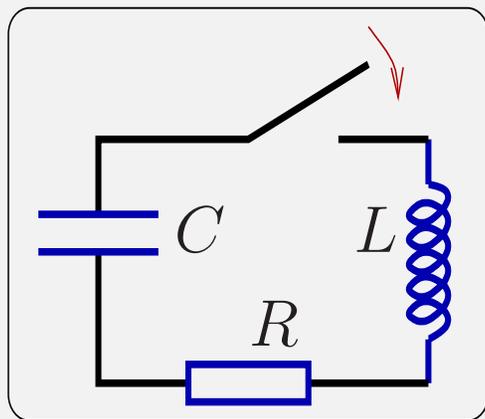


Внешнее воздействие на линейную систему

Последовательный контур. Свободные колебания



$$\underbrace{L \frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{rI}_{U_r} + \underbrace{\int_{-\infty}^t \frac{I(\tau)}{C} d\tau}_{U_C} = 0,$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

$$2\delta = \frac{r}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad q = \mathcal{A}e^{i\omega t},$$

$$-\omega^2 \mathcal{A}e^{i\omega t} + 2\delta i\omega \mathcal{A}e^{i\omega t} + \omega_0^2 \mathcal{A}e^{i\omega t} = 0,$$

$$(-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0^2) \mathcal{A}e^{i\omega t} = 0,$$

Характеристическое уравнение:

$$\omega^2 - 2\delta i\omega - \omega_0^2 = 0,$$

$$\omega_{1,2} = i\delta \pm \tilde{\omega}_0, \quad \tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Решение однородного уравнения ищем в виде:

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\tilde{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\tilde{\omega}_0 t}$$

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\tilde{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\tilde{\omega}_0 t},$$

$$\dot{q}(t) = A_1 (-\delta + i\tilde{\omega}_0) e^{-\delta t + i\tilde{\omega}_0 t} + A_2 (-\delta - i\tilde{\omega}_0) e^{-\delta t - i\tilde{\omega}_0 t}$$

Пусть заданы начальные условия

$$q(0) = CU_0, \quad \Rightarrow \quad A_1 + A_2 = CU_0,$$

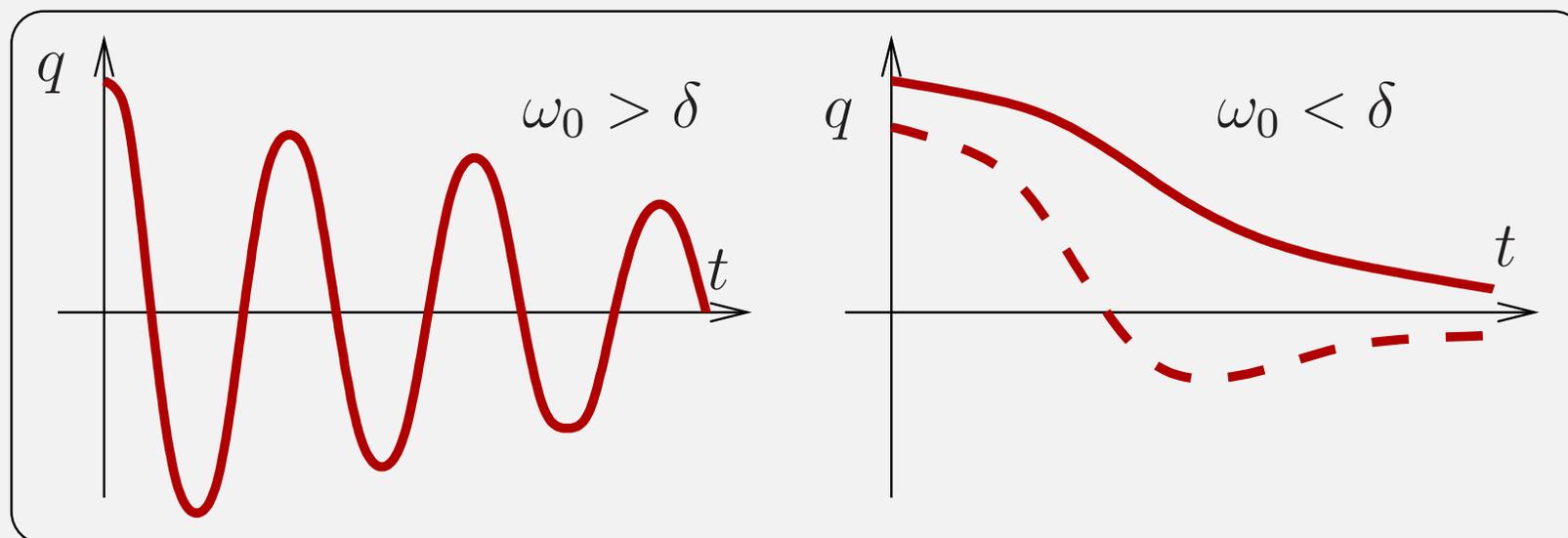
$$\dot{q}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 - A_2 = \frac{\delta CU_0}{i\tilde{\omega}_0}.$$

$$q(t) = \mathbf{CU}_0 e^{-\delta t} \left(\cos \tilde{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\tilde{\omega}_0} \sin \tilde{\omega}_0 t \right)$$

Имеем два случая

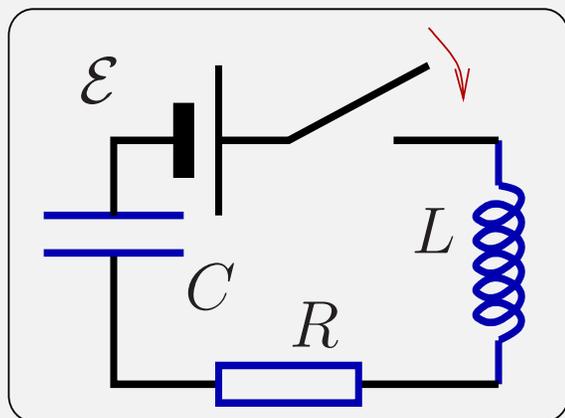
$$q(t) = \mathbf{C}U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \tilde{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\tilde{\omega}_0} \sin \tilde{\omega}_0 t \right), \quad \delta < \omega_0,$$

$$q(t) = \frac{\mathbf{C}U_0 e^{-\delta t}}{|\tilde{\omega}_0|} \left((|\tilde{\omega}_0| - \delta) e^{-|\tilde{\omega}_0| t} + (|\tilde{\omega}_0| + \delta) e^{|\tilde{\omega}_0| t} \right), \quad \delta > \omega_0$$



Последовательный контур. Переходная характеристика

При $t = 0$ включаем постоянную э.д.с. \mathcal{E} (ступенька):



$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}}{L},$$

$$q(0) = 0, \quad \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Пусть $\omega_0 \gg \delta$, \mathcal{E} — постоянна.

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t} + C\mathcal{E},$$

$$q(0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 = -C\mathcal{E},$$

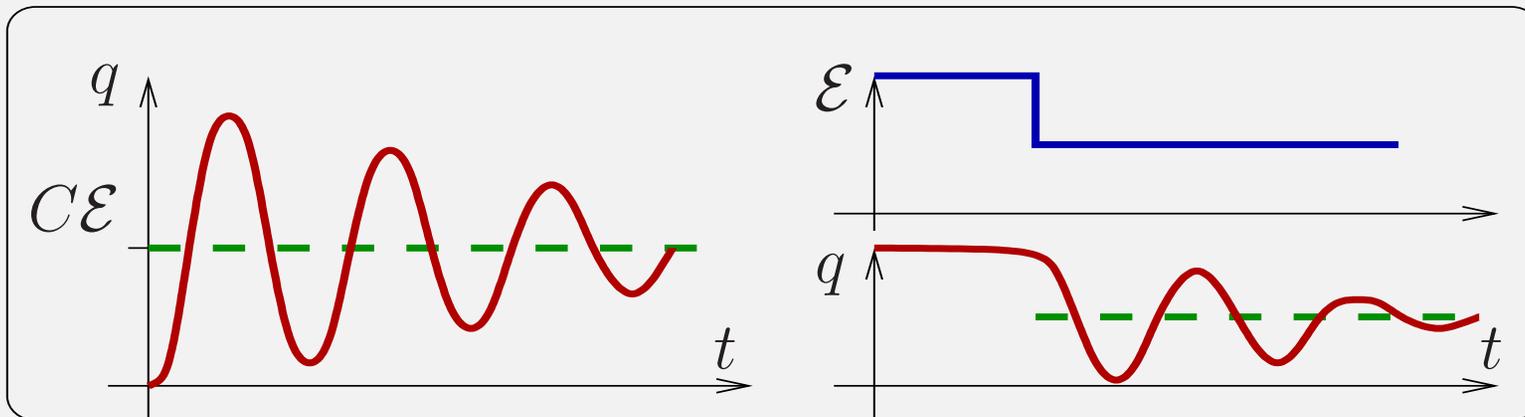
$$\dot{q}(0) = 0 \Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{\delta C\mathcal{E}}{i\bar{\omega}_0}$$

$$q(t) = A_1 e^{-\delta t + i\bar{\omega}_0 t} + A_2 e^{-\delta t - i\bar{\omega}_0 t} + C\mathcal{E}$$

$$q(0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2 = -C\mathcal{E}, \quad \dot{q}(0) = 0 \Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{\delta C\mathcal{E}}{i\bar{\omega}_0},$$

$$q(t) = C\mathcal{E} - C\mathcal{E} e^{-\delta t} \left(\cos \bar{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\bar{\omega}_0} \sin \bar{\omega}_0 t \right), \quad \bar{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \delta^2,$$

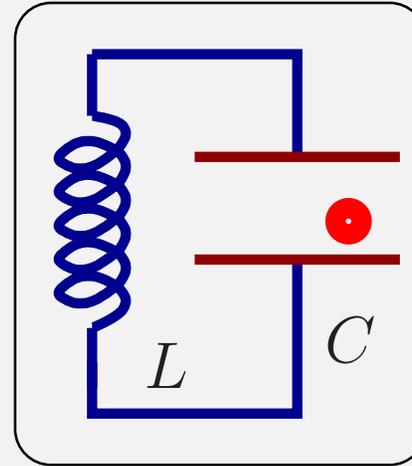
$$h(t) \equiv \frac{q(t)}{C\mathcal{E}} = 1 - e^{-\delta t} \left(\cos \bar{\omega}_0 t + \frac{\delta}{\bar{\omega}_0} \sin \bar{\omega}_0 t \right)$$



№1 “Электрон” Дано: L, C, d, m, e

1). Найти, чему равен сдвиг собственной частоты контура, если в емкость “вложен” свободный электрон.

