Квантовая теория измерений

Ф.Я. Халили, С.П. Вятчанин

Кафедра физики колебаний,
Физический факультет,
Московский гос. университет им. М.В Ломоносова

Москва, 2020

Содержание

Классическая частица

Состояние классической частицы

Координата x и импульса p.
Если они точно не известны, то — распределения вероятностей $P_x(x)$ и $P_p(p)$ (между собой вообще говоря никак не связанны).
Состояния с точно заданными значениями:

$$P_x = \delta(x - x_0), \quad P_p = \delta(p - p_0) \tag{1}$$

Любые средние вычисляются по известному правилу:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, P_x(x) \, dx, \quad \langle p^m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p^m \, P_p(p) \, dp \tag{2}$$

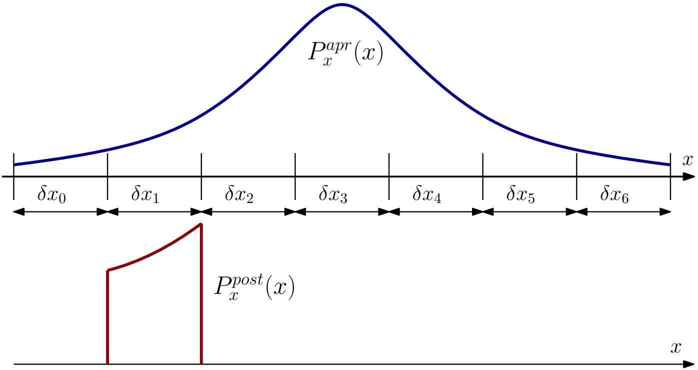
Распределения вероятностей P_x и P_p “не делимы”

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x) \, dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_p(p) \, dp = 1 \tag{3}$$

Классическая частица: одномерный “паркет”

Априорное распределение вероятности $P_x^{\mathsf{apr}}(x)$. Детектор не возмущает состояние частицы (частица не поглощается). Апостериорное распределение вероятности (после пролета частицы через δx_1)

$$P_x^{\mathsf{post}} = \begin{cases} \frac{P_x^{\mathsf{apr}}(x)}{P_1}, & \text{if } x \in \delta x_1 \\ 0, & \text{if } x \notin \delta x_1 \end{cases}, \quad P_1 = \int_{\delta x_1} P_x^{\mathsf{apr}}\, dx \tag{4}$$



Классическая частица (прод.)

Формально можно ввести “волновую функцию”

$$\psi_x(x) = \sqrt{P_x(x)}\, e^{i\phi(x)} \tag{5}$$

$\phi_x(x)$ — не несет никакого физического смысла. Формально можно переписать “как в квантовой механике”:

$$\langle x \rangle = \int \psi_x^*(x)\, x\, \psi_x(x)\, dx. \tag{6}$$

Аналогично и для импульса:

$$\psi_p(p) = \sqrt{P_p(p)}\, e^{i\phi(p)}, \tag{7}$$

$$\langle p \rangle = \int \psi_p^*(p)\, p\, \psi_p(p)\, dp. \tag{8}$$

Но ни фаза $\phi_x(x)$, ни $\phi_p(p)$ НЕ имеют физического смысла.

Классическая волна

Действительная волновая функция ψ_x

ψ_x — отклонение переменной величины (напр. уровня воды). Ее квадрат задает пространственное распределение энергии $P_x(x)$, а интеграл — пропорционален переносимой энергии $\mathcal{E}$

$$P_x(x) = \psi_x^2(x), \quad \int \psi_x^2(x)\, dx \sim \mathcal{E} \tag{9}$$

Пространственный спектр $\psi_k(k)$

$$\psi_k(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi_x(x)\, e^{-ikx}\, dx, \quad \int \psi_x^2(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int |\psi_k(k)|^2\, \frac{dk}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\int |\psi_k(k)|^2\, \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \int\int\int \psi_x(x)\psi_{x'}^*(x')\, e^{-ik(x-x')}\, \frac{dx\, dx'}{2\pi}\, \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \int\int \psi_x(x)\psi_{x'}^*(x')\, \delta(x-x')\, \frac{dx\, dx'}{\sqrt{2\pi}} = \int \psi_x^2(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{10}$$

Классическая волна (прод.)

Классическое соотношение неопределенностей

$$\Delta^2 x \, \Delta^2 k \geq \frac{1}{4}, \tag{11a}$$

$$\Delta^2 x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad \langle x^n \rangle = \int x^n \, \psi_x^2(x) \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, \tag{11b}$$

$$\Delta^2 k = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2, \quad \langle k^n \rangle = \int k^n \, |\psi_k(k)|^2 \, \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \tag{11c}$$

Проверить для гауссового случая:

$$\psi_x(x) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{x_0}} \exp\left(\frac{-x^2}{2x_0^2}\right), \quad \psi_k(k) = 2^{1/4}\sqrt{x_0} \, \exp\left(\frac{-k^2 x_0^2}{2}\right), \tag{12a}$$

$$\int |\psi_x(x)|^2 \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1, \quad \int |\psi_k(k)|^2 \, \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = 1 \tag{12b}$$

Классическое соотношение неопределенностей

Нулевые средние, $\langle x \rangle = 0$, $\langle k \rangle = 0$

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 |\psi_x(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, \quad \langle k^2 \rangle = \int k^2 |\psi_k(k)|^2 \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}, \tag{13a}$$

$$\langle k^2 \rangle = \int \left[ik\psi_k(k) \right] \left[-ik\psi_k^*(k) \right] \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}, \tag{13b}$$

$$ik\psi_k(k) = \int \psi_x(x) \left[-\partial_x e^{-ikx} \right] \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int e^{-ikx} \, \partial_x \psi_x(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, \tag{13c}$$

$$\begin{aligned} \langle k^2 \rangle &= \int \left[e^{-ikx} \, \partial_x \psi_x(x) \right] \left[e^{ikx'} \, \partial_{x'} \psi_x^*(x') \right] \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \int \left[\partial_x \psi_x(x) \right] \left[\partial_{x'} \psi_x^*(x') \right] \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi\delta(x-x')}{\sqrt{2\pi}} = \end{aligned} \tag{13d}$$

$$= \int |\partial_x \psi_x(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}. \quad \partial_x \, x - x \, \partial_x = 1 \tag{13e}$$

Дальше аналогично выводу кв. соотношений неопределенностей.

Квантовая волна-частица

И волна, и частица

Как и для классической частицы, распределениями вероятностей $P_x(x) = |\psi_x(x)|^2,\ P_p(p) = |\psi_p(p)|^2$, "неделимы", т.е. при локализации квантовой частицы — редукция распределения вероятностей.
Но эти распределения вероятностей $P_x(x), P_p(p)$ не независимы.
Волновые функции связаны преобразованием Фурье:

$$\psi_p(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\hbar}} \int \psi_x(x)\, e^{-ipx/\hbar}\, dx, \quad p \Rightarrow \hbar k \tag{14}$$

Волновые функции комплексные, фаза — важный физический смысл. Она определяет распределение вероятностей для канонически сопряженных величин (у волновой функции в координатном представлении — для импульса, и наоборот).

Квантовая волна-частица (прод.)

Квантовое соотношение неопределенностей

Зависимость между $\psi_x(x)$ и $\psi_p(p)$: координата и импульс квантовой частицы не могут быть одновременно точно заданы.
Действительно, если координата задана точно $(\psi_x(x) = \delta(x - x0))$, то импульс полностью не определен.
Квантовое соотношение неопределенностей

$$\Delta x_{\text{init}} \cdot \Delta p_{\text{init}} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{15}$$

"Измерительное" кв. соотношение неопределенностей

$$\Delta x_{\text{изм}} \cdot \Delta p_{\text{возм}} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{16}$$

или

$$\Delta x_{\text{возм}} \cdot \Delta p_{\text{изм}} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{17}$$

Обсудить различные случаи $\Delta x_{\text{изм}} \gg \Delta x_{\text{init}}$ или $\Delta x_{\text{изм}} \ll \Delta x_{\text{init}}$

Полезная таблица

Таблица 1: Квантовая частица — свойства как классической частицы, так и классической волны.
У классической волны можно "отрезать" кусок без редукции.

	Редукция при изм.	Соотношение неопр.
Классическая частица	есть	нет
Классическая волна	нет	есть
Квантовая частица	есть	есть

Вывод квантового соотношения неопределенностей

Пусть $\hat{x}$, $\hat{p}$ – эрмитовы. Введем z (комплексное число):

$$\hat{A} = \hat{x} - \hat{I}\langle x\rangle, \quad \hat{B} = \hat{p} - \hat{I}\langle p\rangle, \quad \hat{C} = z\hat{A} + i\hat{B}, \quad \langle \hat{C}^\dagger \hat{C}\rangle \geq 0,$$

$$\langle \hat{C}^\dagger \hat{C}\rangle = \langle (z^*\hat{A} - i\hat{B})(z\hat{A} + i\hat{B})\rangle = |z|^2\langle A^2\rangle + iz^*\langle \hat{A}\hat{B}\rangle - iz\langle \hat{B}\hat{A}\rangle + \langle B^2\rangle,$$

$$\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}, \quad \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hbar, \tag{18}$$

$$\langle \hat{C}^\dagger \hat{C}\rangle = |z|^2\langle A^2\rangle + \langle B^2\rangle + i\Re(z)\left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right\rangle + \Im(z)\left\langle \left\{\hat{A}, \hat{B}\right\}\right\rangle \geq 0,$$

Пусть $\Im(z) = 0$, Тогда $\langle \hat{C}^\dagger \hat{C}\rangle = z^2\langle A^2\rangle - z\,\hbar + \langle B^2\rangle$, (19)

Дискриминант должен быть отрицателен: $D = \hbar^2 - 4\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \leq 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad \text{или} \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}} \tag{20}$$

Неравенство Шредингера-Робертсона:

$$\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} + \frac{1}{4}\left\langle \left\{\hat{A}, \hat{B}\right\}\right\rangle^2 \tag{21}$$

Содержание

Постулат редукции фон-Неймана

Квантовое измерение: нет взаимодействия

1) «квантовый объект» и 2)«классический наблюдатель».
Разделены «квантово-классической границей».
Пока не взаимодействуют между собой:
состояние квантового объекта описывается волновой функцией, а классический наблюдатель — классической ньютоновской физикой.

Квантовое измерение: взаимодействие

Взаимодействие отображает состояние квантового объекта на состояние классического наблюдателя, оно содержит некоторую случайность. По отдельности как квантовый объект, так и классический наблюдатель ведут себя совершенно детерминистически. Случайности нет ни в классических ньютоновских законах движения, ни в уравнении Шредингера. Лишь их взаимодействие через квантово-классическую границу (процесс измерения) создает случайность.

Постулат редукции (прод.)

Модель квантового измерения

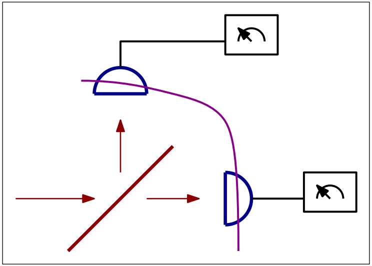
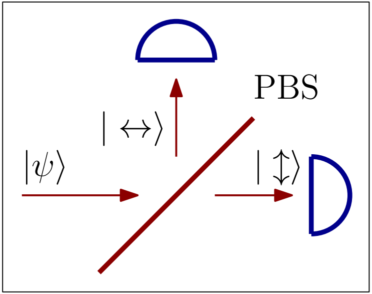


Рис. 1: Обобщенная модель квантового измерения согласно копенгагенской интерпретации.
Фиолетовая линия разделяет квантовый и классический миры.

Постулат редукции (прод.)

Пример



Измерение поляризации фотона. PBS — поляризационный светоделитель.

$$|\psi\rangle = \psi_{\leftrightarrow}|\leftrightarrow\rangle + \psi_{\updownarrow}|\updownarrow\rangle \qquad (22)$$

Щелкает только один из приемников с вероятностью $|\psi_{\leftrightarrow}|^2$ или $|\psi_{\updownarrow}|^2$.

Иногда случайность объясняют статистической природой $|\psi\rangle$, содержащей обе поляризации $|\leftrightarrow\rangle$, $|\updownarrow\rangle$. Однако в $|\psi\rangle$ не больше случайности, чем, например, в квантовых состояниях $|\leftrightarrow\rangle$, $|\updownarrow\rangle$. (Состояние $|\psi\rangle$ может быть преобразовано в $|\leftrightarrow\rangle$, $|\updownarrow\rangle$ детерминировано — путем пропускания фотона через вращатель поляризации.)

Постулат редукции, axiom 1

Пусть $|\psi\rangle$ – начальное состояние, а Q — квантовый оператор, $q_n,\ |q_n\rangle$ — его собственные значения и состояния (n – целое), .

Axiom 1

В результате измерения *случайно*, с вероятностью

$$P_n = |\langle q_n|\psi\rangle|^2 \tag{23}$$

будет получено одно из собственных значений q_n.

Этот пункт появился после безуспешных попыток рассматривать волновую функцию как какую-то реальную классическую волну.

Обобщение

Если начальное состояние задается оператором плотности $\hat{\rho}$, то вероятность P_n равна

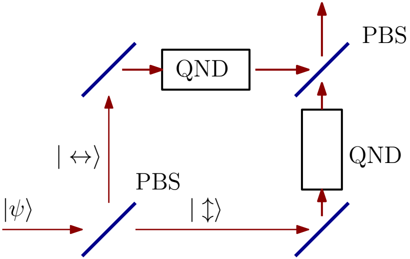
$$\hat{\rho} = \sum_j |\psi_j\rangle\rho_j\langle\psi_j|, \tag{24}$$

$$P_n = \langle q_n|\hat{\rho}|q_n\rangle = \sum_j \rho_j |\langle q_n|\psi_j\rangle|^2 \tag{25}$$

Постулат редукции, axiom 2

Вопрос:

Каково состояние квантового объекта после измерения? Рассмотрим:



Пусть нач. состояние $|\leftrightarrow\rangle$ или $|\updownarrow\rangle$. После измерения оба возможных пути фотона объединяются вторым PBS.

А если $|\psi\rangle = \psi_{\leftrightarrow}|\leftrightarrow\rangle + \psi_{\updownarrow}|\updownarrow\rangle$?

Два варианта (нет поглощения фотонов):

(i) $|\psi\rangle$ НЕ изменяется;

(ii) $|\psi\rangle$ коллапсирует либо в $|\leftrightarrow\rangle$, либо $|\updownarrow\rangle$.

Какой вариант? Пропустить фотон через второй такой-же измеритель. В случае (i) результаты этих двух измерений будут случайными и независимыми друг от друга. В случае (ii) они также будут непредсказуемыми заранее, но будут совпадать друг с другом.

Джон фон Нейман (начало 1920-х): вариант (ii)

(Эксперименты по рассеянию рентгеновских квантов на электронах, комптоновское рассеяние).

Постулат редукции, axiom 2

Axiom 2

Идеальное точное измерение наблюдаемой Q редуцирует квантовое состояние объекта в собственное состояние измеряемой величины $|q_n\rangle$, соответствующее полученному результату измерения q_n .

Аксиома 2 дополняет аксиому 1. Вместе эти две аксиомы образуют постулат о редукции фон Неймана.

