

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

**Физический факультет  
Практикум кафедры физики колебаний**

**Описание задачи**

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
В СИСТЕМЕ ДВУХ  
СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ**

**Описание составлено Г. А. Бендриковым,  
переработано Т.Б.Косых**

**Москва, 2012**

В системе из двух соединенных пружиной маятников изучаются собственные колебания связанных линейных систем с двумя степенями свободы.

## Введение

Систему из двух связанных маятников можно рассматривать как две взаимодействующие между собой отдельные (парциальные) колебательные системы с одной степенью свободы каждая. Примером таких систем являются механические, акустические, электрические, электромеханические и другие системы (два маховика на упругом валу, два связанных акустических резонатора, два взаимодействующих электрических контура, конденсаторный микрофон, состоящий из мембраны и электрической цепи, два взаимодействующих атома и др.). Движение в них определяется двумя независимыми координатами. Выбор координат определяет пару парциальных систем и пару парциальных частот, соответствующих этим координатам. Важно отметить, что от выбора координат также зависит характер связи между парциальными системами: силовой (емкостной), инерциальной (индуктивной) или смешанной. Кроме того, можно описать движение такой системы двумя несвязанными уравнениями, если выбрать нормальные координаты.

В общем случае движение в связанной системе с двумя степенями свободы, например изменение координат  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (рис. 1) во времени, негармонично. Каждая координата меняется во времени как сумма двух гармонических колебаний с близкими по величине частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . При особом выборе начальных условий в системе происходят гармонические колебания с частотой  $\omega_1$  или  $\omega_2$ .

При произвольных начальных условиях движение в системе можно рассматривать как биения с частотой  $\omega_1 - \omega_2$ . Колебательная энергия перекачивается из одной парциальной системы в другую с частотой биений. Полная или частичная перекачка энергии из одной парциальной системы в другую характеризует большую или меньшую степень взаимодействия между ними.

Чтобы выяснить характер связи в зависимости от выбора координат, напишем выражения для кинетической и потенциальной энергий электрической системы, приведенной на рис. 2. За координаты возьмем заряды  $q_i$  на конденсаторах  $C_i$ . Кинетическую и потенциальную энергию системы запишем в виде:

$$\begin{aligned} T &= \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}, \\ U &= \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_3^2}{2C_3}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $q_i$  — заряды на конденсаторах  $C_i$ ,  $I_i = \dot{q}_i$  — токи, протекающие через эти конденсаторы, причем  $I_1 = I_2 + I_3$ .

Если взять за независимые переменные пару зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , то выражения (1) для  $T$  и  $U$  примут вид:

$$T = \frac{L_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{L_2 \dot{q}_2^2}{2}; \quad U = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C_3}. \quad (2)$$

В координатах  $q_2, q_3$  выражения (1) будут выглядеть как

$$T = \frac{L_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2}{2} + \frac{L_2 \dot{q}_2^2}{2}; \quad U = \frac{(q_2 + q_3)^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{q_3^2}{2C_3}. \quad (3)$$

Произведение координат (например,  $q_1, q_2$ ) в потенциальной энергии соответствует емкостной связи, а произведение их производных ( $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ ) в кинетической энергии — индуктивной. Таким образом, как следует из (2), в координатах  $(q_1, q_2)$  система имеет емкостную связь, а в координатах  $(q_2, q_3)$ , в соответствии с (3) — смешанную (и индуктивную, и емкостную) связь.

Взаимодействие парциальных систем (доля перекачиваемой энергии) зависит не только от величины коэффициента связи. Так, при равных парциальных частотах даже при малой связи между парциальными системами происходит полная перекачка энергии из одной парциальной системы в другую. Взаимодействие систем необходимо характеризовать новой величиной — *коэффициентом связанности*, описывающим взаимодействие парциальных систем с учетом соотношения парциальных частот.

## Теория

Исследуемая система состоит из двух тяжелых маятников, соединенных пружинкой (рис. 1). Пусть система совершает малые колебания без трения. В реальной системе при малом трении за достаточно большой промежуток времени колебания прекращаются. Однако сравнение процессов, происходящих в реальной системе с малым затуханием, и процессов, описываемых теоретической моделью без затухания, возможно, так как за время измерения колебательных процессов в реальной системе энергия системы практически не изменяется.

