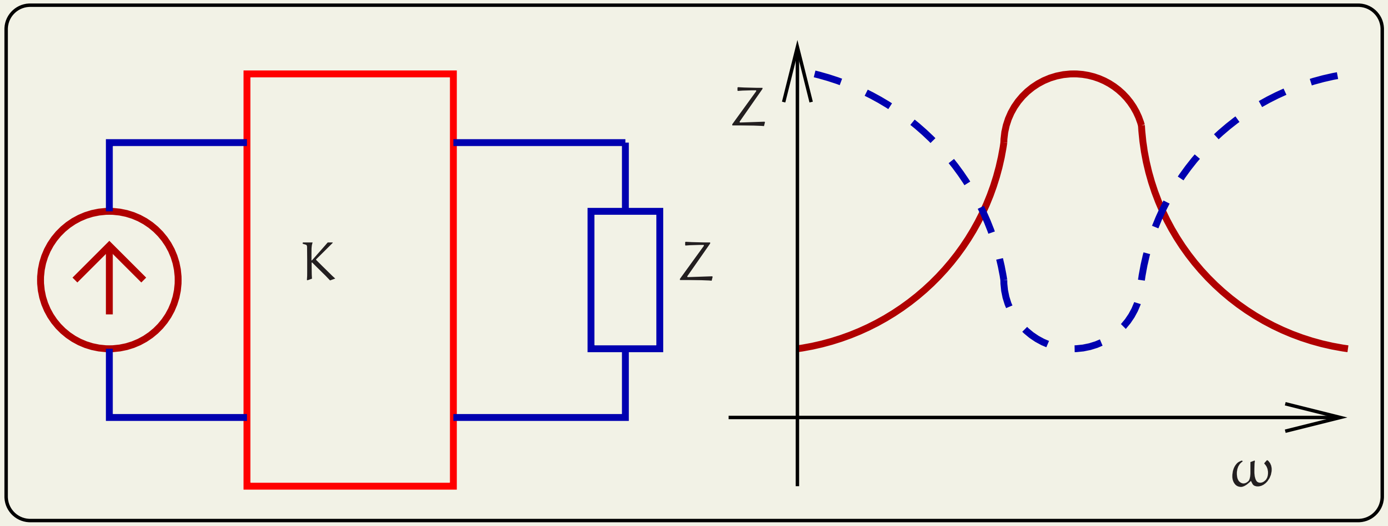
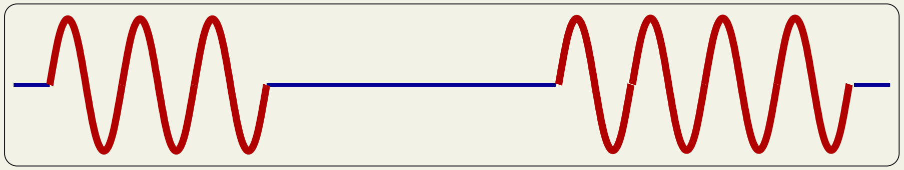
Теория гармонических спектров сигналов



Сигнал — новое сообщение, информация (не строго).

Нужен код (язык).

Азбука Морзе

 — азбука Морзе.

За единицу времени принимается длительность одной точки. Длительность тире равна трём точкам. Пауза между элементами одного знака — одна точка, между знаками в слове — 3 точки, между словами — 7 точек. [a]

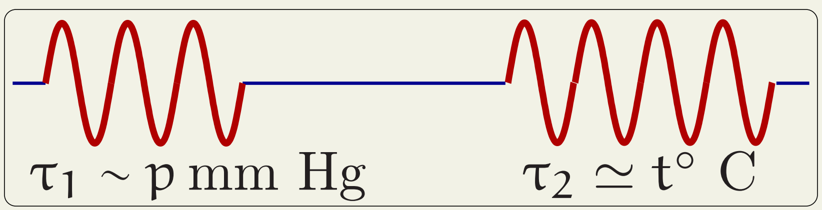
Двоичный код

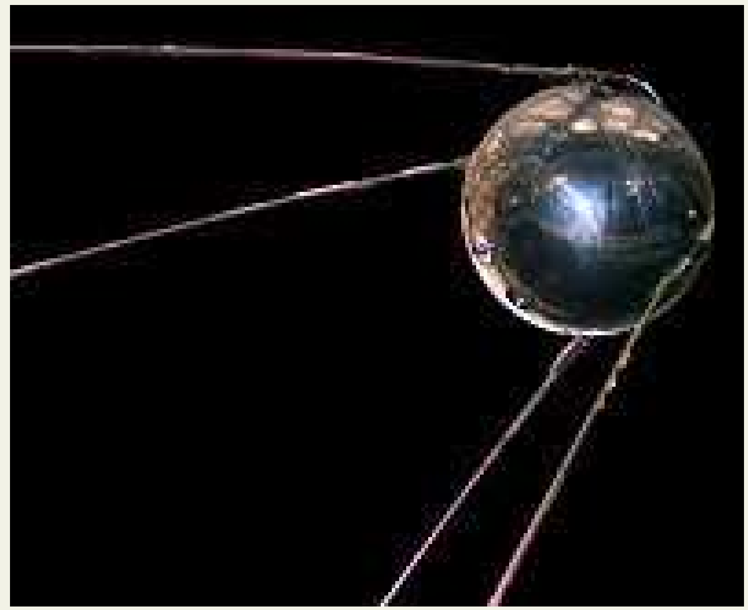
“0” — нет. “1” — да.

[a] Исходная таблица “кода Морзе” разительно отличалась от тех кодов, что сегодня звучат на любительских диапазонах. В ней, во-первых, использовались посылки трёх разных длительностей (точка, тире и длинное тире — в 4 раза длиннее точки). Во-вторых, некоторые символы имели паузы внутри своих кодов.

Синалы первого искусственного спутника Земли

4 октября 1957 г.[a]

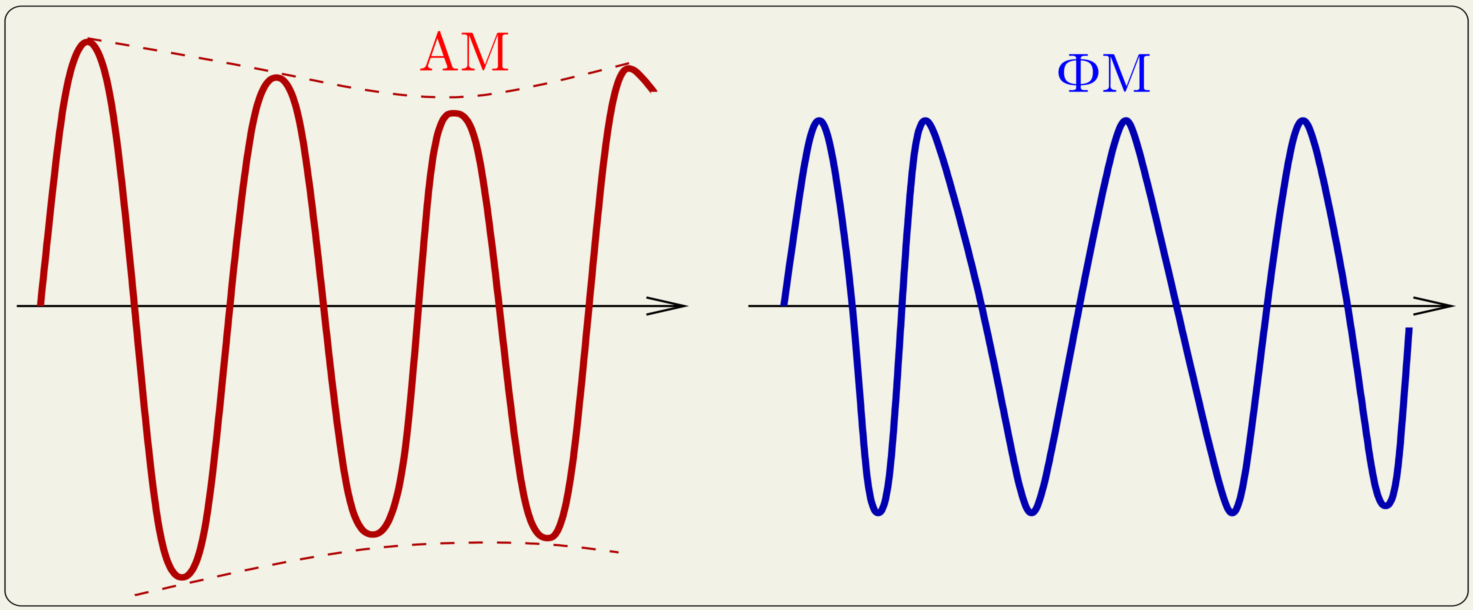




[a]Передатчик, установленный на спутнике, периодически излучал сигналы длительностью $0,4$ сек попеременно на длинах волн 7,5 и 15 м. Длительность сигналов изменялась при повышении (выше 50°C) или понижении (ниже 0°C) температуры на борту спутника и при падении давления ниже 0,35 кгс/см за счет срабатывания одного из контрольных термо- или бародатчиков.

Модуляция

“Синусоидальная” несущая — можно записывать информацию в амплитуде, частоте или фазе (АМ, ЧМ, ФМ). Если *относительная* величина модуляции мала ($\ll 1$), то гармонические функции удобны для анализа.



Напоминание о Фурье-анализе

Пусть $f(t)$ – периодическая интегрируемая функция с периодом $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$.