2). То же самое, если электрон “на пружинке” (частота его свободных колебаний равна ω_e).

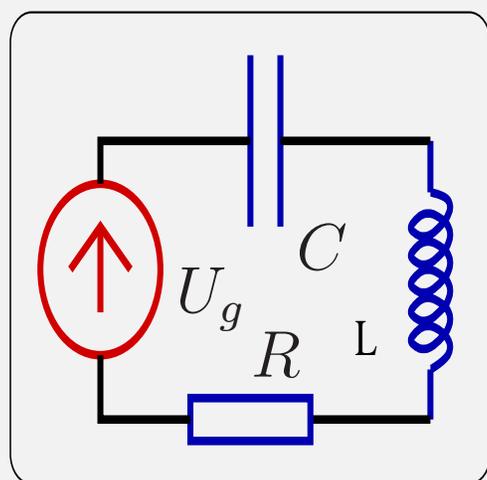


№2 “Резонансная кривая” С какой максимальной

скоростью $\frac{d\omega_g}{dt}$ можно менять частоту генератора ω_g , чтобы “прописать” (измерить) резонансную кривую резонатора с заданной точностью, например, с относительной ошибкой $\epsilon = 0.03$. Параметры резонатора считать известными.

Последовательный контур. Вынужденные колебания

Установившийся режим: $t \gg 1/\delta$.



$$L \frac{dI}{dt} + \underbrace{rI}_{U_r} + \underbrace{\int_{-\infty}^t \frac{I(\tau)}{C} d\tau}_{U_C} = U_g(t)$$

$$A \cos(\omega t + \phi) = \Re [\mathcal{A} e^{i\omega t}]$$

$$U_g(t) = \mathcal{U}_g e^{i\omega t}, \quad I_L = I_r = I_C = \mathcal{I} e^{i\omega t}.$$

$$\underbrace{L \frac{dI}{dt}}_{U_L} + \underbrace{rI}_{U_r} + \underbrace{\int_{-\infty}^t \frac{I(\tau)}{C} d\tau}_{U_C} = U_g(t),$$

$$U_C = \frac{1}{C} \int I_C dt = \frac{1}{i\omega C} \mathcal{I}e^{i\omega t},$$

$$U_r = r \mathcal{I}e^{i\omega t},$$

$$U_L = \frac{dI_L}{dt} = i\omega L \mathcal{I}e^{i\omega t}.$$

Реактивное сопротивление (импеданс):

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}, \quad Z_L = i\omega L,$$

$$U(t) = U_C + U_r + U_C, \quad U_g = \mathcal{I}Z(\omega),$$

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \left(\frac{1}{i\omega C} + r + i\omega L \right) = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(r\sqrt{\frac{C}{L}} + i \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] \right) = \\ &= \rho \left(\frac{1}{Q} + i\xi \right). \end{aligned}$$

ρ – характеристическое сопротивление, Q – добротность,
 ξ – расстройка.

Характеристики контура (резонатора):

ρ – характеристическое сопротивление,

Q – добротность, ξ – расстройка.

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(r \sqrt{\frac{C}{L}} + i \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right] \right) = \rho \left(\frac{1}{Q} + i\xi \right),$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{r} = \frac{\omega_0}{2\delta}, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\mathcal{I}(\omega) = \frac{\mathcal{U}_g}{\rho \left(\frac{1}{Q} + i\xi \right)}, \quad U_R = R\mathcal{I}, \quad U_L = i\omega L\mathcal{I}, \quad U_C = \frac{\mathcal{I}}{i\omega C}$$

$$|\mathcal{I}(\omega)| = \frac{\mathcal{U}_g}{\rho \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \quad \varphi_I = \arg(\mathcal{I}(\omega)) = \operatorname{arctg}(-Q\xi),$$

$$|U_R(\omega)| = \frac{R\mathcal{U}_g}{\rho \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \quad \varphi_{U_R} = \varphi_I,$$

$$|U_L(\omega)| = \frac{\omega L\mathcal{U}_g}{\rho \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}} = \frac{\omega\mathcal{U}_g}{\omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \quad \varphi_{U_L} = \varphi_I + \frac{\pi}{2},$$

$$|U_C(\omega)| = \frac{\mathcal{U}_g}{\rho\omega C \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}} = \frac{\omega_0\mathcal{U}_g}{\omega \sqrt{\frac{1}{Q^2} + \xi^2}}, \quad \varphi_{U_C} = \varphi_I - \frac{\pi}{2},$$

Последовательный контур. Резонанс:

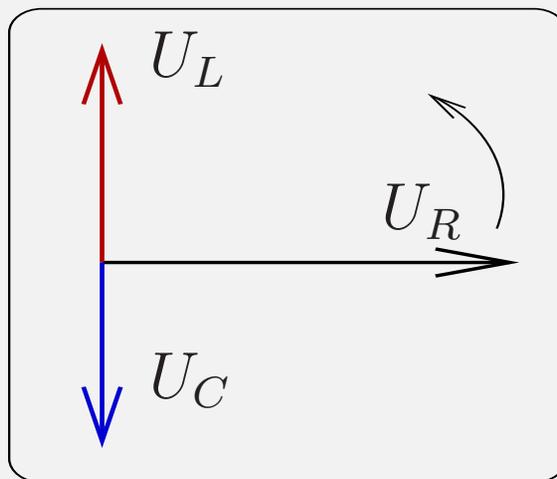
$$\xi = 0, \quad \omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}(\omega)_{max} = \frac{\mathcal{U}_g}{r},$$

$$U_L = i\omega_0 L \frac{\mathcal{U}_g}{r} e^{i\omega t} = \frac{i}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} \mathcal{U}_g e^{i\omega t} = \mathbf{iQ} \mathcal{U}_g e^{i\omega t},$$

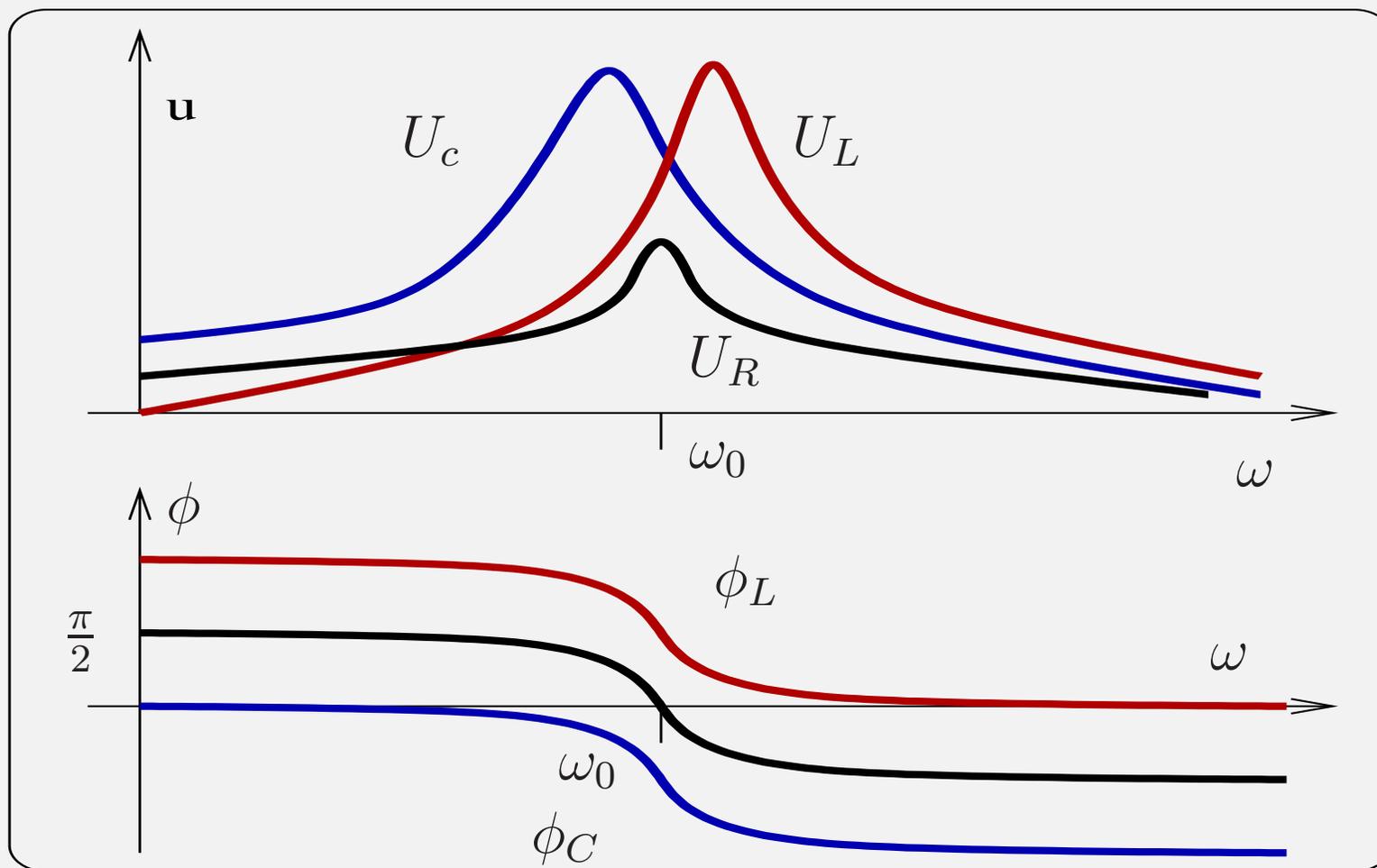
$$U_C = \frac{1}{i\omega_0 C} \frac{\mathcal{U}_g}{r} e^{i\omega t} = -\frac{i}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} \mathcal{U}_g e^{i\omega t} = \mathbf{-iQ} \mathcal{U}_g e^{i\omega t}.$$

Резонанс напряжений: U_C
и U_L в противофазе.