Для получения уравнений движения системы по Лагранжу составим выражения для потенциальной и кинетической энергий. За координаты примем углы отклонения маятников от положения равновесия  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Обозначим через  $m_1$  и  $m_2$  массы маятников; через  $l_1$  и  $l_2$  — расстояния от точек подвеса маятников  $O_1$  и  $O_2$  до центров тяжести масс  $m_1$  и  $m_2$ ; через  $k$  — коэффициент упругости пружины и через  $a$  — расстояние от точек подвеса маятников до места крепления пружины. Предполагая при этом массу стержней и пружины равными нулю, а углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  достаточно малыми, получим

$$U = \frac{m_1 g l_1 \varphi_1^2}{2} + \frac{m_2 g l_2 \varphi_2^2}{2} + \frac{k a^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}, \quad (4)$$

$$T = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2},$$

где  $J_i = m_i l_i^2$  — моменты инерции маятников.

Подставляя эти соотношения в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 1; 2,$$

найдем уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + n_1^2 \varphi_1 - \lambda_1 \varphi_2 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + n_2^2 \varphi_2 - \lambda_2 \varphi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$n_1^2 = \frac{m_1 g l_1 + k a^2}{J_1}; \quad n_2^2 = \frac{m_2 g l_2 + k a^2}{J_2}; \quad (6)$$

$$\lambda_1 = \frac{k a^2}{J_1}; \quad \lambda_2 = \frac{k a^2}{J_2}. \quad (7)$$

Разбиение сложной системы на простые (парциальные) системы произведем, если, закрепляя второй маятник в положении равновесия ( $\varphi_2 = 0$ ), отклоним первый на угол  $\varphi_1$ . Тогда уравнение движения первого маятника примет вид  $\ddot{\varphi}_1 + n_1^2 \varphi_1 = 0$ , где  $n_1$  — парциальная частота первого маятника. Аналогичное уравнение будет для  $n_2$ . Парциальной частотой связанной системы с двумя степенями свободы называется частота, с которой колеблется один маятник, когда другой закреплен в положении равновесия. В уравнениях движения взаимодействие между парциальными системами представлено членами  $\lambda_2 \varphi_1$  и  $\lambda_1 \varphi_2$ . Коэффициент связи системы (в данном случае силовой)

$$\gamma = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{n_1^2 n_2^2}. \quad (8)$$

Изучаемая система имеет слабую силовую связь:

$$\lambda_1 \ll n_1^2; \quad \lambda_2 \ll n_2^2. \quad (9)$$

Общее решение системы уравнений движения будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A \cos(\omega t + \psi), \\ \varphi_2 &= k A \cos(\omega t + \psi). \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя общее решение (10) в уравнения движения (5), получим:

$$\begin{cases} (-\omega^2 + n_1^2) - \lambda_1 k = 0, \\ -\lambda_2 + (-\omega^2 + n_2^2) k = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Отсюда из условия совместности системы уравнений для  $k$ :

$$\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

имеем собственные (нормальные) частоты колебаний

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2} \right). \quad (12)$$

и из уравнений (11) коэффициенты распределения нормальных колебаний частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  по парциальным системам

$$k_{1,2} = \frac{1}{2\lambda_1} \left( n_1^2 - n_2^2 \mp \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2} \right). \quad (13)$$

Верхний знак перед корнем в уравнениях (12) и (13) будем относить к  $\omega_1$  и  $k_1$ , а нижний — к  $\omega_2$  и  $k_2$ .

Общее решение системы уравнений движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2), \\ \varphi_2 &= k_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + k_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2), \end{aligned} \quad (14)$$

где амплитуда колебаний  $A_1$ ,  $A_2$  и начальные фазы  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  определяются начальными условиями, а собственные (нормальные) частоты системы  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и коэффициенты распределения нормальных колебаний, не зависящие от начальных условий, — параметрами колебательной системы. Очевидно, что коэффициенты распределения нормальных колебаний по парциальным системам в координатах  $(q_1, q_2)$ ,  $(q_1, q_3)$ ,  $(q_2, q_3)$  различны.

Система колеблется с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , не совпадающими с парциальными частотами  $n_1$  и  $n_2$ , которые лежат внутри между нормальными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Как видно из общего решения (14), движение каждого маятника, вообще говоря, совершается с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  одновременно, но так как  $\omega_1$  и  $\omega_2$  отличаются друг от друга, то движения первого и второго маятника негармоничны.

Колебания с частотой  $\omega_1$  в первом и втором маятниках происходят с противоположными фазами, колебания с частотой  $\omega_2$  — с одинаковыми фазами.

Эти колебания можно истолковать как две компоненты нормального колебания, отношение амплитуд которых равно  $k_1$  для  $\omega_1$  и  $k_2$  для  $\omega_2$ . Хотя исследуемая система имеет малый коэффициент связи, однако возможно и слабое, и сильное влияние парциальных систем друг на друга.