Традиционная форма:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \Big(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\Big),$$

$$a_n = \frac{2}{\tau_0} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt, \quad a_0 = \frac{2}{\tau_0} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} f(t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{\tau_0} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t)\, dt.$$

Другая форма:

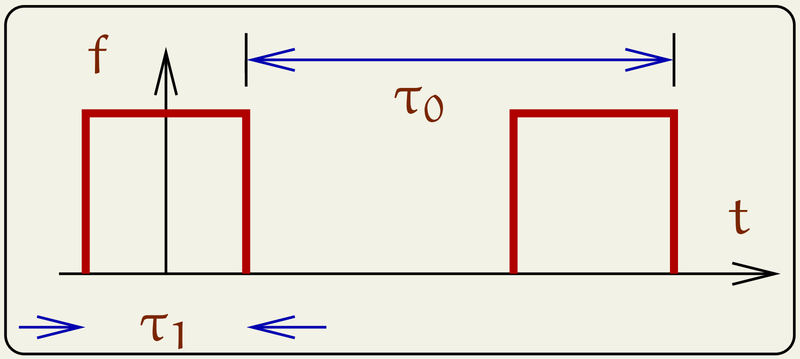
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n),$$

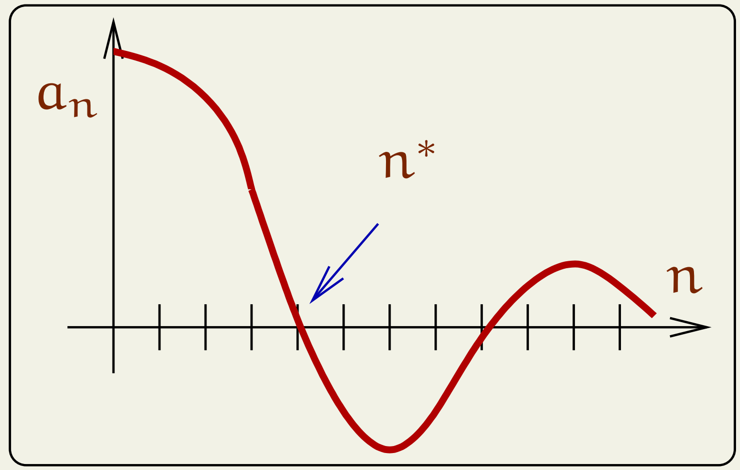
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \operatorname{tg}\phi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

Комплексная форма:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{C}_n e^{in\omega_0 t}, \quad \tilde{C}_n = \frac{1}{\tau_0}\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} f(t) e^{in\omega_0 t}\, dt.$$

Пример:

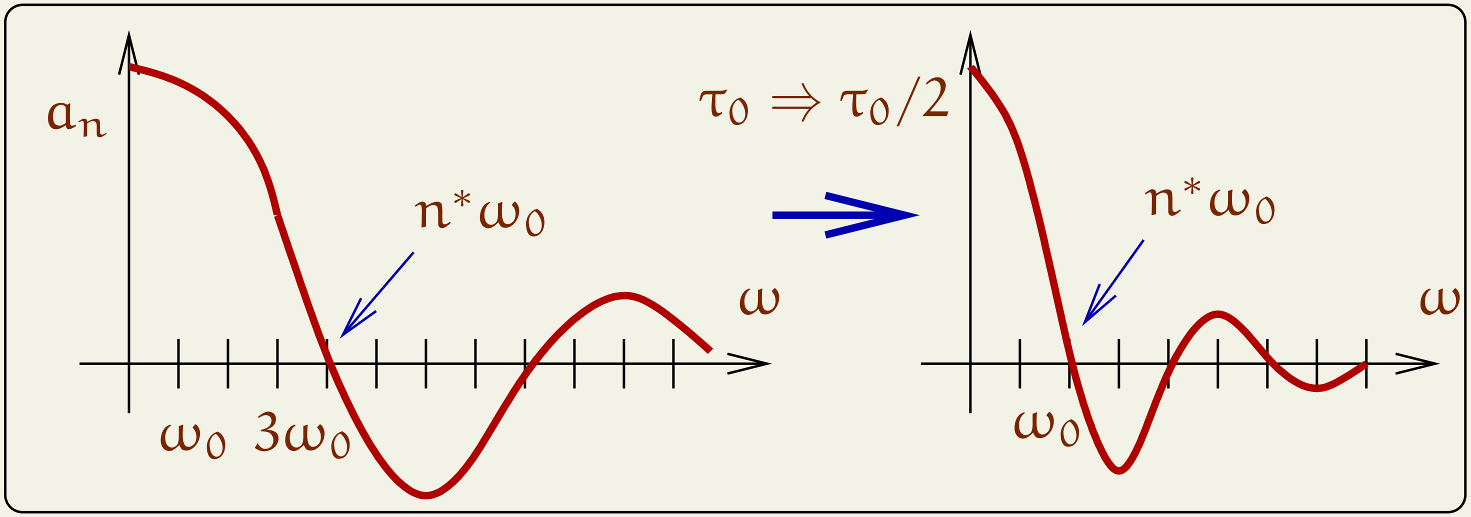




$$a_n = \frac{2}{\tau_0}\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} f_0 \cos\left(\frac{2\pi n t}{\tau_0}\right) dt = 2f_0\left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi n \tau_1}{\tau_0}\right)}{\left(\frac{\pi n \tau_1}{\tau_0}\right)}, \quad b_n = 0$$

Линейчатый, дискретный эквидистантный спектр.

Характерные частота $\omega^* \simeq n^*\, 2\pi/\tau_0$ (и соответсвующий номер $n^* \simeq \tau_0/\tau_1$), расстояние между гармониками $\Delta\omega$



$$\frac{\pi n^* \tau_1}{\tau_0} = \pi \quad \to \quad n^* \simeq \frac{\tau_0}{\tau_1},$$

$$\omega^* = n^*\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_1}, \quad \Delta\omega \simeq \frac{2\pi}{\tau_0}$$

При увеличении τ_0 (импульсы идут реже) — гармоники чаще ($\Delta\omega$ меньше). В пределе $n \to \infty$ — интеграл Фурье.

Подчеркнем, что характерная частота ω^* **не** меняется.

Если $n^* \gg 1$ то $\sim 90\%$ энергии в диапазоне Δf

$$\sum_{n=1}^{n=n^*} a_n^2 \Bigg/ \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2 \simeq 0.9$$

Преобразование Фурье

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t}\, dt. \end{aligned}$$

Свойства рядов и интегралов Фурье:

$$
\begin{aligned}
F_1(t) + F_2(t) + F_3(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega),\\
\alpha F(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha F(\omega), \quad \alpha \ - \mathrm{const}\\
\frac{F(t)}{dt} \quad &\Longleftrightarrow \quad i\omega \times F(\omega),\\
\int F(t)\, dt \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{F(\omega)}{i\omega}.\\
F(\beta t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\beta} F\left(\frac{\omega}{\beta}\right), \quad \beta \ - \mathrm{const}\\
F(t-\tau) \quad &\Longleftrightarrow \quad F(\omega) e^{-i\omega\tau}, \quad \tau \ - \mathrm{const}\\
W = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t)\, dt \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \frac{d\omega}{2\pi},\\
F(t) = f(t)\cos(\omega_0 t) \quad &\Longleftrightarrow \quad F(\omega) = \frac{f(\omega-\omega_0)}{2} + \frac{f(\omega+\omega_0)}{2},
\end{aligned}
$$

Докажем: $$\frac{F(t)}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad i\omega \times F(\omega),$$

$$\partial_t F(t) \quad = \quad \partial_t \int F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \int \Big[i\omega F(\omega) \Big]\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Докажем: $$F(\beta t) \quad \Longleftrightarrow \quad F_\beta(\omega) = \frac{1}{\beta}\, F\left(\frac{\omega}{\beta}\right), \quad \beta \ - \mathrm{const}$$

$$F_\beta(\omega) \quad = \quad \int F(\beta t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int F(\beta t)\, e^{-i(\omega/\beta)\,\beta t}\, \frac{d(\beta t)}{\beta} = \frac{1}{\beta}\, F\left(\frac{\omega}{\beta}\right),$$

Докажем: $$F(t-\tau) \quad \Longleftrightarrow \quad F(\omega) e^{-i\omega\tau}, \quad \tau \ - \mathrm{const}$$

$$F_\tau(\omega) \quad = \quad \int F(t-\tau)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int F(y)\, e^{-i\omega y}\, e^{-i\omega\tau} dy = F(\omega)\, e^{-i\omega\tau}$$

Докажем: $W = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$

$$
\begin{aligned}
W &= \int\int\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, F^*(\omega')\, e^{-i\omega' t}\, \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2}\, dt = \\
&= \int\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, F^*(\omega')\, 2\pi\, \delta(\omega - \omega')\, \frac{d\omega\, d\omega'}{(2\pi)^2} = \\
&= \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.}
\end{aligned}
$$

Еще раз: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi\, \delta(\alpha).$

Доказжем иначе: $W = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t)\, dt \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$

$$W \quad = \quad \int \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, F(\omega)\, e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}\, dt$$

Учтем $\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t}\, dt = F^*(\omega),$

$$W \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, F^*(\omega)\, \frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.}$$

Доказем:

$$F(t) = f(t)\cos(\omega_0 t) \iff$$

$$\iff F(\omega) = \frac{f(\omega-\omega_0)}{2} + \frac{f(\omega+\omega_0)}{2}$$

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1}{2}\,\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)\, e^{-i\omega t}\, dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right)\, dt = \\
&= \frac{f(\omega-\omega_0)}{2} + \frac{f(\omega+\omega_0)}{2}
\end{aligned}$$

Условие неискаженной передачи

Выходной сигнал должен отличаться от входного только на время задержки τ:

$$\boxed{U_{\text{вых}}(t) = U_{\text{вх}}(t-\tau)}$$

В общем случае

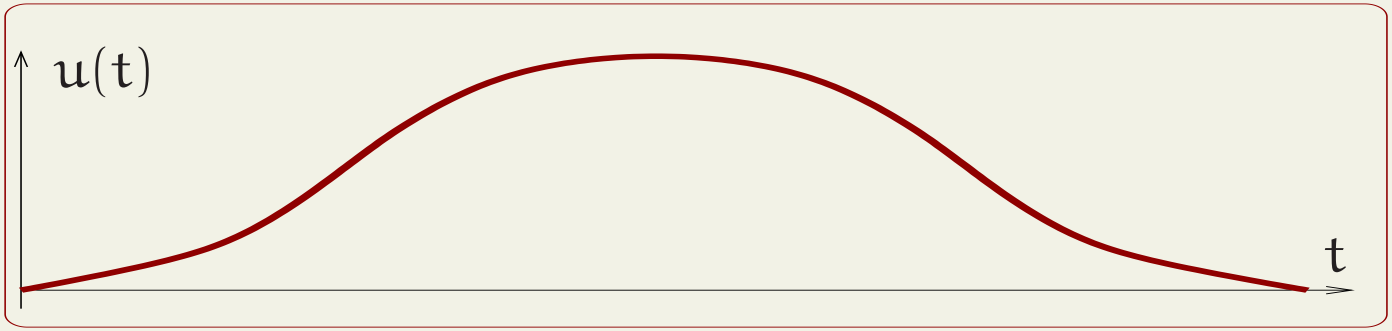
$$U_{\text{вых}}(t) = \hat{K} U_{\text{вх}}(t - t_0), \quad \rightarrow \quad U_{\text{вых}}(\omega) = K(\omega) e^{i\omega t_0} U_{\text{вх}}(\omega)$$

$\hat{K}$ — линейный интегро-дифференциальный оператор.

