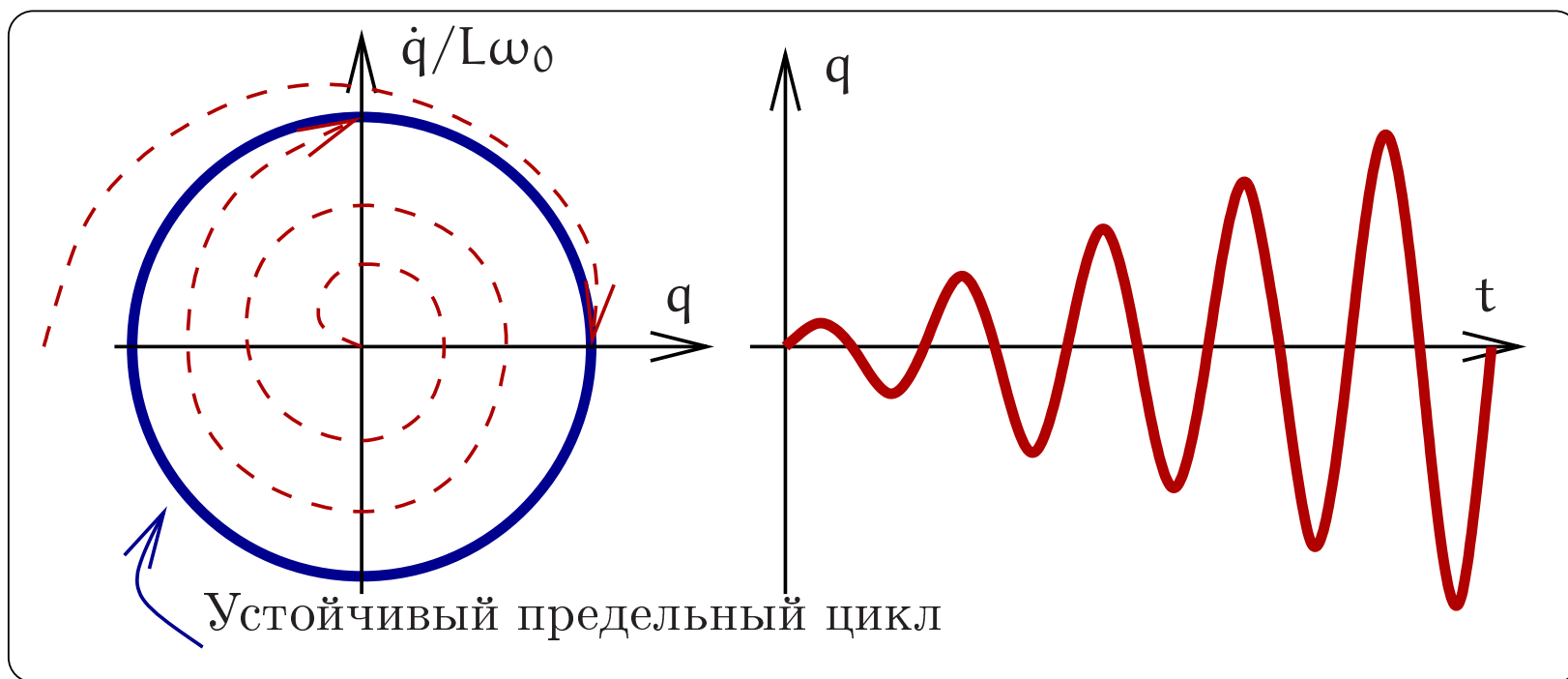


**Автоколебания возникают от нуля (!)**

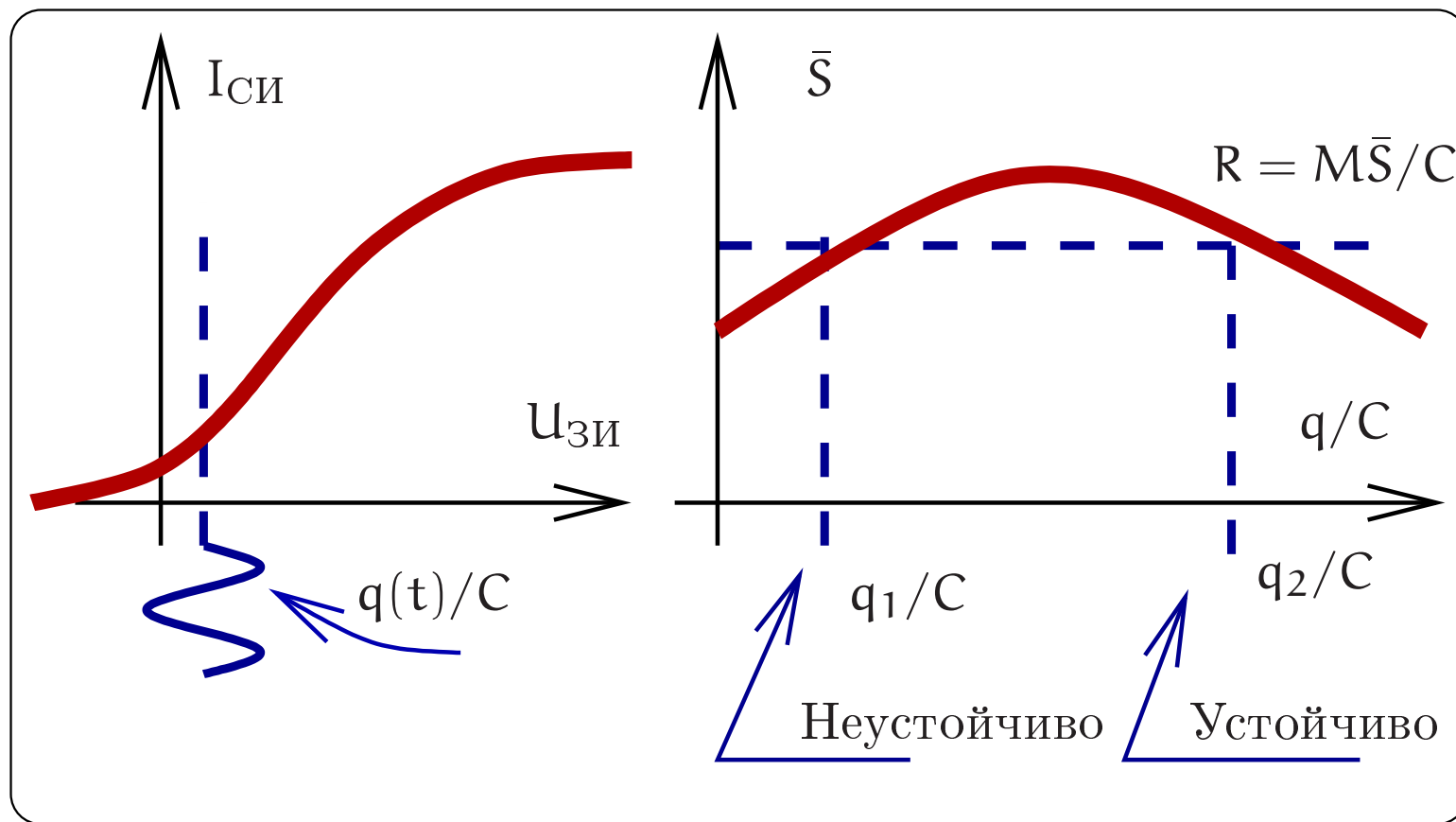
Можно считать  $\bar{S} = S_0 - S_1 q^2$ , (усреднение по  $q = cU_{ЗИ}$ )

$q(t) = q_0 \cos \omega t$ .

**Мягкий режим на фазовой плоскости:**



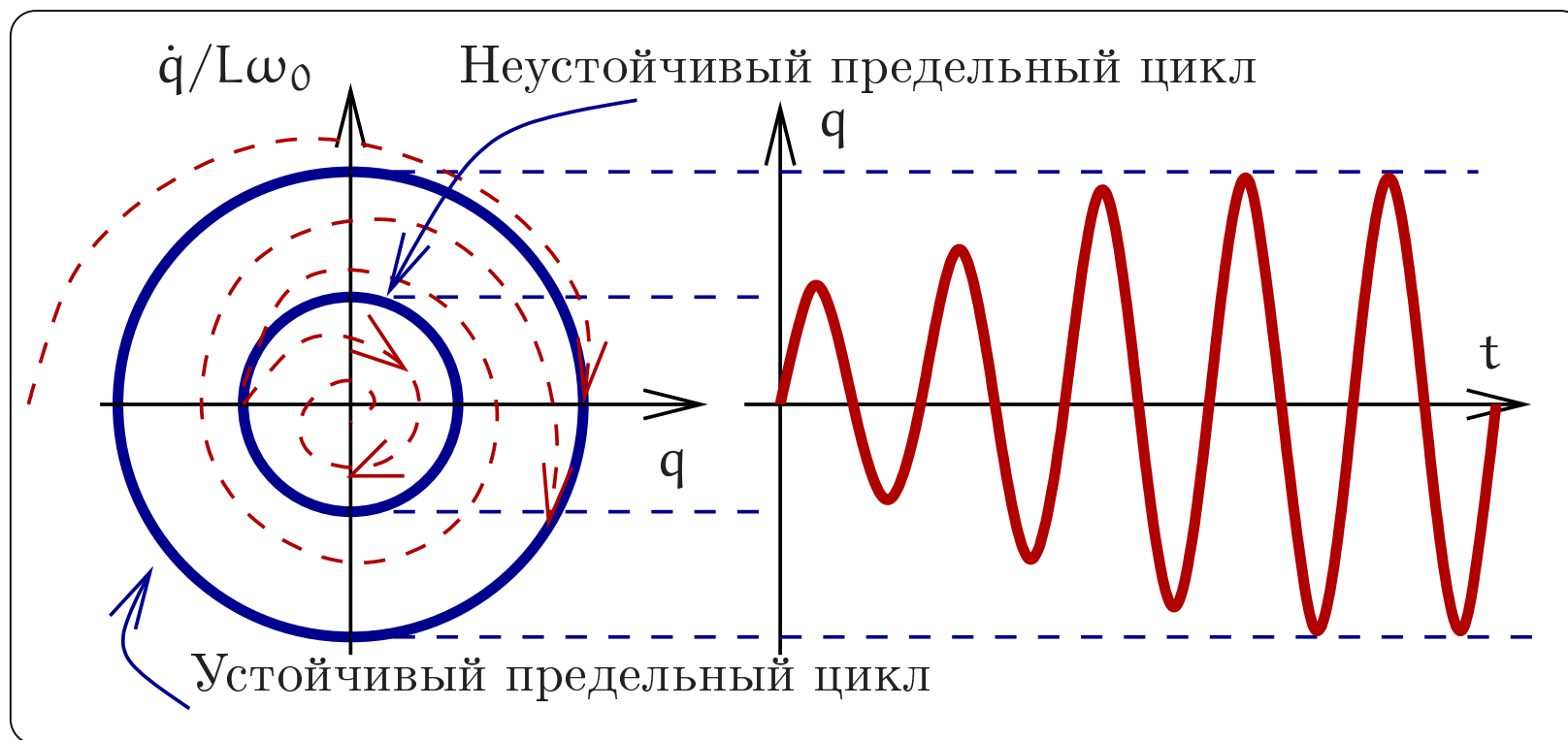
## Жесткий режим



**Автоколебания НЕ возникают от нуля.**

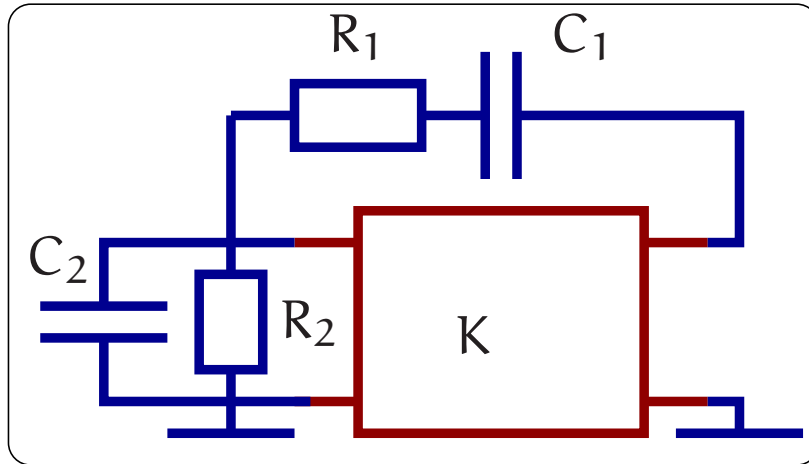
Сердце — жесткий режим.