Характер взаимодействия парциальных систем определяется величиной  $4\lambda_1\lambda_2 / (n_1^2 - n_2^2)^2$ , которая, по терминологии Л. И. Мандельштама, представляет **связанность** парциальных систем. Коэффициент связанности для систем с двумя степенями свободы с силовой связью

$$\sigma = \sqrt{\gamma} \frac{2n_1 n_2}{|n_1^2 - n_2^2|}. \quad (15)$$

Коэффициент связанности тем больше, чем ближе друг к другу парциальные частоты  $n_1$  и  $n_2$ .

Этот коэффициент по определению всегда положителен. Вводя коэффициент связанности  $\sigma$  в (13), получим следующие выражения для коэффициентов распределения нормальных колебаний:

при  $n_1 > n_2$ :

$$k_1 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 + \sigma^2}}{\sigma}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \sigma^2}}{\sigma}; \quad (16a)$$

при  $n_1 < n_2$ :

$$k_1 = -\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \sigma^2}}{\sigma}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \sigma^2} - 1}{\sigma}. \quad (16b)$$

В случае слабой связанности  $4\lambda_1\lambda_2 \ll |n_1^2 - n_2^2|$ , т. е.  $\sigma \ll 1$ , коэффициенты распределения  $k_1$  и  $k_2$  и собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  примут соответственно вид:

при  $n_1 \gg n_2$ :

$$\begin{aligned} k_1 &\approx -\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \frac{\sigma}{2}; & k_2 &\approx \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \frac{2}{\sigma}; \\ \omega_1^2 &\approx n_1^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{n_1^2 - n_2^2}; & \omega_2^2 &\approx n_2^2 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{n_1^2 - n_2^2}; \end{aligned} \quad (17)$$

при  $n_1 \ll n_2$ :

$$\begin{aligned} k_1 &\approx -\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \frac{2}{\sigma}; & k_2 &\approx \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \frac{\sigma}{2}; \\ \omega_1^2 &\approx n_2^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{n_1^2 - n_2^2}; & \omega_2^2 &\approx n_1^2 - \frac{\lambda_1\lambda_2}{n_1^2 - n_2^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, при  $n_1 \gg n_2$  будем иметь  $|k_1| \ll 1 \ll k_2$ , а при  $n_1 \ll n_2$  получим  $|k_1| \gg 1 \gg k_2$ . Собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  мало отличаются от парциальных частот  $n_1$  и  $n_2$ . Поэтому резко выражены индивидуальные свойства парциальных систем.

При предельно сильной связанности ( $n_1 = n_2 = n$ ) из уравнений (13) и (12) получим

$$k_1 = -\sqrt{\frac{J_1}{J_2}}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{J_1}{J_2}}; \quad (19)$$

$$\omega_1^2 = n^2 + \sqrt{\lambda_1\lambda_2}; \quad \omega_2^2 = n^2 - \sqrt{\lambda_1\lambda_2}. \quad (20)$$

Собственные частоты значительно отличаются от парциальных. Коэффициенты распределения не зависят от  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , т. е. при сколь угодно малой связи  $\gamma$  энергия каждого собственного колебания равномерно распределена по парциальным системам.

Исследуем, как при  $n_1 = n_2$  энергия перекачивается из одной парциальной системы в другую. Для случая  $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$  решение запишется в виде колебаний с медленно меняющейся амплитудой.

Чтобы определить  $A_1, A_2$  и начальные фазы  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , зададим начальные условия:

$$t = 0, \quad \varphi_1 = C, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0.$$

Подставляя начальные условия в соотношение (14) для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и их производных, а также определяя, согласно (19), коэффициенты распределения нормальных колебаний  $k_1 = -1$  и  $k_2 = 1$  имеем:  $A_1 = A_2 = C/2$  и  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . Решение (14) можно представить в виде гармонических колебаний с медленно меняющимися амплитудами

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t; \\ \varphi_2 &= C \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \end{aligned} \quad (21)$$

На рис. 3 графически изображены колебания (биения) системы. Здесь связанность велика и происходит полная перекачка энергии из одной парциальной системы в другую с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (22)$$

Колебание  $\varphi_2$  достигает максимума, когда  $\varphi_1$  становится равным нулю, и наоборот. В неравных парциальных системах ( $n_1 \neq n_2$ ) энергия перекачивается не полностью (рис. 4).