Содержание

Positive operator valued measure (POVM)

ПОВМ: простейший случай

Положительно-определенная операторная вероятностная мера (ПОВМ). Вероятности срабатывания каждого из детекторов:

$$P_{\leftrightarrow} = |\langle \leftrightarrow | \psi\rangle|^2 = \langle\psi|\hat{E}_{\leftrightarrow}|\psi\rangle, \quad P_{\updownarrow} = |\langle \updownarrow | \psi\rangle|^2 = \langle\psi|\hat{E}_{\updownarrow}|\psi\rangle \tag{26}$$

Операторы

$$\hat{E}_{\leftrightarrow} = | \leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow |, \quad \hat{E}_{\updownarrow} = | \updownarrow\rangle\langle\updownarrow | \tag{27}$$

образуют ПОВМ (положительно определенная операторная вероятностная мера) или POVM (positive operator valued measure)

ПОВМ: общий случай

Точное измерение наблюдаемой Q:

$$\left\{\hat{E}_n\right\} = \{|q_n\rangle\langle q_n|\}, \quad P_n = \langle\psi|\hat{E}_n|\psi\rangle, \quad \text{или} \quad P_n = \mathrm{Tr}\,\left(\hat{E}_n\hat{\rho}\right) \tag{28}$$

Язык ПОВМ позволяет описывать а) как точные, так и приближенные кв. измерения; б) одновременные кв. измерения нескольких наблюдаемых, в том числе некоммутирующих, и т.д.

Positive operator valued measure

Полнота ПОВМ

$$\sum_n P_n = 1, \qquad \sum_n \hat{E}_n = \hat{1} \tag{29}$$

ПОВМ: конечные состояния, общий случай

$$|\psi_n\rangle = \frac{\hat{E}_n|\psi\rangle}{\sqrt{P_n}}, \qquad \hat{\rho}_n = \frac{\hat{E}_n\,\hat{\rho}\,\hat{E}_n}{P_n} \tag{30}$$

Для простого случая ид. точ. измерения $|\psi_n\rangle = |q_n\rangle$ и $\hat{E}_n = |q_n\rangle\langle q_n|$. Однако общая структура справедлива и для более общих случаев.

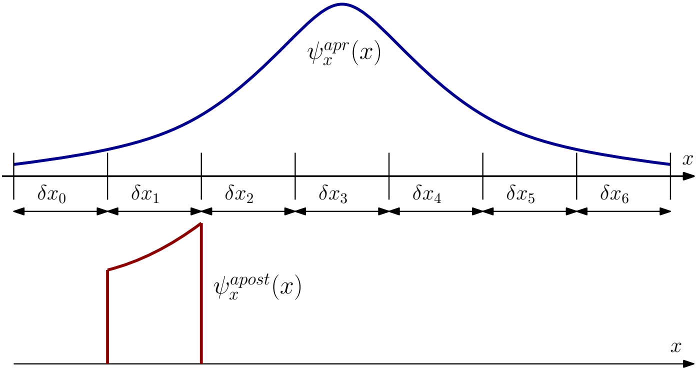
Содержание

Приближенные измерения

"Паркетное" измерение

Постулат о редукции для приближенного измерения:

$$\psi_x^{\mathsf{apost}} = \begin{cases} \dfrac{\psi_x^{\mathsf{apr}}(x)}{\sqrt{P_j}}, & \text{if } x \in \delta x_j \\ 0, & \text{if } x \notin \delta x_j \end{cases}, \quad P_j = \int_{\delta x_j} |\psi_x^{\mathsf{apr}}|^2\, dx \tag{31}$$



Приближенные измерения (прод.)

Дираковские обозначения

$$|\psi_j\rangle = \frac{\hat{E}_j|\psi^{\mathsf{apr}}\rangle}{\sqrt{P_j}}, \quad P_j = \langle\psi^{\mathsf{apr}}|\hat{E}_j\cdot\hat{E}_j|\psi^{\mathsf{apr}}\rangle = \langle\psi^{\mathsf{apr}}|\hat{E}_j|\psi^{\mathsf{apr}}\rangle, \tag{32}$$

$$\hat{E}_j = \int_{\delta x_j} |x\rangle\langle x|\,dx, \quad \hat{E}_j\cdot\hat{E}_j = \hat{E}_j \tag{33}$$

Обобщение

Все множество значений $\{q\}$ разбиваем на не пересекающиеся множества $\delta q_1,\ \delta q_2,\ldots$. Для каждого строится оператор:

$$\hat{E}_j = \sum_{q\in\delta q_j} |q\rangle\langle q|, \quad \sum_j \hat{E}_j = \hat{1}. \tag{34}$$

Пример

Пример: 3-х мерное пространство

Волновые функции — столбцы и строчки:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \langle\psi| = \begin{pmatrix} a_x, & a_y, & a_z \end{pmatrix} \tag{35}$$

Операторы – матрицы (3×3), проекции на оси и на плоскости:

$$E_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$E_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Содержание

Неортогональные измерения

Ортогональные приближенные измерения:

последующие измерения с вероятностью единица дают тот же самый результат (орт. и приближенные измерения похожи на точные).

Реальные приближенные измерения:

Каждое последующее измерение может давать другой результат, в пределах погрешности предыдущего, и точность измерения от измерения к измерению копится, то есть распределение вероятностей для измеряемой величины (и волновая функция) с каждым измерением сужаются. В 60-е и 70-е годы был разработан математический аппарат так называемых неортогональных измерений, представляющий собой обобщение постулата о редукции фон Неймана и позволяющий описывать любые измерения.

Неортогональные измерения (прод.)

Измерение как лин. отображение множества кв. состояний

отображение кв. состояний $\{\hat\rho\}$ на множество распред. вероятностей $\big\{P(q)\big\}$. Возможные результаты q: дискретный набор или непрерывная величина; могут быть скалярами или векторами.

Линейность:

Если состояние $\hat\rho_1$ дает $P_1(q)$, а состояние $\hat\rho_2$ — $P_2(q)$, то

$$a\hat\rho_1 + b\hat\rho_2 \quad \Rightarrow \quad aP_1(q) + bP_1(q) \tag{38}$$

ПОВМ: множество операторов $\big\{\hat\Pi(q)\big\}$

$$P(q) = \mathrm{Tr}\,\big[\hat\Pi(q)\,\hat\rho\big], \quad \text{или} \quad P(q) = \langle\psi|\,\hat\Pi(q)\,|\psi\rangle, \tag{39}$$

$$\text{Нормировка: } \forall\,\hat\rho \quad \int P(q)\,dq = 1, \quad \text{Полнота: } \int \hat\Pi(q)\,dq = \hat 1 \tag{40}$$

Обратное воздействие измерителя

Конечное состояние

$$|\psi(q)\rangle = \frac{\hat{\Omega}(q)\,|\psi\rangle}{\sqrt{P(q)}}, \quad \text{или} \quad \hat{\rho}(q) = \frac{\hat{\Omega}(q)\,\rho\,\hat{\Omega}^\dagger(q)}{P(q)} \tag{41}$$

Оператор редукции $\hat{\Omega}$ определяется с точностью до произв. унитарного оператора $\hat{U}(q)$:

$$\hat{\Pi}(q) = \hat{\Omega}^\dagger(q)\,\hat{\Omega}(q), \quad \text{обратно} \quad \hat{\Omega}(q) = \hat{U}(q)\,\hat{\Pi}^{1/2}(q) \tag{42}$$

Физ. смысл $\hat{U}(q)$ — описывает эффективную свободную эволюцию объекта после измерения. Ниже опускаем $\hat{U}(q)$.

Обратное воздействие измерителя (прод.)

Пример: неидеальный фотодетектор

Исх. состояние $|1\rangle$. С вероятностью $\eta < 1$ ответ "1", а с вероятностью $1-\eta$ — "0" :

$$\langle 1|\hat{\Pi}_1|1\rangle = \eta, \quad \langle 1|\hat{\Pi}_0|1\rangle = 1-\eta, \quad \langle 0|\hat{\Pi}_0|0\rangle = 1 \tag{43}$$

Отсюда следует

$$\hat{\Pi}_1 = \eta\,|1\rangle\langle 1|, \quad \hat{\Pi}_0 = |0\rangle\langle 0| + (1-\eta)\,|1\rangle\langle 1| \tag{44}$$

Для "обычных" поглощающих детекторов, на выходе очевидно будет нулевое состояние $|0\rangle$. Для кв. невозмущающих детекторов сост. на выходе будет определяться операторами редукции

$$\hat{\Omega}_1 = \sqrt{\eta}\,|1\rangle\langle 1|, \quad \hat{\Omega}_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\eta}\,|1\rangle\langle 1| \tag{45}$$

Когерентное состояние осциллятора

Определение и разложения

Определение: $\quad a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \qquad (46)$

$$\langle n|a|\alpha\rangle = \sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle, \qquad (47)$$

$$\langle 1|\alpha\rangle = \alpha\langle 0|\alpha\rangle, \quad \sqrt{2}\langle 2|\alpha\rangle = \alpha\langle 1|\alpha\rangle = \alpha^2\langle 0|\alpha\rangle \qquad (48)$$

$$\Rightarrow \langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle, \quad |\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad (49)$$

Нормировка:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \cdot e^{|\alpha|^2}, \quad \Rightarrow \quad |\langle 0|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2},$$

Разложение:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad \langle\alpha| = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}\langle n| \qquad (50)$$

Обратное воздействие измерителя (прод.)

Пример: когерентное измерение

$|\alpha\rangle$ — волновая функция когерентного состояния осциллятора

$$\langle x|\alpha\rangle = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x_0} - \sqrt{2}\Re(\alpha)\right]^2 + i\,\frac{\sqrt{2}xx_0\,\Im(\alpha)}{\hbar}\right)}{\sqrt{\sqrt{\pi}x_0}}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

$$\langle\alpha|x|\alpha\rangle = x_0\sqrt{2}\Re(\alpha), \quad \langle\alpha|p|\alpha\rangle = p_0\sqrt{2}\Im(\alpha), \quad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}, \tag{51}$$

Пусть $\hat{\Pi}(\alpha) = \dfrac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\pi}, \quad \displaystyle\int \hat{\Pi}(\alpha)\, d\Re(\alpha)\, d\Im(\alpha) = \hat{1}$ (52)

Пусть состояние с определенной координатой $\hat{\rho} = |x\rangle\langle x|$:

$$P(\alpha) \sim \mathrm{Tr}\ \left(|x\rangle\langle x| \times |\alpha\rangle\langle\alpha|\right) \sim |\langle\alpha|x\rangle|^2 \sim e^{-\left(\sqrt{2}\Re(\alpha)-x\right)^2} \tag{53}$$

Если состояние с определенным импульсом $\hat{\rho} = |p\rangle\langle p|$:

$$P(\alpha) \sim \mathrm{Tr}\ \left(|p\rangle\langle p| \times |\alpha\rangle\langle\alpha|\right) \sim |\langle\alpha|p\rangle|^2 \sim e^{-\left(\sqrt{2}\Im(\alpha)-p\right)^2} \tag{54}$$

Обратное воздействие измерителя (прод.)

Пример: когерентное измерение (прод.)

Измерение — информация как о x, так и p с погрешностями

$$\Delta x = \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{55}$$

Реализация: два осциллятора

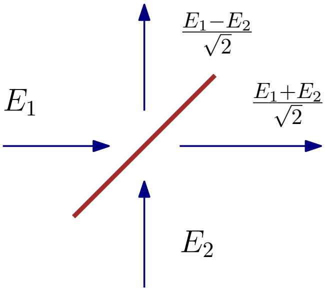
Один (вспомогательный) в состоянии $|0\rangle$. Совместное измерение $\hat{x}_1 + \hat{x}_2$ и $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$. Поскольку

$$[\hat{x}_1 + \hat{x}_2, \hat{p}_1 - \hat{p}_2] = 0, \tag{56}$$

то противоречия с соотношением неопределенности нет.
Например: деление луча на светоделителе с нулем на втором входе и последующее измерение двух квадратур.

Обратное воздействие измерителя (прод.)

Пример: деление луча на светоделителе



$$E_{1,2} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{4\pi S}} e^{-i\omega_0 t} \times \tag{57}$$

$$\times \left(A_{1,2} + \int (a_{1,2}(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \right) + \text{c.c.}$$

$$\left[a_{1,2}(\Omega), a^\dagger_{1,2}(\Omega')\right] = 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega') \tag{58}$$

$$b_\pm(\Omega) = \frac{a_1(\Omega) \pm a_2(\Omega)}{\sqrt{2}}, \tag{59}$$

$$\left[b_+(\Omega), b^\dagger_-(\Omega')\right] = 0 \tag{60}$$

Мы можем независимо измерять поля b_+ и b_- (например, квадратуры на выходе светоделителя) с неограниченной точностью.

Содержание

Косвенные измерения

Квантовое измерение — как описывать?

Постулат о редукции фон Неймана не отвечает, как устроен прибор. Какова связь между измерительным прибором как обычной физической системой, описываемой уравнением Шредингера, и характером реализуемой им редукции? Ведь уравнение Шредингера в принципе не описывает квантовую редукцию.

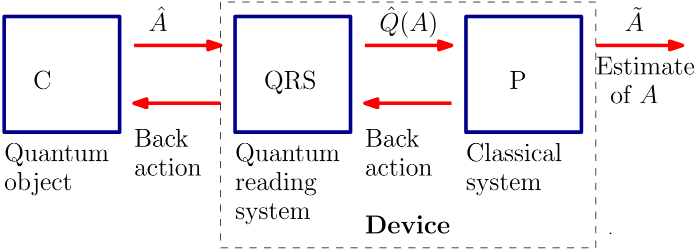


Рис. 2: Схема косвенного измерения. C – квантовый объект, QRS (КСС) – квантовая считывающая система, P – классический наблюдатель, осуществляющий редукцию.

Косвенные измерения

Квантовое измерение как двухэтапный процесс

1. Квантовый объект взаимодействует с квантовой считывающей системой (КСС). Нет редукции.
2. Измерение наблюдаемой квантового измерителя. Есть редукция КСС, а значит, и редукция квантового объекта.

Детали

Зная характер редукции (то есть вид ПОВМ), а также характер "обычной" Шредингеровской совместной эволюции объекта и КСС, всегда можно построить эффективную ПОВМ для составного измерителя "КСС+Р".
Границу между КСС и "классическим наблюдателем" можно проводить произвольно. Удобно проводить ее так, чтобы измерение можно было считать точным, а вид ПОВМ был очевиден.

Пример косвенного измерения

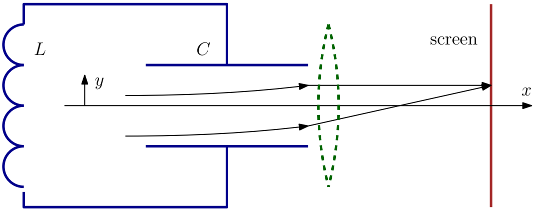


Рис. 3: Схема косвенного измерения с помощью электронного зонда

Электронный зонд

Гамильтониан, короткое измерение:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\Phi}^2}{2L} + \frac{\hat{q}^2}{2C} + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad \mathcal{H}_{\text{int}} = -Ey = -\frac{qy}{Cd} = -k\hat{q}\hat{y}, \tag{61}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \to -k\hat{q}\hat{y} \quad \text{при} \quad \tau \to 0, \quad k \to \infty. \quad k\tau = \text{const} \tag{62}$$

Пример косвенного измерения (прод.)

