



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра физики колебаний

С.П. Вятчанин

**Квантовые коммуникации
и квантовые вычисления**

Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

2022

С. П. Вятчанин, **Квантовые коммуникации и квантовые вычисления** / Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2022 г. – 211 с.

ISBN 978-5-8279-0223-2

Методическое пособие представляет собой конспект лекций курса “Квантовые коммуникации и квантовые измерения”, читаемого для студентов магистратуры (или 6 курса специалитета) на кафедре физики колебаний физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Пособие написано с использованием методических материалов проф. Ф.Я. Халили, который в свое время создал начальную версию этого курса.

В пособии рассмотрено описание двухуровневых систем (кубиты), квантовый парадокс Зенона, эффект ЭПР (Эйнштейна, Подольского, Розена), бомбовый парадокс и парадоксы квантовой интерференции, квантовая телепортация и управление квантовыми ячейками.

Пособие предназначено для преподавателей и студентов университетов физико-математических специальностей.

Рецензенты: доктор. физ.-мат. наук., проф. В.Н. Руденко
канд. физ.-мат. наук., ст. науч. сотр. А.В. Гусев
канд. физ.-мат. наук., ст. науч. сотр. В.В. Кулагин

Объем 13,2 п.л.

Тираж 100 экз.

Заказ № _____

119991, Москва.ГСП-1, ленинские горы, д.1, стр.2

Отпечатано в отделе оперативной печати

Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

© Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2022

© С.П. Вятчанин, 2022

Оглавление

1	Двухуровневые системы	8
1.1	Примеры двухуровневых систем	8
1.1.1	Частица со спином $\frac{1}{2}$ в магнитном поле	8
1.1.2	Ридберговский атом	9
1.1.3	Два связанных осциллятора	10
1.2	Спиновые операторы и собственные вектора .	12
1.2.1	Матрицы Паули	12
1.2.2	Операторы рождения и уничтожения .	14
1.3	Атом в переменном э.м. классическом поле .	15
1.3.1	Резонанс $\omega_a = \omega_e$	17
1.3.2	Фаза состояния двухуровневой системы	19
1.4	Атом в переменном квантовом поле.	20
1.4.1	Гамильтониан	20
1.4.2	Уравнение Шредингера	21
1.4.3	Нерезонансный случай: $\delta \neq 0$	24
2	Квантовый парадокс Зенона	27
2.1	Точное измерение	27
2.1.1	Классическая аналогия	29

2.2	Элементы теории непрерывных квантовых измерений	30
2.2.1	О селективном и неселективном подхо- де к описанию измерения	31
2.2.2	Уравнение для матрицы плотности	33
2.2.3	Физический смысл σ_F	35
2.3	Парадокс Зенона в двухуровневой системе	37
3	Элементы классической теории информации	41
3.1	Количество информации	41
3.2	Пропускная способность канала	46
3.3	Обратимые логические операции	48
3.4	Количество квантовой информации	53
4	Квантовая интерференция	56
4.1	Бомбовый парадокс: качественное рассмотрение	56
4.2	Бомбовый парадокс: математическое описание	59
4.2.1	Светоделитель A	60
4.2.2	Светоделитель D	61
4.2.3	Описание измерения	62
4.3	Интерференция на двух щелях	64
4.4	Измерение без взаимодействия	70

4.5	Интерферометр	
	с подвижным зеркалом	80
4.5.1	Интерферометр Маха-Цандера	82
4.5.2	Атомный интерферометр “с отдачей”	85
4.5.3	Интерферометр Маха-Цандера и атомный интерферометр с компенсацией отдачи	88
4.6	Квантовое невозмущающее измерение фотона атомным интерферометром	90
5	Парадокс ЭПР	92
5.1	Качественное рассмотрение	92
5.1.1	Пример 1	98
5.1.2	Пример 2	101
5.2	Эксперимент	104
5.2.1	Один фотон. Качественное рассмотрение	105
5.2.2	Один фотон в двух модах	107
5.2.3	Бифотоны в опытах с двумя наблюдателями	109
5.2.4	Бифотоны в опытах с тремя наблюдателями	113
6	Квантовая телепортация	115
6.1	Квантовое клонирование	115
6.2	Вариант телепортации	116
6.2.1	Частный случай: $ \mathbf{b} = 1$	118