Для определения коэффициентов распределения нормальных колебаний воспользуемся в дальнейшем соотношениями между  $k_1$  и  $k_2$  и максимальными отклонениями маятников (амплитуда биений  $A$  и  $B$ ). Зададим начальные условия (отклоним первый маятник на угол  $C$ ): при  $t = 0$

$$\varphi_1 = C, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0.$$

Тогда из уравнения (14) имеем

$$A_1 = -\frac{Ck_2}{k_1 - k_2}; \quad A_2 = \frac{Ck_1}{k_1 - k_2}. \quad (23)$$

Подставляя  $A_1$  и  $A_2$  в выражение для  $\varphi_2$ , найдем

$$\varphi_2 = \frac{Ck_1k_2}{k_1 - k_2} (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t). \quad (24)$$

Максимальное отклонение второго маятника

$$\varphi_{2\max} = \frac{2C|k_1|k_2}{|k_1| - k_2} = A. \quad (25)$$

Отклоняя второй маятник на угол  $C$ , т. е. задавая начальные условия при  $t = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = C$ ,  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = 0$ , получим

$$\varphi_1 = \frac{C}{k_2 - k_1} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t). \quad (26)$$

Максимальное отклонение первого маятника

$$\varphi_{1\max} = \frac{2C}{k_2 + |k_1|} = B. \quad (27)$$

Отсюда коэффициенты распределения нормальных колебаний

$$k_1 = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - AB}}{B}, \quad (28)$$

$$k_2 = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - AB}}{B}.$$

При  $n_1 > n_2$  (первый маятник висит выше второго) необходимо брать верхний знак в соотношениях (22) ( $|k_1| < 1$ ,  $k_2 > 1$ ). При  $n_1 < n_2$  (первый маятник висит ниже второго) необходимо в соотношениях (22) использовать нижний знак ( $|k_1| > 1$ ,  $k_2 < 1$ ).

Таким образом, задавая начальное отклонение первого маятника  $C$  и измеряя максимальную амплитуду биений второго маятника  $A$ , и задавая такое же начальное отклонение  $C$  второго маятника и измеряя максимальную амплитуду биений первого  $B$ , определяем значения  $k_1$  и  $k_2$ . При равных парциальных частотах  $C = A = B$  и  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = 1$ .

Рассмотрим зависимость приведенных собственных частот  $(\omega_{1,2}/n_1)$  от расстройки системы  $(n_2/n_1)$ . Обозначим  $Z_{1,2} = (\omega_{1,2}/n_1)^2$  и  $\xi = (n_2/n_1)^2$ . Тогда уравнение (12) для частоты будет иметь вид

$$Z^2 - (1 + \xi)Z + \xi(1 - \gamma^2) = 0. \quad (29)$$

На рис. 5 приведен график этого уравнения (*график Вина*). Квадраты приведенных собственных частот  $(\omega_1/n_1)^2$  и  $(\omega_2/n_1)^2$  располагаются на двух ветвях гиперболы. Каждой расстройке на графике соответствуют две собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . При отсутствии связи между парциальными системами ( $\gamma = 0$ ) уравнение гиперболы (29) распадается на две прямые. Прямая  $Z = 1$  соответствует заданной парциальной частоте  $n_1$ , а прямая  $Z = \xi$  — изменению парциальной частоты  $n_2$  с расстройкой.

Следует заметить, что с увеличением расстройки  $\xi = (n_2/n_1)^2$  коэффициент связи системы  $\gamma = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{n_1^2 n_2^2}$  (в работе рассматривается случай  $\gamma^2 \ll 1$ ) уменьшается. Поэтому в уравнениях асимптот  $Z = \xi + \gamma^2$  и  $Z = 1 - \gamma^2$  гипербо-



лы (29) величиной  $\gamma^2$  можно пренебречь и с большой точностью можно считать асимптотами прямые  $Z = \xi$  и  $Z = 1$ .

Из графика видно, что при любой расстройке системы парциальные частоты лежат между  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и не равны собственным частотам системы. При равенстве парциальных частот ( $\xi = 1$ ) имеет место наибольшее отличие собственных частот от парциальных. При большой расстройке собственные частоты близки к парциальным. С уменьшением коэффициента связи  $\gamma$  собственные частоты приближаются к парциальным. Это следует учитывать при проведении эксперимента.