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{r}$$



Резонансные кривые $\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, $\omega_L = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}}$



Задача “Вынужденные колебания”

В последовательном колебательном контуре ($\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $\delta = r/(2L)$, $\omega_0 \gg \delta$) в момент времени $t = 0$ включается генератор, напряжение $U_g(t)$ которого меняется по закону:

$$U_g(t) = \begin{cases} U_0 \cos(\omega_0 - \Delta)t & 0 \leq t, \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

Найти зависимость от времени напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ и построить графики для случаев:
а) $\Delta = 0$, б) $\Delta = \delta$, в) $\Delta = 5\delta$.

Физический смысл добротности:**Свободные колебания:**

$$A = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t), \quad Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 \tau^*}{2};$$

Потери энергии за период:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\pi \times \frac{W_{\text{запас}}}{W_{\text{потери за период}}} = \\ &= 2\pi \times \frac{\left(\frac{LI^2}{2}\right)}{\left(\frac{rI^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right)} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{\rho}{r} = Q; \end{aligned}$$

Физический смысл добротности:

Ширина резонансной кривой:

$$\mathcal{I} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{r + i\rho\xi} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{r(1 + iQ\xi)},$$

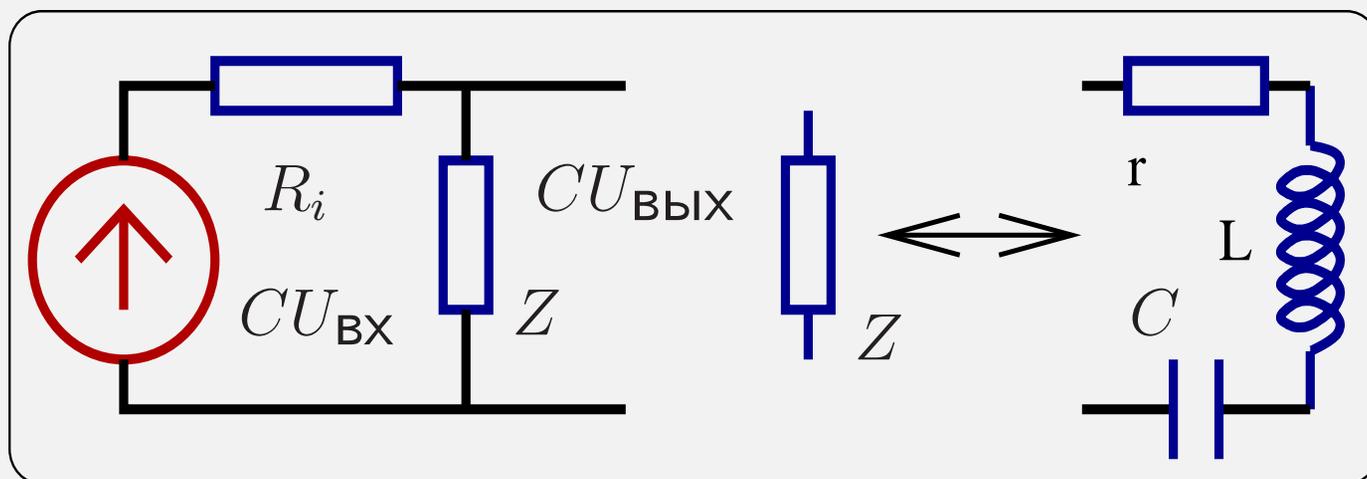
$$\mathcal{I}_{\sqrt{2}}(\omega) = \frac{\mathcal{I}_{max}(\omega)}{\sqrt{2}}, \Rightarrow \xi Q = 1, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

При $Q \gg 1$:

$$\xi \simeq \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \quad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q},$$

При $Q \ll 1$:

$$\omega_1 \simeq Q\omega_0, \quad \omega_2 \simeq \frac{\omega_0}{Q}$$

Резонансные явления в линейных цепях

$$K(\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{U_{\text{ВХ}}(\omega)} = \frac{Z}{R_i + Z},$$

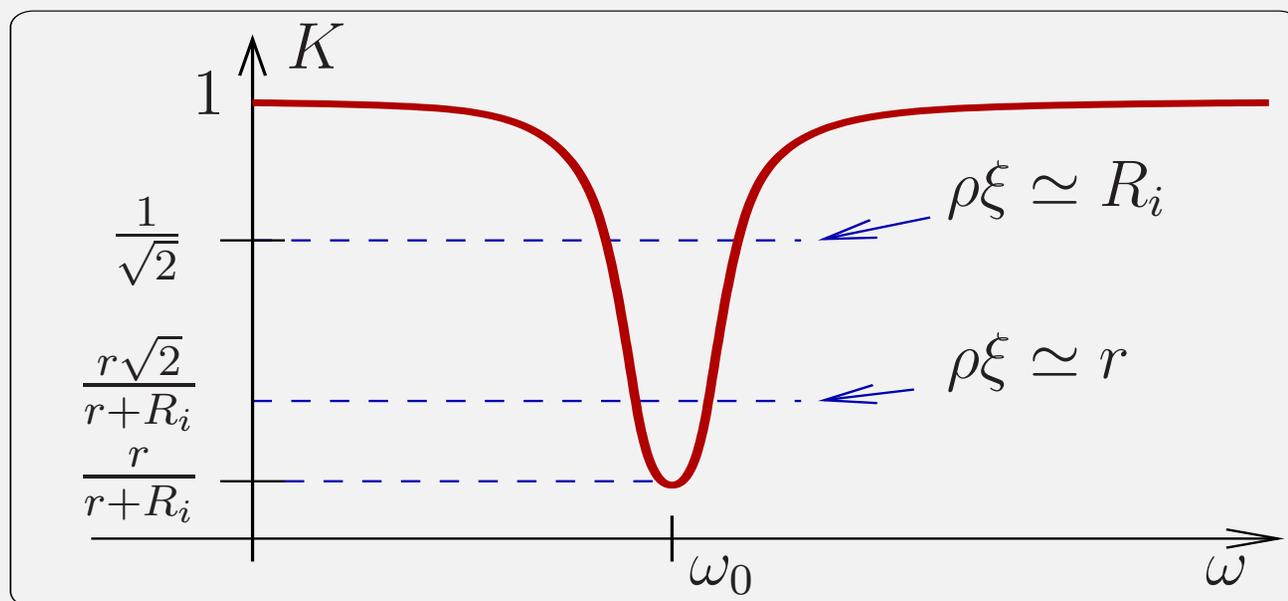
$$R_i \gg Z(\omega), \Rightarrow K(\omega) \rightarrow 0,$$

$$R_i \ll Z(\omega), \Rightarrow K(\omega) \rightarrow 1$$

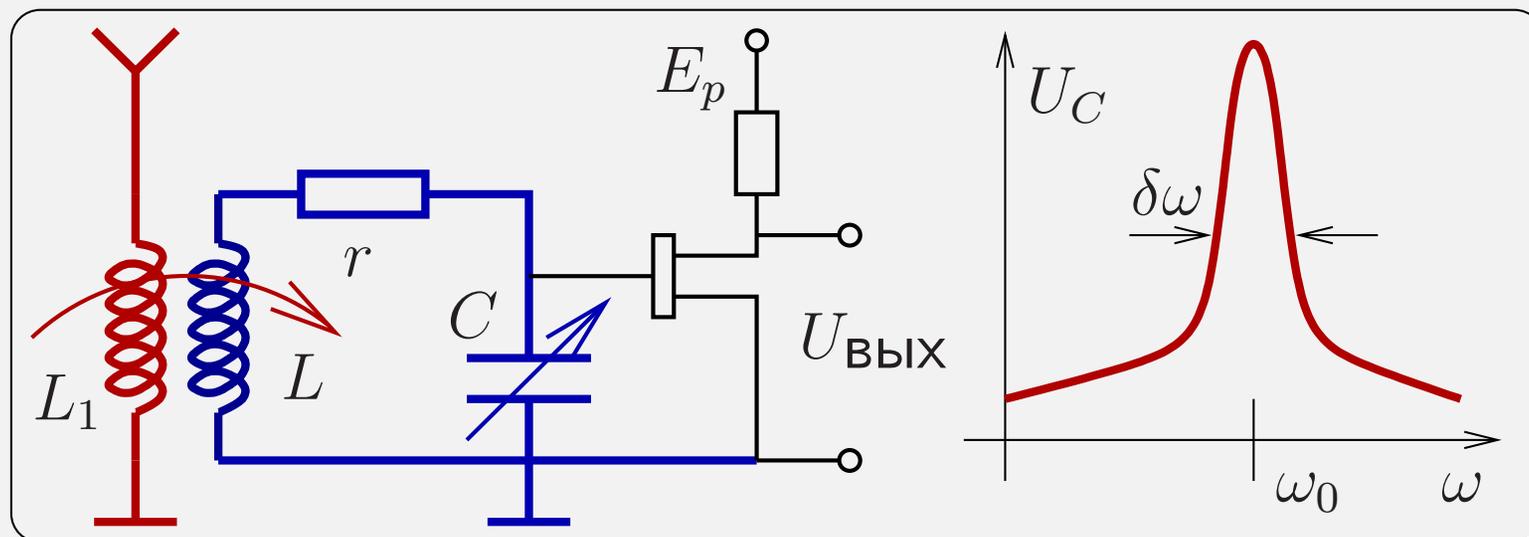
Пример: фильтр-пробка. Пусть $\rho \gg R_i \gg r$:

$$K(\omega) = \frac{Z}{Z + R_i} = \frac{r + i\rho\xi}{R_i + r + i\rho\xi}, \quad Z = r + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = r + i\rho\xi$$