6.2.2	Общий случай	119
6.3	Эксперимент	122
7	Квантовые ячейки	126
7.1	Интерферометр Маха-Цандера	126
7.1.1	Первый светоделитель	127
7.1.2	Фазовый набег	129
7.1.3	Второй светоделитель	129
7.2	Контролируемая логическая операция . . .	130
7.3	Задача Дойча	131
7.4	Обобщенная задача Дойча	136
8	Классический и квантовый шум	140
8.1	Описание классического шума	140
8.2	Спектральная плотность классического шума	145
8.3	Введение в квантовое описание шума	148
8.4	Квантовые анализаторы спектра	153
8.4.1	Классический шум	153
8.4.2	Квантовый шум	159
8.4.3	Гармонический осциллятор	164
8.5	Измерение спектра в эксперименте	172
8.5.1	“Фильтр плюс диод”	173
8.5.2	“Фильтр плюс фотоумножитель” . . .	176
8.5.3	Гетеродинная схема: две гармоники . .	177
8.5.4	Гетеродинная схема: одна гармоника .	179

A	Матрицы Паули	180
A.1	Амплитуды вероятностей	181
A.2	Оператор σ_ϕ	182
B	2 частицы со спином	183
B.1	Кот Шредингера (КШ $^+$)	183
B.1.1	Амплитуды для состояний Φ_\pm	185
B.2	КШ $^-$	186
B.2.1	Амплитуды для состояний Φ_\pm	189
B.3	Состояние EPR $^+$	190
B.3.1	Амплитуды для состояний Φ_\pm	192
B.4	Состояние EPR $^-$	192
B.4.1	Амплитуды для состояний Φ_\pm	195
C	3 частицы со спином	196
C.1	Состояние GHZ $^+$	196
C.2	Состояние GHZ $^-$	198
D	Задачи	201

Глава 1

Двухуровневые системы

Двухуровневая система — одна из базовых моделей, используемых в квантовой механике. Другой такой моделью является гармонический осциллятор.

1.1 Примеры двухуровневых систем

Рассмотрим примеры физических систем, которые можно рассматривать как двухуровневые системы.

1.1.1 Частица со спином $\frac{1}{2}$ в магнитном поле

Оператор магнитного момента:

$$\vec{\hat{\mu}} = -\frac{e}{mc} \vec{\hat{S}}, \quad (1.1)$$

где $\vec{\hat{S}}$ — оператор спина (механического вращательного момента). Если частица находится в магнитном поле \vec{H} , то гамильтониан взаимодействия частицы с этим полем равен

$$\hat{\mathcal{H}} = -\left(\vec{\mu}\vec{H}\right) = \frac{e}{mc}\left(\vec{s}\vec{H}\right). \quad (1.2)$$

Если частица, в частности электрон, имеет спин $\frac{1}{2}$, то проекция ее спина на любое заданное направление (в частности, на направление магнитного поля) может принимать только значения $\pm\frac{1}{2}$. Поэтому собственные значения энергии частицы в магнитном поле равны

$$\mathcal{E}_{\pm} = \frac{e\hbar}{2mc} \cdot H = \pm\beta H, \quad \beta = \frac{e\hbar}{2mc} \quad (1.3)$$

где β — магнетон Бора. Очевидно, что электрон в магнитном поле можно рассматривать как двухуровневую систему.

Подчеркнем, что в данной модели учитывается только спиновая степень свободы и *не* учитывается поступательная степень электрона как заряженной частицы (которая, как известно соответствует вращению электрона в магнитном поле с частотой Лармора.)

1.1.2 Ридберговский атом

Другим широко распространенным примером двухуровневой системы является атом, находящийся на высоком долгоживущем уровне (ридберговский атом). Обычно рассматривают два его уровня: нижний (обозначаемый g , “ground”) и верхний (обозначаемый e , “excited”), интересуясь только переходами между этими уровнями под действием внешнего поля.