Электронный зонд, уравнения движения и их решение

$$\frac{d\hat{\Phi}}{dt} = -\frac{\hat{q}}{C} + k\hat{y}, \quad \frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{\hat{\Phi}}{L}, \tag{63}$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = k\hat{q}, \quad \frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{\hat{p}}{m}, \tag{64}$$

$$\hat{\Phi}(\tau) = \hat{\Phi}(0) - \frac{\hat{q}}{C}\,\tau + k\,\tau\,\hat{y}(0) \simeq \hat{\Phi}(0) + k\,\tau\,\hat{y}(0), \quad \hat{q}(\tau) \simeq \hat{q}(0), \tag{65}$$

$$\hat{p}(\tau) \simeq \hat{p}(0) + k\tau\hat{q}(0), \quad \hat{y}(\tau) \simeq \hat{y}(0) \tag{66}$$

Измерительное соотношение неопределенностей

Измерив точно $\hat{p}(\tau)$, можно узнать $\hat{q}(0)$

$$\tilde{q} = \frac{p(\tau)}{k\tau}, \quad \Rightarrow \quad \Delta q_{\mathrm{meas}} = \frac{\Delta p}{k\tau}, \tag{67}$$

Аналогично: $\tilde{\Phi} = k\tau\, y(\tau), \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_{\text{возм}} = k\tau\,\Delta y,$ (68)

Очевидно: $\Delta q_{\mathrm{meas}} \cdot \Delta\Phi_{\text{возм}} = \Delta p \cdot \Delta y \geq \frac{\hbar}{2}$ (69)

ПОВМ для электронного зонда

Представление Шредингера, оператор эволюции

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{ik\tau\,\hat{q}\,\hat{y}}{\hbar}\right), \quad |\psi_e(\tau)\rangle|\psi_{LC}(\tau)\rangle = \hat{U}|\psi_e(0)\rangle|\psi_{LC}(0)\rangle, \qquad (70)$$

$$\text{ПОВМ:} \quad \{|p\rangle\langle p|\} \qquad (71)$$

Конечное состояние: $LC+$ электрон

$$\Psi_{\mathsf{after}}\rangle = \frac{|p\rangle\langle p|\hat{U}|\psi_e(0)\rangle|\psi_{LC}(0)\rangle}{\sqrt{W(p)}}, \qquad (72)$$

$$W(p) = \langle\Psi_{\mathsf{before}}|\hat{U}^\dagger|p\rangle\langle p|\hat{U}|\Psi_{\mathsf{before}}\rangle = \langle\psi_{LC}|\langle\psi_e|\hat{U}^\dagger|p\rangle\langle p|\hat{U}||\psi_e\rangle|\psi_{LC}\rangle \qquad (73)$$

$W(p)$ – распределение вероятностей для импульса p электрона на выходе

ПОВМ для электронного зонда (прод.)

Конечное состояние: $LC+$ электрон

$$\Psi_{\textsf{after}}\rangle = \frac{|p\rangle \otimes \hat{\Omega}(\tilde{q})|\psi_{LC}(0)\rangle}{\sqrt{P(q)}}, \tag{74}$$

$$P(\tilde{q}) = k\tau\, W(p) = \langle\psi_{LC}|\hat{\Pi}(\tilde{q})|\psi_{LC}\rangle, \quad \Pi(\tilde{q}) = \hat{\Omega}^{\dagger}(\tilde{q})\,\hat{\Omega}(\tilde{q}) \tag{75}$$

$P(\tilde{q})$ – распределение вероятностей для результатов измерения $\tilde{q}$,
$\hat{\Pi}(\tilde{q})$ – эффективная ПОВМ для данного косвенного измерения,
$\hat{\Omega}(\tilde{q})$ – соответствующий оператор редукции:

$$\hat{\Omega}(\tilde{q}) = \sqrt{k\tau} \cdot \langle p = k\tau\tilde{q}|\hat{U}|\psi_e\rangle \tag{76}$$

ПОВМ для электронного зонда (прод.)

Вычисляем медленно и печально

$$\langle p|\hat{U}|\psi_e\rangle = \langle p|\exp\left(\frac{ik\tau\,\hat{q}\,\hat{y}}{\hbar}\right)|\psi_e\rangle = \quad \text{вст. 2 разложения единицы}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|\langle p|\exp\left(\frac{ik\tau\,q\,\hat{y}}{\hbar}\right) \int_{-\infty}^{\infty} |p'\rangle\langle p'|\,\psi_e\rangle\,dp'\,dq = \tag{77}$$

$$= \int\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|\langle p|p' + k\tau\,\hat{q}\rangle\,\psi_e(p')\,dp'dq, \tag{78}$$

$$\text{Учтено:} \quad \exp\left(\frac{i\alpha\hat{y}}{\hbar}\right)|p\rangle = |p+\alpha\rangle, \tag{79}$$

$$\langle p|\hat{U}|\psi_e\rangle = \int\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|\langle p|p' + k\tau\,q\rangle\,\psi_e(p')\,dp'\,dq = \tag{80}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|\,\psi_e(p - k\tau\,q)\,dq, \tag{81}$$

$$\Rightarrow \tilde{q} = \frac{p}{k\tau}, \quad \hat{\Omega}(\tilde{q}) = \sqrt{k\tau}\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|\,\psi_e\left(k\tau(\tilde{q}-q)\right)\,dq \tag{82}$$

ПОВМ для электронного зонда (прод.)

Проверка полноты

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Omega}(\tilde{q})\,\Omega^{\dagger}(\tilde{q})\,d\tilde{q} = k\tau \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg[\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|\,\psi_e\left(k\tau(\tilde{q}-q)\right)\;dq \,\times & \qquad (83)\\
\times \int_{-\infty}^{\infty} |q'\rangle\langle q'|\,\psi_e^{*}\left(k\tau(\tilde{q}-q')\right)\;dq' \Bigg] d\tilde{q} = & \qquad (84)\\
= k\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|\;\left|\psi_e\left(k\tau(\tilde{q}-q)\right)\right|^2\;dq \right] d\tilde{q} = & \\
= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|\;\left|\psi_e\left(p-k\tau q\right)\right|^2\;dq \right] dp = & \qquad (85)\\
= \int_{-\infty}^{\infty} |q\rangle\langle q|\,dq = \hat{1} & \qquad (86)
\end{aligned}$$

Содержание

Последовательность измерений координаты

Свободная масса M, координата x

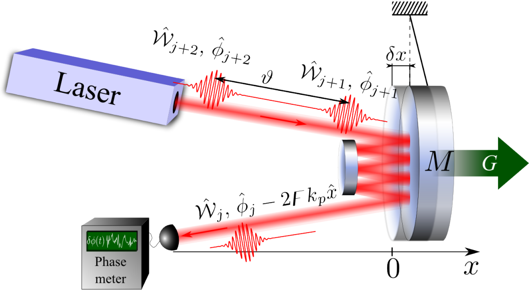


Рис. 4: Упрощенный пример оптического измерения координаты массы.

G – сигнальная сила. Последовательность коротких св. импульсов, разнесенных на время ϑ. Каждый имп. отражается $\mathcal{F} > 1$ раз. Пренебрегаем смещением из-за светового давления во время действия оптического импульса.

Последовательность измерений координаты (прод.)

Фазочувствительный детектор, измерение x

Фаза каждого импульса после отражения:

$$\hat{\phi}_j^{\mathrm{refl}} = \hat{\phi}_j - 2\digamma k_p \hat{x}(t_j)\,, \quad \text{полагаем} \quad \overline{\hat{\phi}_j} = 0$$

Точность измерения фазы выше, чем начальная $\Delta\phi \equiv (\overline{\hat{\phi}_j^2} - \overline{\hat{\phi}_j}^2)^{1/2}$:

$$\Delta x_{\mathrm{meas}} = \frac{\Delta\phi}{2\digamma k_p}\,, \quad \tilde{x}_j \equiv -\frac{\hat{\phi}_j^{\mathrm{refl}}}{2\digamma k_p} = \hat{x}(t_j) + \hat{x}_{\mathrm{fl}}(t_j), \quad \hat{x}_{\mathrm{fl}}(t_j) = -\frac{\hat{\phi}_j}{2\digamma k_p}$$

Обратное флукуационное влияние

Световой импульс передает пробной массе случайный импульс

$$\hat{p}_j^{\mathrm{after}} - \hat{p}_j^{\mathrm{before}} = \hat{p}_j^{\mathrm{b.a.}} = \frac{2\digamma}{c}\hat{\mathcal{W}}_j\,, \quad \overline{\hat{p}_j^{\mathrm{b.a.}}} = \frac{2\digamma}{c}\mathcal{W}, \tag{87}$$

$$\Delta\hat{p}^{\mathrm{b.a.}}(t_j) = \frac{2\digamma}{c}\bigl(\hat{\mathcal{W}}_j - \mathcal{W}\bigr)\,, \quad \Delta p_{\mathrm{b.a.}} = \frac{2\digamma\Delta\mathcal{W}}{c} \tag{88}$$

$\Delta\mathcal{W}$ — среднеквадратичная неопределенность энергии св. импульса.

Соотношения неопределенностей

Связь неопределенностей

$$\Delta\mathcal{W}\cdot\Delta\phi \ge \frac{\hbar\omega_p}{2}\,, \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{\rm meas}\cdot\Delta p_{\rm b.a.} \ge \frac{\hbar}{2}\,. \tag{89}$$

Свет в когерентном состоянии

$$\Delta\phi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar\omega_p}{\mathcal{W}}}\,, \quad \Delta\mathcal{W} = \sqrt{\hbar\omega_p\mathcal{W}}\,, \quad \Rightarrow \tag{90}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x_{\rm meas} = \frac{c}{4F}\sqrt{\frac{\hbar}{\omega_p\mathcal{W}}}\,, \quad \Delta p_{\rm b.a.} = \frac{2F}{c}\sqrt{\hbar\omega_p\mathcal{W}}\,. \tag{91}$$

От дискретного к непрерывному измерению

Один свет. импульс слабо возмущает импульс p массы и не дает дост. информации о координате x. Выберем полное время T:

$$N = \frac{T}{\vartheta} \gg 1\,, \quad \Rightarrow \quad \Delta x_T = \frac{\Delta x_{\rm meas}}{\sqrt{N}} = \Delta x_{\rm meas}\sqrt{\frac{\vartheta}{T}}, \tag{92}$$

$$\Delta p_T = \Delta p_{\rm b.a.}\sqrt{N} = \Delta p_{\rm b.a.}\sqrt{\frac{T}{\vartheta}}\,. \tag{93}$$

Пусть:

$$\vartheta \to 0, \quad \Delta x_{\rm meas} \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p_{\rm b.a.} \to 0\,. \tag{94}$$

$$S_x = \lim_{\vartheta\to 0}(\Delta x_{\rm meas})^2\vartheta = \frac{S_\phi}{4\digamma^2 k_p^2}\,, \quad S_F = \lim_{\vartheta\to 0}\frac{(\Delta p_{\rm b.a.})^2}{\vartheta} = \frac{4\digamma^2 S_{\mathcal I}}{c^2}\,,$$

$$\text{где } S_\phi = \lim_{\vartheta\to 0}(\Delta\phi)^2\vartheta\,, \quad S_{\mathcal I} = \lim_{\vartheta\to 0}\frac{(\Delta\mathcal W)^2}{\vartheta}\,. \tag{95}$$

$$\text{Тогда} \quad \Delta x_T = \sqrt{\frac{S_x}{T}}\,, \quad \Delta p_T = \sqrt{S_F T} \tag{96}$$

Физический смысл S_x и S_F

Что есть S_x

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) + \hat{x}_{\rm fl}(t)\,, \quad \hat{x}_{\rm fl}(t) = -\frac{\hat{\phi}(t)}{2\digamma\, k_p} \qquad (97)$$

$x_{\rm fl}$ – *измерительный шум* $\sim \hat{\phi}(t)$. S_x — спектральная плотность этого шума, а S_ϕ — спектральная плотность флуктуаций фазы света $\hat{\phi}(t)$.

Что есть S_F

$$\frac{d\hat{p}(t)}{dt} = \hat{F}_{\rm fl}(t) + F_s, \qquad (98)$$

где F_s —сигнальная сила, $\hat{F}_{\rm fl}(t)$ — случайная сила (белый шум):

$$\hat{F}_{\rm fl}(t_j) = \lim_{\vartheta\to 0}\frac{\Delta\hat{p}^{\rm b.a.}(t_j)}{\vartheta} = \frac{2\digamma}{c}\lim_{\vartheta\to 0}\frac{\hat{\mathcal{W}}_j - \mathcal{W}}{\vartheta} = \frac{2\digamma}{c}[\hat{\mathcal{I}}(t_j) - \mathcal{I}_0]\,, \qquad (99)$$

где $\hat{\mathcal{I}}(t)$ — оптическая мощность, $\mathcal{I}_0$ — ее среднее значениее.
S_F — спектральная плотность флуктуаций силы $\hat{F}_{\rm b.a.}$,
а $S_{\mathcal{I}}$ — спектральная плотность оптической мощности $\hat{\mathcal{I}}$.

Модель непрерывного измерения

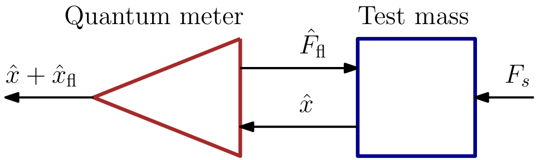


Рис. 5: Экв. схема линейного измерителя квантовой пробной массы

В простейшей модели S_x и S_F не коррелируют и удовлетворяют соотношению неопределенности

$$S_x S_F = \frac{S_\phi S_\mathcal{I}}{\omega_p^2} \ge \frac{\hbar^2}{4}\,. \quad \text{2-сторон. спектр. плотности!} \qquad (100)$$

Если зондирующий свет в когерентном квантовом состоянии:

$$S_\phi = \frac{\hbar\omega_p}{4\mathcal{I}_0}\,, \quad S_\mathcal{I} = \hbar\omega_p\mathcal{I}_0\,, \ \Rightarrow \ S_x = \frac{\hbar c^2}{16\omega_p\mathcal{I}_0 F^2}\,, \quad S_F = \frac{4\hbar\omega_p\mathcal{I}_0 F^2}{c^2}\,.$$

Спектральная плотность мощности (СПМ, PSD)

Стационарные шумы. Двусторонее определение СПМ

Теорема Винера-Хинчина:

$$S_x(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{x}_{\mathsf{fl}}(t) \circ \hat{x}_{\mathsf{fl}}(t+\tau) \rangle \; e^{i\Omega\tau} \, d\tau, \tag{102}$$

$$S_F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \hat{F}_{\mathsf{fl}}(t) \circ \hat{F}_{\mathsf{fl}}(t+\tau) \right\rangle \; e^{i\Omega\tau} \, d\tau, \tag{103}$$

$$S_{xF}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \hat{x}_{\mathsf{fl}}(t) \circ \hat{F}_{\mathsf{fl}}(t+\tau) \right\rangle \; e^{i\Omega\tau} \, d\tau \, . \tag{104}$$

Симметризованное среднее (определение)

$$\langle \hat{x}_{\mathsf{fl}}(t) \circ \hat{x}_{\mathsf{fl}}(t+\tau) \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{x}_{\mathsf{fl}}(t)\hat{x}_{\mathsf{fl}}(t+\tau) + \hat{x}_{\mathsf{fl}}(t+\tau)\hat{x}_{\mathsf{fl}}(t) \rangle \tag{105}$$

Линейная квантовая система

Шумы $\hat{x}_{\text{fl}}$ и $\hat{F}_{\text{fl}}$ – следствие квантовой физики:

$$[\hat{x}(t), \hat{x}(t')] \neq 0\,, \quad \text{существование } \hat{F}_{\text{fl}}(t) \tag{106}$$

Для стационарных шумов

$$S_x(\Omega)S_F(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}\,, \quad \text{2-сторон. спектр. плотности!} \tag{107}$$

Имеем на выходе

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) + \hat{x}_{\text{fl}}(t), \quad \mathbf{D}[\hat{x}(t)] = F_{\mathsf{s}}(t) + \hat{F}_{\text{fl}}(t)\,, \tag{108}$$

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}_0(t) + \mathbf{D}^{-1}[F_{\mathsf{s}}(t) + \hat{F}_{\text{fl}}(t)] + \hat{x}_{\text{fl}}(t) \tag{109}$$

$x_0(t)$ — собственное движение пробного объекта, $\mathbf{D} = -md^2/dt^2$ для св. массы и $\mathbf{D} = m(-d^2/dt^2 + \Omega_0^2)$ для гармонического осциллятора.