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{\rho}{R_i} = \frac{1}{Q_{\text{нагр}}}, \quad Q_{\text{нагр}} \gg 1$$



Пример: полосовой фильтр



R_i – Сопротивление, вносимое антенной,

$$\begin{aligned}
 K(\omega) &= \frac{U_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{U_{\text{ВХ}}(\omega)} = \frac{1/i\omega C}{Z + R_i} = \\
 &= \frac{1}{i\omega C(R_i + r + i\rho\xi)} = \frac{\rho\omega_0}{i\omega(R_i + r + i\rho\xi)},
 \end{aligned}$$

$$K(\Omega) = \frac{\rho\omega_0}{i\omega(R_i + r + i\rho\xi)} = \frac{Q_{\text{нагр}}\omega_0}{i\omega(1 + iQ_{\text{нагр}}\xi)},$$

$$Q_{\text{нагр}} = \frac{\rho}{(R_i + r)}, \quad (\rho \gg r, R_i)$$

Резонанс: $|K(\omega_0)| = Q_{\text{нагр}}, \quad Q_{\text{нагр}} = \frac{\rho}{(R_i + r)} \gg 1$

Вдали от резонанса: $\omega \ll \omega_0, \quad \omega \gg \omega_0$

$$|K(\omega)| \simeq \frac{\omega_0}{\omega|\xi|} = \frac{1}{\left| \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right|} < 1,$$

Ширина полосы фильтра:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq \frac{R_i + r}{\rho} = \frac{1}{Q_{\text{нагр}}}, \quad Q_{\text{нагр}} \gg 1$$

Принцип дуальности линейных цепей:

Любое утверждение остается в силе если

одновременно заменить:

$$I \iff U,$$

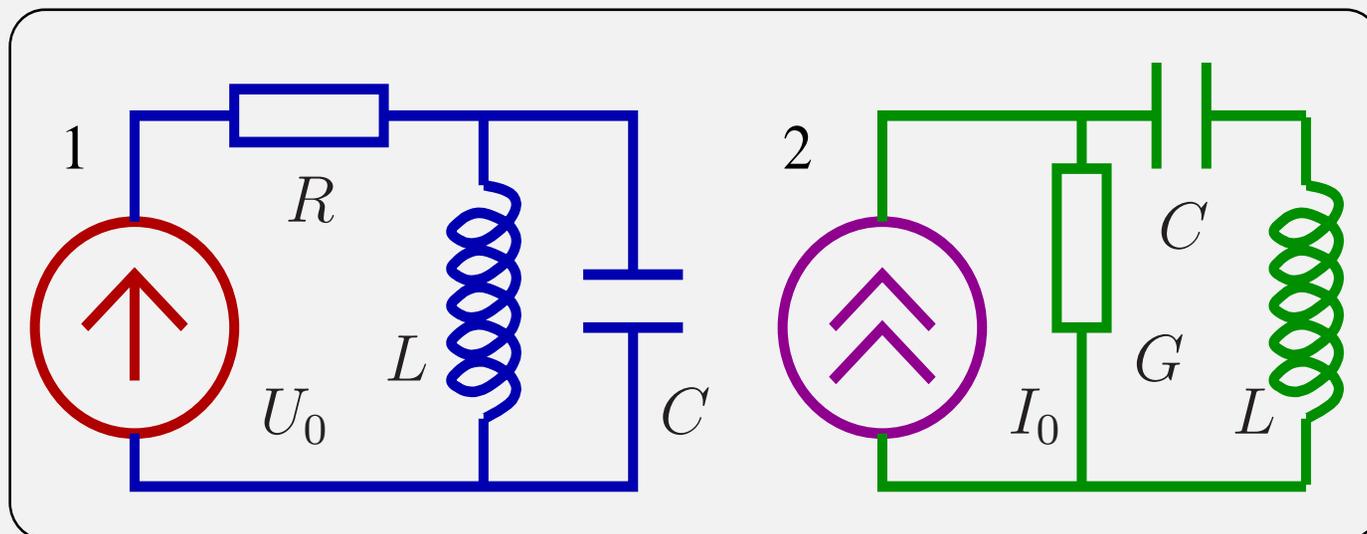
$$L \iff C,$$

$$R \iff G,$$

параллельно \iff последовательно,

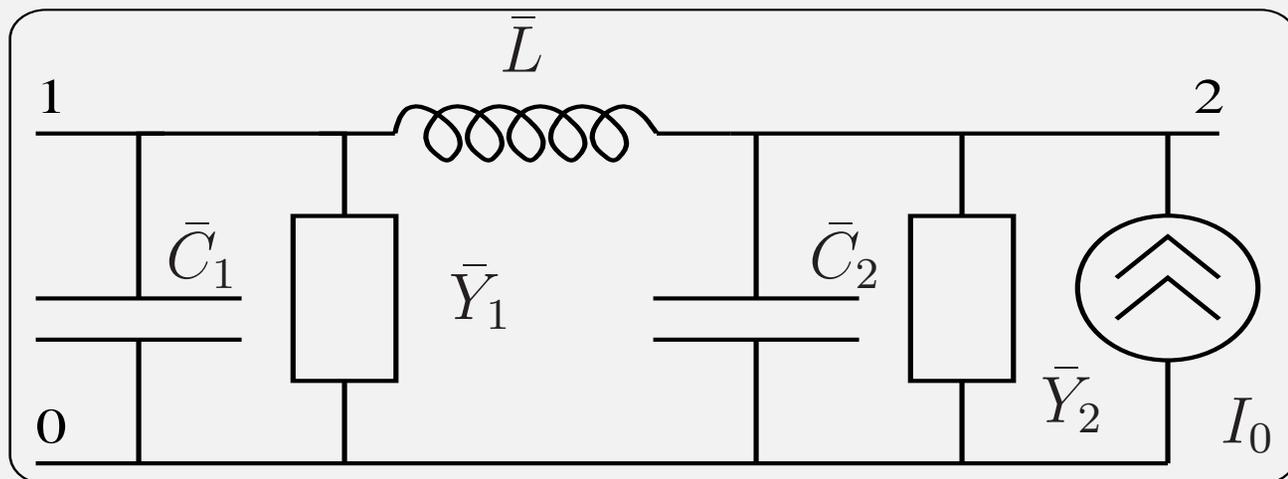
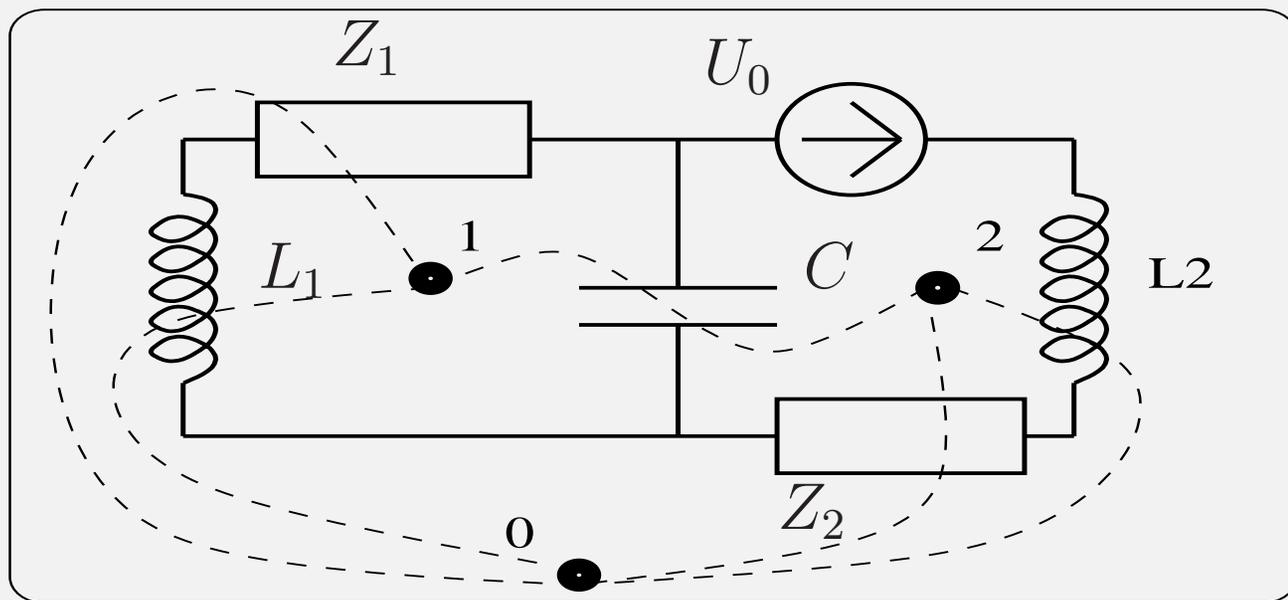
режим КЗ \iff режим ХХ