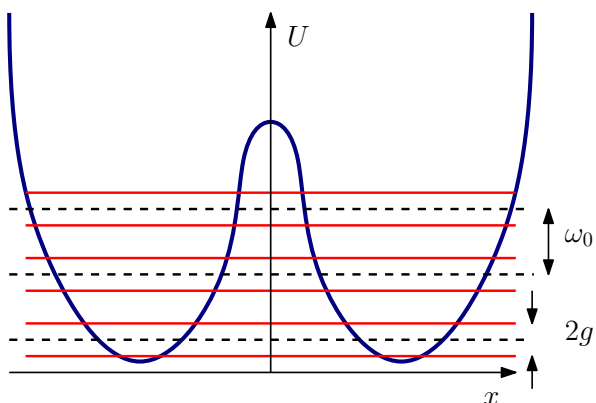


Рис. 1.1: Потенциальная энергия двух связанных осцилляторов. Черными пунктирами показаны уровни *не* связанных осцилляторов, расстояние по энергии между ними ω_0 . Из-за связи каждый уровень расщепляется на 2 подуровня (красные линии), разнесенных на $2g$.

Для этого уровень g должен быть долгоживущим, чтобы можно было пренебречь переходами на уровни ниже уровня g . Переходы выше уровня e имеют значительно отличающуюся частоту перехода и поэтому маловероятны.

Чем выше находятся выбранные уровни g , e в атоме, тем меньше частота перехода между ними. Это удобно, если надо использовать частоту перехода в СВЧ диапазоне (переходы между нижними уровнями в атомах лежат в оптическом диапазоне).

1.1.3 Два связанных осциллятора

Два связанных осциллятора тоже могут рассматриваться как двухуровневая система, если по условиям они имеют один квант энергии на двоих и могут только обмениваться им.

Выписываем гамильтониан и уравнения эволюции системы:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (1.4a)$$

$$\mathcal{H}_0 = \hbar\omega_0(\mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_2 + 1), \quad (1.4b)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\hbar g(\mathbf{a}_1^\dagger \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2^\dagger \mathbf{a}_1). \quad (1.4c)$$

Очевидно, что вводя операторы \mathbf{b}_\pm нормальных мод можно записать гамильтониан в виде

$$\mathbf{b}_+ = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{b}_- = \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{\sqrt{2}}, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{H} = \hbar(\omega_0 - g)\mathbf{b}_+^\dagger \mathbf{b}_+ + \hbar(\omega_0 + g)\mathbf{b}_-^\dagger \mathbf{b}_- \quad (1.6)$$

В интересующем нас случае, когда есть один квант на два осциллятора, в старом базисе волновую функцию ищем в виде суперпозиции

$$|\Psi\rangle = \psi_R(t) \cdot |0|1\rangle + \psi_L(t) \cdot |1|0\rangle, \quad (1.7)$$

Пусть в начальный момент

$$\psi_R(0) = 0, \quad \psi_L(0) = 1, \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow \psi_R(t) = i \sin(2gt), \quad \psi_L(t) = \cos(2gt) \quad (1.9)$$

Задача (1).

Гамильтониан взаимодействия (1.4) соответствует ситуации, когда общее число квантов сохраняется (воздействия, приводящие к рождению новых квантов в системе мы исключаем), мы можем записать гамильтониан двух связанных осцилляторов в “двухуровневом” виде:

$$\mathcal{H} = 2\hbar\omega_0 \hat{I} - \hbar g \hat{\sigma}_x \quad (1.10)$$

Здесь σ_x один из операторов Паули (см. ниже в этой главе). Очевидно, что первый член может быть благополучно опущен.

1.2 Спиновые операторы и собственные вектора

Для описания двухуровневых систем используют математический аппарат на базе матриц Паули, которые мы рассматриваем ниже.