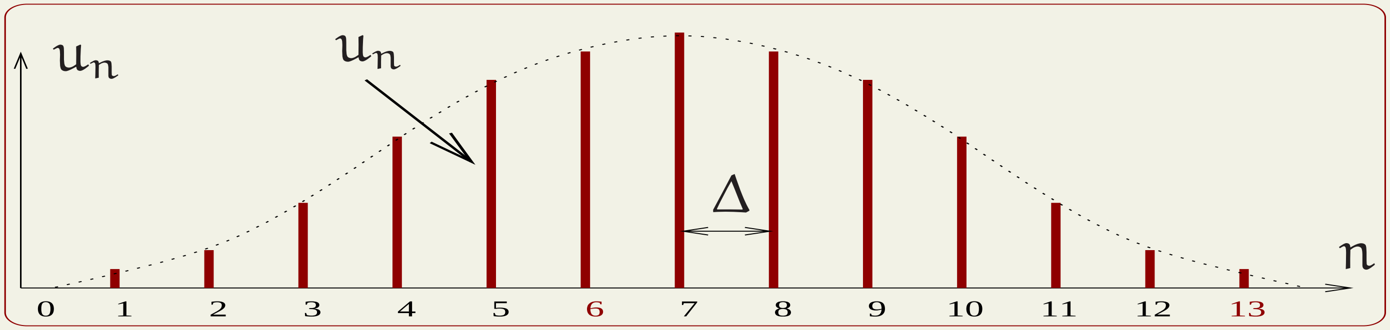
$K(\omega)$ — рациональная функция.

Если K <u>точно</u> известно, то можно <u>точно</u> восстановить исходный сигнал.

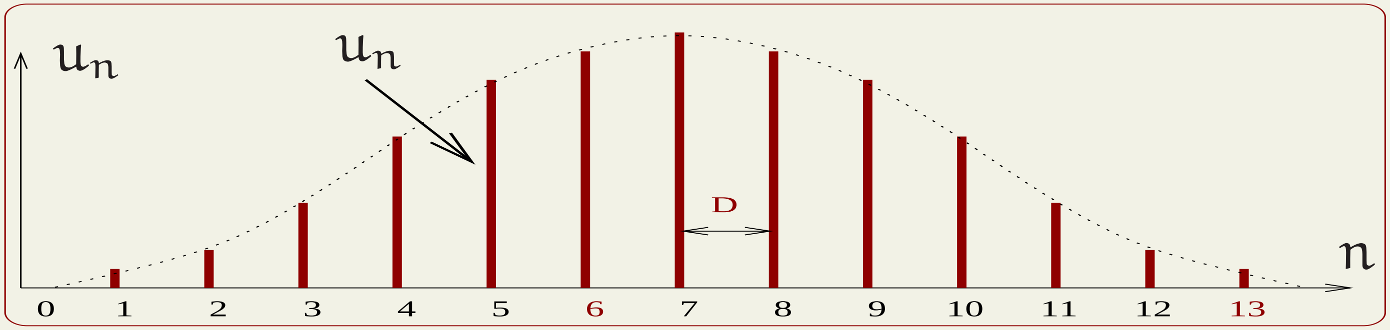
Аналоговый сигнал



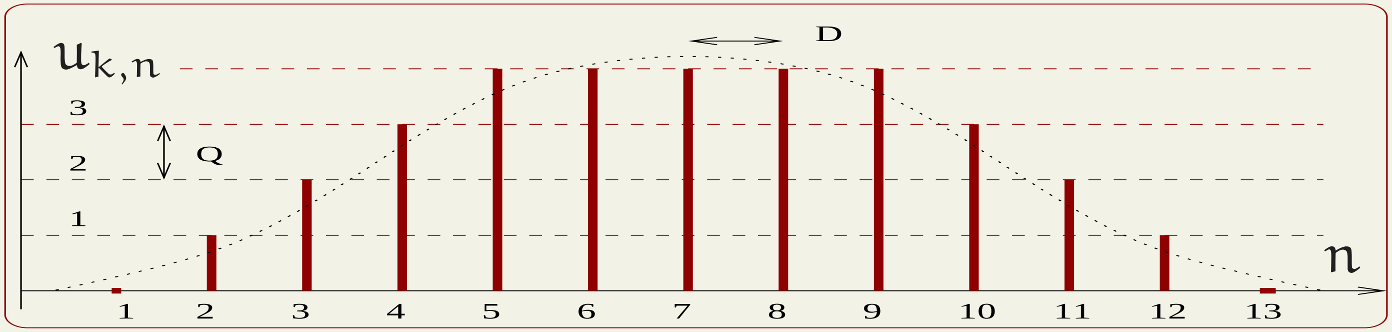
Дискретный сигнал



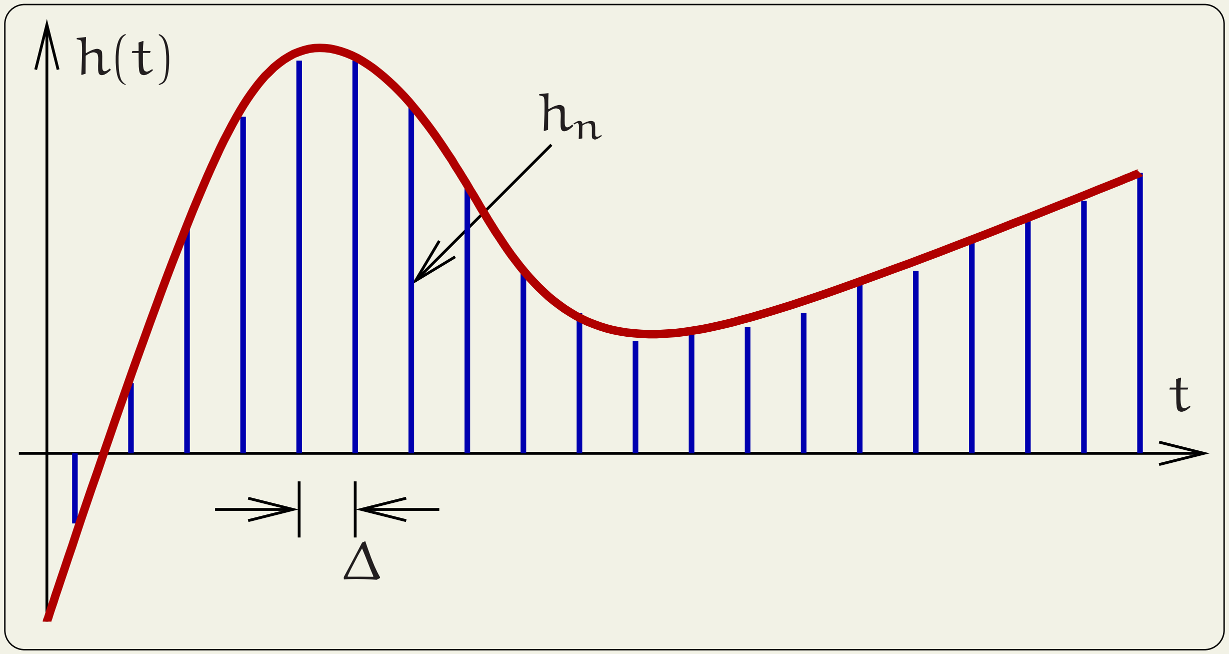
Дискретный сигнал



Цифровой сигнал



Теорема Котельникова (теорема отсчетов)



Заданим непрерывный сигнал набором отсчетов (дискретный сигнал):

$h_n = h(n\Delta)$, $1/\Delta$ —частота дискретизации

Теорема Котельникова (теорема отсчетов)

Если спектр сигнала **ограничен** и
верхняя частота спектра **меньше** частоты

$$f_c = \frac{1}{2\Delta},$$

то по дискретному набору h_n можно точно восстановить исходный сигнал:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \frac{\sin\left[2\pi f_c(t-n\Delta)\right]}{2\pi f_c(t-n\Delta)}$$

f_c — частота Найквиста.