**Жесткий режим на фазовой плоскости:**



## RC-генераторы

(**НЕ**инвертирующий усилитель)



$$\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1},$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + i\omega C_2 R_2}$$

$$\frac{1}{\beta} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} (1 + i\omega C_2 R_2) + \frac{1}{i\omega C_1 R_2} (1 + i\omega C_2 R_2)$$

$$\frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + \left( i\omega C_2 R_1 + \frac{1}{i\omega C_1 R_2} \right),$$

Пусть  $\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \Rightarrow \beta(\omega_0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}.$

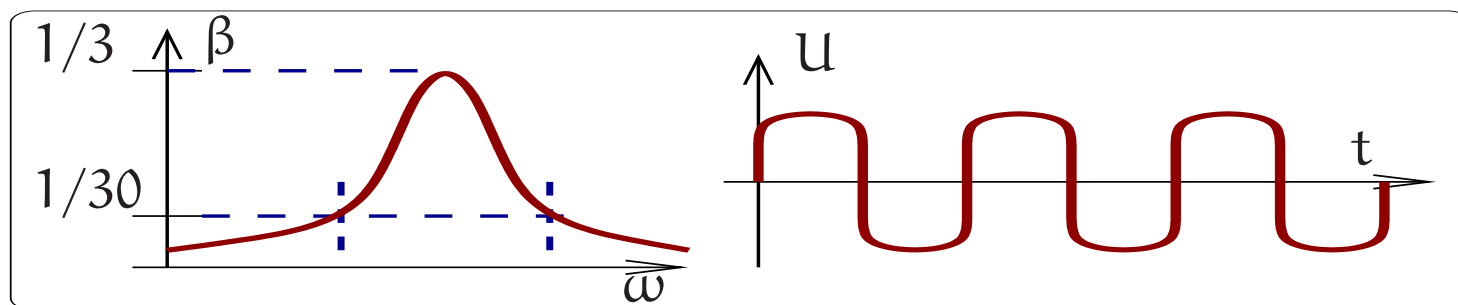
$$\text{Пусть } \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \Rightarrow \beta(\omega_0) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}.$$

$$\text{Пусть } R_1 = R_2, \quad C_1 = C_2 \Rightarrow \beta(\omega_0) = \frac{1}{3},$$

$$K_\beta = \frac{K}{1 - K\beta}, \quad \text{Условие генерации: } K(\omega_0) = \frac{1}{\beta(\omega_0)} = 3$$

Если  $K \geq 3$  и  $\arg(K) = 2\pi$  — синусоидальные колебания.

Если  $K$  больше, например,  $K = 30$  — релаксационные (разрывные) колебания, т.к. условия возбуждения выполняются для широкой полосы частот.





## Стабилизация частоты автогенератора

Почему  $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$ ? как сделать  $\frac{d\omega}{dt} \rightarrow 0$ ?

Причины нестабильности частоты:

1. Технические (долговременная нестабильность)
  - (a) Нестабильность температуры контура.
  - (b) Старение.
  - (c) Дрейфы различных параметров.
2. Флуктуационные (кратковременная нестабильность)
  - (a) Тепловые.
  - (b) Дробовые (если есть).
  - (c) Квантовые.

### Техническая нестабильность частоты

1 (а).  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \alpha_{\text{т.к.ч.}} \Delta T$ ,  $\alpha_{\text{т.к.ч.}} = \frac{d\omega_0}{\omega_0 dT}$  — температурный коэффициент частоты (т.к.ч.).

В обычном случае т.к.ч.  $\simeq \alpha_T$  — линейный коэффициент теплового расширения.

Пример:  $\alpha_T \simeq 2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}^\circ$ ,  $T = 300 \text{ K}^\circ \Rightarrow$

$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \simeq 2 \cdot 10^{-5} \times 5 \cdot 10^{-3} \simeq 10^{-7}$  — обычный результат.

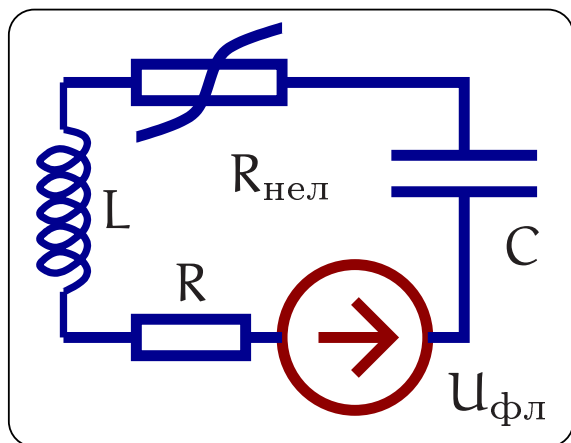
Кварцевый генератор (кристалл  $\text{SiO}_2$  заполняет емкость LC-генератора, пьезоэффект):

$\alpha_{\text{т.к.ч.}} \simeq 10^{-8} \text{ 1/K}^\circ \Rightarrow \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \simeq 1 \cdot 10^{-10}$  за 1 сек.

$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \simeq 1 \cdot 10^{-7}$  за год (старение).

1 (б) и (в) — нет теории, есть эмпирические результаты. Любое физическое (и количественное!) понимание механизмов старения и дрейфов приводит к уменьшению нестабильности.

## Флуктуационная нестабильность частоты автогенератора



Уравнение для заряда  $q$ :

$$L\ddot{q} + \underbrace{(R + R_{\text{нел}})}_{\text{в среднем } = 0} \dot{q} + \frac{q}{C} = U_{\text{фл}}$$

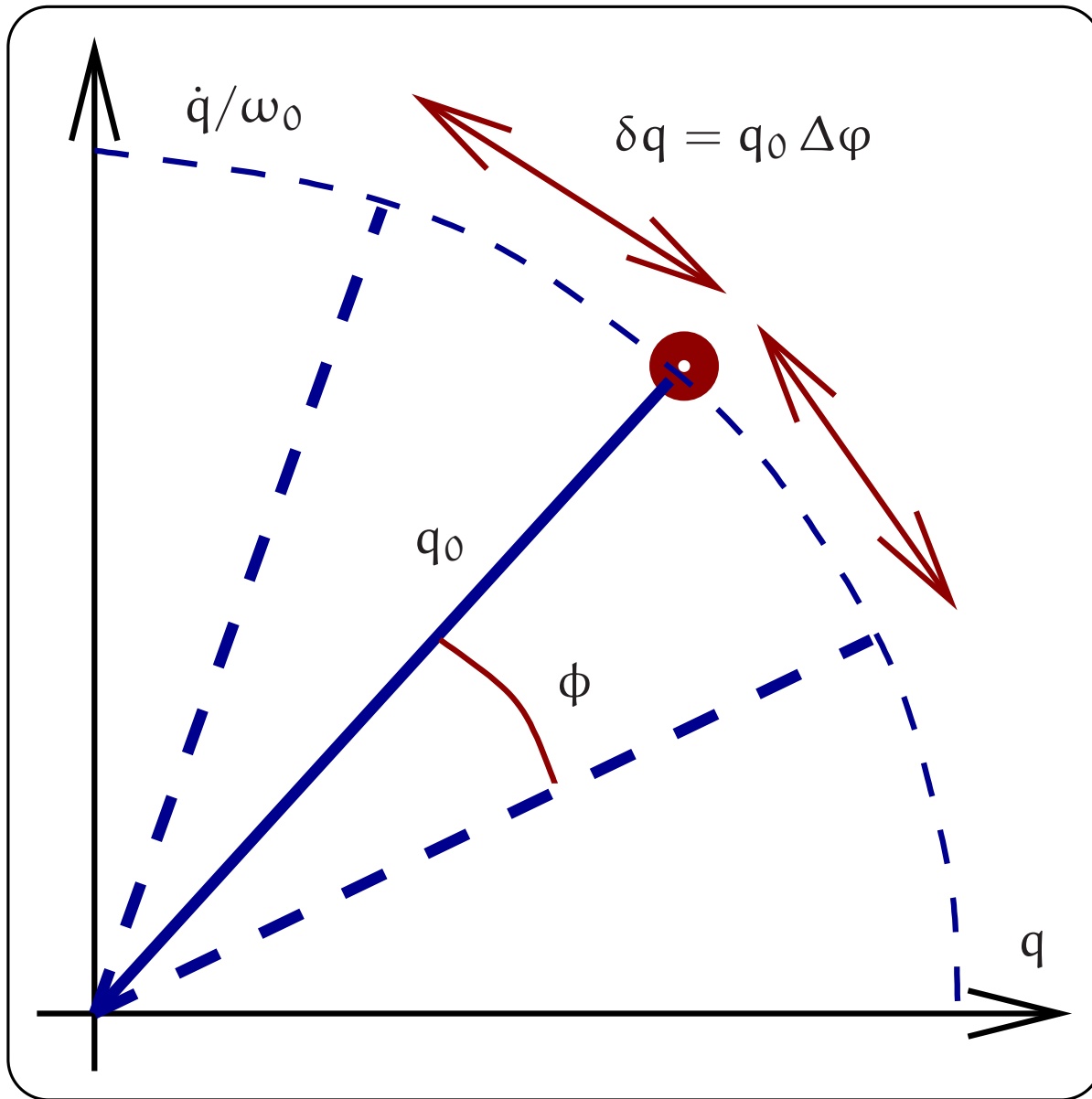
$$R_{\text{нел}} = -MS/C$$

Амплитуда определяется нелинейностью. В общем виде:

$$q(t) = (q_0 + \Delta q) \cos(\omega t + \Delta \varphi) \simeq$$

$$\simeq (q_0 + \Delta q) \cos(\omega t) - q_0 \Delta \varphi \sin(\omega t)$$

Пренебрежем нелинейностью. Оценим  $\Delta \varphi$  в линейном приближении ( $\Delta q$  — устойчивость пред. цикла).



**Напоминание:**

$$L\ddot{\delta q} + \frac{\delta q}{C} = U_0 \cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad \delta q = \frac{U_0 t}{2\omega_0 L} \sin \omega_0 t$$

Заменяем

$$U_0 = \sqrt{\frac{4kTR}{t_0}}, \quad \omega_0 t_0 \gg 1, \quad \text{но } t \gg t_0$$

Тогда изменение заряда за время  $t_0$ :

$$\delta q_T = q_0 \Delta\varphi \simeq \frac{\sqrt{4kTRt_0}}{2L\omega_0}$$

Если  $t \gg t_0$ , то вариации  $\delta q_T$  складываются независимо:

$$\Delta q_T \simeq \frac{\sqrt{4kTRt_0}}{2L\omega_0} \times \sqrt{\frac{t}{t_0}} = \frac{\sqrt{kTRt}}{L\omega_0},$$

$$\Delta\varphi_T \simeq \frac{\Delta q_T}{q_0} = \frac{\sqrt{\kappa T R t}}{L\omega_0} \times \frac{1}{q_0} = \frac{\sqrt{\kappa T t L\omega_0/Q}}{Lq_0\omega_0} = \sqrt{\frac{\kappa T t}{L\omega_0 Q q_0^2}},$$

$$W = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{\omega_0^2 q_0^2 R}{2} \Rightarrow q_0^2 = \frac{2W}{\omega_0^2 R} = \frac{2W}{\omega_0^2} \times \frac{Q}{\omega_0 L},$$

$$(\Delta\varphi_T)^2 = \frac{\kappa T t}{L\omega_0 Q} \times \frac{\omega_0^2}{2W} \times \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{\kappa T \omega_0^2 t}{2Q^2 W} = Dt,$$

$$(\Delta\varphi_T)^2 = Dt, \quad \mathbf{D} = \frac{\kappa T \omega_0^2}{2Q^2 W}$$

**D** — коэффициент диффузии фазы (фаза “гуляет” как броуновская частица). Введем время когерентности  $\tau_{\text{ког}}$  и длину когерентности  $L_{\text{ког}}$ :

$$(\Delta\varphi_T)^2 = \pi^2 = D\tau_{\text{ког}}, \quad L_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}.$$

### Естественная ширина линии

Получим формулу для относительной естественной ширины линии  $\Delta\omega_T/\omega_0$  автогенератора

$$\Delta\omega_T \simeq \frac{\Delta\varphi_T}{t}, \quad \frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \frac{\Delta\varphi_T}{\omega_0 t}.$$

$$\frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \sqrt{\frac{\kappa T}{2Q^2 W t}}, \quad \text{при } T \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta\omega_T}{\omega_0} \simeq \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2Q^2 W t}}$$

Последняя — формула Таунса. Это точные формулы и они получены с учетом только *одного* источника — тепловых флуктуаций.