1.2.1 Матрицы Паули

Поскольку собственных значений энергии и соответствующих им собственных состояний только два (двумерное гильбертово пространство), то любые операторы для двухуровневых систем могут быть представлены в виде матриц 2×2 . Если наложить еще условие эрмитовости, то общая запись таких операторов будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} = \frac{a+c}{2} \hat{I} + \frac{a-c}{2} \hat{\sigma}_z + \Re(b) \hat{\sigma}_x + \Im(b) \hat{\sigma}_y, \quad (1.11)$$

где \mathbf{a}, \mathbf{c} — произвольные действительные числа, \mathbf{b} — произвольное комплексное число, $\hat{\mathbf{I}}$ — единичная матрица, а $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ — спиновые матрицы Паули:

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.12a)$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.12b)$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.12c)$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.12d)$$

Другими словами, эти операторы образуют базис в пространстве матриц 2×2 .

Компоненты оператора спина пропорциональны матрицам Паули:

$$\hat{\mathbf{s}}_{x,y,z} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_{x,y,z}. \quad (1.13)$$

Собственные состояния оператора σ_z :

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \sigma_z |z_+\rangle = \lambda_+ |z_+\rangle, \quad \lambda_+ = +1 \quad (1.14)$$

$$|z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \sigma_z |z_-\rangle = \lambda_- |z_-\rangle, \quad \lambda_- = -1. \quad (1.15)$$

Гамильтониан:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z, \quad \omega_0 = \frac{eH}{mc}, \quad (1.16)$$

здесь ω_0 — частота перехода между уровнями атома.

Для спиновых операторов выполняются следующие коммутационные и анти-коммутационные соотношения:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sigma_k, \quad i, j, k \sim x, y, z \quad (1.17)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}, \quad (1.18)$$

Задачи (2), (3), (4), (5), (6). См. также Приложение А.

1.2.2 Операторы рождения и уничтожения

Удобно ввести следующие операторы

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.19a)$$

$$\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19b)$$

Это не эрмитовы операторы (аналог операторов \mathbf{a} , \mathbf{a}^+ для поля). Для них справедливы следующие формулы

$$\hat{\sigma}_+|z_-\rangle = |z_+\rangle, \quad \hat{\sigma}_+|z_+\rangle = 0, \quad (1.20a)$$

$$\hat{\sigma}_-|z_+\rangle = |z_-\rangle, \quad \hat{\sigma}_-|z_-\rangle = 0, \quad (1.20b)$$

Из соотношений (1.20a, 1.20b) следует, что операторы σ_+ и σ_- можно рассматривать как операторы рождения и уничтожения фермионов. Из этих соотношений виден физический смысл, скажем, оператора рождения σ_+ — он переводит частицу из нижнего состояния в верхнее (рождение), но из верхнего переводить еще выше некуда.

Выпишем коммутаторы и анти-коммутаторы

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \sigma_z, \quad \{\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-\} = \hat{1}, \quad (1.21a)$$

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_z] = -2\hat{\sigma}_+, \quad [\hat{\sigma}_-, \hat{\sigma}_z] = 2\sigma_-, \quad (1.21b)$$

Задачи (7), (8).

Понятно, что любой оператор $\sigma_{x,y,z}$ может быть выражен через операторы σ_+ и σ_- . Например, гамильтониан двухуровневой частицы может быть записан в различных эквивалентных видах:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \cdot \sigma_z = \hbar\omega_0 \left(\sigma_+\sigma_- - \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega_0 \left(\sigma_-\sigma_+ + \frac{1}{2} \right).$$

Выпишем уравнение движения:

$$i\hbar\dot{\sigma}_+ = [\sigma_+, \mathcal{H}] = \hbar\omega_0[\sigma_+, \sigma_z/2],$$

$$\dot{\sigma}_+ = i\omega_0\sigma_+, \quad \Rightarrow \quad \sigma_+(t) = \sigma_+(0)e^{i\omega_0 t} \quad (1.22)$$

$$\dot{\sigma}_- = -i\omega_0\sigma_-, \quad \Rightarrow \quad \sigma_-(t) = \sigma_-(0)e^{-i\omega_0 t} \quad (1.23)$$

Здесь видна аналогия с операторами рождения и уничтожения \mathbf{a}^\dagger , \mathbf{a} осциллятора, их уравнения свободной эволюции подобны.