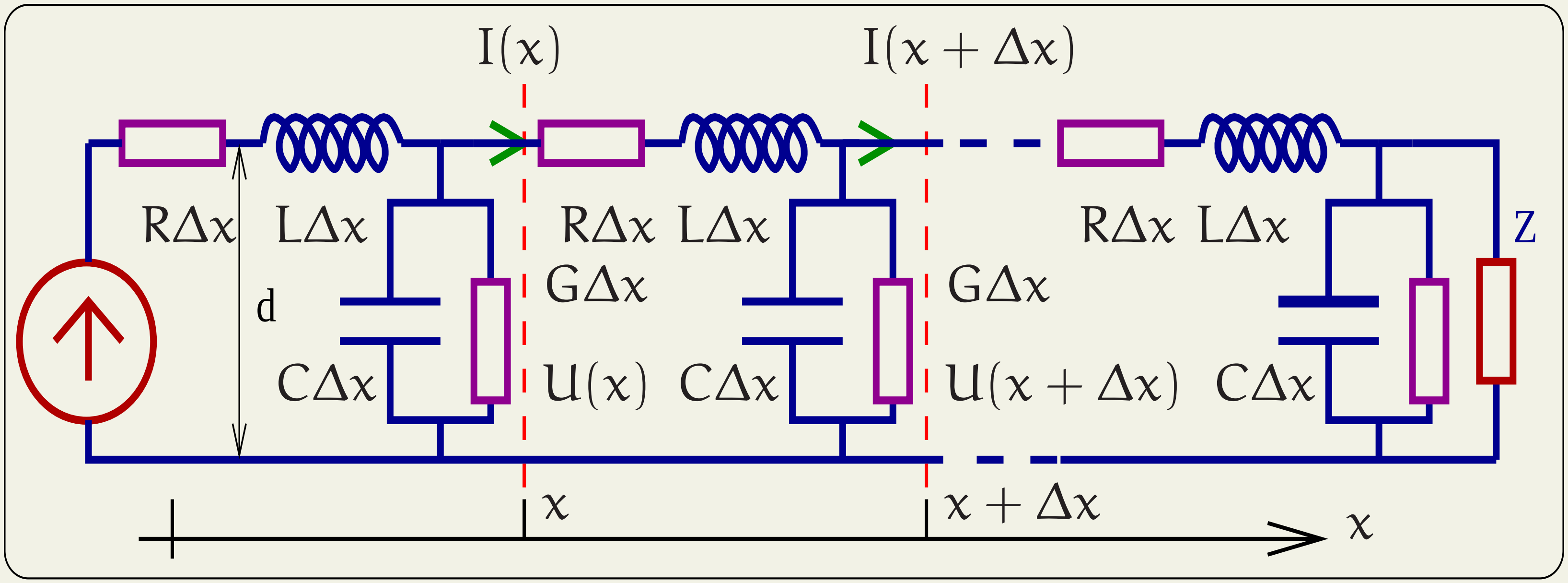
Теорема Котельникова: ограниченность спектра сигнала

Условие $f < f_c = \frac{1}{2\Delta}$ формально означает ***неограниченность сигнала по времени***

Наоборот – ***ограниченность*** сигнала по времени означает ***неограниченность*** по частоте.

Поэтому обычно вводят верхнюю частоту сигнала **приближенно**.

Длинные линии

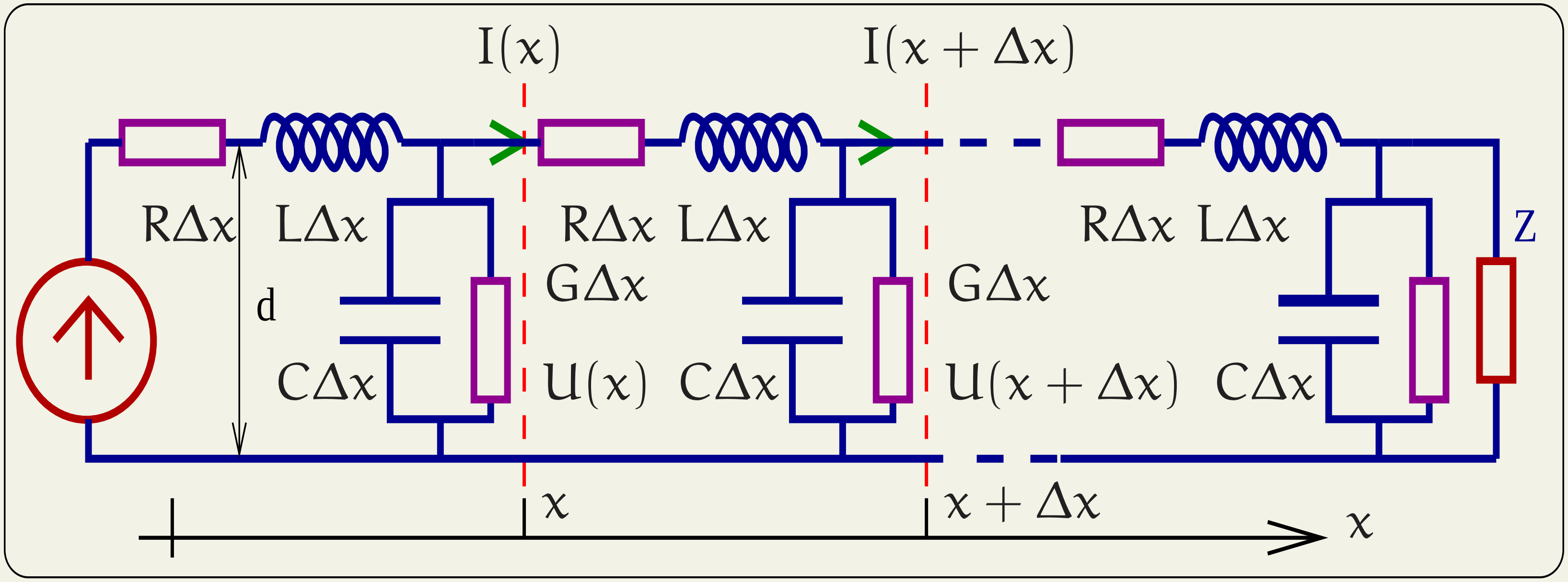


L [Гн/см], C [Ф/см], R [Ом/см], G [См/см].

“Поперечное” условие квазистационарности:

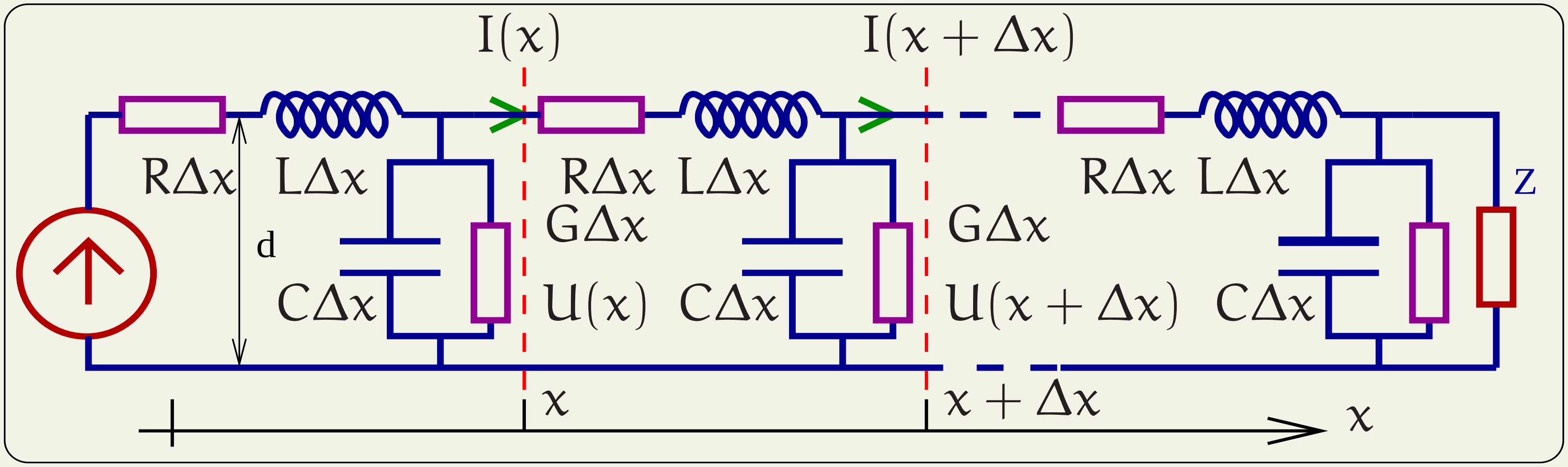
Расстояние между проводами R **много меньше** длины волны λ: $\mathbf{R} \ll \lambda$

Длинные линии



Количество заряда, “оседающего” на Δx за единицу времени.

$$
\begin{aligned}
I(x,t) &= I(x+\Delta x,t) + C\Delta x\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + G\Delta x\,U(x,t),\\
-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} &= C\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + G\,U(x,t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$



Изменение напряжения на Δx равно падению напряжения на L и на R

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= U(x+\Delta x,t) + L\Delta x\,\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + R\Delta x\, I(x,t),\\
-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} &= L\,\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + R\, I(x,t), \qquad (2)\\
L\,\frac{\partial}{\partial t}\times(1) &- \frac{\partial}{\partial x}\times(2) \implies\\
\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} &= LC\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + GL\,\partial_t U(x,t) - R\partial_x I(x,t)
\end{aligned}$$

Пусть потери отсутствуют: $R = 0,\ \ G = 0$

$$-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = C\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}, \quad \Rightarrow \ -\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} = C\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = L\,\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}, \quad \Rightarrow \ \frac{1}{L}\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t \partial x},$$