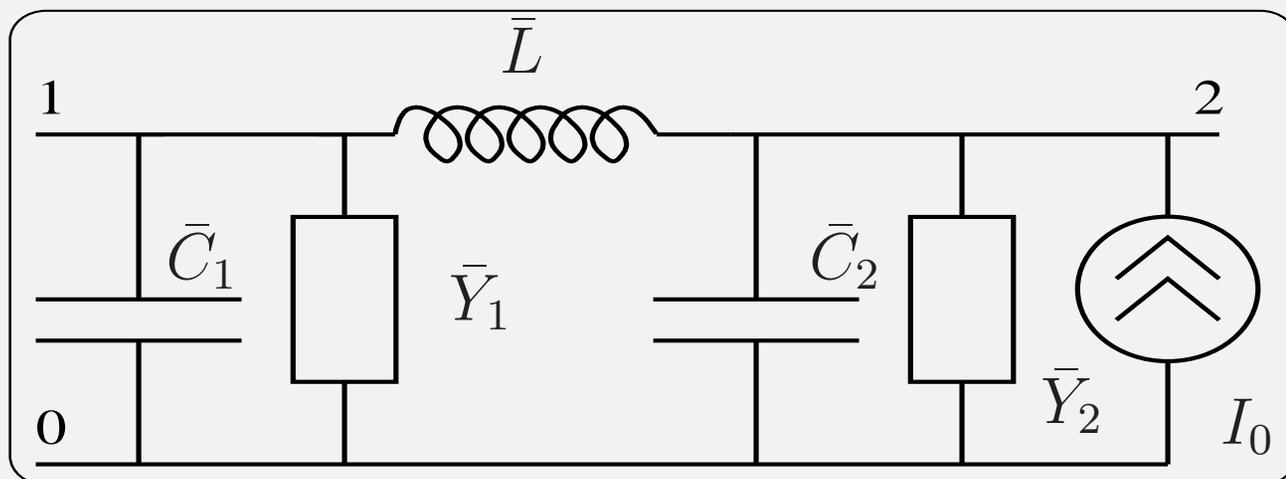
Принцип дуальности. Пример



$$1 : \quad I_R = \frac{U_0}{R + Z_1}; \quad Z_1 = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC},$$

$$2 : \quad U_G = \frac{I_0}{G + 1/Z_2}; \quad \frac{1}{Z_2} = \frac{i\omega C}{1 - \omega^2 LC}$$

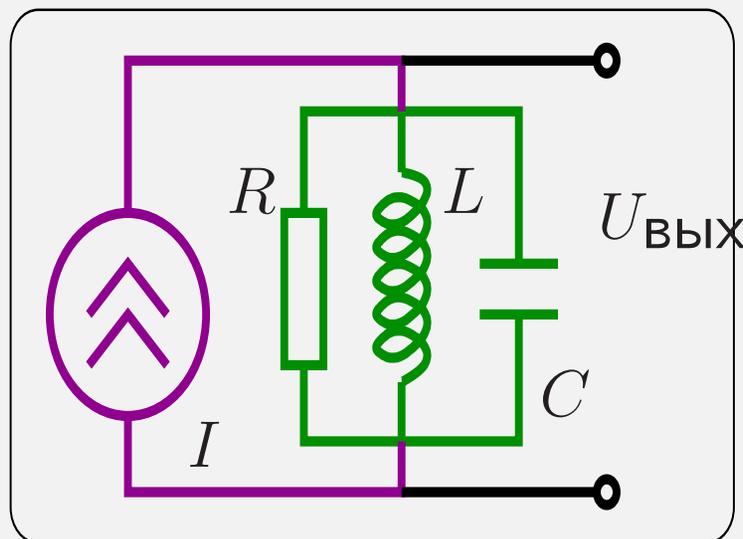
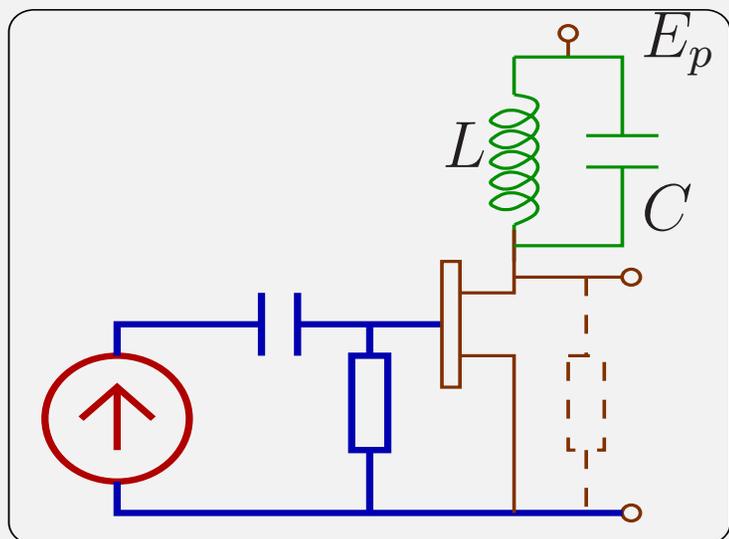




$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{Z_1}, \quad \bar{Y}_2 = \frac{1}{Z_2}, \quad (1)$$

$$i\omega\bar{L} = \frac{1}{i\omega C}, \quad \frac{1}{i\omega\bar{C}_1} = i\omega L_1, \quad \frac{1}{i\omega\bar{C}_2} = i\omega L_2 \quad (2)$$

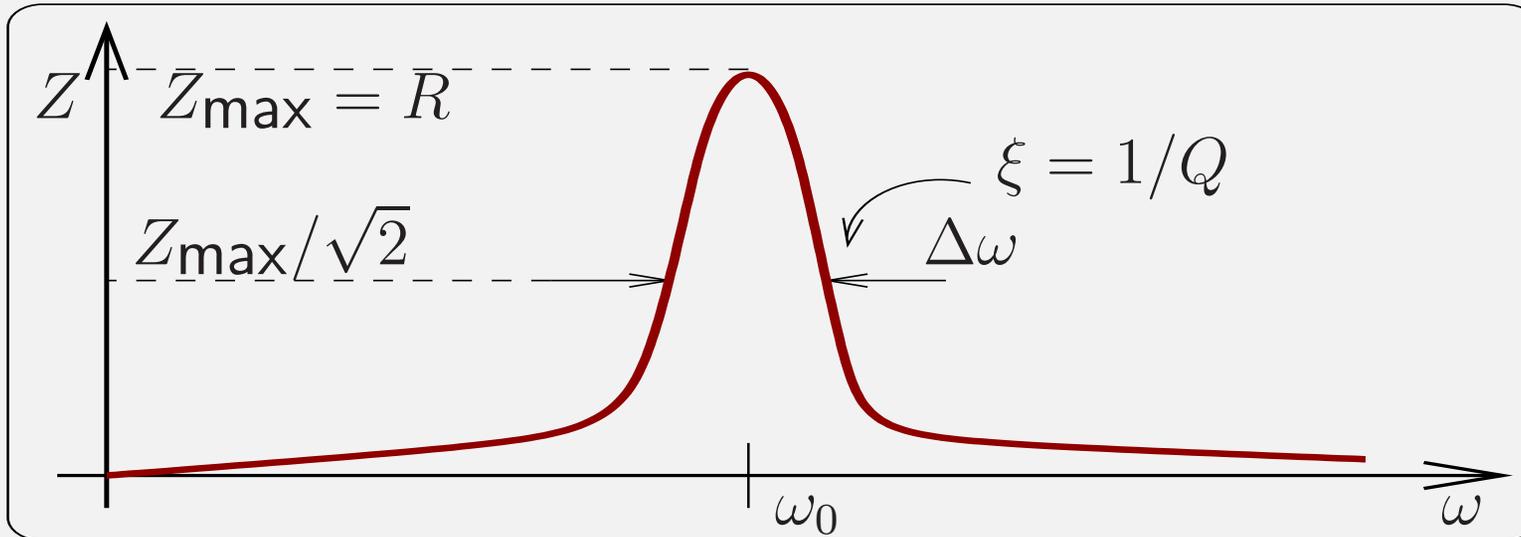
Параллельный контур ($I, U \sim e^{i\omega t}$)



$$\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{1}{R} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{Q} + i\xi \right),$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{R}{\rho}, \quad \xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

Параллельный контур. Резонансная кривая



$$U_{\text{ВЫХ}}(\omega) = I_0 Z(\omega) = \frac{\rho Q}{1 + iQ\xi} \cdot I_0, \quad I = I_0 e^{i\omega t}$$

$$I_R = \frac{\rho}{R} \frac{Q I_0}{1 + iQ\xi}, \quad I_L = \frac{-i\omega_0}{\omega} \frac{Q I_0}{1 + iQ\xi},$$

$$I_C = \frac{i\omega}{\omega_0} \frac{Q I_0}{1 + iQ\xi}.$$

Уровень $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (напряжение или токи I_L, I_C, I_R)

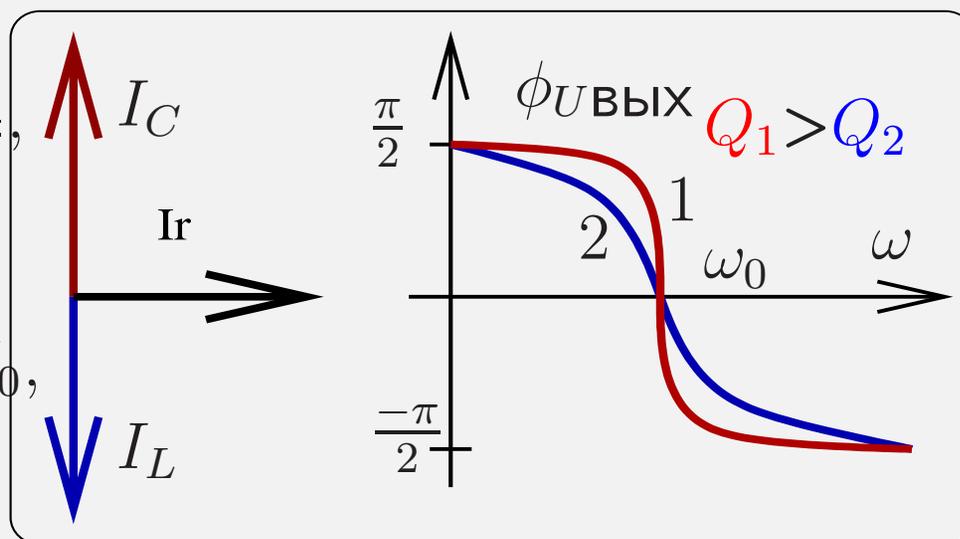
$$\Rightarrow \xi Q = 1$$

$$\text{При } Q \gg 1: \quad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega, \quad \Delta\omega \simeq \frac{\omega_0}{Q},$$

$$\text{При } Q \ll 1: \quad \omega_1 \simeq Q\omega_0, \quad \omega_2 \simeq \frac{\omega_0}{Q}$$