1.3 Атом в переменном э.м. классическом поле

Рассмотрим двухуровневый атом, т.е. во всем многообразии уровней атома мы рассматриваем только два уровня

с частотой перехода ω_a . Тогда оператор σ_z будет описывать, на каком уровне находится атом. Обозначим электрический дипольный момент перехода атома \vec{d} . Пусть приложено электрическое поле E_0 частоты ω_e направленное, например, по оси x . Выписываем гамильтониан, используя дипольное приближение:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad \mathcal{H}_A = \frac{\hbar\omega_a}{2} \cdot \sigma_z, \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}} &= d_x E_0 \cos \omega_e t = d_0 E_0 \sigma_x \cos \omega_e t = \\ &= 2\hbar g (\sigma_+ + \sigma_-) \cos \omega_e t, \quad \hbar g = \frac{d_0 E_0}{2}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь мы приняли, что дипольный момент перехода равен $d_x = d_0 \sigma_x$. Теперь выписываем уравнения движения для операторов в представлении Гейзенберга:

$$\dot{\sigma}_+ = i\omega_a \sigma_+ - 2ig\sigma_z \cos \omega_e t, \quad (1.26)$$

$$\sigma_+ \rightarrow \sigma_+ e^{i\omega_a t}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma}_+ = -ig\sigma_z e^{i(\omega_e - \omega_a)t} \quad (1.27)$$

$$\dot{\sigma}_- = -i\omega_a \sigma_- + 2ig\sigma_z \cos \omega_e t, \quad (1.28)$$

$$\sigma_- \rightarrow \sigma_- e^{-i\omega_a t}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma}_- = ig\sigma_z e^{-i(\omega_e - \omega_a)t} \quad (1.29)$$

Мы видим, что уравнения для операторов σ_{\pm} нелинейны. Действительно, из коммутационных соотношений (1.21) можно найти σ_z

$$\sigma_z = \sigma_+ \sigma_- - \frac{1}{2} \quad (1.30)$$

и подставить в (1.27) и (1.29). В результате получатся нелинейные уравнения. Поэтому операторные уравнения в представлении Гейзенберга использовать весьма неудобно.

Для двухуровневой системы значительно легче решить уравнение Шредингера. Рассмотрим эволюцию состояния, заданного вектором $|\psi\rangle = \psi_+|z_+\rangle + \psi_-|z_-\rangle$. Выпишем уравнение Шредингера в компонентах (здесь, естественно, $\psi_+ = \psi_+(\mathbf{t})$ и $\psi_- = \psi_-(\mathbf{t})$ есть \mathbf{c} -числа):

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t|\psi\rangle &= \mathcal{H}|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = \psi_+|z_+\rangle + \psi_-|z_-\rangle \\ \mathcal{H} &= \hbar\omega_a \frac{\sigma_z}{2} + 2\hbar g (\sigma_+ + \sigma_-) \cos \omega_e t, \\ i\dot{\psi}_+ &= +\frac{\omega_a}{2}\psi_+ + 2g\psi_- \cos \omega_e t, \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$i\dot{\psi}_- = -\frac{\omega_a}{2}\psi_- + 2g\psi_+ \cos \omega_e t, \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \psi_+ &= \chi_+ e^{-i\omega_a t/2}, \quad \psi_- = \chi_- e^{i\omega_a t/2}, \\ i\dot{\chi}_+ &= g\chi_- e^{-i(\omega_e - \omega_a)t}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$i\dot{\chi}_- = g\chi_+ e^{i(\omega_e - \omega_a)t} \quad (1.34)$$

В последних уравнениях мы отбросили быстро осциллирующие члены $\sim e^{\pm(\omega_e + \omega_a)t}$.