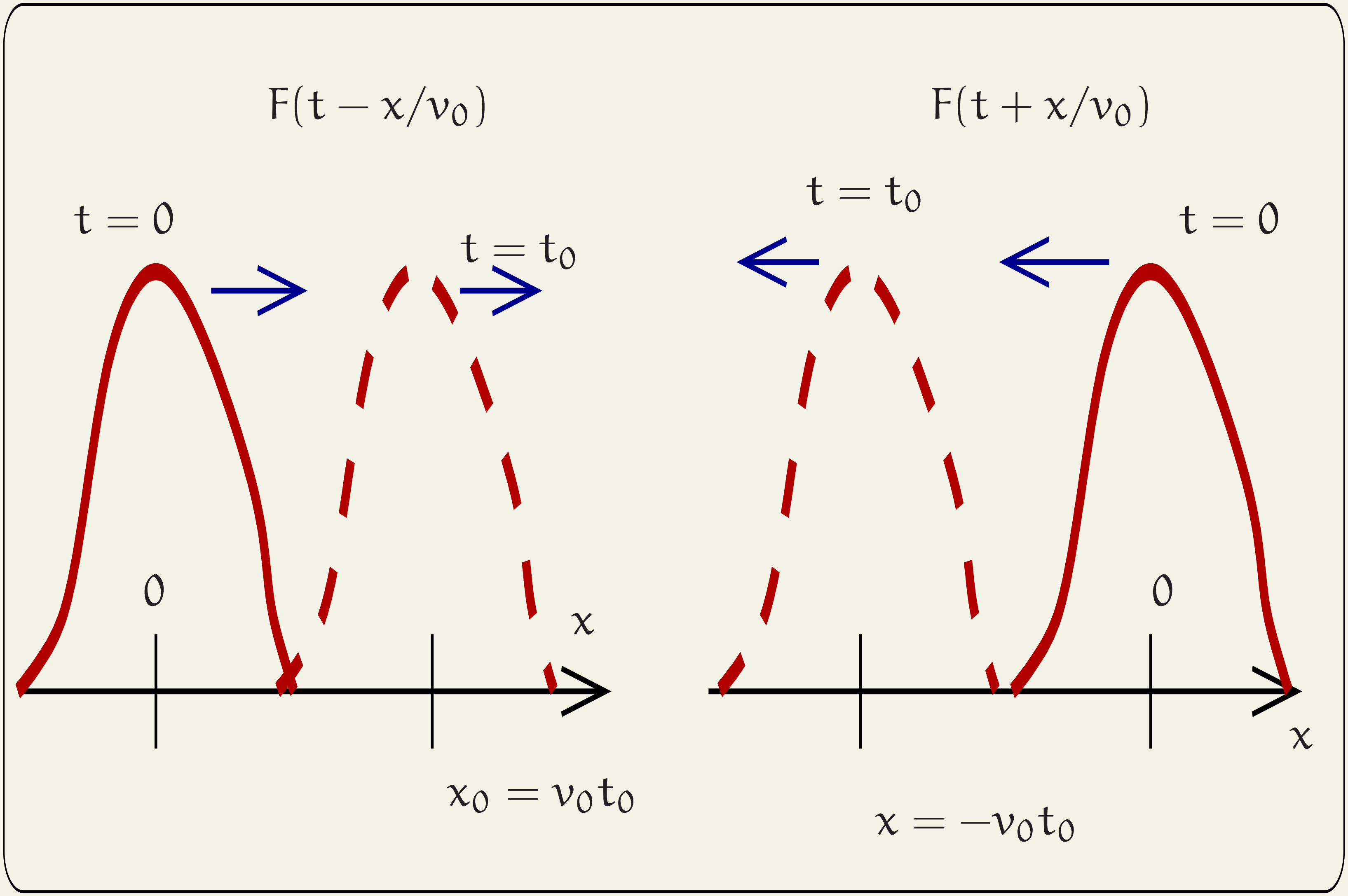
$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = LC\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{v_0^2}\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{— волновое уравнение}$$

$$U_+(x,t) = F(t - x\sqrt{LC}) = F(t - x/v_0) \quad \text{(волна бежит направо)},$$

$$I_+(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \times F(t - x\sqrt{LC}) = \frac{U_+(x,t)}{\rho}$$

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{– скорость волны,} \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{– волновое сопротивление}$$

Волны, бегущие вперед и назад



$$U_-(x,t) = f(t + x\sqrt{LC}) \quad \text{(волна бежит налево)},$$

$$I_-(x,t) = -\sqrt{\frac{C}{L}} \times f(t + x\sqrt{LC}) = -\frac{U_-(x,t)}{\rho}.$$

Мощность:

$$W = (U_+ + U_-)(I_+ + I_-) =$$

$$= (U_+ + U_-)\frac{((U_+ - U_-))}{\rho} = \frac{U_+^2}{\rho} - \frac{U_-^2}{\rho}$$

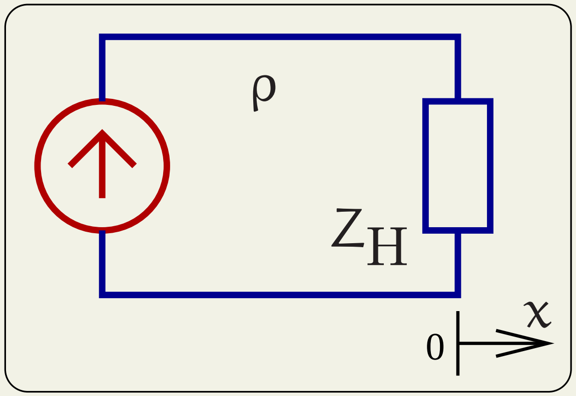
Скорость волны:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Волновое сопротивление:

$$\rho = \frac{|U|}{|I|} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad U_+ = \rho I_+, \quad U_- = -\rho I_-\,.$$

Отражение от нагруженного конца линии



Фурье-гармоники: $U,\ I\ \sim\ e^{i\omega t}$, тогда

$$U(x) = U_+ e^{-ikx} + U_- e^{ikx},$$

$$(2):\ i\omega L\, I(x) = ikU_+ e^{-ikx} - ikU_- e^{ikx}$$

Отсюда получаем:

$$\Rightarrow \quad I(x) = \frac{1}{\rho}\left(U_+ e^{-ikx} - U_- e^{ikx}\right),$$

$$\frac{U(0)}{I(0)} = \rho\,\frac{U_+ + U_-}{U_+ - U_-} = Z_H, \quad \Rightarrow \quad \frac{U_-}{U_+} = \frac{Z_H - \rho}{Z_H + \rho},$$

Частные случаи

Если $Z_{\text{Н}} = \rho$, то $U_- = 0$,

Тогда **вся** мощность поглощается нагрузкой

$$W = \left\langle \frac{U_+^2}{\rho} \right\rangle = \frac{|U_+|^2}{2\rho}, \quad W_- = 0\,,$$

Если $Z_{\text{Н}} = 0$, то $U_- = -U_+$,

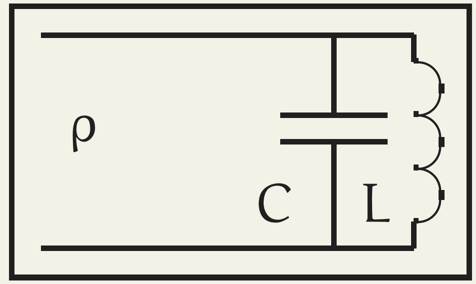
Мощность не поглощается: $W_+ + W_- = 0$,

Если $Z_{\text{Н}} = \infty$, то $U_- = U_+$,

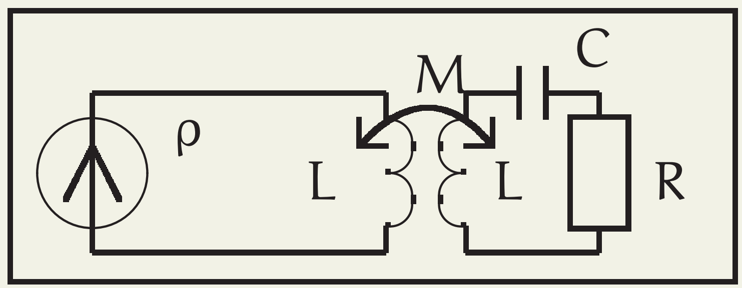
Мощность не поглощается: $W_+ + W_- = 0$.

Задачи “Задержка” и “Согласование”.

№5 "Задержка" На LC контур с резонансной частотой $\omega_0 = 1\sqrt{LC}$, включенный в линию с волновым сопротивлением ρ, падает волна напряжения, меняюшаяся по закону $U_{\text{вх}}(t) = u_0 e^{-(t/\tau)^2}\cos\omega_0 t$. Показать, что отраженную волну можно представить в виде $U_{\text{вых}}(t) = u_0 e^{-(t-\tau_d)^2/\tau^2}\cos(\omega_0 t + \phi)$. Найти время задержки τ_d. Принять, что $\tau \gg \tau^* \gg 1/\omega_0$, где $\tau^* = \rho C$ — время "нагруженной" релаксации ("собственных" потерь нет).



№6 "Согласование" При каких условиях *вся* мощность поглощается в сопротивлении R (т.е. нет отраженной волны)?



Частота ω источника напряжения совпадает с резонансной частотой ω_0 контура. Добротноть контура $Q \gg 1$. Волновое сопротивление линии ρ.

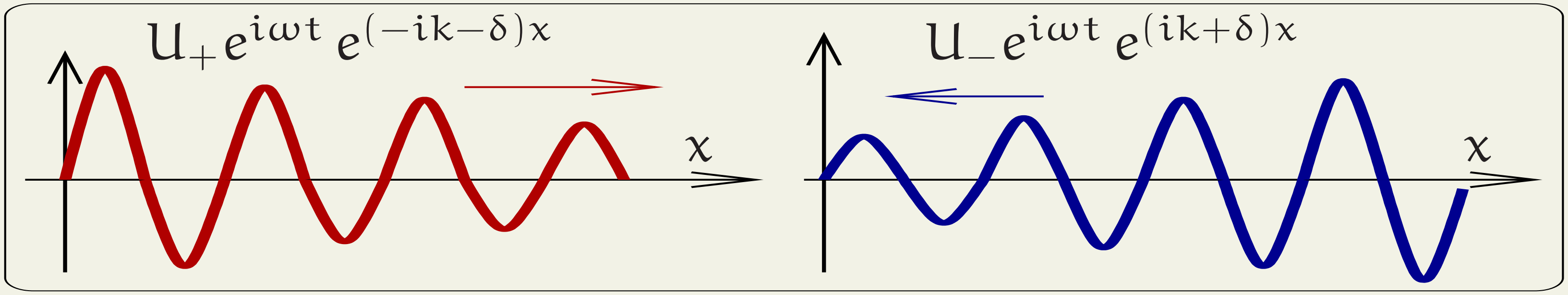
Длинная линия с потерями

Рассмотрим случай $G, R \neq 0$:

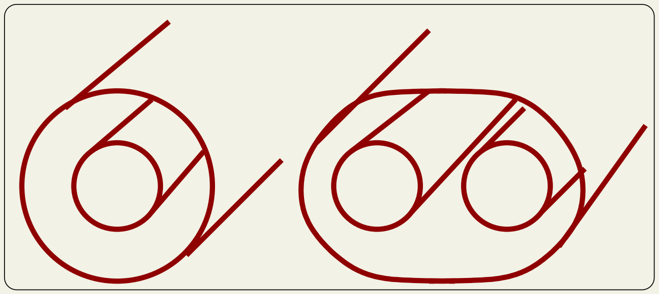
$$
\begin{aligned}
U &= U(x)\, e^{i\omega t}, \quad I = I(x)\, e^{i\omega t},\\
(1): &\qquad -\partial_x I(x) = (i\omega C + G)U(x),\\
(2): &\qquad -\partial_x U(x) = (i\omega L + R)I(x),\\
\partial_x(2) \text{ and } (1): &\qquad \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 U(x) = 0,\\
\gamma^2 &= (R + i\omega L)(G + i\omega C), \qquad \gamma = \alpha + i\beta,\\
U(x) &= A\, e^{\gamma_\pm x}
\end{aligned}
$$

Малые потери. Если $R \ll \omega L, \quad G \ll \omega C$, то

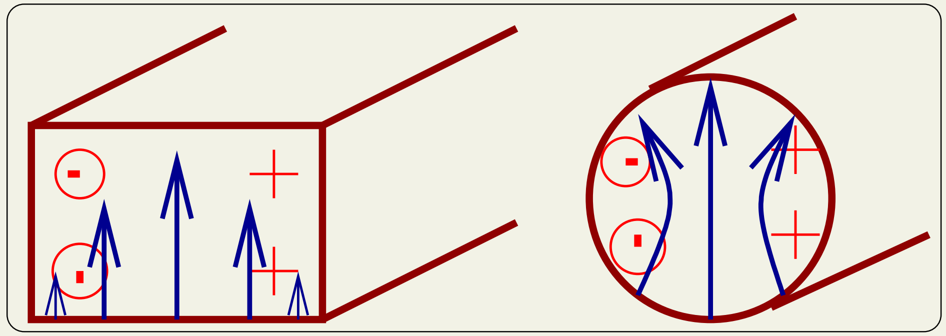
$$
\begin{aligned}
\gamma^2 &\simeq -\omega^2 LC\left(1 - \frac{i\omega(LG + CR)}{\omega^2\, LC}\right),\\
\gamma &\simeq \pm i\omega\sqrt{LC}\left(1 - \frac{i(LG + CR)}{2\omega\, LC}\right) = \pm\frac{i\omega}{v_0} \pm \frac{1}{2}\left(G\rho + \frac{R}{\rho}\right),\\
\gamma_+ &\simeq -ik - \delta, \quad \gamma_- \simeq ik + \delta, \quad k = \frac{i\omega}{v_0}, \quad \delta = \frac{1}{2}\left(G\rho + \frac{R}{\rho}\right),\\
U(x) &= U_+(x) + U_-(x),\\
U_+(x) &= U_+ e^{i\omega t}\, e^{(-ik-\delta)x}, \quad U_-(x) = U_- e^{i\omega t}\, e^{(ik+\delta)x}.
\end{aligned}
$$