Линейная квантовая система (прод.)

Свободная масса

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}_0(t) + \mathbf{D}^{-1}[F_{\mathsf{s}}(t) + \hat{F}_{\text{fl}}(t)] + \hat{x}_{\text{fl}}(t)\,, \tag{110}$$

$$\hat{x}_0(t) = x\hat{(0)} + \frac{p\hat{(0)}t}{m}\,, \quad \mathbf{D}^{-1}[F(t)] = \frac{1}{m}\int_0^{\infty}(t-t')F(t')\,dt'\,, \tag{111}$$

Собираем

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}_0(t) + \mathbf{D}^{-1}\Big[F_{\mathsf{s}}(t) + \hat{F}_{\text{fl}}(t) + \mathbf{D}\left[\hat{x}_{\text{fl}}(t)\right]\Big] \tag{112}$$

$\hat{x}(0),\ \hat{p}(0)$ — “начальные условия”. Подействуем оператором $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D}[\tilde{x}(t)] = \mathrm{D}[\hat{x}_0(t)] + \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\Big[F_{\mathsf{s}}(t) + \hat{F}_{\text{fl}}(t) + \mathbf{D}\left[\hat{x}_{\text{fl}}(t)\right]\Big] = \tag{113}$$

$$= F_{\mathsf{s}}(t) + \hat{F}_{\text{sum}}(t), \quad \hat{F}_{\text{sum}}(t) = \hat{F}_{\text{fl}}(t) + \mathbf{D}\left[\hat{x}_{\text{fl}}(t)\right] \tag{114}$$

в лин. кв. системах начальное состояние не имеет значения.
Единственный источник кв. ограничений – измеритель.

Линейная квантовая система (прод.)

Свободная масса: спектральное представление

$$\hat{F}_{\rm sum}(\Omega) = \hat{F}_{\rm fl}(\Omega) + \chi^{-1}(\Omega)\,\hat{x}_{\rm fl}(\Omega), \quad \chi_{\text{св. масса}} = \frac{-1}{m\Omega^2} \tag{115}$$

Двусторонняя спектральная плотность

$$S_{\rm sum}(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_x(\Omega) + 2\Re\big[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega)\big] + S_F(\Omega) \tag{116}$$

СКП. Двусторонние спектр. плотности (!)

Пусть $S_{xF} = 0$.Тогда

$$S_{\rm sum}(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_x(\Omega) + S_F(\Omega) \geq |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_x(\Omega) + \frac{\hbar^2}{4S_x(\Omega)}, \tag{117}$$

$$S_{SQL} = \frac{\hbar}{\big|\chi(\Omega)\big|}, \quad \text{optimum at:} \quad \frac{S_F(\Omega)}{S_x(\Omega)} = \frac{1}{\big|\chi(\Omega)\big|^2} \tag{118}$$

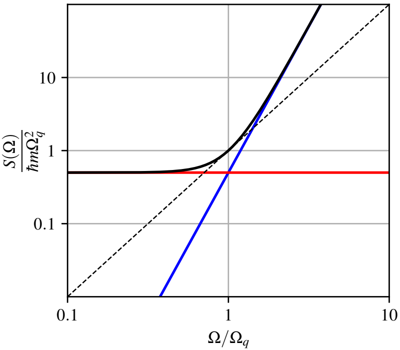
Линейная квантовая система (прод.)

Стандартный квантовый предел: свободная масса

Пусть $\langle S_x\, S_F\rangle = 0$ и пусть они частотно независимы

$$\chi(\Omega) = \frac{-1}{m\Omega^2}, \quad \text{пусть} \quad S_F = \frac{\hbar m \Omega_q^2}{2}, \quad S_x = \frac{\hbar}{2m\Omega_q^2} \tag{119}$$

$$S_{\rm sum}(\Omega) = m^2\Omega^4 S_x + S_F = \frac{\hbar m\Omega^2}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\Omega_q^2} + \frac{\Omega_q^2}{\Omega^2}\right) \ge S_{SQL}^F = \hbar m \Omega^2.$$



$$\Omega_q^2 = \sqrt{\frac{S_F}{m^2 S_x}} = \frac{8\omega_p \mathcal{I}_0 F^2}{mc^2}$$

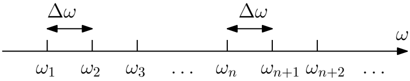
Спектральные плотности измерительного шума $m^2\Omega^4 S_x$ (синяя линия), шума обратного влияния S_F (красная линия) и суммарного квантового шума $S_{\rm sum}$ (черная линия). Пунктир — СКП.

Содержание

Напоминание: полевые осцилляторы

Поле в конечной длинной линии со стороной L

частота n–ного осциллятора $\omega_n = n\,\Delta\omega$, $\Delta\omega = L/c$



$\Delta\omega \to 0$ при $L \to \infty$.

Пример: электро-магнитное поле в нулевом состоянии

$$|\psi\rangle_{\mathsf{vac}} = |0_1\rangle|0_2\rangle\ldots|0_n\rangle|0_{n+1}\rangle\ldots \tag{120}$$

Оператор электрического поля

$$\hat{E} = B\sum_n c_n\left(\hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger\right), \quad [\hat{a}_n,\,\hat{a}_{n'}] = 0, \quad \left[\hat{a}_n,\,\hat{a}_{n'}^\dagger\right] = \delta_{nn'}, \tag{121}$$

B – нормировочная постоянная, коэффициенты c_n описывают распределение поля. Аналогия с разложением Фурье.

Напоминание: когерентная накачка

Световой пучок, площадь S, представление Гейзенберга

Электрическое поле в сечении в пределе $L \to \infty$:

$$E(t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{Sc}} \left(a_\omega e^{-i\omega t} + a_\omega^\dagger e^{i\omega t}\right) \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{122}$$

$$[a_\omega, a_{\omega'}] = 0, \quad \left[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger\right] = 2\pi\,\delta(\omega - \omega') \tag{123}$$

Представляем как сумму большого среднего поля на несущей ω_0 и флуктуационного поля

$$E(t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{Sc}} \left\{ e^{-i\omega_0 t} \left(A + \int_{-\omega_0}^\infty \left[a_+ e^{-i\Omega t} + a_- e^{i\Omega t}\right] \frac{d\Omega}{2\pi} \right) \right. \tag{124}$$

$$\left. + e^{i\omega_0 t} \left(A^* + \int_{-\omega_0}^\infty \left[a_+^\dagger e^{i\Omega t} + a_-^\dagger e^{-i\Omega t}\right] \frac{d\Omega}{2\pi} \right) \right\}, \tag{125}$$

$$a_+ = a(\omega_0 + \Omega), \quad a_- = a(\omega_0 - \Omega), \quad I_0 = \frac{\overline{|E|^2} Sc}{4\pi} = \hbar\omega_0 |A|^2$$

Напоминание: когерентная накачка

Детали

См. детали в конспекте
Ф,Я.Халили, “Квантовые колебательные системы”, 2008,
гл. 3 “Квантовые распределенные системы”
http://osc.phys.msu.ru/
  ⇒ Спецкурсы
    ⇒ 4 КУРС VIII семестр (весна)

Напоминание: когерентная накачка (прод.)

Квадратуры

Считаем среднюю амплитуду действительной: $A = A^*$

$$a_a = \frac{a_+ + a_-^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad a_\phi = \frac{a_+ - a_-^\dagger}{i\sqrt{2}}, \tag{126}$$

$$\left[a_a,\, a_{\phi'}^\dagger\right] = -\left[a_\phi,\, a_{a'}^\dagger\right] = i\,2\pi\,\delta(\Omega - \Omega'), \tag{127}$$

$$[a_a,\, a_{a'}] = \left[a_a,\, a_{a'}^\dagger\right] = [a_\phi,\, a_{\phi'}] = \left[a_\phi,\, a_{\phi'}^\dagger\right] = 0\,. \tag{128}$$

Представляем как сумму большого среднего поля на несущей ω_0 и флуктуационного (в нижнем пределе инт. $-\omega_0 \simeq -\infty$)

$$E(t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{Sc}}\left\{\left(e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}\right)\left(A + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_a e^{-i\Omega t} + a_a^\dagger e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}\,\frac{d\Omega}{2\pi}\right)\right.$$
$$\left. + \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_\phi e^{-i\Omega t} + a_\phi^\dagger e^{i\Omega t}}{i\sqrt{2}}\,\frac{d\Omega}{2\pi}\right\}. \tag{129}$$

Напоминание: когерентная накачка (прод.)

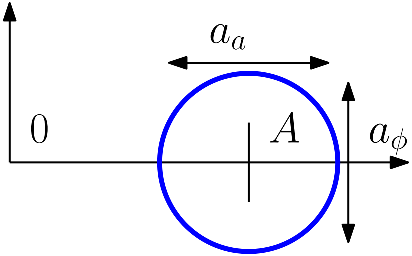
Средние в когерентном состоянии

$$\langle a_\omega a^\dagger_{\omega'}\rangle = 2\pi\,\delta(\omega-\omega'), \quad \langle a^\dagger_\omega a_{\omega'}\rangle = 0, \tag{130a}$$

$$\langle a_+ a^\dagger_{+'}\rangle = \langle a_- a^\dagger_{-'}\rangle = 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega'), \quad \langle a^\dagger_\pm a_{\pm'}\rangle = 0, \tag{130b}$$

$$\langle a_a a^\dagger_{a'}\rangle = \left\langle \frac{(a_+ + a^\dagger_-)(a^\dagger_{+'} + a_{-'})}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\,2\pi\delta(\Omega-\Omega'), \tag{130c}$$

$$\langle a_a \circ a^\dagger_{a'}\rangle = \frac{1}{2}\,2\pi\delta(\Omega-\Omega'), \quad \langle a_\phi \circ a^\dagger_{\phi'}\rangle = \frac{1}{2}\,2\pi\delta(\Omega-\Omega') \tag{130d}$$



$$\langle a_a \circ a^\dagger_{\phi'}\rangle = 0 \tag{131}$$

$$\langle a_\phi \circ a^\dagger_{a'}\rangle = 0 \tag{132}$$

Задача 6.

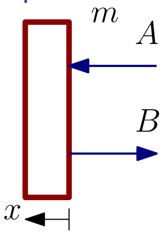
Напоминание: когерентная накачка (прод.)

Спектральные плотности

Односторонняя спектральная плотность в 2 раза больше.

Двусторон.
$$\frac{1}{2}\,2\pi\delta(\Omega-\Omega')\,S_a(\Omega) = \langle a_a \circ a^\dagger_{a'}\rangle,\ \Rightarrow\ S_a(\Omega)=\frac{1}{2}, \tag{133}$$
$$\frac{1}{2}\,2\pi\delta(\Omega-\Omega')\,S_\phi(\Omega) = \langle a_\phi \circ a^\dagger_{\phi'}\rangle,\ \Rightarrow\ S_\phi(\Omega)=\frac{1}{2} \tag{134}$$

Простейший оптический датчик. Спектральное предст.



Простейший датчик с непрерывной накачкой

$$b(\Omega) = a(\Omega) + A\,2ikx(\Omega), \quad A = A^* \tag{135a}$$
$$b_a(\Omega) = a_a(\Omega), \tag{135b}$$
$$b_\phi(\Omega) = a_\phi(\Omega) + A\,2\sqrt{2}kx(\Omega), \tag{135c}$$
$$-m\Omega^2 x = 2\hbar k\left[(A+a_+)(A+a_-^\dagger) - A^2\right] + F_s =$$
$$= 2\sqrt{2}\hbar k A a_a + F_s \tag{135d}$$

Простейший оптический датчик (прод.)

Исходные уравнения

Собираем

$$b_a(\Omega) = a_a(\Omega), \tag{136a}$$

$$b_\phi(\Omega) = a_\phi(\Omega) + \frac{8\hbar k^2 A^2}{-m\Omega^2} a_a + 2\sqrt{2} k A \frac{F_s}{-m\Omega^2} = \tag{136b}$$

$$= a_\phi(\Omega) - \mathcal{K} a_a - \sqrt{2\mathcal{K}}\, f_s, \tag{136c}$$

$$\boxed{\mathcal{K} = \frac{8\hbar k^2 A^2}{m\Omega^2}, \quad f_s = \frac{F_s}{\sqrt{2\hbar m\Omega^2}}} \tag{136d}$$

СКП для координаты и силы, S^O – односторонние

$$S_{x,SQL} = \frac{\hbar}{m\Omega^2}, \quad S_{F,SQL} = S_{x,SQL} \cdot (m\Omega^2)^2 = \hbar m\Omega^2, \tag{137}$$

$$S^O_{x,SQL} = \frac{2\hbar}{m\Omega^2}, \quad S^O_{F,SQL} = 2\hbar m\Omega^2 \tag{138}$$

Простейший оптическимй датчик: когерентная накачка

Спектральная плотность, пересчитанная к СКП силы

$$(136c): b_\phi = \sqrt{2\mathcal{K}}\left(\frac{a_\phi(\Omega)}{\sqrt{2\mathcal{K}}} - a_a(\Omega)\sqrt{\frac{\mathcal{K}}{2}} - f_s(\Omega)\right) \qquad (139)$$

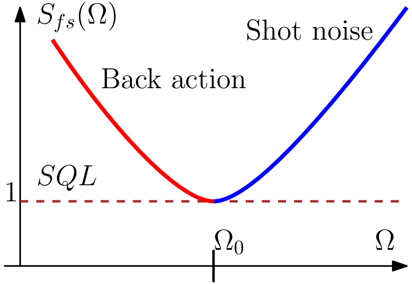
Односторонняя сп. плотность S_{fs} (персчитана к f_s)

$$S_{fs}(\Omega) = \frac{1}{2\mathcal{K}} + \frac{\mathcal{K}}{2} \qquad (140)$$

$$S_{fs}^{\mathrm{min}}(\Omega_0) = 1, \ \Rightarrow \ \mathcal{K} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$$

$$S_{fs}(\Omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} + \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\right) \qquad (141)$$

Ошибка измерения и обратное флукт. влияние (ОФВ)

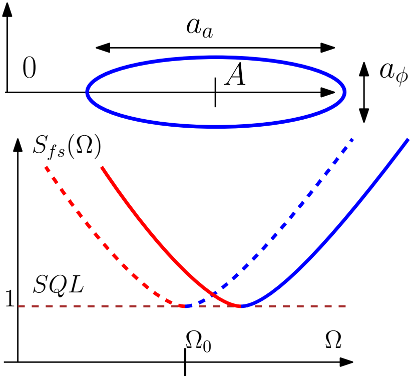


См. (120). Задача 7.