1.3.1 Резонанс $\omega_a = \omega_e$

В резонансном случае $\omega_a = \omega_e$ можно сразу выписать решение:

$$\chi_+ = Ae^{igt} + Be^{-igt}, \quad (1.35a)$$

$$\chi_- = -Ae^{igt} + Be^{-igt} \quad (1.35b)$$

Для наиболее наглядного случая, когда первоначально атом находился, например, в состоянии $|z_+\rangle$ (т.е. $\chi_+(0) =$

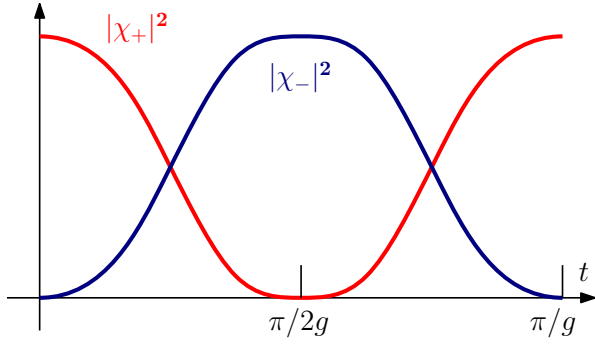


Рис. 1.2: Зависимость населенностей верхнего и нижнего уровней атома в классическом резонансном э.м. поле (1.36). Первоначально атом находился на верхнем уровне ($\chi_+(0) = 1$, $\chi_-(0) = 0$).

1, $\chi_-(0) = 0$) получаем:

$$\chi_+ = \cos gt, \quad (1.36a)$$

$$\chi_- = -i \sin gt \quad (1.36b)$$

Величину g называют частотой Раби. На рис. 1.2 представлена зависимость населенностей верхнего и нижнего уровней атома для этого частного случая. (Иногда частотой Раби называют величину $2g$.)

Рассмотрим другой пример, пусть начальные условия есть

$$\chi_+(0) = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad \chi_-(0) = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \quad (1.37)$$

Можно показать, что можно так подобрать фазу ϕ , что населенности $|\chi_{\pm}|^2$ будут оставаться постоянными, несмотря на действие внешнего поля.

Задача (10).

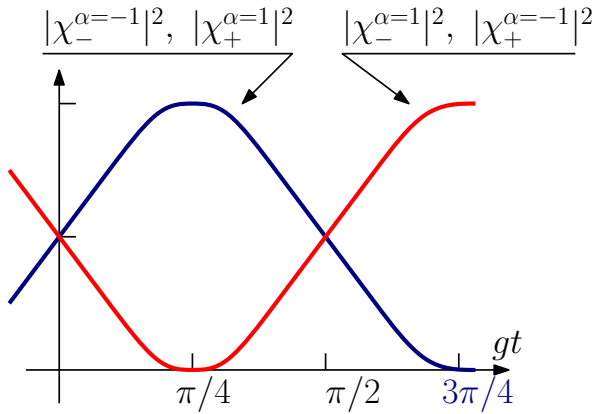


Рис. 1.3: В начальный момент двухуровневая система находится “посередине” (1.38). Однако дальнейшая эволюция зависит от знака параметра α .

1.3.2 Фаза состояния двухуровневой системы

Рассмотрим, как влияет фаза двухуровневой системы (в начальный момент времени) на ход эволюции системы. В качестве примера рассмотрим частный случай начальных условий (1.37):

$$\chi_+(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \chi_-(0) = \frac{\alpha i}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \pm 1 \quad (1.38)$$

Из уравнений (1.35) получаем

$$A = \frac{1 - i\alpha}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1 + i\alpha}{2\sqrt{2}}, \quad (1.39)$$

$$\chi_+ = \frac{\cos gt}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha \sin gt}{\sqrt{2}} = \begin{cases} \sin(gt + \frac{\pi}{4}), & \text{при } \alpha = 1, \\ \cos(gt + \frac{\pi}{4}), & \text{при } \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\chi_- = i \left[\frac{\alpha \cos gt}{\sqrt{2}} - \frac{\sin gt}{\sqrt{2}} \right] = \begin{cases} i \cos(gt + \frac{\pi}{4}), & \text{при } \alpha = 1, \\ -i \sin(gt + \frac{\pi}{4}), & \text{при } \alpha = -1 \end{cases}$$

Мы видим, что первоначально двухуровневая система

находится “посередине”, но дальнейшая эволюция строго зависит от знака параметра α :

- При $\alpha = 1$ система идет “вверх” и в момент времени $gt = \pi/4$ она переходит в верхнее состояние $|z_+\rangle$.
- При $\alpha = -1$ система идет “вниз” и в момент времени $gt = \pi/4$ она переходит в нижнее состояние $|z_-\rangle$.