Резонанс токов:

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}, \\ U_{\text{ВЫХ}}(\omega_0) &= I_0 R, \\ I_L(\omega_0) &= -iQI_0, \\ I_C(\omega_0) &= iQI_0. \end{aligned}$$



Добротность

Разные определения добротности Q :

$$Q = \frac{\text{Запасенная энергия}}{2\pi \times (\text{Энергия потерь за период})},$$

$$Q = \frac{\omega_0 \tau^*}{2}, \quad \tau^* \text{ — время затухания}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad \Delta\omega = \frac{2}{\tau^*} \text{ — ширина полосы}$$

$$Q = \frac{\rho}{r} \text{ (последовательный контур)}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

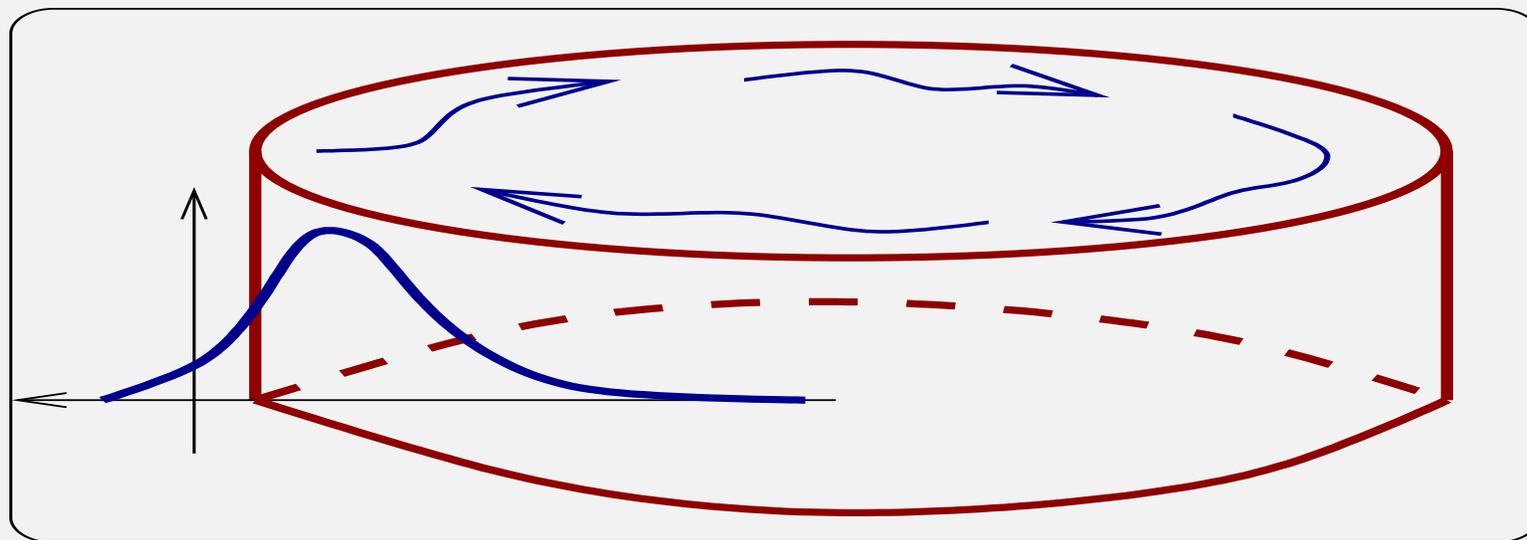
$$Q = \frac{R}{\rho} \text{ (параллельный контур)}$$

Примеры:

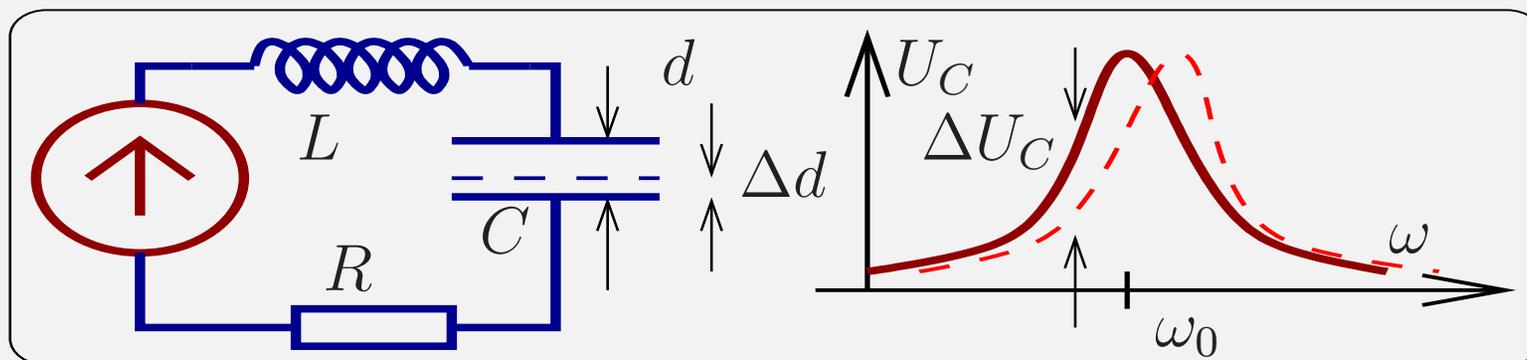
Обычн. LC контур	$Q \simeq 50 \dots 300$	$f = 10^5 \dots 10^8$ Гц
СВЧ резонатор	$Q \simeq 50 \dots 10^5$	$f = 10^9 \dots 10^{12}$ Гц
СП СВЧ резонатор	$Q \simeq 10^6 \dots 10^{10}$	$f = 10^9 \dots 10^{12}$ Гц
Рекорд	$Q \simeq 5 \times 10^{11}$	($T = 1.3$ К)
Рекорд	$Q \simeq 1.5 \times 10^9$	(сапфир, $T = 4$ К)
Микрорезонаторы	$Q \simeq 3 \times 10^9$	(пл. кварц, $f \sim 10^{15}$ Гц)
Микрорезонаторы	$Q \simeq 10^{10}$	(CaF_2 , $f \sim 10^{15}$ Гц)

Диэлектрические резонаторы на эффекте полного внутреннего отражения — в СВЧ диапазоне из сапфира, плавленого кварца и в оптике из плавленого кварца.

В сапфире продемонстрирован уровень фундаментальных потерь $Q \sim 1/T^5$.



Емкостной датчик



$$\frac{\Delta U_C}{U_C} = \frac{Q}{2} \frac{\Delta d}{d}, \quad \text{доказать — задача "Емк. датчик"}$$

$$\Delta d = 1 \times 10^{-9} \text{ см} \times \frac{d}{1 \times 10^{-2} \text{ см}} \times \frac{\Delta U_C / U_C}{1 \times 10^{-5}} \times \frac{200}{Q}$$

Если $Q = 200$, $\frac{\Delta U_C}{U_C} = 1 \times 10^5$, $d = 1 \times 10^{-2}$ см, то
 $\Delta d = 1 \times 10^{-9}$ см.

Оценка:

Если $Q = 200$, $\frac{\Delta U_C}{U_C} = 1 \times 10^5$, $d = 1 \times 10^{-2}$ см, то
 $\Delta d = 1 \times 10^{-9}$ см.

Достигнуто (физфак МГУ, 1979):

$$\Delta d = 6 \times 10^{-17} \text{ см (!)}$$

при $Q = 5 \times 10^4$, $d = 3 \times 10^{-4}$ см
и времени измерения $\tau = 1$ сек.

№3 “Емкостной датчик”

Доказать формулу для емкостного датчика

$$\Delta U_C \simeq \frac{1}{2} Q U_C \frac{\Delta d}{d}$$

Пусть $\Delta d = d_0 \cos \Omega t$.

Каковы ограничения на d_0 и Ω ?

Как выбирается частота генератора?

Пределы измерения малых смещенийОптика: резонатор Фабри-Перо

$$\Delta d \simeq \frac{\lambda}{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{W\tau}} \simeq \frac{\lambda}{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{N}},$$

где $\mathcal{F} = \frac{\pi}{1-R}$ — резкость, W — мощность, N — число использованных фотонов, R — коэффициент отражения зеркала.