Содержание

Сжатие по фазе (измерение фазовой квадратуры)

“Флуктуационный эллипс”, a_a и a_ϕ НЕ коррелируют



Односторонние сп. плотности

$$S_a(\Omega) = e^r, \tag{142}$$

$$S_\phi(\Omega) = e^{-r}, \quad r > 0, \tag{143}$$

$$S_{fs}(\Omega) = \frac{S_\phi}{2\mathcal{K}} + \frac{S_a \mathcal{K}}{2} = \tag{144}$$

$$= \frac{e^{-r}}{2\mathcal{K}} + \frac{e^r \mathcal{K}}{2}, \tag{145}$$

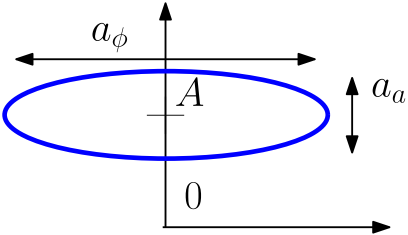
Пусть $\mathcal{K} = \dfrac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$

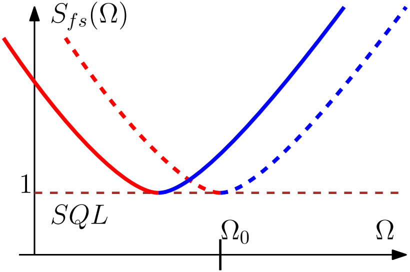
$$S_{fs} = \frac{e^{-r}\Omega^2}{2\Omega_0^2} + \frac{e^r \Omega_0^2}{2\Omega^2} \tag{146}$$

Сжатие фазе не позволяет преодолеть СКП.
Сжатие по фазе уменьшает ошибку измерения на высоких частотах.
Сжатие по фазе увеличивает ОФВ на низких частотах.

Сжатие по амплитуде (измерение фазовой квадратуры)

"Флуктуационный эллипс", a_a и a_ϕ НЕ коррелируют





Односторонние сп. плотности

$$S_a(\Omega) = e^{-r}, \tag{147}$$

$$S_\phi(\Omega) = e^{r}, \quad r > 0, \tag{148}$$

$$S_{fs}(\Omega) = \frac{S_\phi}{2\mathcal{K}} + \frac{S_a\mathcal{K}}{2} = \tag{149}$$

$$= \frac{e^r}{2\mathcal{K}} + \frac{e^{-r}\mathcal{K}}{2}, \tag{150}$$

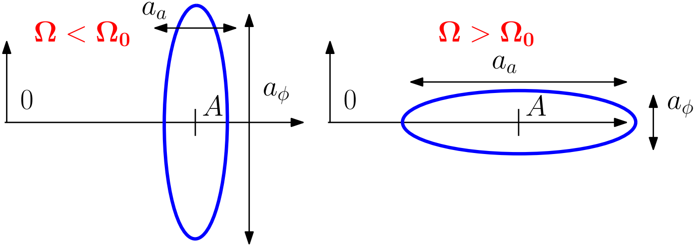
Пусть $\quad \mathcal{K} = \dfrac{\Omega_0^2}{\Omega^2}$

$$S_{fs} = \frac{e^r\Omega^2}{2\Omega_0^2} + \frac{e^{-r}\Omega_0^2}{2\Omega^2} \tag{151}$$

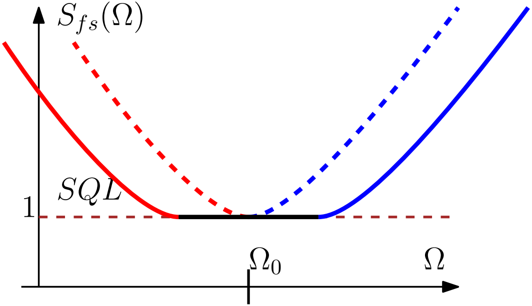
Сжатие по амплитуде не позволяет преодолеть СКП.
Сжатие по амп. увеличивает ошибку изм. на высоких частотах.
Сжатие по амплитуде уменьшает ОФВ на низких частотах.

Частотно-зависимое сжатие

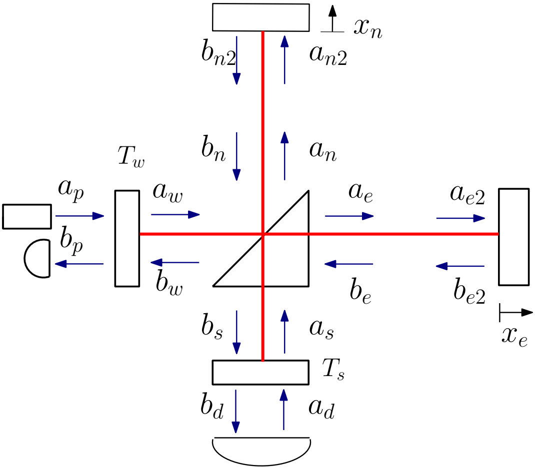
Разное сжатие на низких и высоких частотах



Тогда есть выигрыш и на низких, и на высоких частотах:



Частотно-зависимое сжатие в LIGO



Накачка создает средние поля, а флуктуации – из темного порта (a_d). Первоначально было a_d — нулевые вакуумные флуктуации, сейчас a_d – сжатый свет с частотной зависимостью. Сжатие на уровне 3. . . 4 dB.

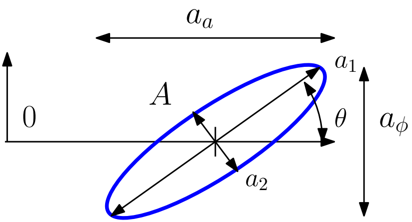
Произвольное сжатие: измерение фазовой квадратуры

Преобразования Боголюбова

a_v – вакуум.

$$a = a_v \cosh r + e^{i\phi} a_{v-}^\dagger \sinh r, \quad a_-^\dagger = a_{v-}^\dagger \cosh r + a_v e^{-i\phi} \sinh r, \quad (152)$$

$$a_1 = \frac{a + a_-^\dagger}{\sqrt{2}} = e^r\, a_{v1}, \quad a_2 = \frac{a - a_-^\dagger}{i\sqrt{2}} = e^{-r}\, a_{v2}, \quad \text{Здесь } \phi = 0$$



Квадратуры a_1, a_2 не коррелируют:

$$\langle a_1(\Omega)\, a_2^\dagger(\Omega') \rangle = 0, \quad (153)$$

$$a_a = a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta, \quad (154)$$

$$a_\phi = a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta \quad (155)$$

$$\langle a_1(\Omega)\, a_1^\dagger(\Omega') \rangle = \langle a_1^\dagger(\Omega)\, a_1(\Omega') = e^{2r} \frac{2\pi}{2}\, \delta(\Omega - \Omega'), \quad (156)$$

$$\langle a_2(\Omega)\, a_2^\dagger(\Omega') \rangle = \langle a_2^\dagger(\Omega)\, a_2(\Omega') = e^{-2r}\, \pi\, \delta(\Omega - \Omega') \quad (157)$$

Произвольное сжатие: изм. фазовой квадратуры (прод.)

Вычисляем

$$\begin{aligned}
\langle a_a(\Omega)\, a_a^\dagger(\Omega')\rangle &= \langle a_1(\Omega)\, a_1^\dagger(\Omega')\rangle \cos^2\theta + \langle a_2(\Omega)\, a_2^\dagger(\Omega')\rangle \sin^2\theta = &(158)\\
&= \left(e^{2r}\cos^2\theta + e^{-2r}\sin^2\theta\right)\pi\,\delta(\Omega-\Omega'), &(159)\\
\langle a_\phi(\Omega)\, a_\phi^\dagger(\Omega')\rangle &= \left(e^{2r}\sin^2\theta + e^{-2r}\cos^2\theta\right)\pi\,\delta(\Omega-\Omega'), &(160)\\
\langle a_a(\Omega)\, a_\phi^\dagger(\Omega')\rangle &= \langle a_\phi(\Omega)\, a_a^\dagger(\Omega')\rangle = &(161)\\
&= \left(e^{2r} - e^{-2r}\right)\sin\theta\cos\theta\,\pi\,\delta(\Omega-\Omega') &(162)
\end{aligned}$$

Есть корреляция между a_a и a_ϕ (!)

Подставляем (154 и 155) в (136c)

$$f_s \ge \frac{a_1\sin\theta + a_2\cos\theta}{\sqrt{2\mathcal{K}}} - (a_1\cos\theta - a_2\sin\theta)\sqrt{\frac{\mathcal{K}}{2}} \qquad (163)$$

Произвольное сжатие: изм. фазовой квадратуры (прод.)

Вычисляем спектральную плотность S_{fs}

Учитываем независимость a_1 и a_2 (158)

$$S_{fs} = e^{2r}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{2\mathcal{K}}} - \cos\theta\sqrt{\frac{K}{2}}\right)^2 + e^{-2r}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2\mathcal{K}}} + \sin\theta\sqrt{\frac{K}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2r}\sin^2\theta + e^{-2r}\cos^2\theta}{2K} + \left(e^{2r}\cos^2\theta + e^{-2r}\sin^2\theta\right)\frac{K}{2} + \tag{164a}$$

$$- \left(e^{2r} - e^{-2r}\right)\sin\theta\cos\theta = \tag{164b}$$

$$\underbrace{=}_{\theta=\pi/4} \frac{e^{2r} + e^{-2r}}{4K} + \left(e^{2r} + e^{-2r}\right)\frac{K}{4} - \frac{1}{2}\left(e^{2r} - e^{-2r}\right) \geq \tag{164c}$$

$$\geq \frac{e^{2r} + e^{-2r}}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{2r} - e^{-2r}\right) = e^{-2r} < 1 \tag{164d}$$

Это значит, что можно преодолеть СКП при измерении *фазовой* квадратуры, используя сжатый свет (!)

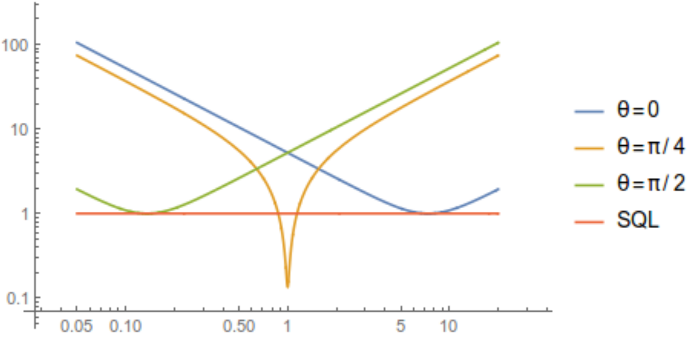
Произвольное сжатие: изм. фазовой квадратуры (прод.)

Графики

Положим $K = \Omega_0^2/\Omega^2$. В случае $\theta = 0,\ \pi/2$:

$$S_{fs}^{\theta=0} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2r}\Omega^2}{\Omega_0^2} + \frac{e^{2r}\Omega_0^2}{\Omega^2}\right), \tag{165}$$

$$S_{fs}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2r}\Omega^2}{\Omega_0^2} + \frac{e^{-2r}\Omega_0^2}{\Omega^2}\right) \tag{166}$$

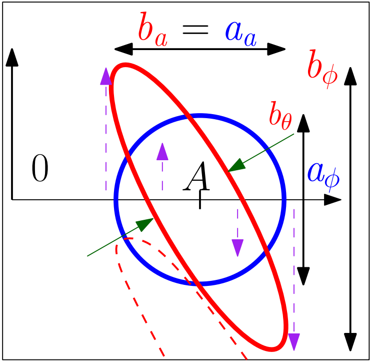


Задача 8.

Содержание

Вариационное измерение

Простейший оптический датчик. Спектральное предст.



$$b_a(\Omega) = a_a(\Omega), \qquad (167)$$

$$b_\phi(\Omega) = a_\phi(\Omega) - \mathcal{K}a_a - \qquad (168)$$

$$- \sqrt{2\mathcal{K}}\, f_s,$$

$$\boxed{\mathcal{K} = \frac{8\hbar k^2 A^2}{m\Omega^2}, \quad f_s = \frac{F_s}{\sqrt{2\hbar m\Omega^2}}}$$

Пондеромоторное сжатие

Балансный гомодинный детектор измеряет квадратуру:

$$b_\theta = b_a \cos\theta + b_\phi \sin\theta = \qquad (169)$$

$$= \mathbf{a_a}\,(\cos\theta - \mathcal{K}\sin\theta) + a_\phi \sin\theta - \sqrt{2\mathcal{K}}\, f_s \sin\theta \qquad (170)$$

Вариационное измерение (прод.)

Выбираем гомодинный угол на заданной частоте Ω_0

$$\operatorname{ctg}\theta = \mathcal{K}(\Omega_0), \ \Rightarrow \ b_\theta = \sin\theta\left\{\mathbf{a_a}\left(\mathcal{K}(\boldsymbol{\Omega_0}) - \mathcal{K}\right) + a_\phi - \sqrt{2\mathcal{K}}\, f_s\right\}$$

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \dfrac{\Omega_0^2}{\Omega^2}, \ \Rightarrow$ (171)

$$b_\theta = \sin\theta\left\{\mathbf{a_a}\mathcal{K}_\mathbf{0}\left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{\Omega_0^2}}{\boldsymbol{\Omega^2}}\right) + a_\phi - \sqrt{2\mathcal{K}_0\frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}}\cdot f_s\right\}, \tag{172}$$

Спектральная плотность (пересчитанная к СКП силы):

$$S_{fs}(\Omega) = \frac{\mathcal{K}_0\Omega^2}{2\Omega_0^2}\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{2\mathcal{K}_0\Omega_0^2}, \tag{173}$$

$$S_{fs}(\Omega_0) = \frac{1}{2\mathcal{K}_0}, \quad \text{СКП может быть преодолен!} \tag{174}$$

В (173) падающая волна — в когерентном состоянии.

Вариационное измерение (прод.)