(Всегда есть и другие источники).

Пример:

Пусть  $Q = 10^2$ ,  $W = 1 \text{ mW}$ ,  $T = 300 \text{ K}^\circ$ ,  $t = 1 \text{ сек}$ ,  
 $\omega_0 = 10^7 \text{ сек}^{-1}$ . Тогда

$$\Delta\omega_T/\omega_0 \simeq 1.4 \cdot 10^{-11},$$

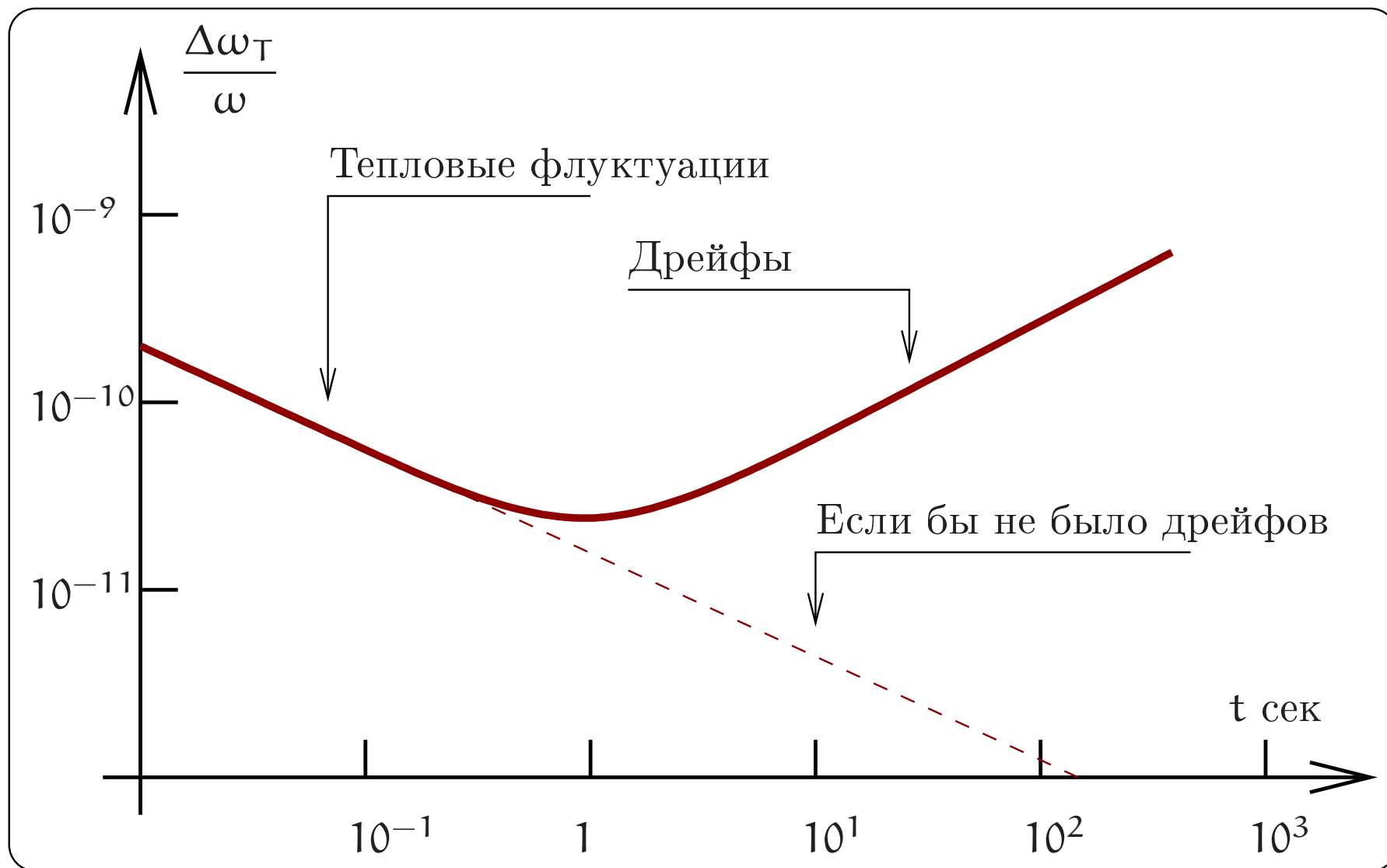
$$\tau_{\text{ког}} \simeq 5 \cdot 10^8 \text{ сек},$$

$$L_{\text{ког}} \simeq 1.5 \cdot 10^{17} \text{ м}.$$

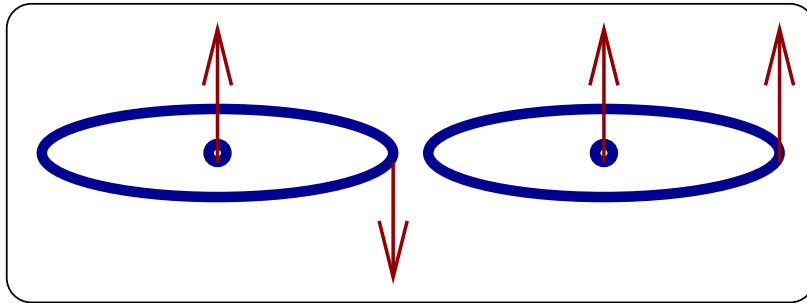
**Кварцевый генератор:**

$Q \simeq 10^7$ ,  $\Rightarrow \Delta\omega_T/\omega_0 \simeq 1/4 \cdot 10^{-16}$  (за 1 сек).



**Пример для кварцевого генератора**

## Водородный стандарт



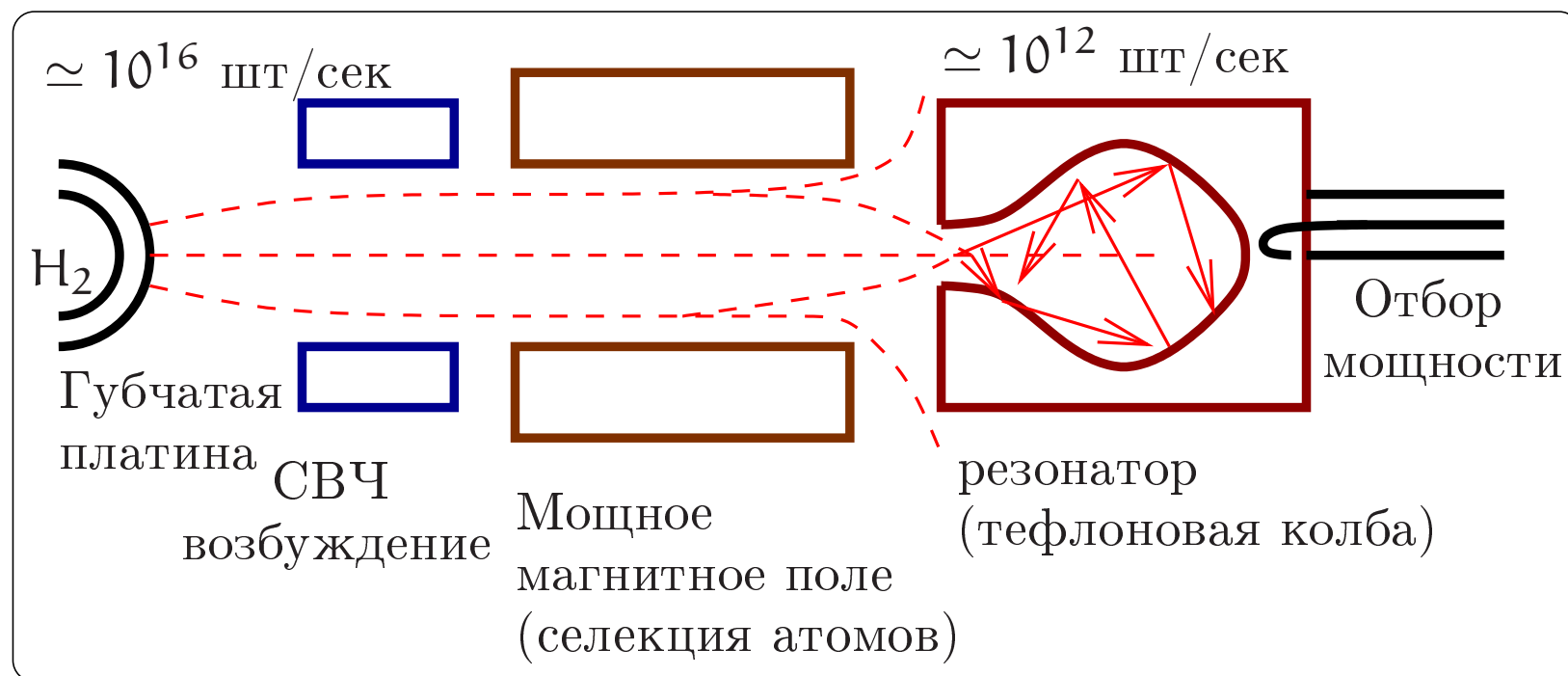
$$f_{00} = 1\,420\,405\,751,786 \pm 0,004 \text{ Гц}$$

Уровень воспроизведения (метрологическая точность):

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq 3 \cdot 10^{-13}$$

Мазерный эффект: **M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation = MASER.

## Принципиальная схема водородного мазера



Мощность водородного мазера:

$$W \simeq 10^{12} \times 2\pi\hbar f_{00} \simeq 10^{-12} \text{ Вт},$$

Технические уходы водородного мазера:

$$\Delta\nu \simeq 7 \cdot 10^{-3} \text{ Гс} \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 3 \cdot 10^{-12}, \quad 1 \text{ Гс} = 10^{-4} \text{ Тл}$$

$$\Delta T_{\text{пучка}} \simeq 1 \text{ К}^\circ \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 1.5 \cdot 10^{-13}$$

$$\text{Достижение: } \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 3 \cdot 10^{-16} \text{ за 3 часа}$$

Примерно столько же дают СВЧ автогенераторы, стабилизированные СПР. Цель на 4-5 лет (2000 годы):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 10^{-17} \dots 10^{-18} (!) \dots \text{ Не достигнута}$$

### Опыт R. Vessot (18.04.1976)

Водородный стандарт на борту спутника. Ход этих “часов” сверяется с ходом “часов” на земле. Измерена релятивистская разница хода часов на борту и на Земле.

$$\left. \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|_{\text{Rel}} = \frac{\Delta\Phi_{\text{grav}}}{c^2} \simeq 7 \times 10^{-10} \Big|_{H=10^4 \text{ km}}$$

$$\text{H-maser: } \frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq 2 \times 10^{-15} \text{ за 1 час,}$$

$$\text{Экперимент: } \left. \frac{\Delta\omega}{\omega} \right|_{\text{Rel}} = \frac{\Delta\Phi_{\text{grav}}}{c^2} (1 \pm 2 \cdot 10^{-4}).$$

**Стандарт на одиночных ионах ртути  $^{199}\text{Hg}^+$** 

Предельная нестабильность частоты (дисперсия Аллана):

$$\sigma(\tau) \simeq \left\langle \frac{\Delta\nu_{\text{rms}}}{\nu_0} \right\rangle \simeq \frac{\Delta\nu}{\pi\nu_0} \sqrt{\frac{T}{N\tau}}$$

$\Delta\nu$ ,  $\nu_0$  — ширина и частота атомного перехода,  $T$  — время циклов (т.е. время определения центра линии),  $N$  — число атомов,  $\tau$  — время наблюдения.