Коэффициенты распределения нормальных колебаний в функции расстройки имеют вид

$$k_{1,2} = \frac{n_1^2}{2\lambda_1} \left( 1 - \xi \mp \sqrt{(\xi - 1)^2 + 4\gamma^2 \xi} \right). \quad (30)$$

При проведении эксперимента и сравнении полученных результатов с теорией необходимо иметь в виду, что реальная система обладает затуханием, и что теория справедлива только для малых колебаний. Это ограничивает наши возможности при измерениях: например, для очень слабой связи время перекачки энергии становится настолько большим, что колебания могут затухнуть. При малых амплитудах колебаний становится заметным влияние трения покоя. Для амплитуд колебаний, больших  $20\text{--}25^\circ$ , уже сказываются нелинейные свойства системы — зависимость частоты от амплитуды (неизохронность).

## Экспериментальная часть

В опытах маятники следует отклонять примерно на 5 см от положения равновесия. Отсчет отклонения производится по шкале, прикрепленной внизу, как показано на рис. 1. При больших амплитудах и больших связях заметно влияние неравномерности растяжения и сжатия пружинки, связывающей маятники (при сжатии происходит провисание пружинки).

Остановка и пуск маятников осуществляется с помощью электромагнитов, размещенных под маятниками. На концах стержней маятников вмонтированы подвижные стальные стерженьки. При подаче тока в электромагниты, стерженьки маятников притягиваются к неподвижным сердечникам электромагнитов, и маятники тормозятся за счет трения между стерженьками и сердечниками.

Для пуска какого-либо маятника выключают соответствующий электромагнит. Тумблеры, управляющие током в обмотках электромагнитов, одновременно управляют электросекундомером. Поэтому запуск маятников и электросекундомера оказывается синхронным.

Для того чтобы задать начальное отклонение какому-либо маятнику, следует затормозить этот маятник (переведя соответствующий тумблер в положение «стоп»), и, взявшись пальцами за нижний конец стержня маятника, переместить его вдоль сердечника электромагнита в необходимое положение.

Установка допускает как отдельные, так и общие запуск и остановку маятников. Это осуществляется с помощью тумблеров «I маятник» (пуск, стоп) «II маятник» (пуск, стоп), «Общий» (пуск, стоп).

Например, для запуска первого маятника при условии, что второй маятник неподвижен, нужно перевести все тумблеры в положение «стоп», задать желаемое начальное отклонение первому маятнику и перевести тумблер первого маятника в положение «пуск». При этом первый маятник начнет колебаться. Одновременно будет запущен секундомер. Второй маятник останется заторможенным. Для остановки секундомера следует перевести тумблер первого маятника снова в положение «стоп» или выключить питание установки.

Для одновременного запуска двух маятников с заданными начальными отклонениями следует перевести все тумблеры в положение «стоп», задать требуемые начальные отклонения и запустить маятники, переведя тумблер «общий» в положение «пуск». При этом оба маятника начнут движение. Одновременно будут запущены секундомер. Для остановки секундомера нужно перевести тумблер «общий» снова в положение «стоп» или выключить питание установки.

Обмотки электромагнитов потребляют значительный ток и поэтому нагреваются. Во избежание перегрева электромагнитов не следует без необходимости оставлять их включенными продолжительное время. В перерыве между упражнениями нужно выключать питание установки. После включения питания установка сразу же готова к работе.

*Для большей точности результатов опыта следует измерять время возможно большего количества периодов колебаний и, задавая повторно начальные условия опыта, вновь делать отсчеты.*

На установке изменение коэффициента связанности достигается или изменением положения пружинки, связывающей маятники, или расстройкой парциальных частот (меняется длина маятника — место закрепления груза).

*Основная цель эксперимента — проследить поведение системы в зависимости от различной связанности парциальных систем.*

## **Упражнения**

### **1. Измерения при равных парциальных частотах маятников $n_1 = n_2$ .**

*Измерение собственных ( $\omega_1, \omega_2$ ) и парциальных ( $n_1 = n_2 = n$ ) частот и частоты биений  $\Omega$  при изменении коэффициента связи.*

До начала измерений устанавливают грузы на одинаковой высоте и закрепляют в определенном положении пружинку. После этого, закрепив, например, первый маятник в положении равновесия и отклонив второй из положения равновесия на 5 см, измеряют парциальную частоту  $n_2$ . Аналогично измеряют  $n_1$ . При совпадении значений парциальных частот ( $n_1 = n_2$ ) приступают к измерениям собственных частот. Измерения собственных и парци-

альных частот следует совершать параллельно измерениям частоты  $\Omega$  перекачки энергии из одной парциальной системы в другую для тех же значений положения пружинки  $a$ .

Задают начальные условия при  $t = 0$ :  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$  (маятники отпускают без толчка, начальные скорости их равны нулю).

Для нахождения частоты  $\omega_1$  при  $t = 0$ :  $\varphi_1 = -b$ ,  $\varphi_2 = b$  (маятники отклоняют в разные стороны от положения равновесия).