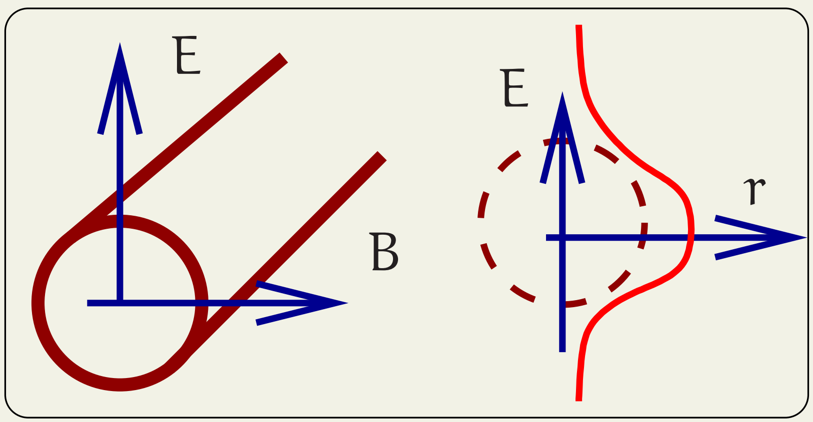
Кабельные линии



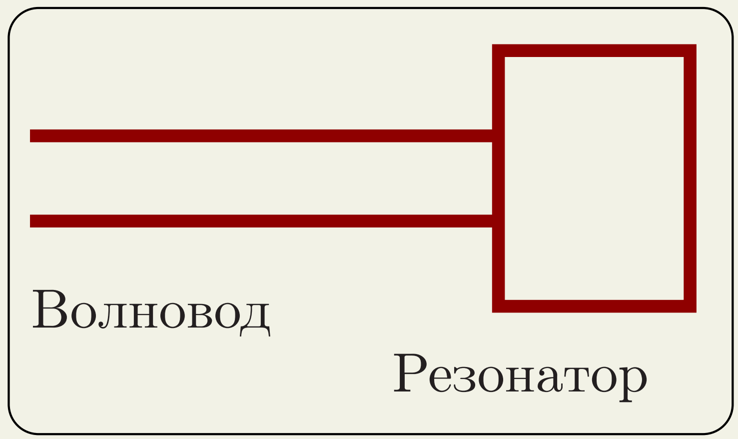
Волноводы



Диэлектрич. волноводы

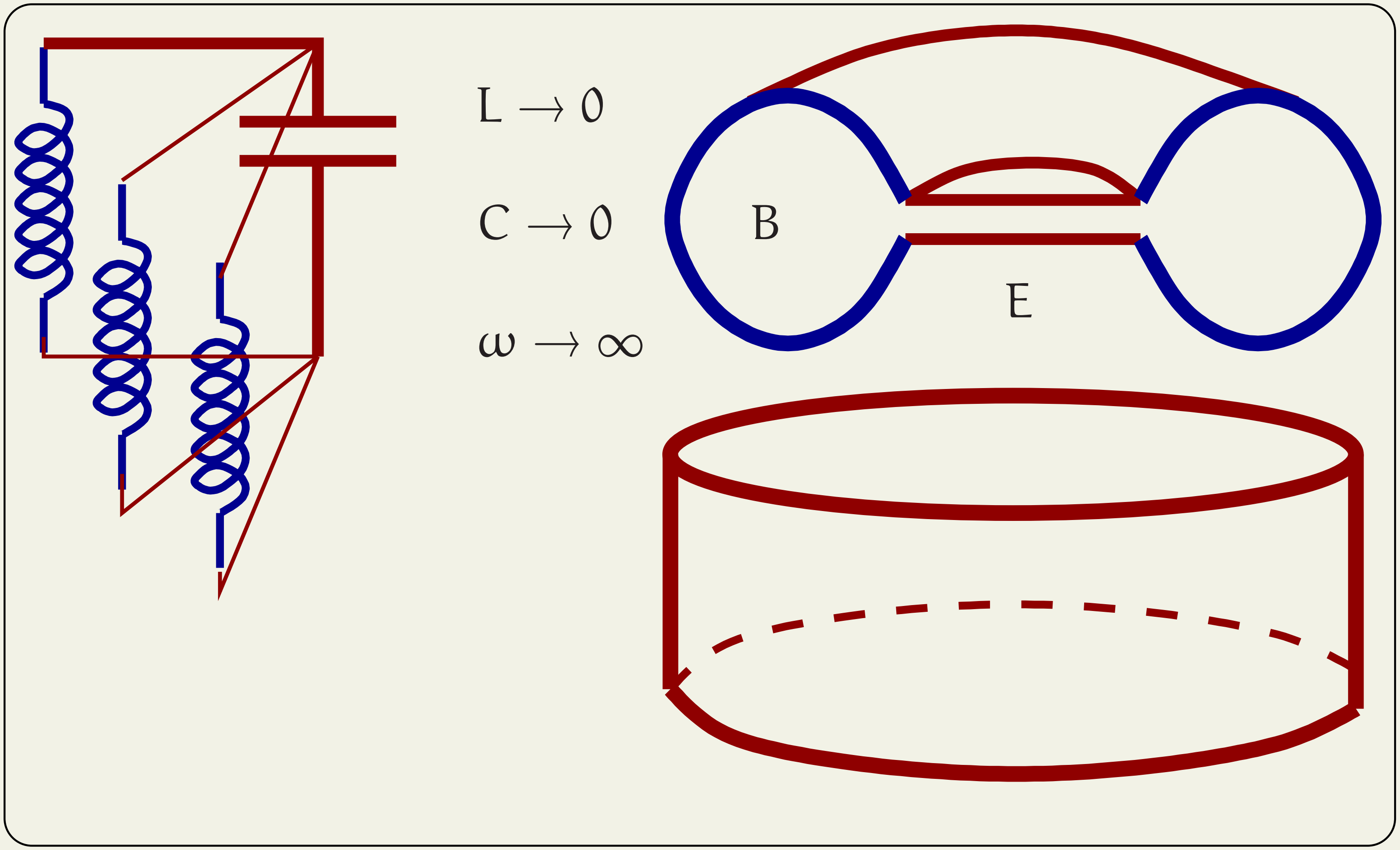


Соединение

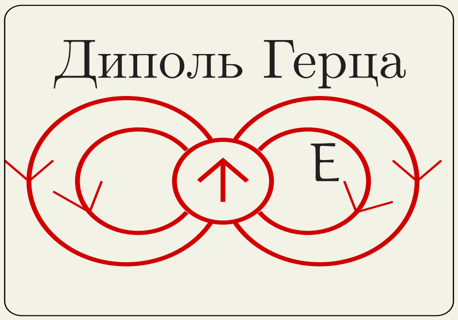


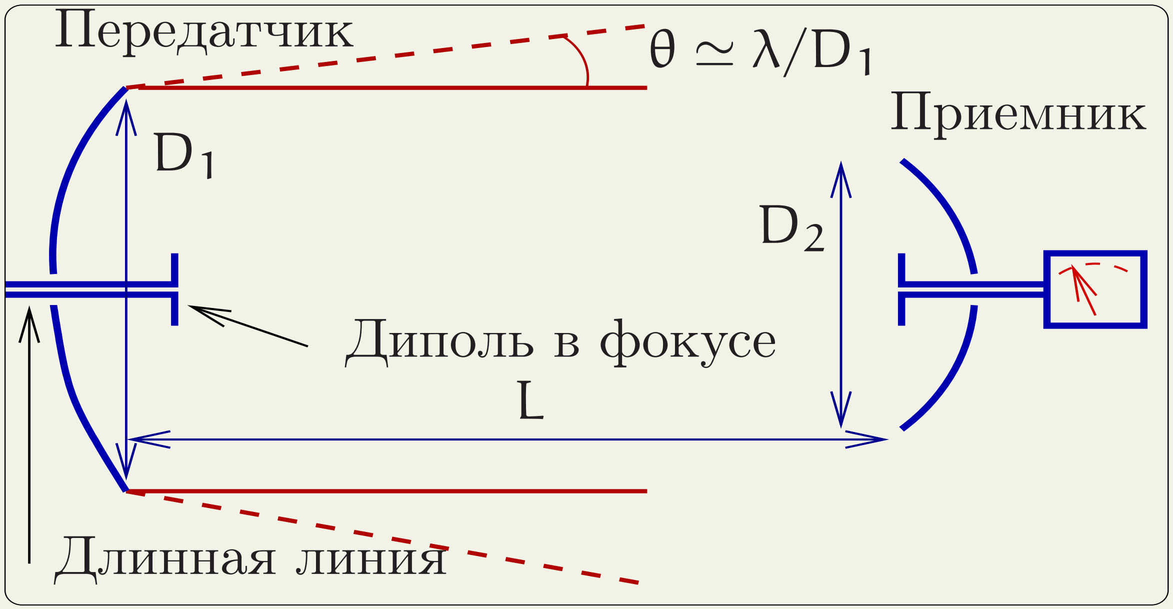
Можно *всю* мощность бегущей волны загнать в резонатор.

СВЧ резонаторы



Излучающие системы. Радиоинтерферометрия





$$\Delta\mathcal{E} = W_{\text{прием}}\tau = W_{\text{передат}} \times \frac{D_2^2}{\left(L\frac{\lambda}{D_1}\right)^2}\tau =$$

$$= W_{\text{передат}}\,\tau \times \left(\frac{D_1 D_2}{L\lambda}\right)^2 \tag{3}$$

Оценка энергии на бит, $L = 10^{12}$ м (размер солнечной системы)

$$\Delta\mathcal{E} = W_{\text{передат}}\,\tau \times \left(\frac{D_1 D_2}{L\lambda}\right)^2 \simeq \tau \times 10\,\text{Вт} \times \left(\frac{30\cdot 1}{10^{12}\cdot 0.03}\right)^2 \simeq$$

$$\simeq \tau \times 10^{-17}\ \text{Вт} \tag{4}$$

$$\kappa T \simeq 1.4\cdot 10^{-23}\ \text{Дж}\ \times (T/1\,\text{K}) \Rightarrow \tag{5}$$

$$(4) \simeq 100 \times (5) \Rightarrow 1\ \text{бит за время}\ \Rightarrow\ \tau \simeq 1\cdot 10^{-4}\ \text{сек.} \tag{6}$$

Передача одного кадра:

$$\text{Картинка} \quad \Rightarrow \quad 500 \times 1500 \times \underbrace{3}_{\text{цвет}} \times \underbrace{5}_{\text{градации}} \simeq 10^7\ \text{бит},$$

$$\sum \tau \quad \simeq \quad 10^{-4} \times 10^7 \simeq 1000\ \text{сек.}$$

$$W_{\text{прием}} \quad \simeq \quad 10^{-21}\ \text{Вт} = \frac{U_0^2}{2\rho}, \quad \rho = 100\ \text{Ом} \ \Rightarrow\ U_0 \simeq 4\times 10^{-10}\ \text{В}.$$

Какая мощность требуется для радиолокации?

Мощность, отразившаяся от цели (G — коэффициент отражения):

$$W_{\text{отражение}} \simeq G\, W_{\text{передат}} \times \left(\frac{D_1 D_{\text{цель}}}{L\lambda}\right)^2$$

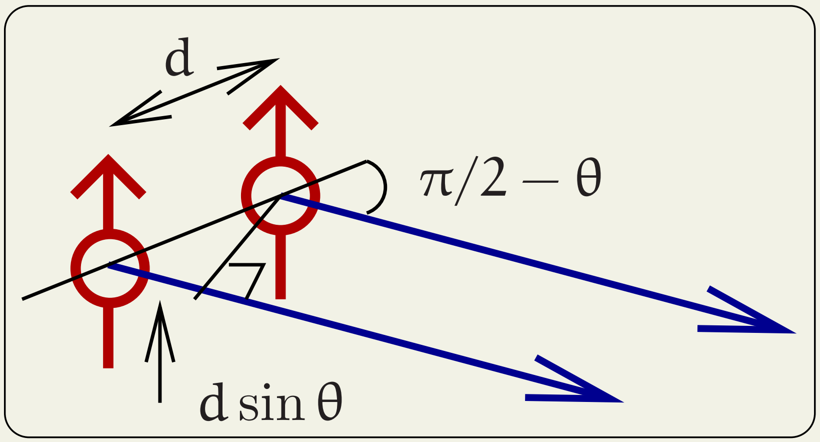
К локатору вернется мощность:

$$W_{\text{возвр}} \simeq W_{\text{отражение}} \times \left(\frac{D_1 D_{\text{цель}}}{L\lambda}\right)^2 \simeq G\, W_{\text{передат}} \times \left(\frac{\mathbf{D_1 D_{\text{цель}}}}{\mathbf{L\lambda}}\right)^{\mathbf{4}}$$

Мощность радиолокатора $W_{\text{передат}} \simeq 1$ МВт.
Длительность импульса $\tau_{\text{имп}} \simeq 10^{-6}$ с.
Энергия в импульсе $\mathcal{E} = W_{\text{передат}}\tau_{\text{имп}} \simeq 1$ Дж.
Скважность $\tau_{\text{скваж}} \simeq 10^{-3}$ с. Дальность $R = c\tau_{\text{скваж}} \simeq 300$ км

Направление излучения

Рассмотрим два диполя



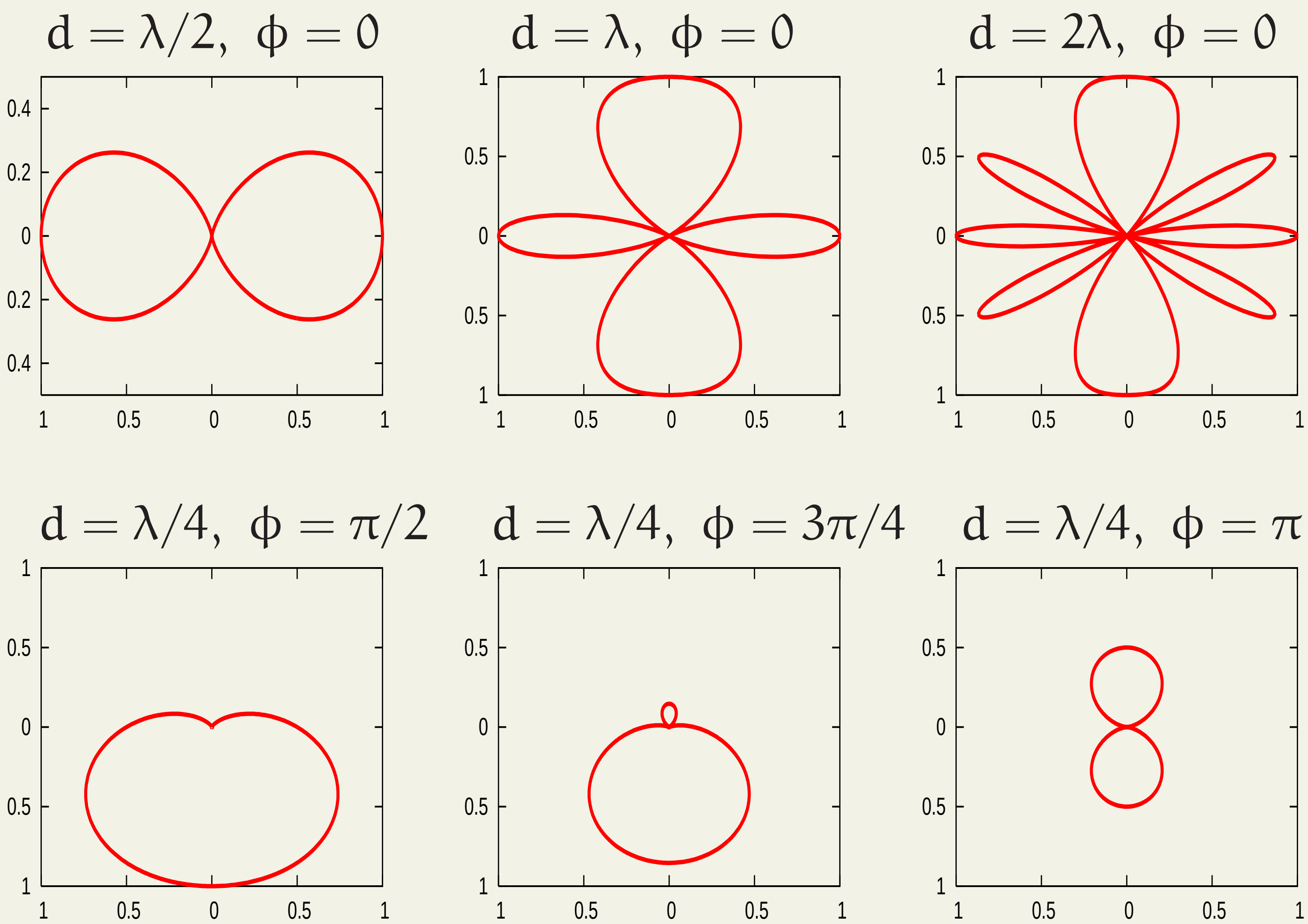
Пусть a – амплитуда каждого диполя, φ – разность фаз между диполями.
Ищем A — амплитуду от двух диполей:

$$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}\,d\sin\theta+\varphi,\qquad a\cos\omega t+a\cos\left(\omega t+\Delta\phi\right)=A\cos(\omega t+\dots),$$