Для одиночного иона ртути  $^{199}\text{Hg}^+$  предел должен быть около

$$\left\langle \frac{\Delta\nu_{\text{rms}}}{\nu_0} \right\rangle \simeq 1 \times 10^{-15} \times \sqrt{\frac{1}{\tau}}$$

Экспериментально получено:

$$\left\langle \frac{\Delta\nu_{\text{rms}}}{\nu_0} \right\rangle \simeq 7 \times 10^{-15} \times \sqrt{\frac{1}{\tau}}$$

**Ртутный стандарт использует следующие достижения**

1. Глубокое лазерное охлаждение атомов и ионов.
2. Методы частотной стабилизации лазеров: ширина линии  $\simeq 0.2$  Гц.
3. Методы переноса частоты из оптического диапазона в СВЧ диапазон.

Частота непрерывного лазера удваивается и привязывается к переходу одиночного и охлажденного иона  $^{199}\text{Hg}^+$  (лежащем в УФ области).

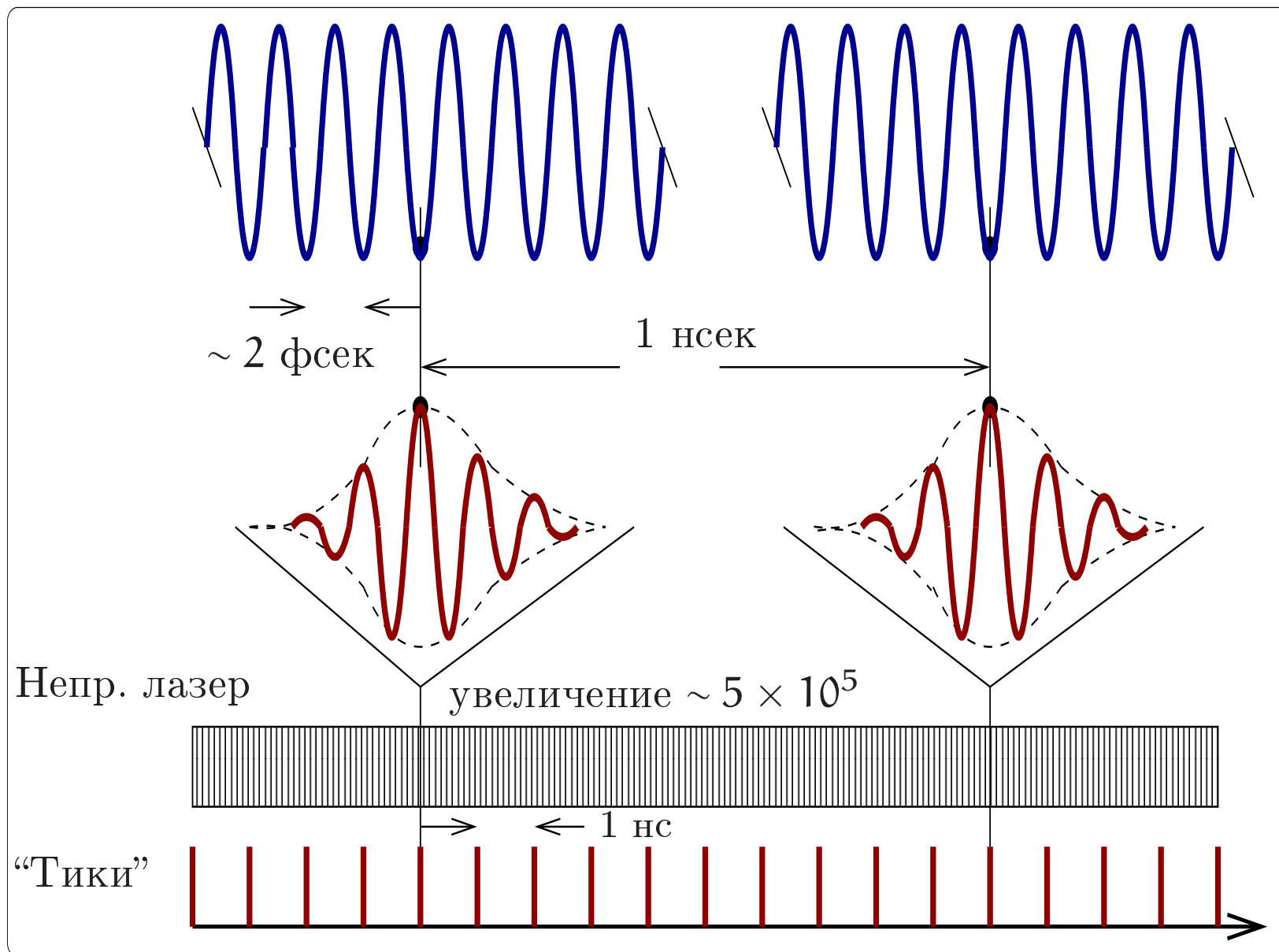
Используется лазер на красителях непрерывного излучения (CW) с длиной волны  $\lambda \simeq 563$  нм и мощностью  $W \simeq 200$  мВт. Его частота удваивается и привязывается к частоте УФ перехода  $^{199}\text{Hg}^+ \ ^2S_{1/2} \rightarrow \ ^2D_{1/2}$  одиночного иона  $^{199}\text{Hg}^+$  (длина волны  $\lambda \simeq 282$  нм, естественная ширина линии 2 Гц).

Коротковременная (1 – 10 сек) нестабильность частоты такого лазера  $\Delta\omega/\omega \leq 5 \times 10^{-15}$  ( $\Delta\omega/\omega \sim \tau^{-1/2}$ ).

**Как теперь получить “тики” ?**

Частота CW лазера понижается до диапазона  $10^9$  Гц=1 ГГц путем связи с импульсным титан-сапфировым (Ti:sapphire) фемто-секундным (ФС) лазером и специальным “фононно-кристаллическим” волноводом (волновод с искусственной периодичностью). ФС лазер выдает импульсы светового излучения длины  $\tau_{\text{imp}} \sim 25$  фсек с периодичностью около  $\tau_r \simeq 10^{-9}$  сек.





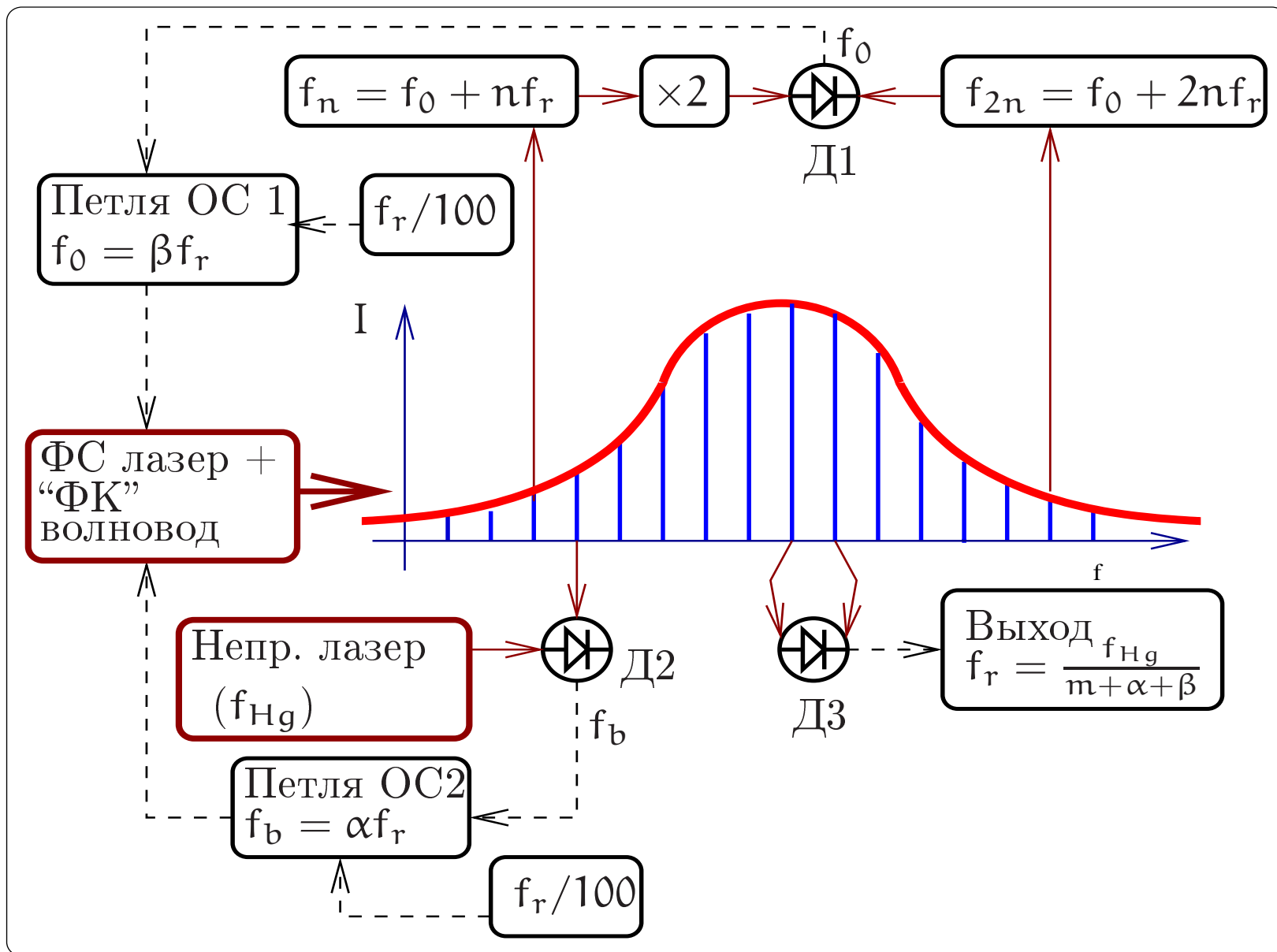
## Фемто-секундный лазер

Спектр фемто-секундного лазера — гребенка линий:

$$f_n = f_0 + n f_r, \quad f_r = 1/\tau_r$$

( $f_0$  — возникает из-за разницы групповой и фазовой скорости в резонаторе лазера). Важно, что:

- Спектр покрывает почти октаву.
- Практически отсутствует дисперсия групповой скорости в “фотон-кристаллическом (ФК)” волноводе.



Детектор Д1 измеряет  $f_0$ . Детектор Д2 измеряет  $f_b$ . Через петли обратной связи сигналы с детекторов подаются на ФС лазер модулируя выходную мощность и длину резонатора. Цепи обратной связи поддерживают следующие соотношения:

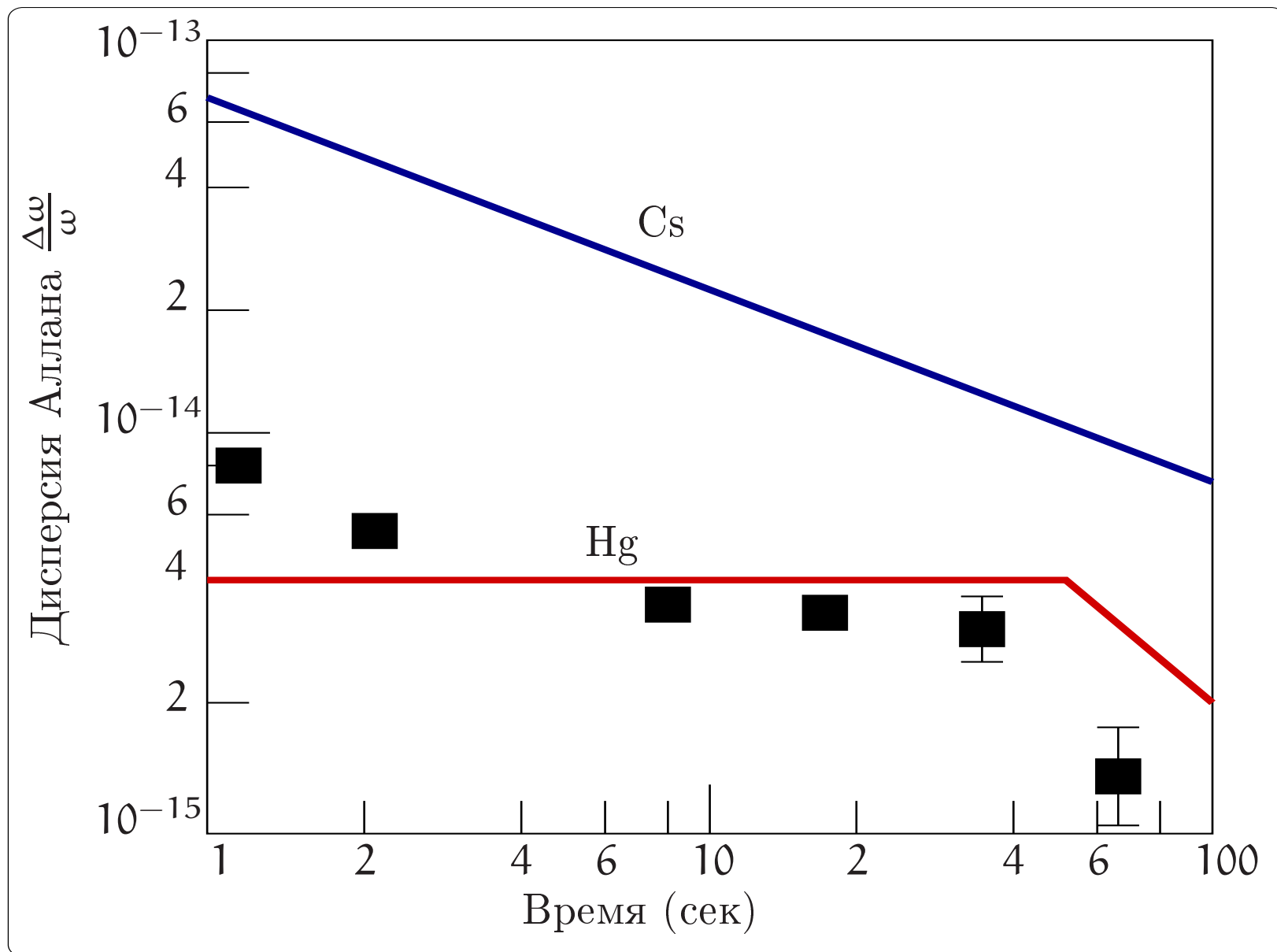
$$f_0 \Rightarrow \beta f_r, \quad \beta = \frac{1}{100}, \quad (3)$$