Для нахождения частоты  $\omega_2$  при  $t = 0$ :  $\varphi_1 = b$ ,  $\varphi_2 = b$  (оба маятника отклоняют в одну сторону от положения равновесия).

Чтобы получить биения, маятники запускают из положения, когда при  $t = 0$  заданы  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = b$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$ . Постепенно первый маятник начинает раскачиваться, в то время как второй колеблется с все убывающими амплитудами. Когда амплитуда колебаний второго маятника  $\varphi_2$  станет равной нулю, первый достигает максимальных размахов. После этого начинается перекачка энергии из первого маятника во второй и т. д. Для получения большей точности необходимо производить измерения в течение ряда периодов с момента остановки одного из маятников.

Для каждого положения пружинки необходимо измерить  $n$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\Omega$ . Измерения следует проводить, начиная с больших  $a$  для 5—10 положений пружины.

*Результаты упражнения 1 представить в виде графиков:*

- а) квадратов собственных частот  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$  как функции  $a^2$ ;
- б) квадрата парциальной частоты  $n^2$  как функции  $a^2$ ;
- в) частоты биений  $\Omega$  от  $a^2$ . Нанести на график  $\Omega(a^2)$  разности собственных частот  $\omega_1 - \omega_2$ . Сравнить полученные результаты.

## **2. Измерения при разных парциальных частотах маятников $n_1 \neq n_2$ .**

*Цель упражнения* — определение коэффициентов распределения амплитуд  $k_1$  и  $k_2$ , собственных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и частоты биений  $\Omega$  для  $n_1 \neq n_2$ .

Необходимо установить массу  $m_1$  первого маятника в одном положении (несколько ниже середины стержня маятника), а массу  $m_2$  второго закрепить в разных положениях (как выше, так и ниже первого), чтобы получать разные расстройки парциальных частот  $n_2/n_1$ , большие или меньшие единицы, а также равенство парциальных частот. Всего взять 7—10 точек для измерений. Пружину связи закрепить в одном положении, возможно ниже, чтобы лучше различать частоты, и иметь возможность передвигать груз  $m_2$  вниз и вверх.

После этого произвести для каждого положения  $m_2$  следующие опыты:

### 2.1. Измерение парциальных частот $n_1$ и $n_2$ .

Задают начальные условия: при  $t = 0$   $\varphi_1 = b$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$ . (определение  $n_1$ ) и  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = b$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$ . (определение  $n_2$ ). Запуская каждый из маятников по очереди, проводят измерения парциальных частот маятников аналогично упражнению 1 для каждого положения массы  $m_2$ .

### 2.2. Измерение коэффициентов распределения нормальных колебаний $k_1$ и $k_2$ .

Задают начальные условия: при  $t = 0$   $\varphi_1 = C$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$ , запускают оба маятника, наблюдают биения и измеряют максимальный размах колебаний второго маятника  $A$ . Затем при  $t = 0$  задают  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = C$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$ , и измеряют максимальный размах колебаний первого маятника  $B$ .

По формулам (28) вычисляют  $k_1$  и  $k_2$ , необходимые для следующих опытов.

### 2.3. Измерение собственных частот $\omega_1$ и $\omega_2$ .

Для определения более высокой частоты  $\omega_1$  задают следующие начальные условия: при  $t = 0$   $\varphi_1 = b$ ,  $\varphi_2 = -|k_1|b$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$ . Здесь  $k_1$  — значение коэффициента распределения, найденное в упражнении 2.2. Используя (14), легко убедиться, что в этом случае  $A_2 = 0$ , и в системе существуют нормальные колебания с частотой  $\omega_1$  (маятники колеблются с противоположными фазами).

Для определения более низкой частоты  $\omega_2$  задают начальные условия: при  $t = 0$   $\varphi_1 = b/k_2$ ,  $\varphi_2 = b$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$ . Значение  $k_2$  определяется из упражнения 2.2. При этих начальных условиях  $A_1 = 0$  (см. (14)), и существуют нормальные колебания с частотой  $\omega_2$  (маятники колеблются с одинаковыми фазами). Если при данных начальных условиях имеет место перекачка энергии, то необходимо внести поправку в начальные условия и повторить измерения. Чтобы получить более точные результаты, опыт необходимо повторить несколько раз.

### 2.4. Измерения частоты биений, или частоты перекачки энергии $\Omega$ .

Задают начальные условия: при  $t = 0$   $\varphi_1 = b$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\dot{\varphi}_{1,2} = 0$ , запускают оба маятника и проводят измерения частоты биений, как это делалось в упражнении 1.