При нерезонансном воздействии биения Раби будут неполными (населенность не спадает до нуля) — задача (9). В принципе вычисления подобны тем, что приведены в следующем разделе 1.4.

1.4 Атом в переменном квантовом поле.

Рассмотрим атом в квантовом поле, точнее атом в квантовом э.м резонаторе (без потерь). Частота перехода атома ω_a , частота резонатора ω_e , объем резонатора V .

1.4.1 Гамильтониан

Выпишем гамильтониан системы, полагая, что диполь атома направлен по оси x , т.е. он пропорционален $\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_-$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (1.40a)$$

$$\mathcal{H}_A = \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z, \quad \mathcal{H}_e = \hbar\omega_e \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right),$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \hat{\mathbf{d}} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{t}), \quad \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_0(\sigma_+ + \sigma_-), \quad (1.40b)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = E_0(\mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^-), \quad E_0 = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_e}{V}}$$

$$\left\{ \frac{\hat{\mathbf{E}}^2 V}{4\pi} = \frac{E_0^2 V 2\mathbf{a}^+ \mathbf{a}}{4\pi} = \hbar\omega_e \mathbf{a}^+ \mathbf{a} \right\}, \quad (1.40c)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \mathbf{d}_0(\sigma_+ + \sigma_-) E_0(\mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^-) = \quad (1.40d)$$

rotating wave approximation:

$$\simeq \hbar k(\mathbf{a}^+ \sigma_- + \mathbf{a} \sigma_+), \quad k = \frac{E_0 \mathbf{d}_0}{\hbar}, \quad (1.40e)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z + \hbar\omega_e \left(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \frac{1}{2} \right) + \hbar k(\mathbf{a}^+ \sigma_- + \mathbf{a} \sigma_+). \quad (1.40f)$$

Уравнения для операторов (в представлении Гейзенберга) будут нелинейными. Поэтому рассмотрим решение уравнения Шредингера. Очевидно, что атом может быть либо в верхнем, либо в нижнем состоянии, а полное число квантов в системе постоянно.

1.4.2 Уравнение Шредингера

Решение уравнения Шредингера будем искать в виде (здесь опять $\psi_+ = \psi_+(\mathbf{t})$ и $\psi_- = \psi_-(\mathbf{t})$ — с-числа):

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle, \quad (1.41)$$

$$|\psi\rangle = \psi_+|z_+\rangle|n-1\rangle + \psi_-|z_-\rangle|n-1\rangle =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ \psi_-|n\rangle \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Это соответствует тому, что квант либо присутствует в двухуровневой системе и осциллятор находится в состоянии $|n-1\rangle$, либо кванта нет в двухуровневой системе и тогда осциллятор — в состоянии $|n\rangle$.

Выпишем отдельно члены:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ \psi_-|n\rangle \end{pmatrix} &= \frac{\hbar\omega_a}{2} \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ -\psi_-|n\rangle \end{pmatrix}, \\ \hbar\omega_e a^+ a \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ \psi_-|n\rangle \end{pmatrix} &= \hbar\omega_e \begin{pmatrix} (n-1)\psi_+|n-1\rangle \\ n\psi_-|n\rangle \end{pmatrix}, \\ \hbar k(a^+ \sigma_- + a \sigma_+) \begin{pmatrix} \psi_+|n-1\rangle \\ \psi_-|n\rangle \end{pmatrix} &= \hbar k \begin{pmatrix} \sqrt{n} \psi_-|n-1\rangle \\ \sqrt{n} \psi_+|n\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Собираем все члены в уравнении (1.41) “построчно” и получаем:

$$\begin{aligned} i\dot{\psi}_+ &= \left[\frac{\omega_a}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right) \omega_e \right] \psi_+ + \sqrt{n} k \psi_-, \\ i\dot{\psi}_- &= \left[-\frac{\omega_a}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega_e \right] \psi_- + \sqrt{n} k \psi_+. \end{aligned}$$