$$f_b \equiv f_{Hg} - f_0 - mf_r \Rightarrow \alpha f_r, \quad \alpha = \frac{1}{100} \quad (4)$$

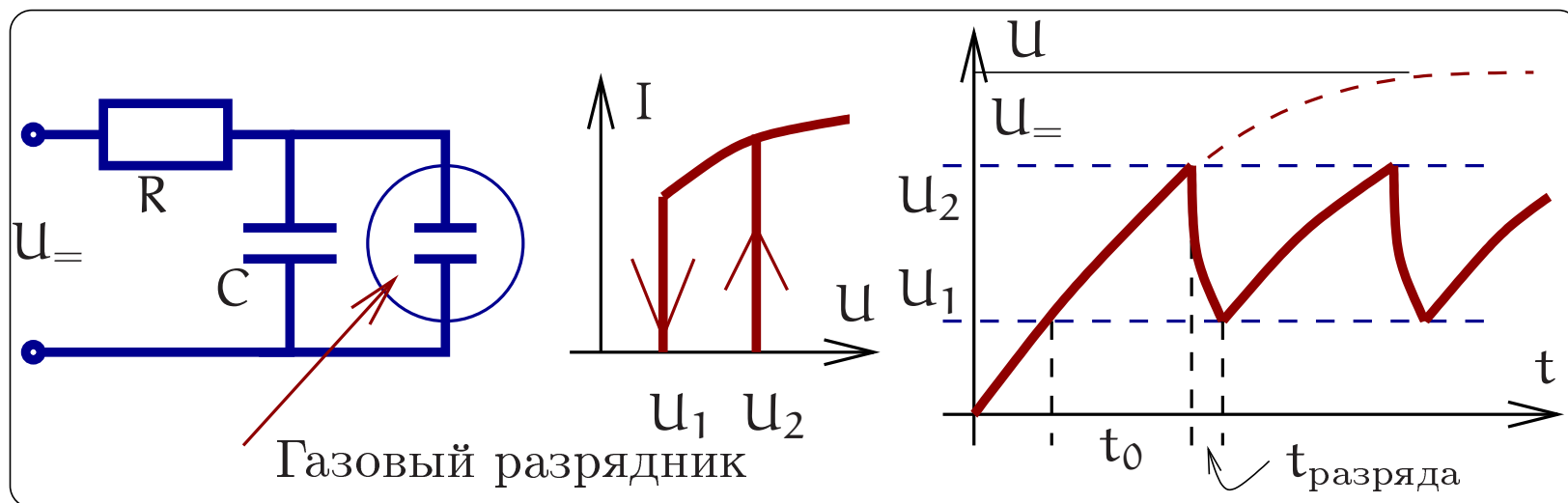
Детектор Д3 выдает на выход частоту "тиков"

$$f_r = \frac{Hg}{m \pm \alpha \pm \beta} \quad (5)$$

Если  $\alpha = -\beta$ , то выходная частота является просто субгармоникой  $f_{Hg}$



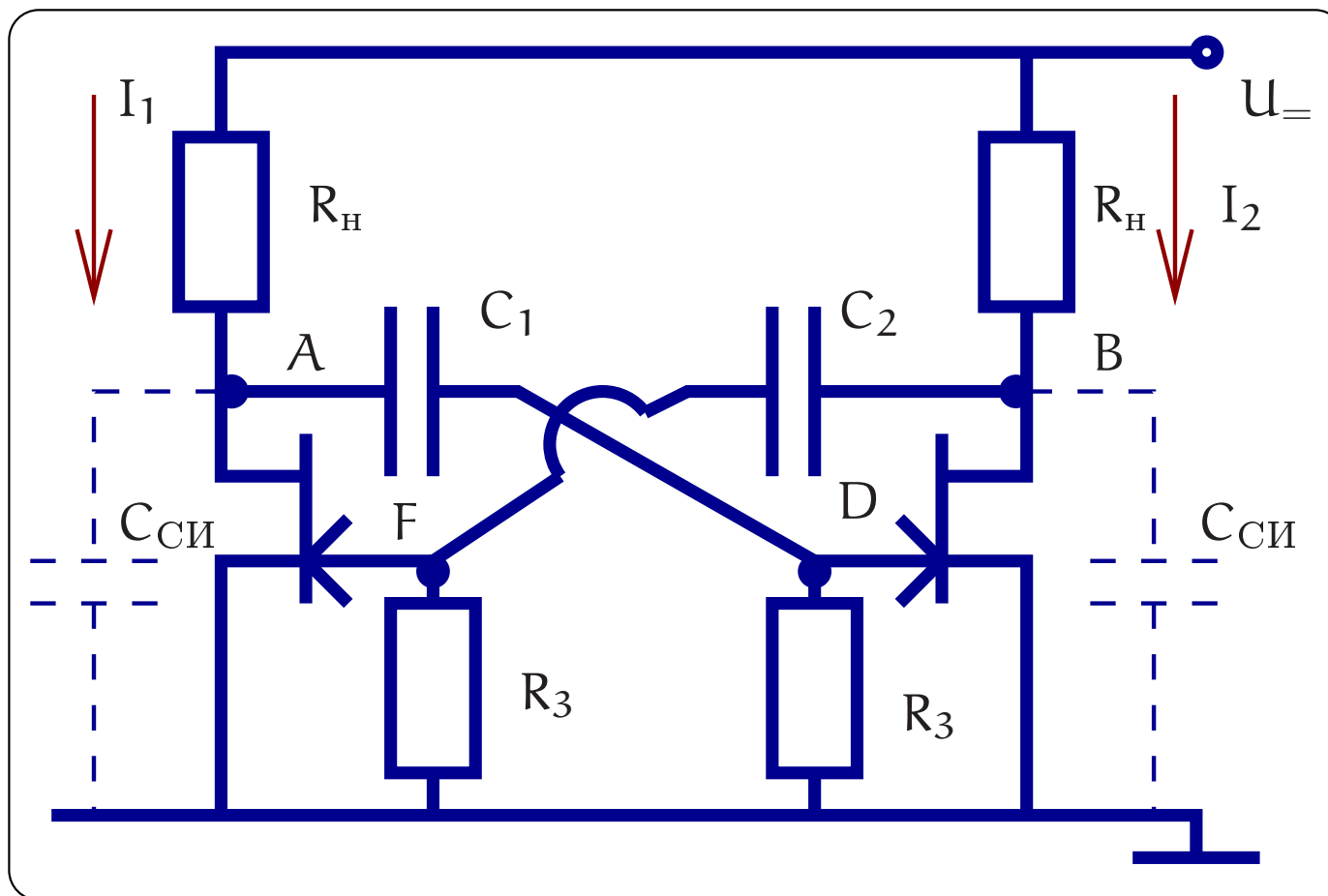
## Простейший генератор релаксационных колебаний



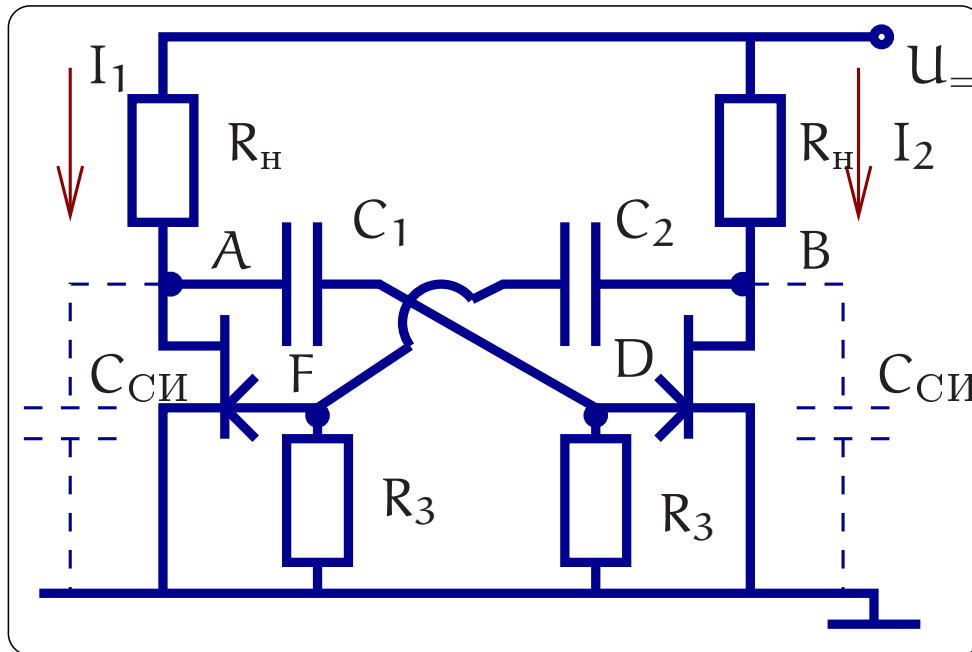
$$U(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right) \Rightarrow \frac{U_0 t_0}{RC} \simeq U_2 - U_1,$$

$$T = t_0 + t_{\text{разряда}} \simeq \frac{U_2 - U_1}{U_0} \times RC + t_{\text{разряда}}$$

## Симметричный мультивибратор



Для обычных параметров  $R_H$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_3$ , условие возбуждения “перевыполнено”:  $K_\beta = K_1 K_2 \gg 1$



Обычно еще выполнено условие

$$R_H C_{СИ} \ll C_{1,2} R_3$$

Пусть токи через транзисторы равны.