Когерентная накачка. Графики

$$S_{fs}(\Omega) = \frac{\mathcal{K}_0\Omega^2}{2\Omega_0^2}\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{2\mathcal{K}_0\Omega_0^2}, \quad \text{(Задача 9)} \qquad (175)$$

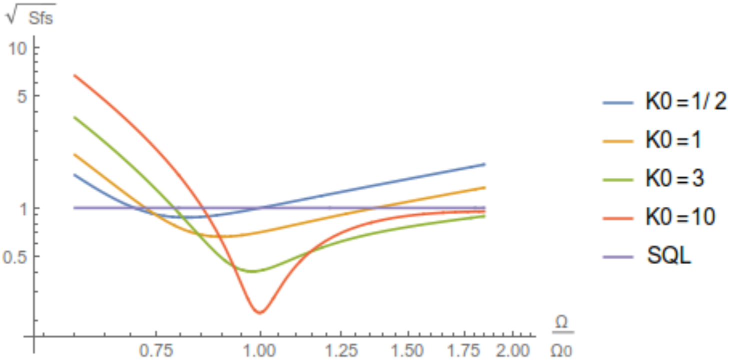
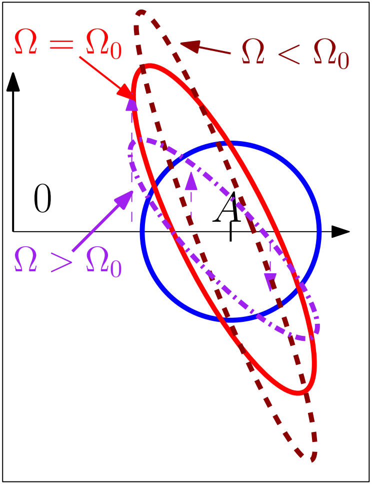


Рис. 6: Графики чувствительности $\sqrt{S_{fs}(\Omega)}$ для вариационного измерения

Вариационное измерение (прод.)

Спектрально-зависимое сжатие выходного света



Задача 10.

$$b_\theta = \sin\theta\,\{\mathbf{a_a}\,(\mathrm{ctg}\,\theta - \mathcal{K}) + \\ + a_\phi - \sqrt{2\mathcal{K}} f_s\} \quad (176)$$

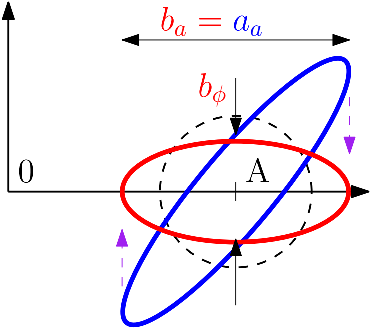
Наблюдение сжатия на выбранной частоте Ω_0 требует определенного выбора угла θ:

$$\mathrm{ctg}\,\theta = \mathcal{K}(\Omega_0) \quad (177)$$

На частотах $\Omega > \Omega_0$ сжатие меньше, т.к. $\mathcal{K}(\Omega) < \mathcal{K}(\Omega_0)$. На частотах $\Omega < \Omega_0$ сжатие больше, т.к. $\mathcal{K}(\Omega) > \mathcal{K}(\Omega_0)$

Вариационное измерение: сжатый входной свет

Измерение фазовой квадратуры



$$\mathbf{b_a} = \mathbf{a_a}, \tag{178}$$

$$\mathbf{b}_\phi = \mathbf{a}_\phi - \mathcal{K}\mathbf{a_a} - \sqrt{2\mathcal{K}}f_s$$

Фазовая квадратура $\mathbf{b}_\phi$ сжата,
$\Rightarrow$ СКП преодолен (!)
Падающий свет должен быть сжат "против" пондеромоторного сжатия.

Этот случай и рассмотрен ранее, см. уравнения (164).
Угол θ наклона эллипса выбирается так, чтобы занулить член $\sim e^{2r}$.

Содержание

Сжатие: $\chi^{(3)}$ нелинейность

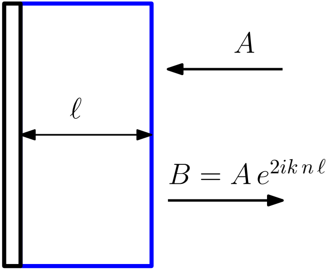
Поляризуемость P и восприимчивость χ

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi, \quad \vec{P} = \chi\vec{E}, \quad P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots \tag{179}$$

В общем случае зависимость тензорная.

Использование $\chi^{(3)}$ нелинейности

$n = n_0 + \beta A^2$



$$n = n_0 + \beta|A + a|^2 \simeq \tag{180}$$

$$\simeq n_0 + \beta|A|^2 + \beta A\left(a + a_-^\dagger\right) + \dots,$$

$$B = B + b, \quad \bar{n}_0 \equiv n_0 + \beta A^2,$$

$$B = Ae^{2ik\bar{n}_0\ell}\left(1 + 2ik\bar{n}_0\ell\sqrt{2}\beta A a_a\right)$$

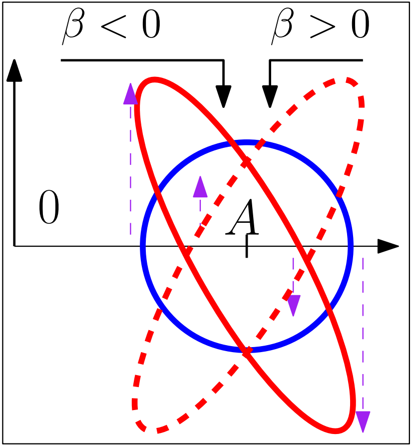
$$\mathbf{b_a} = \mathbf{a_a}, \tag{181}$$

$$\mathbf{b}_\phi = \mathbf{a}_\phi + \mathcal{N}\mathbf{a_a}, \tag{182}$$

$$N = 4k\bar{n}_0\ell\beta A^2 \tag{183}$$

Сжатие: $\chi^{(3)}$ нелинейность (прод.)

Зависимость от знака нелинейности

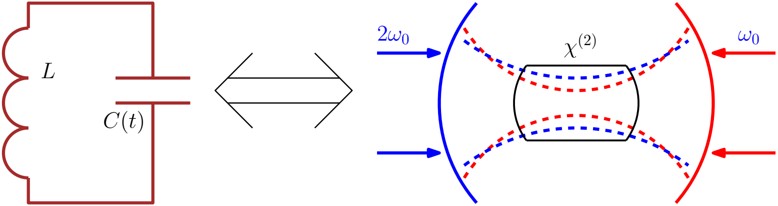


Сжатие зависит от знака β. Амплитудная квадратура сохраняется. Сжатие подобно пондеромоторному. Отличие — разная частотная зависимость.

Сжатие. $\chi^{(2)}$ нелинейность

Вырожденный параметрический усилитель: исходные ур-ия

Величина $\chi^{(2)}$ обычно много больше чем $\chi^{(3)}$.



$C(t) = \frac{C_0}{1-2m\cos\omega_0 t}$, $m \ll 1$, $\Rightarrow$ $\omega \simeq \omega_0\big(1 + m\cos\omega_0 t\big)$. Задача 13.

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_0 \left\{ a^\dagger a + \frac{m}{4}\left(e^{2i\omega_0 t} aa + e^{-2i\omega_0 t} a^\dagger a^\dagger\right)\right)\right\}, \tag{184}$$

$$\dot a = -i\omega_0\left(a + \frac{m}{2} e^{-2i\omega_0 t} a^\dagger\right), \quad \dot a^\dagger = i\omega_0\left(a^\dagger + \frac{m}{2} e^{2i\omega_0 t} a\right), \tag{185}$$

$$\text{MA:} \quad a \to a e^{-i\omega_0 t}, \quad a^\dagger \to a^{i\omega_0 t} a^\dagger, \tag{186}$$

$$\Rightarrow \quad \dot a = -i\kappa\, a^\dagger, \quad \dot a^\dagger = i\kappa a, \quad \boxed{\kappa = \frac{m\omega_0}{2}} \quad \Rightarrow \quad \ddot a - \kappa^2 a = 0 \tag{187}$$

Сжатие: $\chi^{(2)}$ нелинейность (прод.)

Вырожденный параметрический усилитель: решение

Решение (187)

$$a = a_0 \cosh \kappa t - i a_0^\dagger \sinh \kappa t, \quad a_0 = a(0), \quad a_0^\dagger = a^\dagger(0) \tag{188}$$

$$a^\dagger = a_0^\dagger \cosh \kappa t + i a_0 \sinh \kappa t, \tag{189}$$

Преобразование Боголюбова ($\mu,\ \nu$ — комплексные константы):

$$a = \mu a_0 + \nu^* a_0^\dagger, \quad a_0^\dagger = \nu a_0 + \mu^* a_0^\dagger, \quad |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1, \quad \left[a, a^\dagger\right] = \left[a_0, a_0^\dagger\right],$$

Квадратуры:

$$a_a = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} = \frac{(\mu + \nu) a_0 + (\mu^* + \nu^*) a_0^\dagger}{\sqrt{2}} = (\mu + \nu)\, \frac{a_0 + a_0^\dagger}{\sqrt{2}} \tag{190}$$

$$a_\phi = \frac{a - a^\dagger}{i\sqrt{2}} = \frac{(\mu - \nu) a_0 - (\mu^* - \nu^*) a_0^\dagger}{i\sqrt{2}} = (\mu - \nu)\, \frac{a_0 - a_0^\dagger}{i\sqrt{2}} \tag{191}$$

Синие члены — $\mu = \mu^*,\ \nu = \nu^*$

Сжатие

Детали описания сжатия

Пусть $\mu=\mu^*,\ \nu=|\nu|e^{-2i\phi}$, тогда преобразование квадратур:

$$a_a = \big(\mu+|\nu|\cos 2\phi\big)a_{a0} + |\nu|\sin 2\phi\, a_{\phi 0}, \tag{192}$$

$$a_\phi = |\nu|\sin 2\phi a_{a0} + \big(\mu-|\nu|\cos 2\phi\big)a_{\phi 0}, \tag{193}$$

$$\boxed{a_{a0} = \frac{a_0+a_0^\dagger}{\sqrt{2}},\quad a_{\phi 0} = \frac{a_0-a_0^\dagger}{i\sqrt{2}}} \tag{194}$$

Или в матричном виде

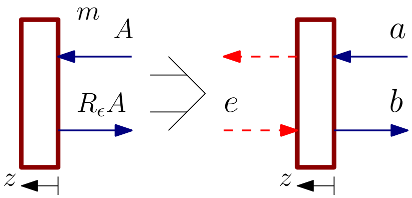
$$\begin{pmatrix} a_a \\ a_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \big(\mu+|\nu|\cos 2\phi\big) & |\nu|\sin 2\phi \\ |\nu|\sin 2\phi & \big(\mu-|\nu|\cos 2\phi\big) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{a0} \\ a_{\phi 0} \end{pmatrix} \tag{195}$$

Пусть на входе не сжатое (когерентное) состояние. Тогда при $\phi=0,\ \pi/2$ выходные квадратуры $(a_a,\, a_\phi)$ будут сжаты и не коррелированы — это соответствует осям эллипса сжатия. Если же $\phi\neq 0,\ \pi/2$, выходные квадратуры $(a_a,\, a_\phi)$ будут коррелированы — это НЕ соответствует осям эллипса сжатия

Содержание

Оптические потери: простейшая модель

Модель потерь отражающего зеркала



$$b = R_\epsilon\, a + \epsilon\, e + B\, 2ikz,$$

$$R_\epsilon = \sqrt{1-\epsilon^2},$$

$$\left[e(\Omega), e^\dagger(\Omega')\right] = 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega')$$

$$\left[a(\Omega), a^\dagger(\Omega')\right] = 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega')$$

Потери (амплитудный коэффициент отражения $R_\epsilon < 1$):
1) Отраженная волна меньше падающей; 2) Флуктуационное поле e
Для отраженного поля сохраняется коммутатор $\left[b(\Omega), b^\dagger(\Omega')\right]$.
Флуктуационная сила лебедевского давления (спектральное предс.)

$$F_{fl} = \hbar k \left(A\left(a_+ + a_-^\dagger\right) + B\left(b_+ + b_-^\dagger\right)\right) = \qquad (196)$$

$$= \sqrt{2}\hbar k A\left(\left(2-\epsilon^2\right) a_a + \epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}\, e_a\right) = \qquad (197)$$

$$= \sqrt{2}\hbar k A\left(\left(1+R_\epsilon^2\right) a_a + \epsilon R_\epsilon\, e_a\right) \underbrace{\simeq}_{\epsilon\ll 1} 2\sqrt{2}\hbar k A\left(a_a + \frac{\epsilon}{2}\, e_a\right) \qquad (198)$$

Оптические потери: простейшая модель (прод.)

Отраженная волна: квадратуры

$$b_a = R_\epsilon\, a_a + \epsilon\, e_a, \tag{199a}$$

$$b_\phi = R_\epsilon\, a_\phi + \epsilon\, e_\phi - \mathcal{K}_\epsilon \left\{ \frac{1}{2}\left(R_\epsilon + \frac{1}{R_\epsilon}\right) a_a + \frac{\epsilon}{2} e_a \right\} - \sqrt{2\mathcal{K}_\epsilon} f_s$$

$$\boxed{\mathcal{K}_\epsilon = \frac{8\hbar k^2 R_\epsilon^2 A^2}{m\Omega^2}, \quad R_\epsilon = \sqrt{1-\epsilon^2}} \tag{199b}$$

Измерение фазы. Когерентная накачка

Спектральная плотность S_{fs}

$$S_{fs} = \frac{R_\epsilon^2}{2\mathcal{K}_\epsilon} + \frac{\mathcal{K}_\epsilon}{2}\left(\frac{R_\epsilon^2+1}{2R_\epsilon}\right)^2 + \epsilon^2\left(\frac{1}{2\mathcal{K}_\epsilon} + \frac{\mathcal{K}_\epsilon}{8}\right) \tag{200}$$

$$\geq \frac{R_\epsilon^2+1}{2} + \epsilon^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^4\right) = 1 + \frac{\epsilon^2}{8} + \mathcal{O}\left(\epsilon^4\right) \tag{201}$$

Оптические потери: простейшая модель (прод.)

Вариационное измерение

$$
\begin{aligned}
b_a &= R_\epsilon\, a_a + \epsilon\, e_a, && \text{(202a)}\\
b_\phi &= R_\epsilon\, a_\phi + \epsilon\, e_\phi\, - \mathcal{K}_\epsilon \left\{\frac{1}{2}\left(R_\epsilon + \frac{1}{R_\epsilon}\right) a_a + \frac{\epsilon}{2}\, e_a\right\} - \sqrt{2\mathcal{K}_\epsilon} f_s\\
b_{VM} &= b_a \cos\theta + b_\phi \sin\theta = && \text{(202b)}\\
&= \sin\theta \left\{R_\epsilon\, a_\phi + \left\{R_\epsilon \text{ctg}\,\theta - \frac{\mathcal{K}_\epsilon}{2}\left(R_\epsilon + \frac{1}{R_\epsilon}\right)\right\} a_a + \right. && \text{(202c)}\\
&\qquad \left. + \epsilon\, e_\phi + \left(\text{ctg}\,\theta - \frac{\mathcal{K}_\epsilon}{2}\right)\epsilon e_a\, - \sqrt{2\mathcal{K}_\epsilon} f_s \right\} && \text{(202d)}
\end{aligned}
$$

Когерентная накачка. Малые потери $\epsilon \ll 1,\ \text{ctg}\,\theta \simeq \mathcal{K}_\epsilon / R_\epsilon$

Задача 11

$$
S_{fs}(\Omega_0) = \frac{1}{2\mathcal{K}_\epsilon} + \epsilon^2 \cdot \frac{\mathcal{K}_\epsilon}{8} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \qquad \text{(203)}
$$

Оптические потери и сжатие

Отражение сжатого света от неподвижного зеркала

Зеркало с оптическими потерями. Используем (199)

$$b_a = R_\epsilon\, a_a + \epsilon\, e_a = R_\epsilon\, e^r a_{a\,\mathsf{vac}} + \epsilon\, e_a, \tag{204}$$

$$b_\phi = R_\epsilon\, a_\phi + \epsilon\, e_\phi = R_\epsilon\, e^{-r} a_{\phi\,\mathsf{vac}} + \epsilon\, e_\phi, \tag{205}$$

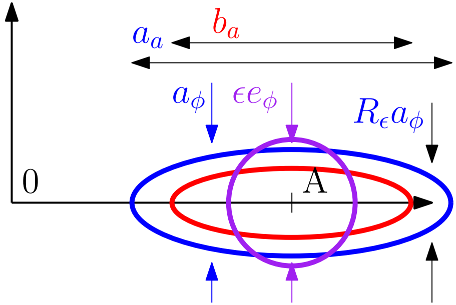
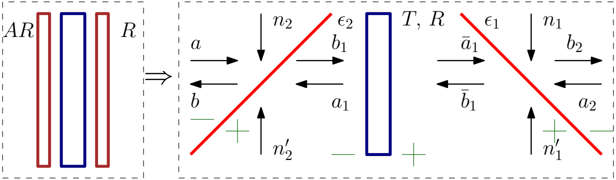


Рис. 7: При отражении от зеркала с оптическими потерями сжатие падающего света (синий эллипс) деградирует (сумма красного эллипса и фиолетовой сферы).