Радиофизика:

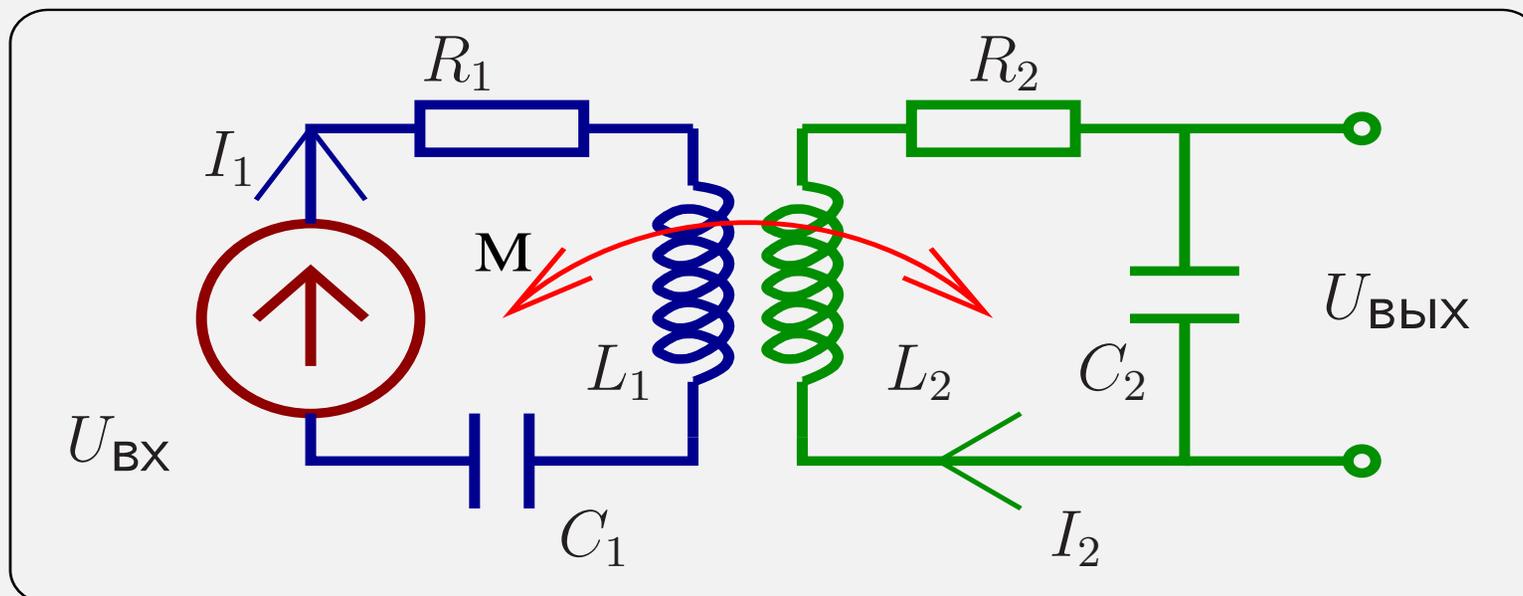
$$\Delta d \simeq \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{\kappa_B T}{W \tau}} \simeq \frac{\lambda}{\mathcal{F}} \times \frac{1}{\sqrt{N}},$$

Что меньше: $\frac{d}{Q}$ или $\frac{\lambda}{\mathcal{F}}$?

В оптике $\frac{\lambda}{\mathcal{F}} \simeq \frac{10^{-4} \text{ см}}{10^6} \simeq 10^{-10} \text{ см.}$

Для регистрации гравитационных волн нужно

$$\Delta d \simeq 10^{-17} \text{ см за } \tau \simeq 10^{-3} \text{ сек.}$$

Связанные контуры

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + \int \frac{I_1}{C_1} dt + M \frac{dI_2}{dt} = U_{\text{ВХ}}(t),$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + \int \frac{I_2}{C_2} dt + M \frac{dI_1}{dt} = 0.$$

Гармоническое воздействие: $U_{\text{вх}}(t) = U_0 e^{i\omega t}$.

Рассматриваем **установившийся** процесс. Заменяем

$$\frac{dI_1}{dt} \rightarrow i\omega, \quad \int dt \rightarrow 1/i\omega.$$

Тогда

$$I_1 \left(i\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \right) + i\omega M I_2 = U_0,$$

$$I_2 \left(i\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \right) + i\omega M I_1 = 0,$$

$$L_1 \omega_{01} I_1 \left(\frac{R_1}{L_1 \omega_{01}} + i \left[\frac{\omega}{\omega_{01}} - \frac{\omega_{01}}{\omega} \right] \right) + i\omega M I_2 = U_0,$$

$$L_2 \omega_{02} I_2 \left(\frac{R_2}{L_2 \omega_{02}} + i \left[\frac{\omega}{\omega_{02}} - \frac{\omega_{02}}{\omega} \right] \right) + i\omega M I_1 = 0$$

Рассмотрим для простоты случай

$$L_1 = L_2 = L, \quad C_1 = C_2 = C, \quad R_1 = R_2 = R.$$

Обозначим $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\xi = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$, $\delta = \frac{R}{\omega_0 L}$, $\kappa = \frac{M}{L} \frac{\omega}{\omega_0}$.

Тогда: $(\delta + i\xi)I_1 + i\kappa I_2 = \frac{U_0}{\omega_0 L}$, (3)

$$i\kappa I_1 + (\delta + i\xi)I_2 = 0, \quad (4)$$

Комбинируем:

$$(3) \times i\kappa - (4) \times (\delta + i\xi) \Rightarrow I_1 \times 0 - (\kappa^2 + (\delta + i\xi)^2)I_2 = \frac{i\kappa U_0}{\omega_0 L},$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{i\omega C} = - \frac{U_0 \kappa \frac{\omega_0}{\omega}}{\kappa^2 + (\delta + i\xi)^2}$$

Результат:

$$U_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \frac{I_2(\omega)}{i\omega C} = - \frac{U_0 \kappa \frac{\omega_0}{\omega}}{\kappa^2 + (\delta + i\xi)^2}$$
$$K(\omega) = \frac{-\kappa \omega_0}{\omega(\kappa^2 + \delta^2 - \xi^2 + 2i\delta\xi)}$$

Пусть $Q \equiv 1/\delta \gg 1 \Rightarrow \xi \ll 1$, $k \simeq \text{const}$

Квадрат модуля знаменателя:

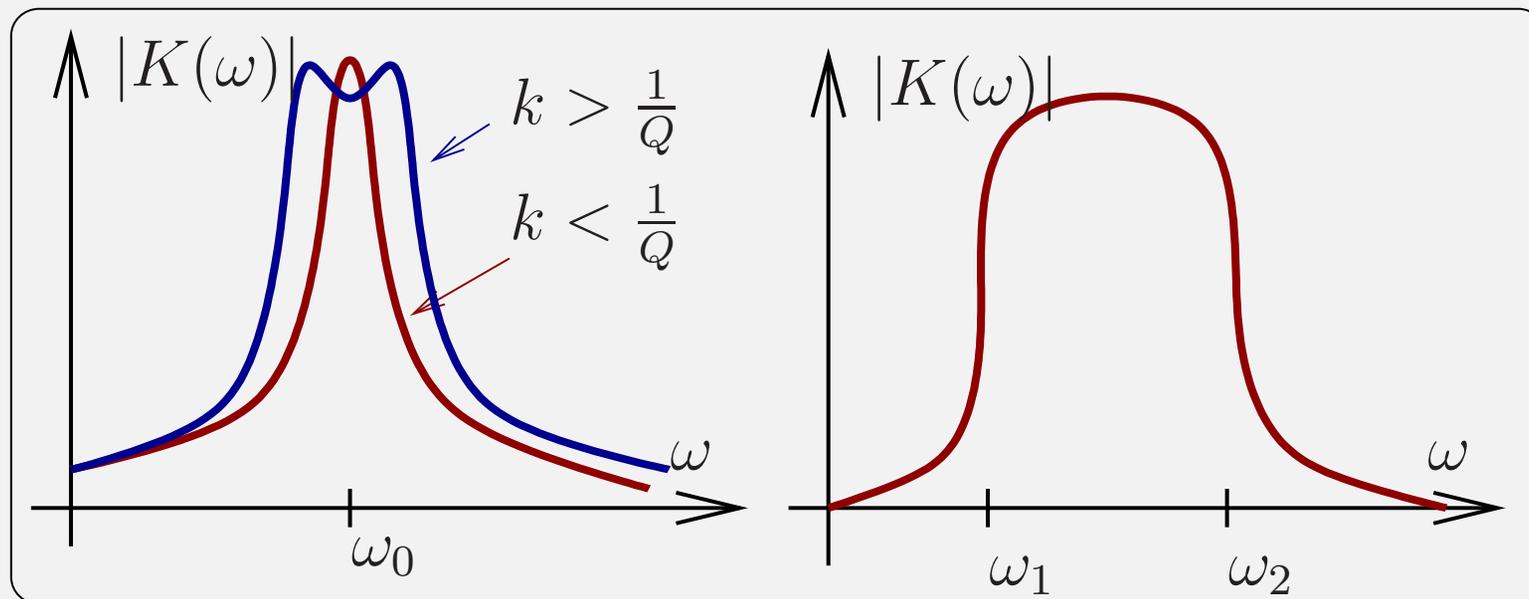
$$N = (\kappa^2 + \delta^2 - \xi^2)^2 + 4\delta^2\xi^2,$$
$$\partial_\xi N = 2\xi(-2\kappa^2 - 2\delta^2 + 2\xi^2 + 4\delta^2) = 0,$$
$$\xi_1 = 0, \quad \xi_{2,3}^2 = \kappa^2 - \delta^2, \quad \delta = \frac{1}{Q}.$$

$$K(\omega) = \frac{-\kappa \omega_0}{\omega \sqrt{(\kappa^2 + \delta^2 - \xi^2)^2 + 4\delta^2 \xi^2}},$$
$$\xi_1 = 0, \quad \xi_{2,3}^2 = \kappa^2 - \delta^2, \quad \delta = \frac{1}{Q}.$$

Коэффициент передачи $K(\omega)$:

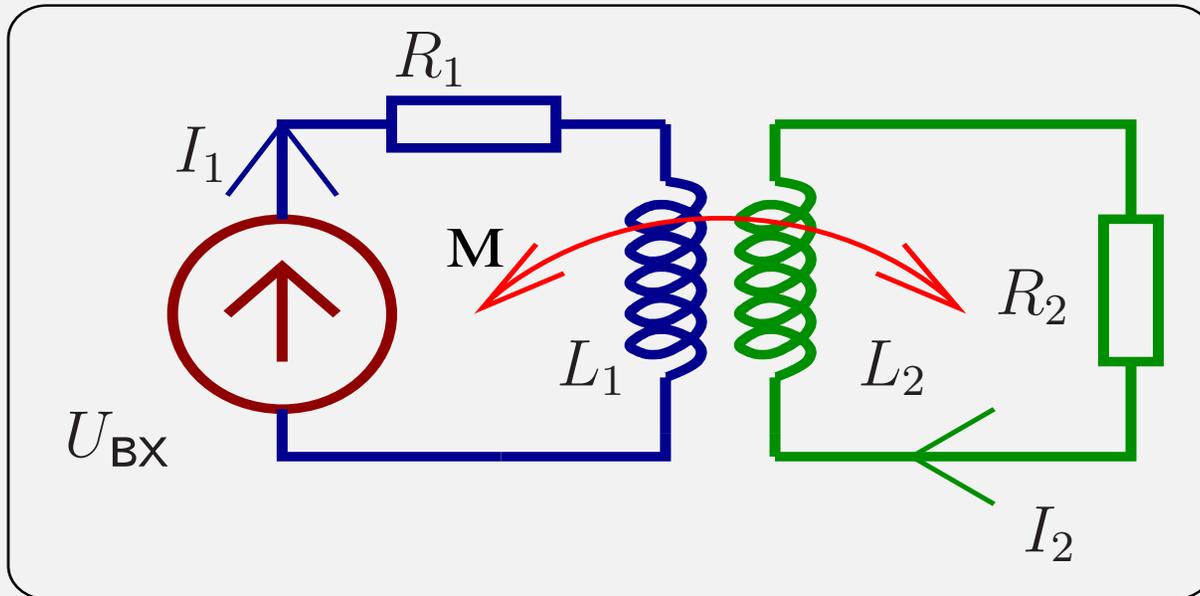
при $\kappa < \delta$ — один экстремум,

при $\kappa > \delta$ — три экстремума.

Связанные резонаторы. Резонансная кривая

Комбинация нескольких контуров дает полосовой фильтр.

Ширина полосы и крутизна фронтов зависит от числа и параметров использованных контуров.

Трансформатор

$$U_{\text{BX}} = U_0 e^{i\omega t}$$

$$(R_1 + i\omega L_1)I_1 - i\omega M I_2 = U_0,$$

$$-i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2)I_2 = 0.$$

$$(R_1 + i\omega L_1)I_1 - i\omega M I_2 = U_0, \quad (5)$$

$$-i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2)I_2 = 0. \quad (6)$$

Условия идеальной трансформации:

$$M^2 \simeq L_1 L_2, \quad (7)$$

$$R_1 \ll \omega L_1, \quad R_2 \ll \omega L_2. \quad (8)$$

Тогда (6):
$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{i\omega M}{R_2 + i\omega L_2} \simeq \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{1}{n},$$

$$\frac{U_{L2}}{U_{L1}} = \frac{I_2 i\omega L_2}{I_1 i\omega L_1} \simeq n, \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1},$$

n — коэффициент трансформации.

Решаем систему (5,6), учитывая (7,8):

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + M^2\omega^2 = \\ &= \omega^2(M^2 - L_1L_2) + i\omega(L_1R_2 + L_2R_1) + R_1R_2 \simeq \\ &\simeq i\omega(L_1R_2 + L_2R_1), \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = iM\omega U_0, \quad \Delta_1 = U_0(R_2 + i\omega L_2) \simeq iL_2\omega U_0$$

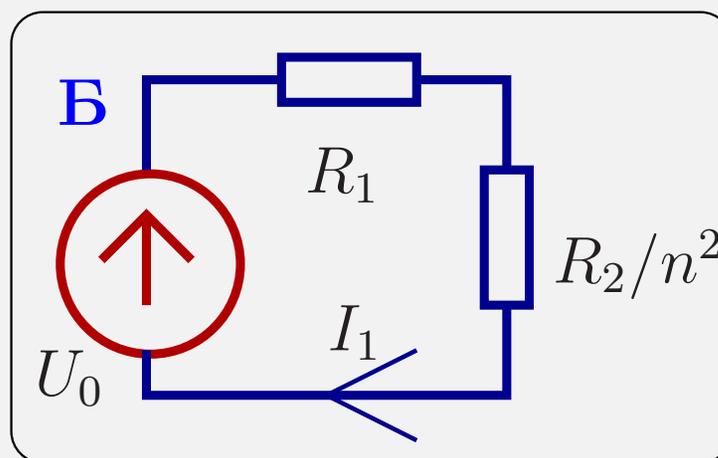
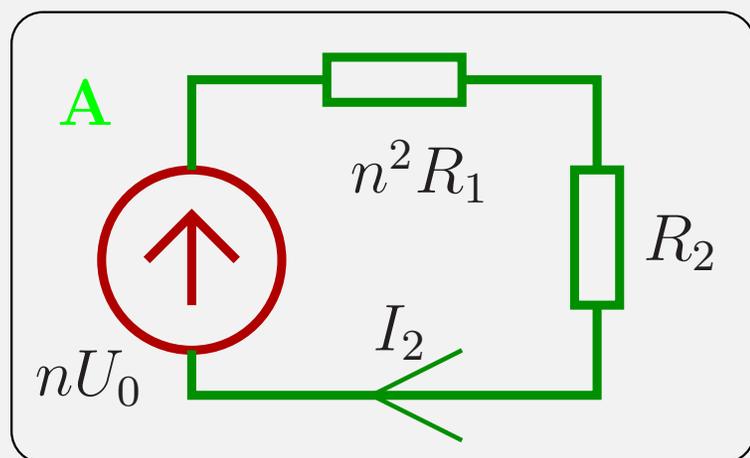
$$I_2 \simeq \frac{MU_0}{L_1R_2 + L_2R_1} = \frac{\frac{MU_0}{L_1}}{\frac{R_1L_2}{L_1} + R_2} = \frac{\mathbf{n}U_0}{\mathbf{R}_2 + \mathbf{n}^2\mathbf{R}_1}, \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$I_1 \simeq \frac{L_2U_0}{L_1R_2 + L_2R_1} = \frac{\mathbf{U}_0}{\frac{\mathbf{R}_2}{\mathbf{n}^2} + \mathbf{R}_1}$$

Эквивалентные схемы

$$I_2 \simeq \frac{MU_0}{L_1 R_2 + L_2 R_1} = \frac{\frac{MU_0}{L_1}}{\frac{R_1 L_2}{L_1} + R_2} = \frac{nU_0}{R_2 + n^2 R_1}, \quad n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

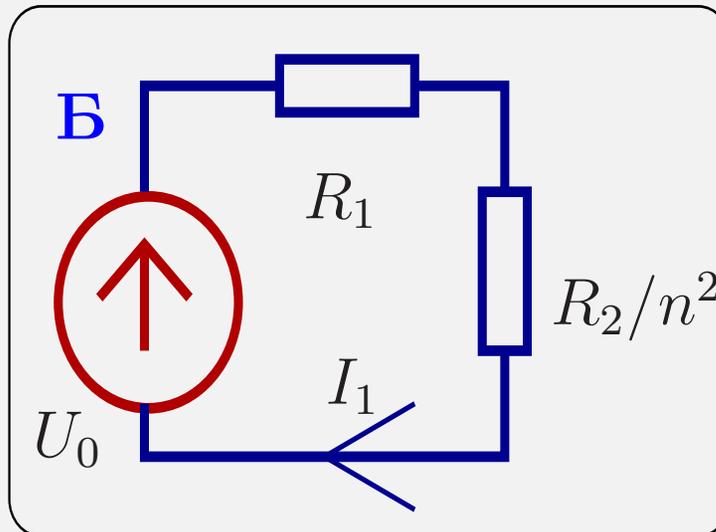
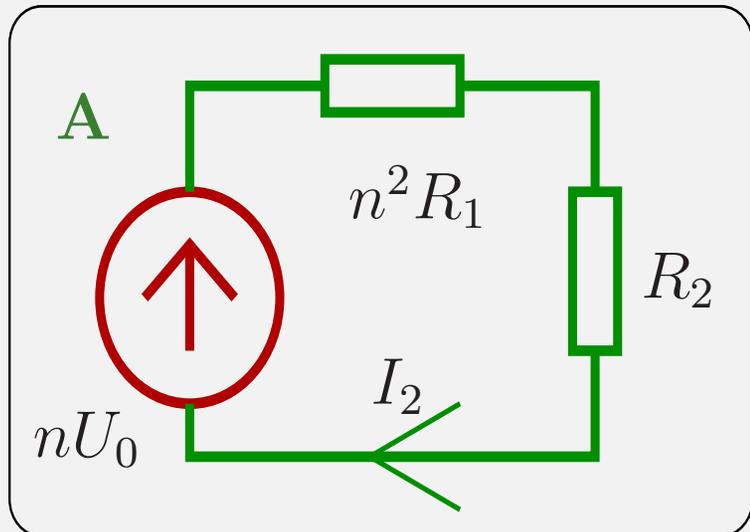
$$I_1 \simeq \frac{L_2 U_0}{L_1 R_2 + L_2 R_1} = \frac{U_0}{\frac{R_2}{n^2} + R_1}$$



Мощность на сопротивлении R_2 :

$$P_2 = \frac{I_2^2 R_2}{2} \simeq \frac{(nU_0)^2 R_2}{2(n^2 R_1 + R_2)^2} \quad \text{— схема } \mathbf{A},$$

$$P_2 = \frac{U_0^2 \times \frac{R_2}{n^2}}{2 \left(R_1 + \frac{R_2}{n^2} \right)^2} \quad \text{— схема } \mathbf{B}.$$



A: “приведенна к выходу”, **B** — “приведенна ко входу”.