Пусть из-за флуктуаций  $I_1$  возрос на  $+\Delta I_{10}$ . Тогда:

$$\Delta U_A = -\Delta I_{10} R_H, \quad \Delta U_{C_1} \simeq 0,$$

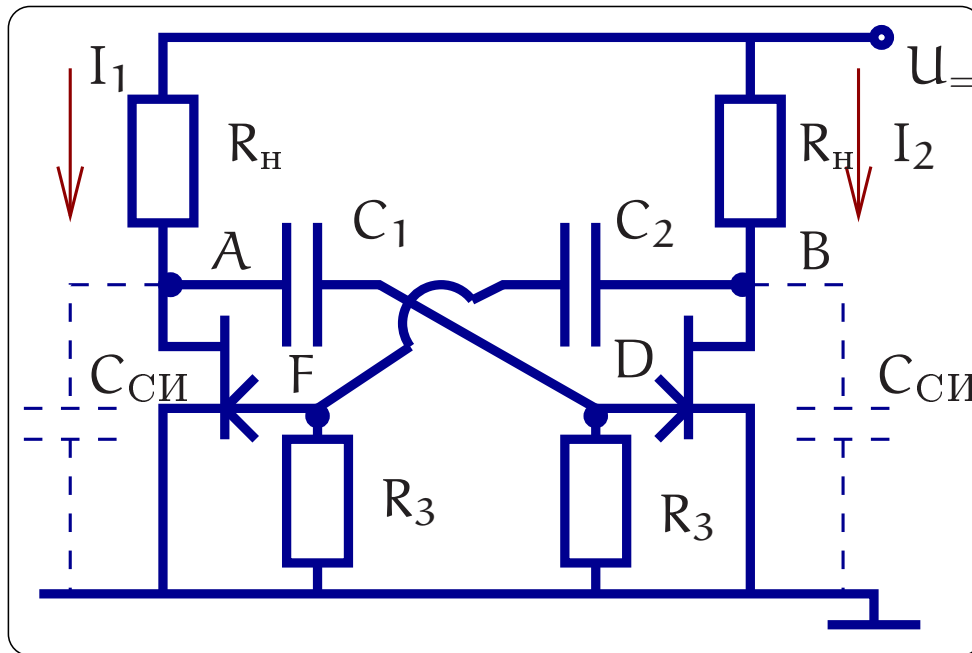
$$\Delta U_D = -\Delta I_{10} R_H \Rightarrow \Delta U_B = -K \Delta U_D = +K \Delta I_{10} R_H,$$

$$\Delta U_{C_2} \simeq 0 \Rightarrow \Delta U_F = \Delta U_B,$$

$$\Rightarrow \Delta I_1 = +SK \Delta U_B = SR_H K^2 \Delta I_{10} \gg \Delta I_{10} \quad \text{т.е. } \mathbf{\text{неустойчивость!}}$$

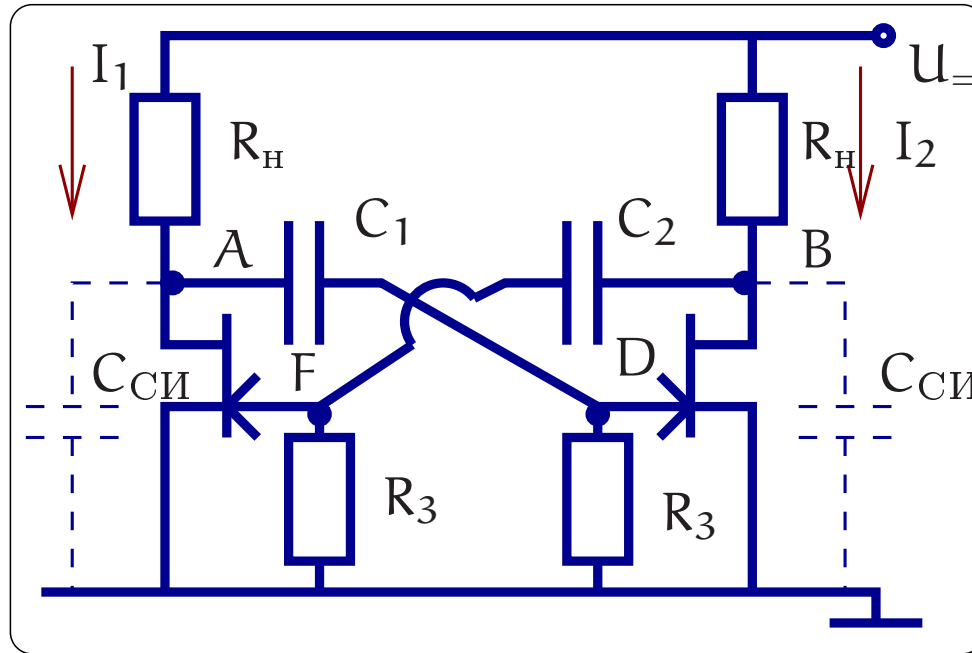
Лавинный процесс:  $\tau_{\text{front}} \simeq R_H C_{СИ} \simeq 10^3 \times 10^{-11} = 10^{-8}$  сек.





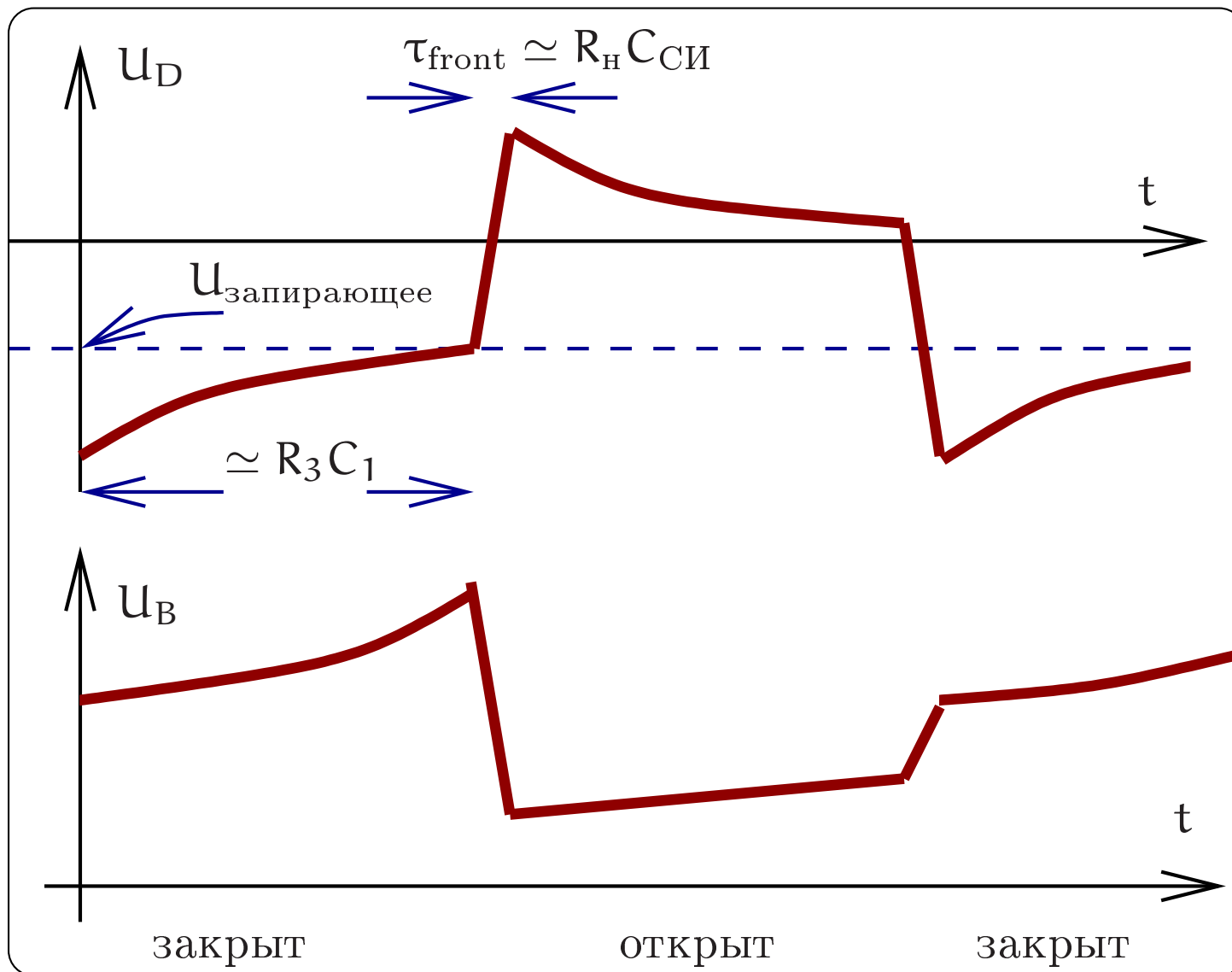
Лавинный процесс:  
 $\tau_{\text{front}} \simeq R_H C_{\text{СИ}} \simeq 10^3 \times 10^{-11} = 10^{-8}$  сек.  
 Во время скачка  $U_{C_1}$  практически не меняется. Скачок кончается, когда правый транзистор будет заперт.

Во время скачка  $U_A$  резко упало (ток  $I_1$  сильно вырос), поэтому после скачка  $C_1$  – **разряжается**. Этот ток  $I_{C_1}$  создает **отрицательное** напряжение на правом затворе и поддерживает правый транзистор **запертым**. Одновременно  $C_2$  – дозаряжается от  $U_{C_2}$  до  $U_-$ . Этот ток поддерживает **положительное** напряжение на левом транзисторе (он открыт).



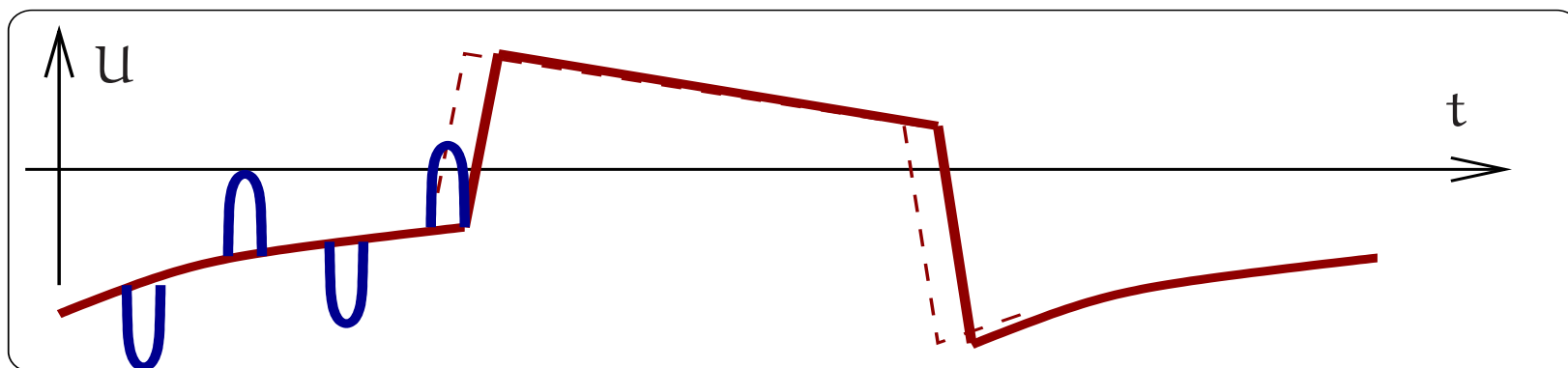
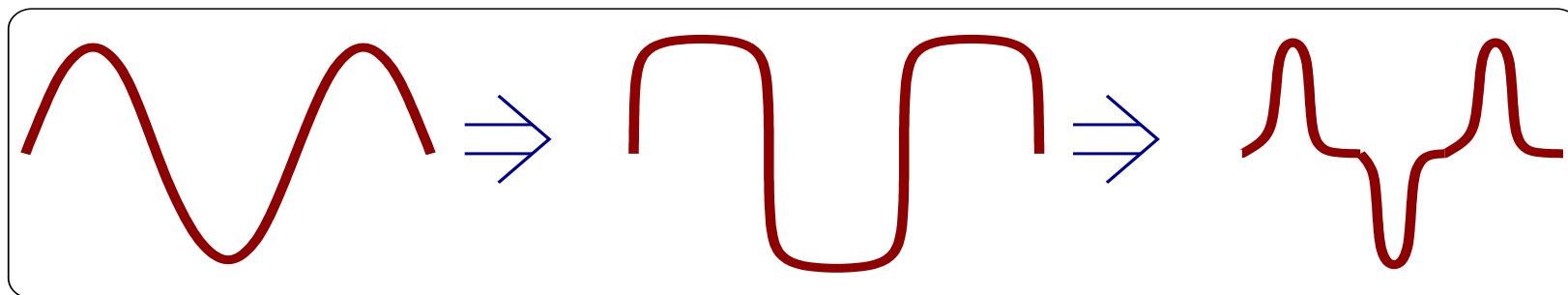
Во время скачка  $U_A$  резко упало (ток  $I_1$  сильно вырос), поэтому после скачка  $C_1$  и  $C_2$  — **разряжается**. Этот ток  $I_{C1}$  создает **отрицательное** напряжение на правом затворе

поддерживает правый транзистор **запертым**. Одновременно  $C_2$  — дозаряжается от  $U_{C2}$  до  $U_+$ . Этот ток поддерживает **положительное** напряжение на левом транзисторе (он открыт). (\*) Когда  $C_1$  разрядится, напряжение на затворе правого транзистора станет **меньше** запирающего. Тогда ток через правый транзистор возрастет, и произойдет **обратный скачок**: в итоге будет запер левый транзистор.