Оптические потери: общий случай

Произвольное зеркало с потерями

Модель зеркала с потерями: зеркало без потерь плюс два светоделителя с амплитудными коэф. пропускания $\epsilon_1,\, \epsilon_2 \ll 1$



Потери зеркала "слева" и "справа" могут быть разными

$$\text{BS } \epsilon_2: \quad b = \sqrt{1-\epsilon_2^2}\, a_1 - \epsilon_2\, n_2, \tag{206}$$

$$\text{BS } \epsilon_2: \quad b_1 = \sqrt{1-\epsilon_2^2}\, a + \epsilon_2\, n_2', \tag{207}$$

$$\text{BS } \epsilon_1: \quad b_2 = \sqrt{1-\epsilon_1^2}\, \bar a_1 - \epsilon_1\, n_1\,, \tag{208}$$

$$\text{BS } \epsilon_1: \quad \bar b_1 = \sqrt{1-\epsilon_1^2}\, a_2 + \epsilon_1\, n_1'\,, \tag{209}$$

$$T,\ R\ : \quad \bar a_1 = R\bar b_1 + T b_1, \quad a_1 = -R b_1 + T\bar b_1, \tag{210}$$

Оптические потери: общий случай

Произвольное зеркало с потерями — решение

Точное решение

$$b = \left(-aR\sqrt{1-\epsilon_2^2} + a_2 T\sqrt{1-\epsilon_1^2}\right)\sqrt{1-\epsilon_2^2} + n_b \tag{211}$$

$$\boxed{n_b \equiv n_1' T\epsilon_1\sqrt{1-\epsilon_2^2} - n_2\epsilon_2 - n_2' R\epsilon_2\sqrt{1-\epsilon_2^2}} \tag{212}$$

$$b_2 = \sqrt{1-\epsilon_1^2}\left(a_2 R\sqrt{1-\epsilon_1^2} + aT\sqrt{1-\epsilon_2^2}\right) + n_{b2} \tag{213}$$

$$\boxed{n_{b2} \equiv -n_1\epsilon_1 + n_1' R\epsilon_1\sqrt{1-\epsilon_1^2} + n_2' T\epsilon_2\sqrt{1-\epsilon_1^2}} \tag{214}$$

Коммутаторы:

$$\left[n_1(\Omega),\, n_1^\dagger(\Omega')\right] = \left[n_1'(\Omega),\, {n_1'}^\dagger(\Omega')\right] = \cdots = 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega') \tag{215}$$

$$\left[n_b(\Omega),\, n_{b2}^\dagger(\Omega')\right] = TR\sqrt{1-\epsilon_1^2}\sqrt{1-\epsilon_2^2}\left(\epsilon_1^2-\epsilon_2^2\right)\cdot 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega') \tag{216}$$

В случае $\epsilon_1 = \epsilon_2$ последний коммутатор равен нулю.

Оптические потери: "симметричный" случай

Зеркало с "симметричными" потерями — решение

Точное решение для случая $\epsilon_1 = \epsilon_2 \Rightarrow \epsilon$

$$b = -aR\left(1-\epsilon^2\right) + a_2 T\left(1-\epsilon^2\right) + n_b \tag{217}$$

$$\boxed{n_b \equiv \epsilon\left(n_1' T\sqrt{1-\epsilon^2} - n_2 - n_2' R\sqrt{1-\epsilon^2}\right)} \tag{218}$$

$$b_2 = a_2 R\left(1-\epsilon^2\right) + aT\left(1-\epsilon^2\right) + n_{b2} \tag{219}$$

$$\boxed{n_{b2} \equiv \epsilon\left(-n_1 + n_1' R\sqrt{1-\epsilon^2} + n_2' T\sqrt{1-\epsilon^2}\right)} \tag{220}$$

Коммутаторы:

$$\left[n_b(\Omega),\, n_b^\dagger(\Omega')\right] = \left[n_{b2}(\Omega),\, n_{b2}^\dagger(\Omega')\right] = \epsilon^2\left(2-\epsilon^2\right) 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega') \tag{221}$$

$$\left[n_b(\Omega),\, n_{b2}^\dagger(\Omega')\right] = \left[n_{b2}(\Omega),\, n_b^\dagger(\Omega')\right] = 0 \tag{222}$$

Шумы n_b, n_{b2} не зависимы.

Оптические потери: общий случай, малые потери

Произвольное зеркало с *малыми* потерями

Пусть $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \ll 1$. Линейное приближение по $\epsilon_1,\ \epsilon_2$:

$$b = -aR + a_2T + n_b, \quad \boxed{n_b \simeq n_1' T\epsilon_1 - n_2\epsilon_2 - n_2' R\epsilon_2} \tag{223}$$

$$b_2 = a_2R + aT + n_{b2}, \quad \boxed{n_{b2} \simeq -n_1\epsilon_1 + n_1' R\epsilon_1 + n_2' T\epsilon_2} \tag{224}$$

Зеркало с *малыми симметричными* потерями

В частном случае $\epsilon_1 = \epsilon_2 \ \Rightarrow\ \epsilon$ — шумы $n_b,\ n_{b2}$ независимы:

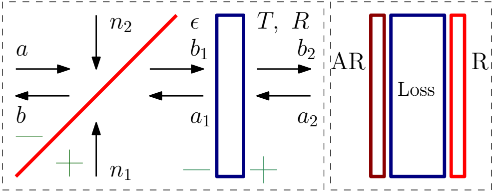
$$n_b = \sqrt{2}\,\epsilon\, e_b, \quad n_{b2} = \sqrt{2}\,\epsilon\, e_{b2}, \quad \Big[e_b(\Omega),\, e_{b2}^\dagger(\Omega')\Big] = 0 \tag{225}$$

$$\Big[e_b(\Omega),\, e_b^\dagger(\Omega')\Big] = \Big[e_{b2}(\Omega),\, e_{b2}^\dagger(\Omega')\Big] = 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega') \tag{226}$$

НЕ симметр. модель пропускающего зеркала с потерями

Потери только в AR покрытии

Отражающее покрытие и толща зеркала не имеют оптических потерь



$$R^2 + T^2 = 1, \quad (227a)$$
$$b_2 = T\, b_1 + R\, a_2, \quad (227b)$$
$$a_1 = T\, a_2 - R\, b_1, \quad (227c)$$
$$b = r\, a_1 - \epsilon n_2, \quad (227d)$$
$$b_1 = r\, a + \epsilon\, n_1 \quad (227e)$$

Используя (227) можно вывести, используя обозначение $r = \sqrt{1-\epsilon^2}$

$$b_2 = T\sqrt{1-\epsilon^2}\, a + R\, a_2 + \epsilon\, T\, n_1\,, \qquad (228a)$$
$$b = -R\left(1-\epsilon^2\right) a + \sqrt{1-\epsilon^2} T\, a_2 - \epsilon\left\{\sqrt{1-\epsilon^2}\, R\, n_1 + n_2\right\} \qquad (228b)$$

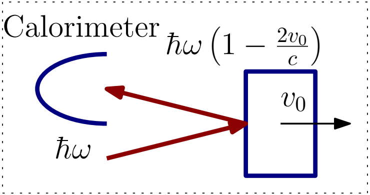
Соотношения (228) крайне НЕ симметричны, см. синий член.
Шумы в b_2 меньше, чем в b – см. фиолетовые члены. Задача 12

Содержание

КНИ измеритель скорости фон Неймана

Пробное тело (свободная масса) движется со скоростью v_0.

Энергию отраженного фотона можно точно измерить, поглотив в детекторе-калориметра.



Длительность падающего фотона τ, неопределенность энергии $\hbar\Delta\omega \simeq \hbar/\tau$.

Частота отраженного фотона (эффект Допплера):

$$\omega = \omega\left(1 - \frac{2v_0}{c}\right)$$

Ошибка измерения скорости:

$$\hbar\omega\,\frac{2\Delta v}{c} = \hbar\Delta\omega \quad \Rightarrow \quad \Delta v_{\text{изм}} \simeq \frac{c}{2}\,\frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq \frac{c}{2\omega\tau} \tag{229}$$

Импульс — КНИ переменная (!)

КНИ измеритель скорости фон Неймана

Фотон, отражаясь от пробного тела, передает ему импульс $2\hbar\omega/c$. Неопределенность момента передачи — τ. Поэтому пробное тело *неконтролируемым* образом сдвинется, т.е. его координата возмущается на величину

$$\Delta x_{\text{возм}} \simeq \frac{2\hbar\omega}{mc}\,\tau \tag{230}$$

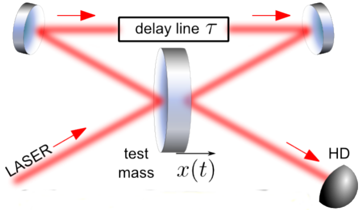
Очевидно, что ошибка измерения скорости (импульса) (229) и возмущение координаты (230) будут связаны соотношением неопределенностей:

$$\Delta p_{\text{изм}} \Delta x_{\text{возм}} = m\Delta v_{\text{изм}} \Delta x_{\text{возм}} > \frac{\hbar}{2} \tag{231}$$

Подчеркнем, возмущение координаты никак не влияет на точность измерения скорости (импульса) — КНИ (!)
Сложно реализовать!

Координатный измеритель скорости (не КНИ!)

Измерение разности $\big[x(t) - x(t-\tau)\big]$



$$x(t-\tau) \;\Rightarrow\; x(\Omega)e^{i\Omega\tau}$$

$$b = e^{i\Omega\tau}\left[a + A\,2ikx\big(1 - e^{i\Omega\tau}\big)\right],$$

$$F_{ba} = 2\hbar kA\left(a + a_-^\dagger\right)\big(1 - e^{i\Omega\tau}\big),$$

$$b = e^{i\Omega\tau}a - \frac{A\,2ikF_s}{m\Omega^2}\big(1 - e^{i\Omega\tau}\big) +$$

$$- \frac{4i\hbar k^2A^2}{m\Omega^2}\left(a + a_-^\dagger\right)\big(1 - e^{i\Omega\tau}\big)^2$$

Квадратуры:

$$b_a = e^{i\Omega\tau}a_a, \quad \boxed{\mathcal{K} = \frac{8\hbar k^2A^2}{m\Omega^2}, \quad f_s = \frac{F_s}{\sqrt{2\hbar m\Omega^2}}} \tag{232}$$

$$b_\phi = e^{i\Omega\tau}\left\{a_\phi - \mathcal{K}\big(1 - e^{i\Omega\tau}\big)^2 a_a\right\} - \sqrt{2\mathcal{K}}\big(1 - e^{i\Omega\tau}\big)f_s. \tag{233}$$

Отличие от измерителя координаты: $\boxed{\mathcal{K} \to \mathcal{N} = \mathcal{K}\left(1 - e^{i\Omega\tau}\right)^2}$

Простейший *координатный* измеритель скорости (прод.)

Вариационное измерение: измерение опт. квадратуры

$$b_\theta = b_a\cos\theta + b_\phi\sin\theta = e^{i\Omega\tau}\sin\theta\left\{a_\phi + \big(\mathrm{ctg}\,\theta - \mathcal{N}\big)a_a - \sqrt{2\mathcal{N}}f_s\right\},$$

$$S_{fs} = \frac{1}{2\mathcal{N}} + \left(\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{\sqrt{2\mathcal{N}}} - \sqrt{\frac{\mathcal{N}}{2}}\right)^2, \quad \mathrm{ctg}\,\theta = \mathcal{N}(\Omega_0) \tag{234}$$

Сравнение измерителей координаты и скорости

1) Параметр мощности $\mathcal{N}$ слабо зависит от частоты при $\Omega\tau \ll 1$:

$$\mathcal{N} = \frac{8\hbar k^2A^2}{m\Omega^2}\left(1 - e^{i\Omega\tau}\right)^2 \simeq -\frac{8\hbar k^2A^2\tau^2}{m}, \quad \text{(широкая полоса)} \tag{235}$$

2) Величина сигнала меньше в $\sim(\Omega\tau)$, $\Rightarrow$ накачка — больше.
3) Балансная схема (2 отражения должны быть идентичны).

Простейший координатный измеритель скорости (прод.)

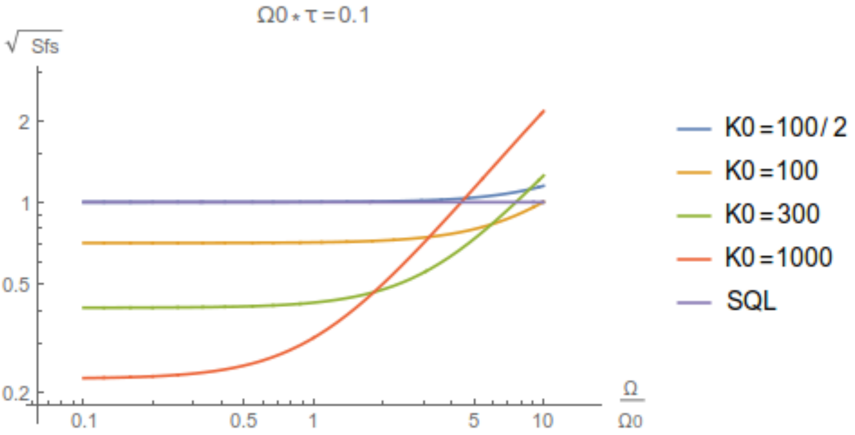


Рис. 8: Графики чувствительности $\sqrt{S_{fs}(\Omega)}$ для координатного измерителя скорости, параметр $\Omega_0\tau = 0.1$. Ср. с графиками на Рис. 6.

Сравнение измерителей скорости: координатного и КНИ

Обратное флуктуационное влияние

- В координатном измерителе скорости присутствует ОФВ. Важно: ОФВ ограничивает чувствительность.
- В измерителе фон Неймана тоже присутствует ОФВ. Но ОФВ НЕ ограничивает чувствительность — истинное КНИ.