Полученные значения  $\Omega$  сравнивают с разностью собственных частот, полученных в упражнении 2.3. Измерение частоты биений следует проводить для каждого положения массы  $m_2$ .

Результаты упражнения 2 представить в виде графиков:

- а)  $(\omega_1/n_1)^2$  и  $(\omega_2/n_1)^2$  как функции  $\xi = (n_2/n_1)^2$  (график Вина);
- б) коэффициентов распределения  $k_1$  и  $k_2$  как функции  $\xi = (n_2/n_1)^2$ .

## Список литературы

- [1] Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., «Наука», 1964.  
[2] Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. М., «Наука», 1978.  
[3] Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М., «Наука», 1972.

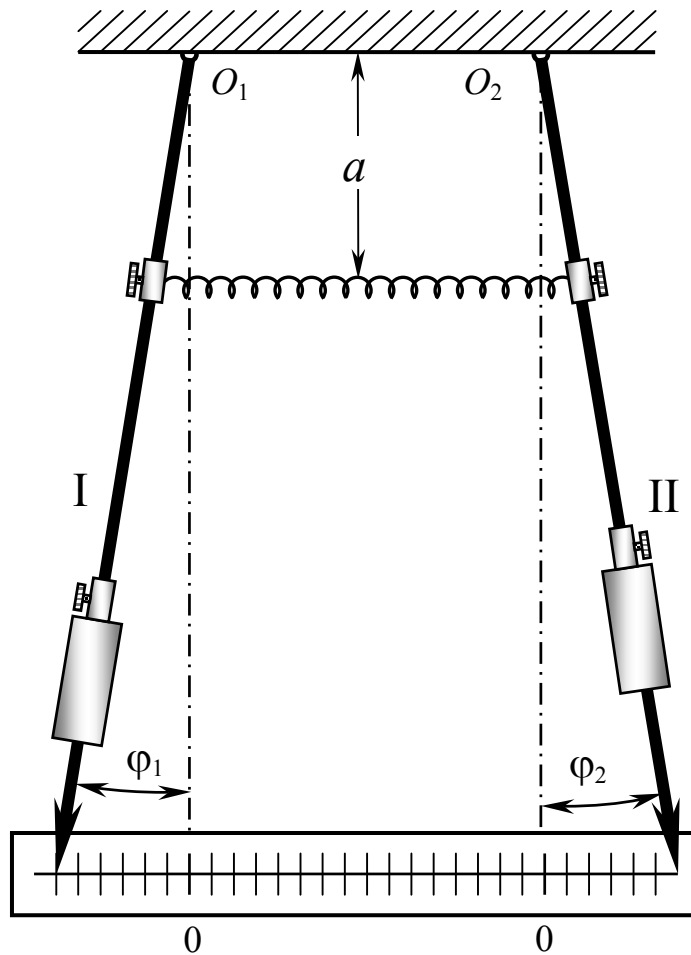


Рис. 1.

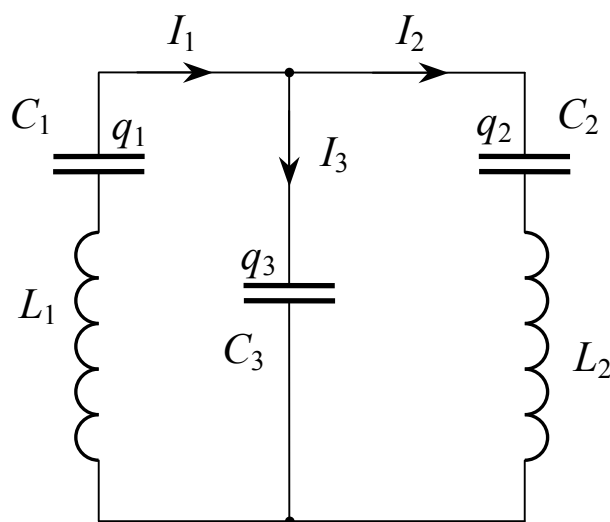


Рис. 2.