## Мультивибратор - делитель частоты

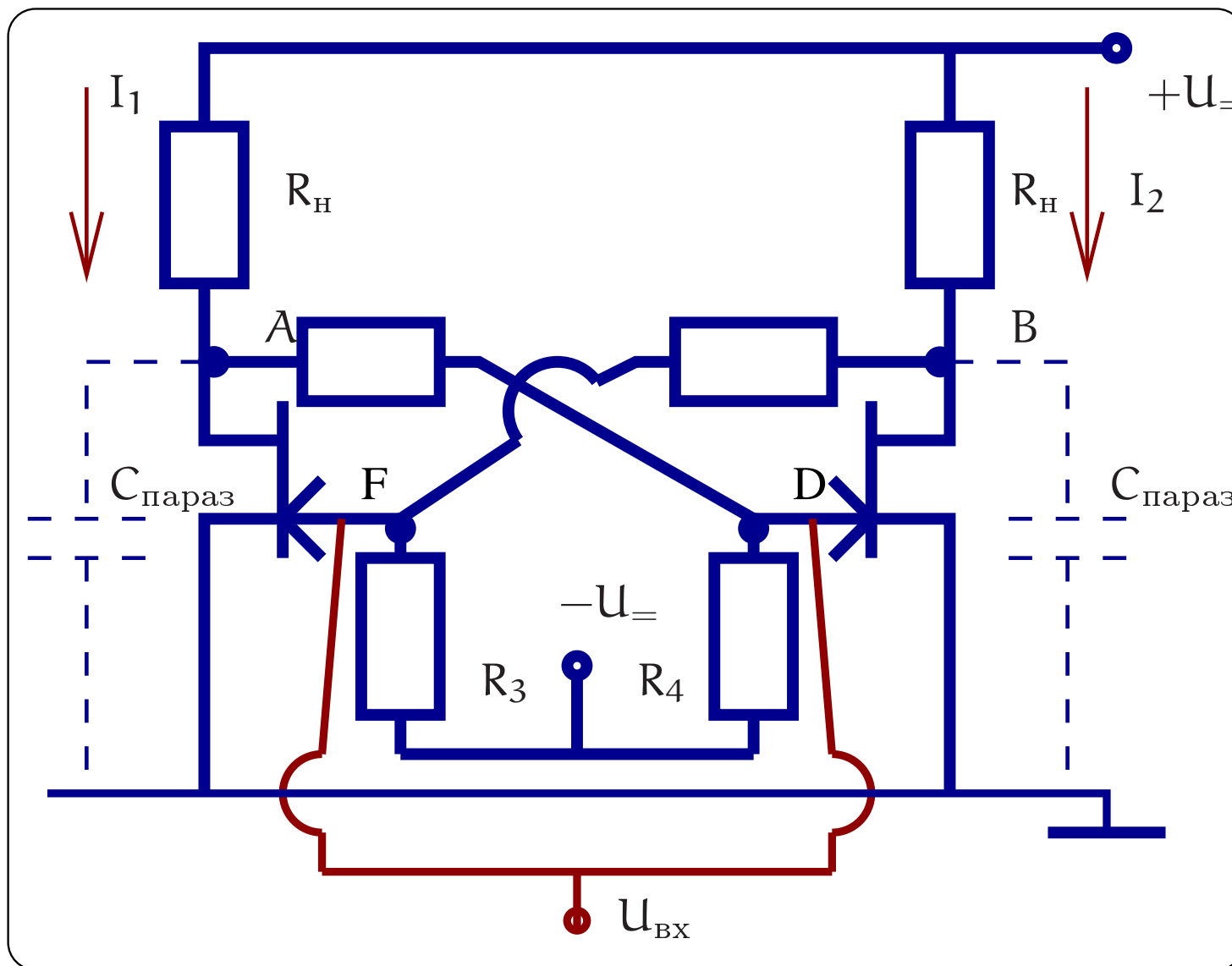
Сделаем такое преобразование

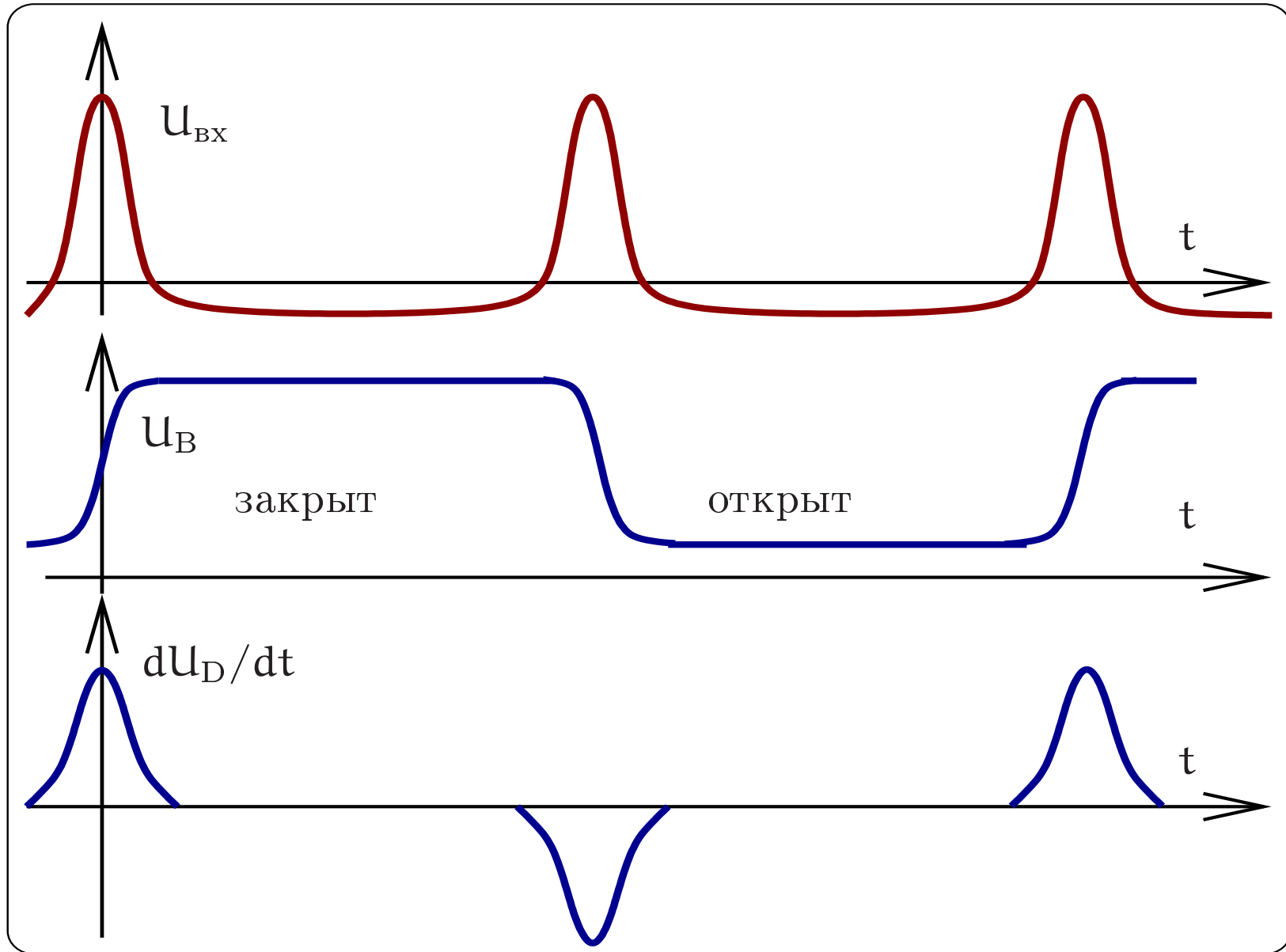


Если сформированное таким образом напряжение подключить к затвору, то период мультивибратора будет *управляться* (синхронизация). Удобно делить частоту в 2...30 раз. В осциллографе это обычная процедура.

## Триггер

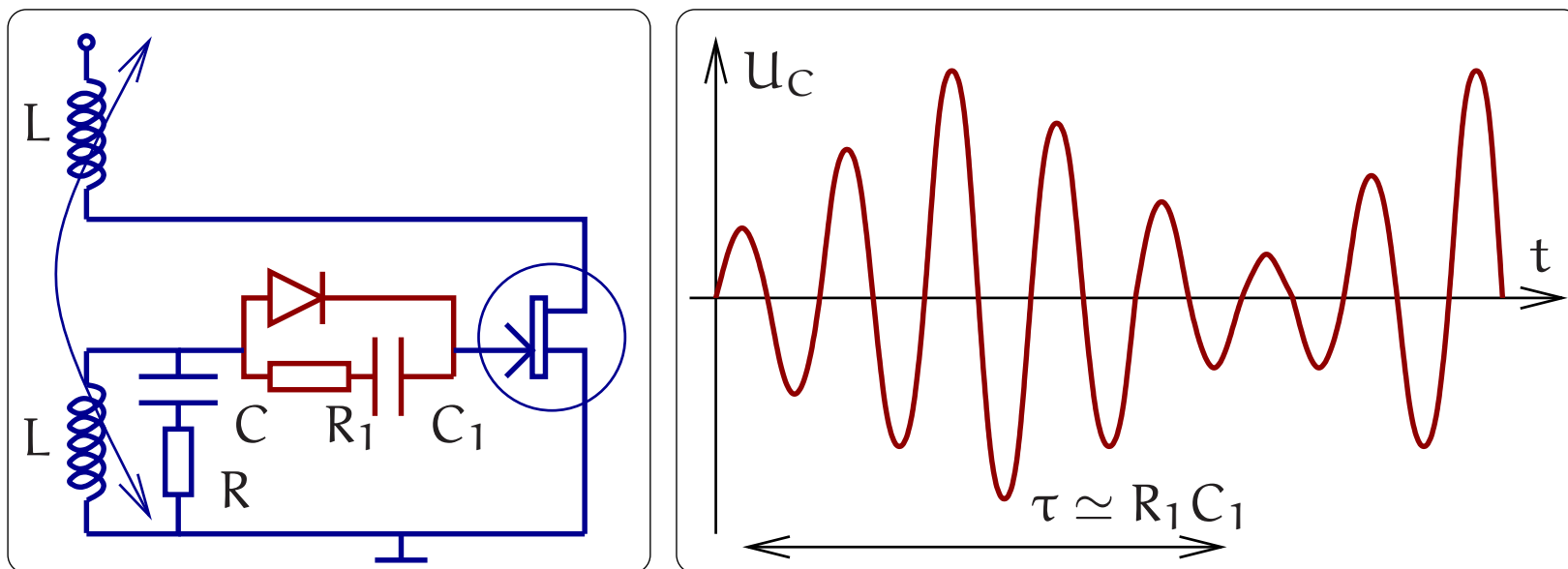
– система с двумя устойчивыми положениями равновесия (основной элемент ЭВМ). Это модифицированный мультивибратор: напряжение питания понижено, так что автоколебаний нет. Подбором параметров можно добиться *двух* устойчивых положений равновесия (1-ый транзистор открыт, а 2-ой закрыт, или наоборот). Импульс входного напряжения перебрасывает триггер в другое состояние.