Требуемая точность измерения примерно та же

- В координатном измерителе скорости измеряется фаза:

$$\Delta\phi_{\text{изм}} \simeq \frac{2\omega_0 x}{c}\left(1 - e^{i\Omega\tau}\right) \simeq \frac{2\omega_0 x \cdot (\Omega\tau)}{c} \tag{236}$$

- В измерителе фон Неймана измеряется частота отр. света:

$$\Delta\omega_0 \simeq \omega_0\,\frac{2v}{c} \simeq \omega_0\,\frac{2x\Omega}{c} \simeq \frac{\Delta\phi_{\text{изм}}}{\tau} \tag{237}$$

Но! В измерителе фон Неймана надо измерять частоту по регистрации энергии. Состояние падающего света — энергетическое (фаза НЕ определена принципиально).

Содержание

Осциллятор без затухания, под действием силы $F(t)$

Гамильтониан и уравнения движения

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_m \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - Fx, \tag{238}$$

$$\boxed{x = x_0 \left(a + a^\dagger\right), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}} \tag{239}$$

$$\dot{a} = \frac{1}{i\hbar}\left[a, \mathcal{H}\right] = -i\omega_m a + i f_s(t), \quad \boxed{f_s(t) \equiv \frac{F(t)}{\sqrt{2\hbar m\omega_m}}}, \tag{240}$$

$$a = \tilde{a} e^{-i\omega_m t}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{a}} = i f_s(t)\, e^{i\omega_m t} \tag{241}$$

Резонансная сигнальная сила

$$f_s(t) = \frac{f_{s0}}{i}\left(e^{-i\phi} e^{-i\omega_m t} - e^{i\phi} e^{i\omega_m t}\right), \quad 0 \le t \le \tau \tag{242}$$

$$a(t) \simeq \left(a(0) + f_{s0}\, t\, e^{-i\phi}\right) e^{-i\omega_m t} \tag{243}$$

Формальное описание осциллятора с затуханием

Уравнение для операторов рождения (a) и уничтожения $(a^\dagger)$ в представлении Гейзенберга (медленные амплитуды). $f_a(t),\ f_a^\dagger(t)$ — флуктуационные силы.

$$\dot{a} = -\gamma_a a + f_a, \qquad \dot{a}^\dagger = -\gamma_a a^\dagger + f_a^\dagger, \tag{244}$$

$$a(t) = a(0)e^{-\gamma_a t} + \int_0^t e^{-\gamma_a (t-\tau)}\, f_a(\tau)\, d\tau\,, \tag{245}$$

$$a^\dagger(t') = a^\dagger(0)e^{-\gamma_a t'} + \int_0^{t'} e^{-\gamma_a (t'-\tau')}\, f_a^\dagger(\tau')\, d\tau', \tag{246}$$

$$\begin{aligned}\left[a(t),\, a^\dagger(t)\right] &= \left[a(0),\, a^\dagger(0)\right] e^{-2\gamma_a t} + \\ &+ \int\int_0^t e^{-\gamma_a (2t-\tau-\tau')} \left[f_a(\tau),\, f_a^\dagger(\tau')\right] d\tau\, d\tau' \end{aligned} \tag{247}$$

Потребуем

$$\left\langle \left[f_a(t),\, f_a^\dagger(t')\right] \right\rangle = 2\gamma_a\, \delta(t-t'), \quad \text{Тогда:} \quad \left[\mathbf{a(t)},\, \mathbf{a^\dagger(t)}\right] = \mathbf{1}\,. \tag{248}$$

Формальное описание осциллятора с затуханием (прод.)

Равновесная энергия осциллятора с затуханием

$$\lim_{t\to\infty}\langle a^\dagger(t)a(t)\rangle = n_a, \quad n_a \equiv \frac{1}{e^{\hbar\omega_a/(k_B T)}-1} \tag{249}$$

Это выполняется, если потребовать условия для флуктуационных сил:

$$\langle f_a(t)\, f_a^\dagger(t')\rangle = 2\gamma_a \left(n_a+1\right)\delta(t-t'), \tag{250}$$

$$\langle f_a^\dagger(t')\, f_a(t)\rangle = 2\gamma_a\, n_a\, \delta(t-t') \tag{251}$$

Частотное описание осциллятора с затуханием

$$f_a(\Omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)\, e^{i\Omega t}\, dt, \quad f_a^\dagger(\Omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_a^\dagger(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt\,, \tag{252}$$

$$\langle f_a(\Omega)\, f_a^\dagger(\Omega')\rangle = 2\gamma_a\left(n_a+1\right) 2\pi\, \delta(\Omega-\Omega'), \tag{253}$$

$$\langle f_a^\dagger(\Omega)\, f_a(\Omega')\rangle = 2\gamma_a\, n_a\, 2\pi\, \delta(\Omega-\Omega'), \tag{254}$$

Формальное описание осциллятора с затуханием (прод.)

Односторонняя спектральная плотность S_f

$$\frac{1}{2}\,2\pi\,\delta(\Omega-\Omega')\,S_f(\Omega)\equiv\frac{1}{2}\,\langle f_a(\Omega)\,f_a^\dagger(\Omega')+f_a^\dagger(\Omega)\,f_a(\Omega')\rangle,$$

$$S_f(\Omega)=2\gamma_a\big(2n_a+1\big), \tag{255}$$

$$a(\Omega)=\frac{f_a(\Omega)}{\gamma_a-i\Omega},\quad a^\dagger(\Omega)=\frac{f_a^\dagger(\Omega)}{\gamma_a+i\Omega}, \tag{256}$$

$$\langle a^\dagger(\Omega)\,a(\Omega')+a(\Omega)\,a^\dagger(\Omega')\rangle=\frac{2\gamma_a\,(2n_a+1)\,2\pi\,\delta(\Omega-\Omega')}{(\gamma_a^2+\Omega^2)}\,, \tag{257}$$

$$S_a(\Omega)=\frac{2\gamma_a\,\big(2n_a(\Omega)+1\big)}{(\gamma_a^2+\Omega^2)},\quad \mathcal{E}=\int_{-\omega_0}^{\infty}\hbar(\omega_0+\Omega)\,S_a(\Omega)\,\frac{d\Omega}{2\pi},$$

$$\mathcal{E}\simeq\hbar\omega_0\left(n_a(\omega_0)+\frac{1}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi}\,\frac{dx}{1+x^2}\simeq\hbar\omega_0\left(n_a+\frac{1}{2}\right).$$

Обычно энергию нулевых колебаний НЕ принимают во внимание.
Но(!) Все зависит от формулировки задачи.

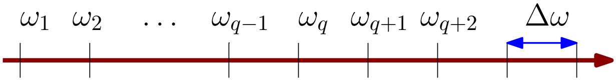
Термостат + осциллятор

Гамильтониан

Термостат (баня) – набор осцилляторов в тепловом равновесии, $\boxed{\omega_{q+1} - \omega_q = \Delta\omega}$. Каждый слабо связан с нашим осциллятором

$$H = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + H_\kappa + H_T, \tag{258}$$

$$H_T = \sum_q \hbar\omega_q \hat{b}_q^\dagger \hat{b}_q\,, \quad H_\kappa = -i\hbar\sqrt{\frac{\gamma\,\Delta\omega}{\pi}} \sum_q \left(\hat{a}^\dagger \hat{b}_q - \hat{b}_q^\dagger \hat{a}\right) \tag{259}$$



Уравнения движения (Гамильтонова система!)

$$\dot{\hat{a}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}, H] = -i\omega_0 \hat{a} - \sqrt{\frac{\gamma\,\Delta\omega}{\pi}} \sum_q \hat{b}_q, \tag{260}$$

$$\dot{\hat{b}}_q = -i\omega_q \hat{b}_q + \sqrt{\frac{\gamma\,\Delta\omega}{\pi}}\hat{a}, \quad [b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{qq'}, \quad \left\langle b_q, b_{q'}^\dagger \right\rangle = (n_T + 1)\delta_{qq'}$$

Термостат + осциллятор (прод.)

Медленные амплитуды

$$\hat{a} \Rightarrow \hat{a} e^{-i\omega_0 t}, \quad \hat{b}_q \Rightarrow \hat{b}_q e^{-i\omega_q t} \quad \Rightarrow \tag{261}$$

$$\dot{\hat{a}}(t) = -\sqrt{\frac{\gamma\,\Delta\omega}{\pi}} \sum_q \hat{b}_q\, e^{i(\omega_0-\omega_q)t}, \quad \dot{\hat{b}}_q = \sqrt{\frac{\gamma\,\Delta\omega}{\pi}}\,\hat{a}\, e^{-i(\omega_0-\omega_q)t}. \tag{262}$$

Важно: при $\Delta\omega \to 0$ каждый осциллятор b_q возмущается *слабо (!)*

Подставляем (пока все точно!)

$$\hat{b}_q = \hat{b}_q(0) + \sqrt{\frac{\gamma\,\Delta\omega}{\pi}} \int_0^t \hat{a}(t') e^{-i(\omega_0-\omega_q)t'}\, dt', \tag{263}$$

$$\dot{\hat{a}} = -\sum_q \left(\sqrt{\frac{\gamma\,\Delta\omega}{\pi}}\,\hat{b}_q(0) e^{i(\omega_0-\omega_q)t} - \frac{\gamma\,\Delta\omega}{\pi} \int_0^t \hat{a}(t')\, e^{i(\omega_0-\omega_q)(t-t')}\, dt' \right) =$$

$$= \sqrt{2\gamma}\,\hat{\alpha}_{\text{fl}} - \gamma\,\hat{a}\,. \tag{264}$$

Термостат + осциллятор (прод.)

Вывод (264)

Заменяем сумму интегралом по правилу

$$\Delta\omega \sum_q \Rightarrow \int d\omega\,, \tag{265}$$

и считаем коммутатор для a_{fl}

$$\hat{\alpha}_{\mathsf{fl}}(t) \equiv \sqrt{\frac{\Delta\omega}{2\pi}} \sum_q b_q(0) e^{i(\omega_0-\omega_q)t}, \tag{266a}$$

$$\left[\hat{\alpha}_{\mathsf{fl}}(t), \hat{\alpha}_{\mathsf{fl}}^\dagger(t')\right] \equiv \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_q e^{i(\omega_0-\omega_q)(t-t')} \Rightarrow \delta(t-t')\,, \tag{266b}$$

$\delta(t)$ — дельта функция. Среднее для a_{fl}

$$\left\langle \hat{\alpha}_{\mathsf{fl}}(t)\, \hat{\alpha}_{\mathsf{fl}}^\dagger(t') \right\rangle = (n_T+1)\,\delta(t-t'), \quad n_T = \frac{\hbar\omega_0}{e^{\hbar\omega_0/(\varkappa T)}-1} \tag{266c}$$

Термостат + осциллятор (прод.)

Продолжение вывода (264)

Считаем член $\gamma\hat{a}$ используя переход (265):

$$\gamma\,\hat{a} = \int_0^t \hat{a}(t')\,\frac{\gamma}{\pi}\left[\int e^{i(\omega_0-\omega)(t-t')}d\omega\right]dt' = \tag{267}$$

$$= \frac{\gamma}{\pi}\int_0^t \hat{a}(t')\cdot 2\pi\,\delta(t-t')dt' = \gamma\,\hat{a}(t)\,, \tag{268}$$

Напоминание: $$\int_x^y f(\xi)\,\delta(y-\xi)\,d\xi = f(y)/2 \tag{269}$$

Анализ уравнения (264)

$$\dot{\hat{a}} + \gamma\hat{a} = \sqrt{2\gamma}\,\hat{\alpha}_{\mathsf{fl}}\,, \tag{270}$$

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-\gamma t} + \sqrt{2\gamma}\int_0^t \hat{\alpha}_{\mathsf{fl}}(t')\,e^{-\gamma(t-t')}\,dt', \tag{271}$$

$$\left[\hat{a}(t),\,\hat{a}^\dagger(t)\right] = 1, \quad \text{Доказать (Задача 14)} \tag{272}$$

Содержание

Задачи

1. Гаусс

Рассчитать Δx^2 и Δk^2 для гауссового распределения волновой функции (12).

2. Соотношение Шредингера-Робинса

Вывести соотношение Шредингера-Робинса (21).

3. Классическое соотношение неопределенностей

Доказать классическое соотношение неопределенностей $\Delta x^2 \, \Delta k^2 \geq \frac{1}{4}$. Использовать (13).

4. Сдвиг

Доказать для собственного состояние оператора импульса

$$\exp\left(\frac{i\alpha x}{\hbar}\right)|p\rangle = |p+\alpha\rangle,$$

где x – оператор координаты, α – констатна.

Задачи

5. Полнота ПОВМ

Доказать gолнота ПОВМ для электронного зонда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Omega}(\tilde{q})\,\Omega^{\dagger}(\tilde{q})\,d\tilde{q} = \hat{1}$$

5b. Перекрестная спектральная плотность

Доказать формулу (116), используя (115) и определение (104).

6. Когерентное состояние

Доказать, что для *когерентного* состояния

- Средние равны:

$$\langle a_\phi(\Omega)\circ a_\phi^\dagger(\Omega')\rangle = \langle a_\phi^\dagger(\Omega)\circ a_\phi(\Omega')\rangle = \pi\,\delta(\Omega-\Omega'),$$

- Перекрестное среднее и сп. плотность равна нулю:

$$\langle a_a(\Omega)\circ a_\phi^\dagger(\Omega')\rangle = \langle a_\phi(\Omega)\circ a_a^\dagger(\Omega')\rangle = 0, \quad S_{a\phi} = 0$$

Указание: использовать определения (126, 130, 133).

Задачи

7. Мощность накачки

Как изменится спектральная плотность S_{fs} при увеличении (уменьшении) *амплитуды* падающей волны (накачки) в 3 раза ? Привести графики $S_{fs}(\Omega)$ без изменения и с изменением накачки.

7b. Балансный гомодинный детектор.

Принцип работы и схема балансного гомодинного детектора. Показать, что он позволяет измерять квадратуру $b_\theta = b_a \cos\theta + b_\phi \sin\theta$, где b_a, b_ϕ амплитудная и фазовая квадратуры падающего света.

8. Сжатая накачка

Построить графики $S_{fs}(\Omega)$ при разных углах сжатия $\theta = \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3$ и фиксированном сжатии $r = 2$ – см. (164). Считать параметр накачки $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0\Omega_0^2/\Omega^2$.

9. Вариационное измерение

Объяснить, почему на графике чувствительности вариационного измерения на рис. 6 минимумы $\sqrt{S_{fs}}$ приходятся на частоты $\Omega_{min} < \Omega_0$. См. (175).

Задачи

10. Вариационное измерение – максимальное сжатие

Доказать, что максимальное сжатие (т.е. минимум спектральной плотности $S_{b\theta}$) на заданной частоте Ω_0 достигается при гомодинном угле, определяемым соотношением

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{\mathcal{K}(\Omega_0)}{2}$$

Найти минимум $S_{b\theta}$. Использовать (170).

11. Вариационное измерение с оптическими потерями

Пользуясь формулами (202c) И (203) найти спектральную плотность $S_{fs}(\Omega)$ для произвольной частоты и построить графики $S_{fs}(\Omega)$ при $\epsilon = 0$ и $\epsilon = 0.2$

12. Потери в AR покрытии

Используя (227) вывести соотношения (228). Вычислить коммутаторы $\left[b(\Omega), b^\dagger(\Omega')\right]$ и $\left[b_2(\Omega), b_2^\dagger(\Omega')\right]$.

Задачи

13. Вырожденный параметрический усилитель

Вывести гамильтониан (184) и уравнения движения (187).

14. Коммутатор осциллятора с диссипацией

Доказать коммутатор (272), используя (266).