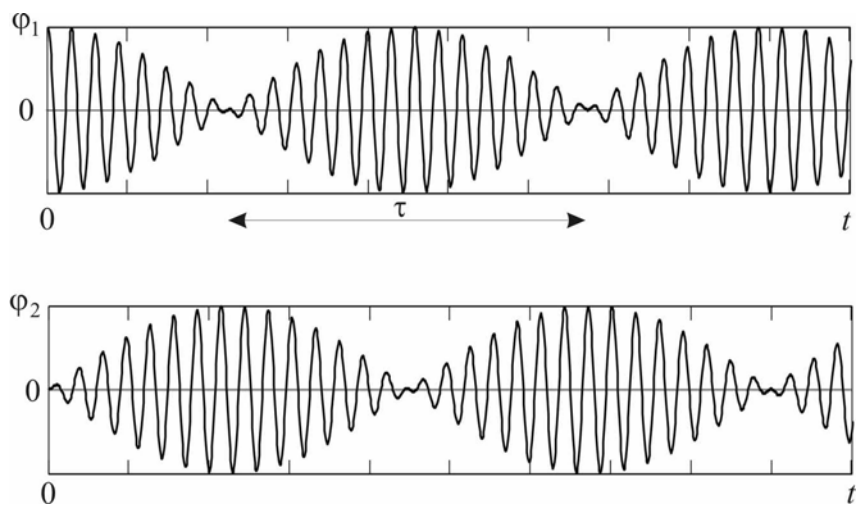


Рис. 3.

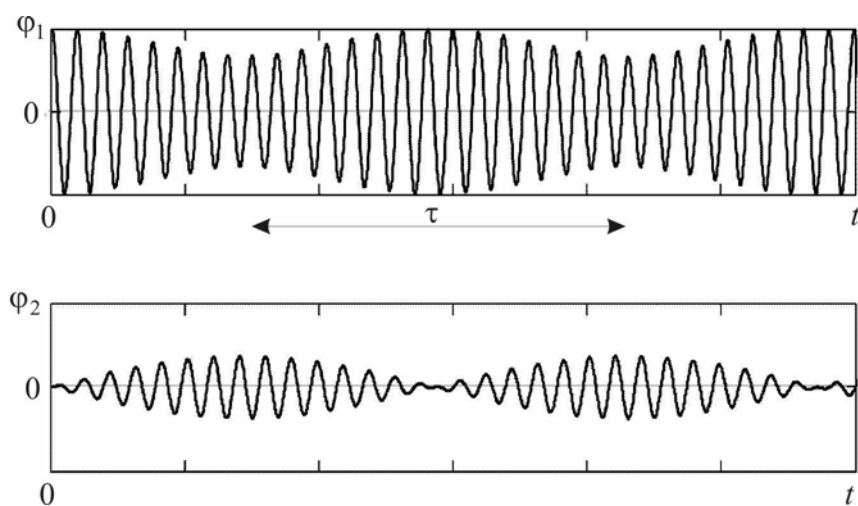


Рис. 4.

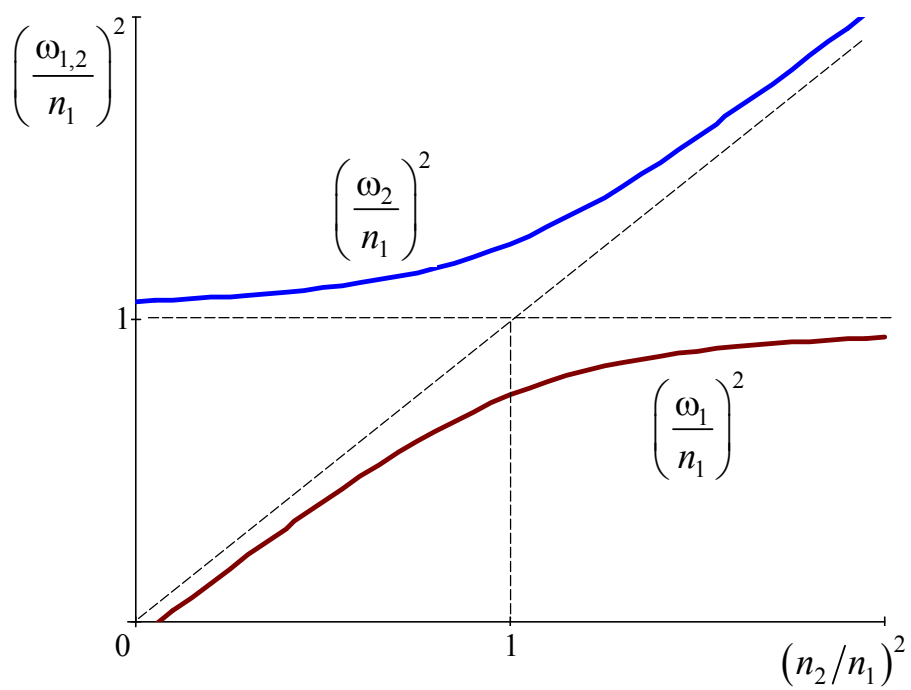


Рис. 5.