## Прерывистая генерация. Динамический хаос.

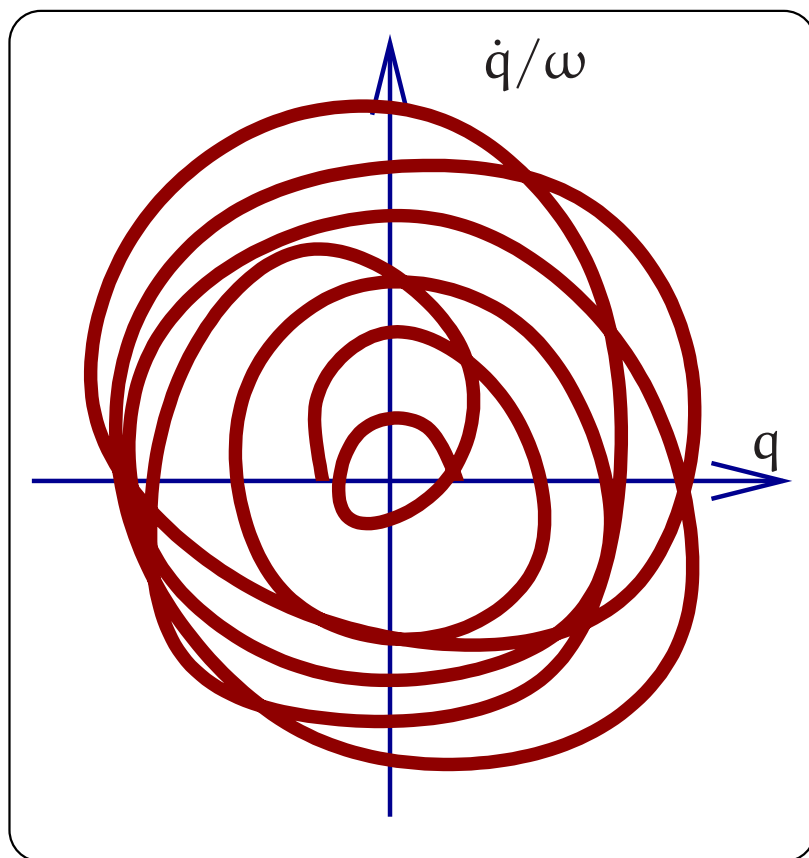
### Странный аттрактор Лоренца



Картинка **не** повторяется. Рабочая точка ползает с “характерным временем”  $\tau \simeq R_1 C_1$ .

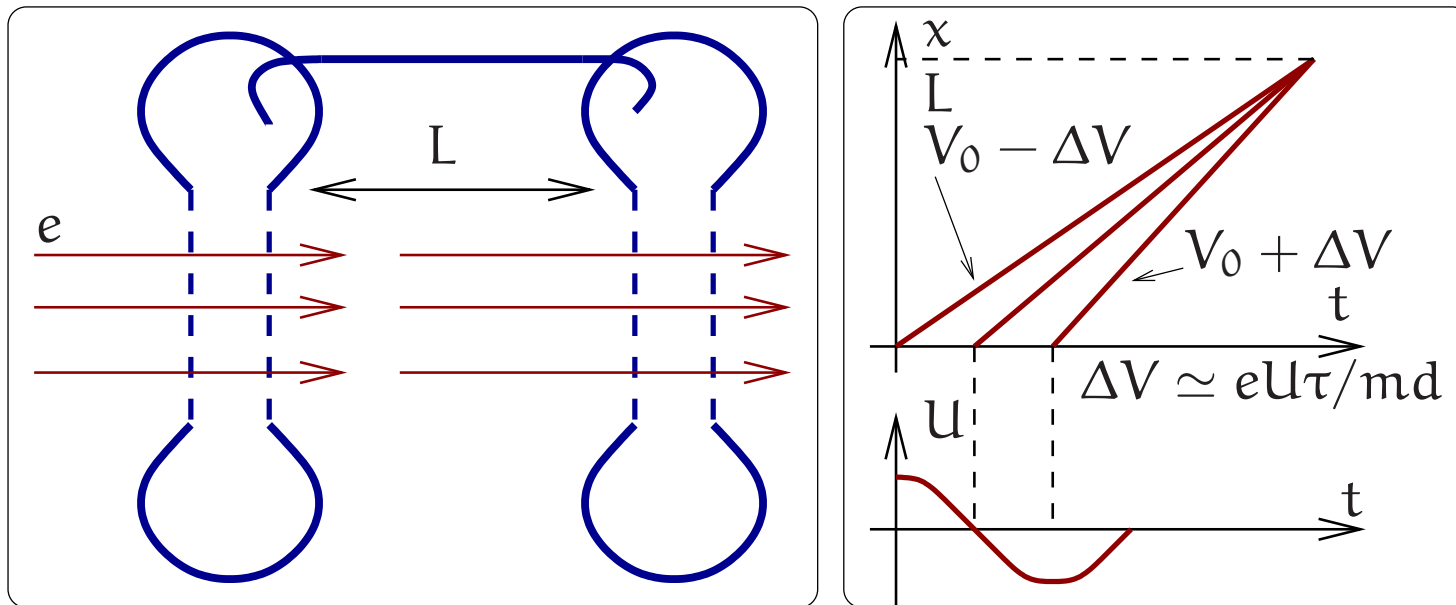


Странный аттрактор (аттрактор Лоренца).



Фазовая плоскость “равномерно” покрыта решениями. Нет предельного цикла

## Клистрон



### Формирование сгустков:

Поток электронов — сначала через первый резонатор (время пролета  $\tau \ll 1/\omega_0$ ). Электроны получают дополнительный импульс  $\Delta p = \pm eU\tau/d$  — формирование электронных сгустков при пролете второго резонатора на расстоянии  $L$  от первого резонатора.

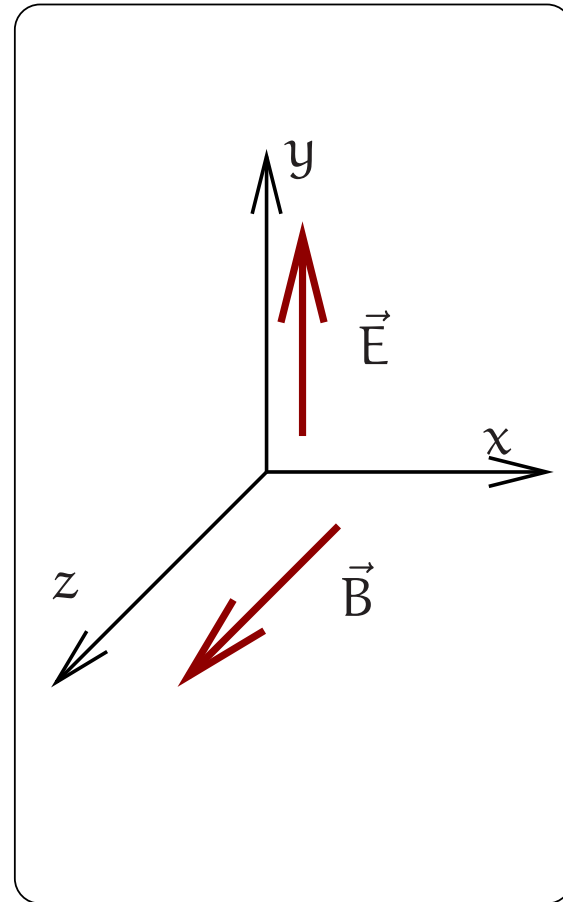
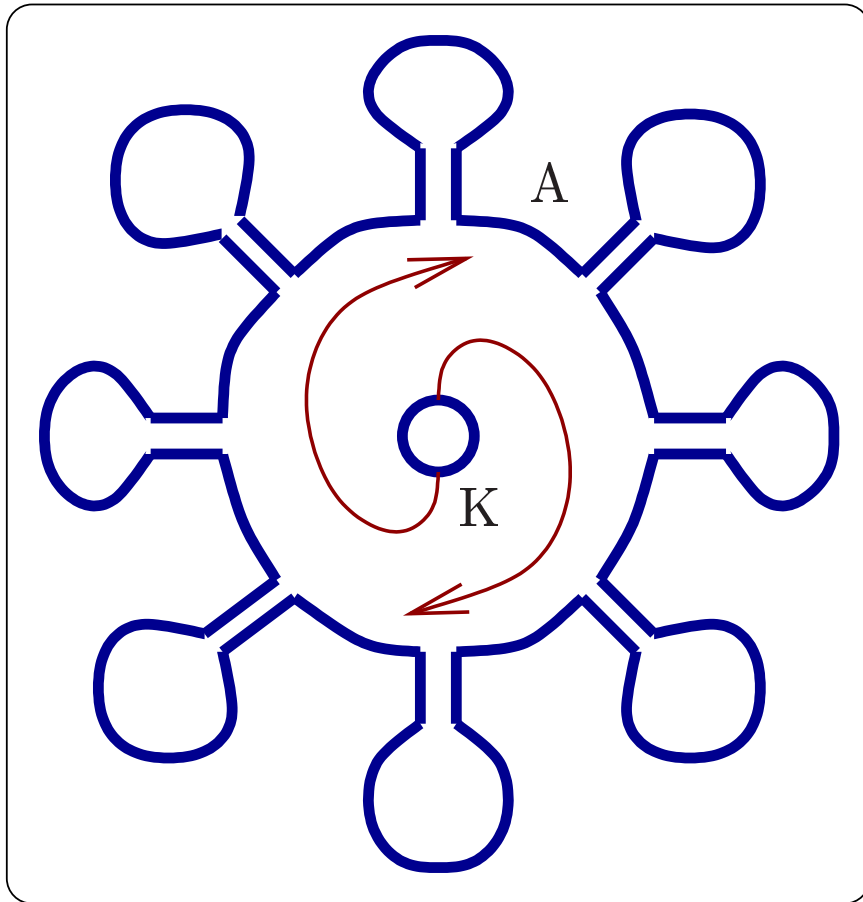
## Клистрон (продолжение)

Подбирают время пролета так, чтобы в момент влета сгустков электронов во второй резонатор электрическое поле в нем было бы *тормозящим* — тогда электроны будут *отдавать* энергию электро-магнитным колебаниям. Первый и второй резонаторы должны быть связаны.

### Отражательный клистрон.

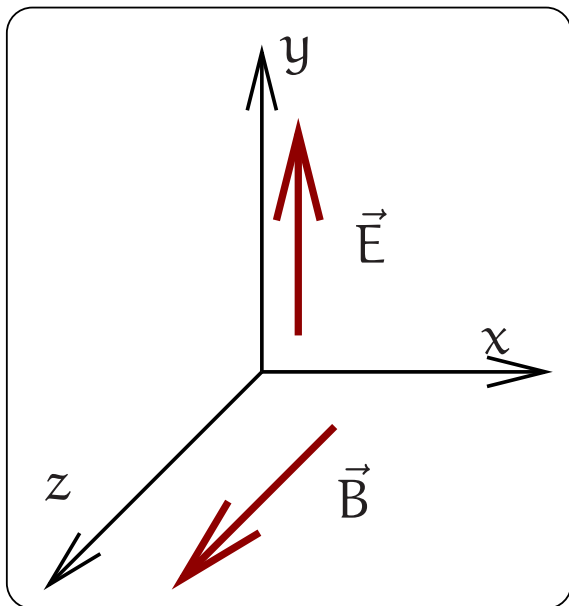
Мощность клистронов: до 1 МВт в непрерывном и до 20 МВт в импульсном режиме  $\lambda \simeq 1\text{mm} \dots 10\text{cm}$ . Высокое значение к.п.д. (до 70% кинетической энергии электронов преобразовывается в энергию колебаний).

# Магнетрон



### Вспомогательная задача:

движение электрона (заряд  $q$  и масса  $m$ ) в скрещенных полях



$$m\ddot{x} = q(\vec{V} \times \vec{B})_x = q\dot{y}B,$$

$$m\ddot{y} = qE - q\dot{x}B.$$

Переходим в другую инерциальную систему  $x = x' + V_0 t$ :

$$m\ddot{x}' = q\dot{y}B,$$

$$m\ddot{y} = \underbrace{qE - qV_0B}_{\text{выбираем } =0} - q\dot{x}'B.$$

Выбираем  $V_0 = E/B$  — наложение поступательного и вращательного движений,  $V_0$  — скорость дрейфа. **Циклоида.**

При  $V_0 = E/V$  — наложение постиупательного движения и вращения в магнитном поле  $B$ . **Циклоида**. Важно:  $\vec{V}_0 \perp \vec{E}$ ,  $\vec{V}$

**В магнетроне:** электроны испытывают “клистронный” эффект: у одного резонатора они **получают** добавки к скоростям, которые приводят к формированию сгустков заряда. У другого — сгустки (“спицы”) **отдают** энергию. Колебания в соседних резонаторах в противофазе.

Мощность магнетронов: от 1 Вт (малогабаритные лабораторные магнетроны) до 1 МВт импульсной мощности в РЛС.

## Схема радиолокатора