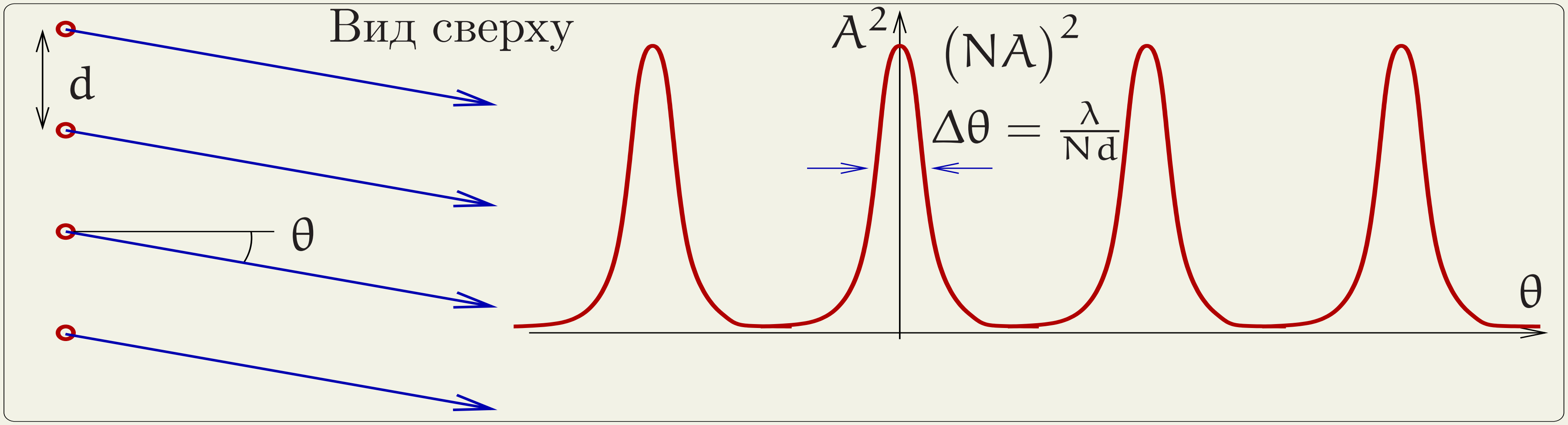
$$A^2=a^2+a^2+2a^2\cos\Delta\phi=4a^2\cos^2\frac{\Delta\phi}{2}=\mathbf{4a^2}\cos^{\mathbf{2}}\left(\frac{\pi}{\lambda}\,\mathbf{d}\sin\theta+\frac{\varphi}{\mathbf{2}}\right)$$

Пусть $\phi=0$ – диполи когерентны. Тогда максимумы при
$\sin\theta=\pm m\,\frac{\lambda}{d}$, $m=0,\ 1,\ 2\dots.$

Примеры (в плоскости $\perp$ диполям):



N когерентных (синфазных) диполей



$$A^2 = a^2 \frac{\sin^2\left(N\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta + \frac{\phi}{2}\right]\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta + \frac{\phi}{2}\right)}.$$

При $d < \lambda/2$ — только один пик. ϕ – разница фаз между соседями. Можно "размахивать" диаграммой направленности.

Нет вращающихся частей.

Вывод формулы для амплитуды излучения решетки диполей

$$A^2 = a^2 \left| \sum_{n=0}^{N} e^{in\left(kd\sin\theta+\phi\right)} \right|^2 = a^2 \left| \frac{1-e^{iN\left(kd\sin\theta+\phi\right)}}{1-e^{i\left(kd\sin\theta+\phi\right)}} \right|^2$$

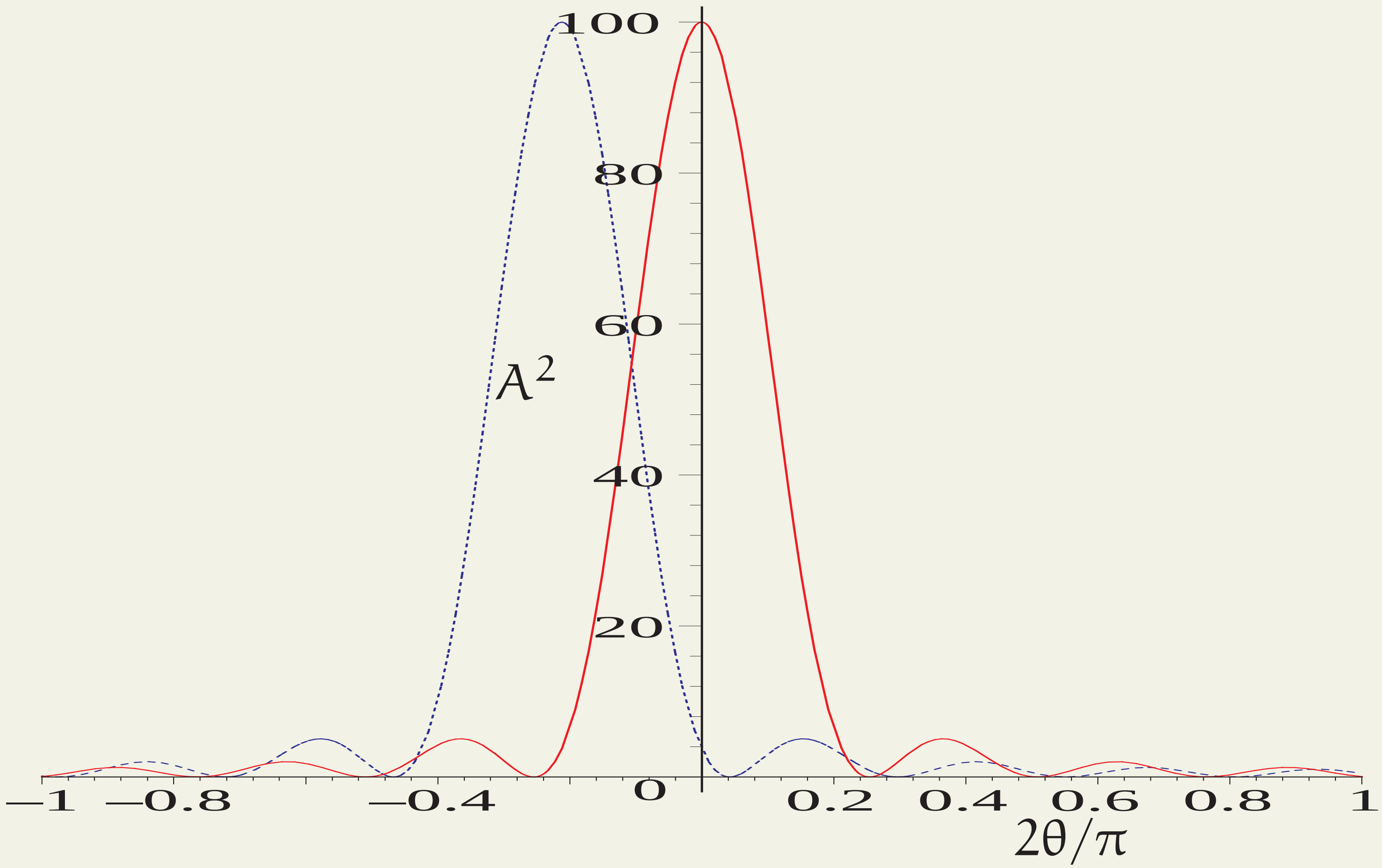
Вспомогательная формула:

$$\left|1-e^{i\alpha}\right|^2 = \left|1-\cos\alpha - i\sin\alpha\right|^2 = \left(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) =$$

$$= 2\left(1-\cos\alpha\right) = 4\sin^2\left(\alpha/2\right)$$

$$A^2 = a^2 \frac{\sin^2\left[N\left(kd\sin\theta+\phi\right)/2\right]}{\sin^2\left[\left(kd\sin\theta+\phi\right)/2\right]} = a^2\,\frac{\sin^2\left(N\left[\dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta+\dfrac{\phi}{2}\right]\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi d}{\lambda}\sin\theta+\dfrac{\phi}{2}\right)}.$$

Диаграмма направленности. $N = 10$. Один пик: $d = \lambda/4$, $\phi = 0,\ \pi/6$



То же самое для приема: если есть фазовая решетка из $N \gg 1$ приемников, то вводя различные времена задержки в каждом приемнике, можно “слушать” ВСЕ небо.

Нужен мощный компьютер. Нет вращающихся частей.

Два приемника, разнесенные на расстояние L, дают угловое разрешение источника $\theta \simeq \lambda/L$.

ИКИ АН СССР — “Радиоастрон”:

$\lambda = 3$ см, $L \simeq 10^{13}$ см (радиус орбиты Земли),

$$\theta \simeq 3 \cdot 10^{-13} \ (!)$$

В оптике такого нет.

Нужны хорошие часы: стабильность генератора $\Delta f/f < 10^{-14}$.

Расписание контрольных по радиофизике. 1 поток. 2010 г.

201 гр. Чтв. 1 апреля, 15.15 - 17.00, ауд. 1-22

202 гр. Чтв. 1 апреля, 15.15 - 17.00, ауд. 5-52

203 гр. Чтв. 1 апреля, 8.55 - 10.35, ауд. 5-68

204 гр. Чтв. 1 апреля, 13.25 - 15.35, ауд. 5-49

205 гр. Срд. 31 марта, 17.00 - 18.40, ауд. 5-49

206 гр. Чтв. 1 апреля, 17.00 - 18.40, ауд. 5-37

207 гр. Чтв. 1 апреля, 17.00 - 18.40, ауд. 5-51

208 гр. Срд. 31 марта, 17.00 - 18.40, ауд. 5-50

209 гр. Чтв. 1 апреля, 8.55 - 10.35, ауд. 5-37

210 гр. Срд. 31 марта, 15.15 - 17.00, ауд. 5-35

220 гр. Срд. 31 марта, 15.15 - 17.00, ауд. 5-37