Полагаем, что частоты атома и резонатора близки, но не равны:

$$\omega_a = \omega_e + 2\delta, \quad \delta \ll \omega_e. \quad (1.43)$$

Тогда:

$$\dot{\psi}_+ = -i(n\omega_e + \delta) \psi_+ - i\sqrt{n} k \psi_-, \quad (1.44a)$$

$$\dot{\psi}_- = -i(n\omega_e - \delta) \psi_- - i\sqrt{n} k \psi_+. \quad (1.44b)$$

$$\text{Ищем в виде } \psi_{\pm} = \chi_{\pm} e^{-in\omega_e t}, \quad (1.44c)$$

$$\dot{\chi}_+ = -i\delta \chi_+ - i\sqrt{n} k \chi_-, \quad (1.44d)$$

$$\dot{\chi}_- = +i\delta \chi_- - i\sqrt{n} k \chi_+. \quad (1.44e)$$

В простейшем случае резонанса $\delta = 0$ получаем систему, которая была уже решена в конце раздела 1.3 (см. (1.33, 1.34)), и мы можем сразу выписать решение для случая, когда первоначально атом находился, например, в состоянии $|z_+\rangle$ (т.е. $\chi_+(0) = 1$, $\chi_-(0) = 0$):

$$\begin{aligned} \chi_+ &= \cos G_n t, & G_n &= k\sqrt{n} \\ \chi_- &= -i \sin G_n t \end{aligned}$$

Частоту G_n называют n -квантовой частотой Раби. Зависимость населенностей от времени будет та же, что и на рис. 1.2 с очевидной заменой: $g \rightarrow G_n$.

Подчеркнем, что в рассмотренном случае полное количество квантов в системе фиксировано. Например, мы можем представить ситуацию, когда в резонатор, первоначально находящийся в n -состоянии, влетает атом и через некоторое время вылетает. Тогда по приведенным выше формулам можно легко рассчитать конечные состояния атома и резонатора и наблюдать отчетливые биения Раби. Однако, если резонатор находился не в n -состоянии (которое не так просто получить экспериментально), а в обычном когерентном состоянии (суперпозиция n -состояний), то биения с разными частотами G_n будут накладываться и конечное состояние системы “атом+резонатор” будет более экзотическим.

Конечно, не представляет труда точно рассчитать такое конечное состояние, но, очевидно, что вряд ли стоит надеяться получить отчетливую картину биений в случае небольшой амплитуде α когерентного состояния $|\alpha\rangle$ (при $\alpha \rightarrow \infty$ имеем переход классическому полю).

1.4.3 Нерезонансный случай: $\delta \neq 0$

Ищем решение в виде $\chi_{\pm} \rightarrow \chi_{\pm} e^{\lambda t}$. Подставляя в систему (1.44d, 1.44e), получаем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} \lambda + i\delta & -ik\sqrt{n} \\ -ik\sqrt{n} & \lambda - i\delta \end{vmatrix} = \quad (1.45a)$$

$$= \lambda^2 + \delta^2 + k^2 n, \quad (1.45b)$$

$$\lambda = \pm i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{\delta^2 + k^2 n}. \quad (1.45c)$$

Амплитуды χ_{\pm} ищем в виде

$$\chi_+(t) = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}, \quad (1.45d)$$

$$\chi_-(t) = Ce^{i\Omega t} + De^{-i\Omega t}, \quad (1.45e)$$

Подставляем в исходные уравнения (1.44d, 1.44e) и находим связь

$$C = -\frac{\delta + \Omega}{k\sqrt{n}} A, \quad D = -\frac{\delta - \Omega}{k\sqrt{n}} B. \quad (1.45f)$$

Задаем начальные условия

$$\chi_+(0) = 1 \rightarrow B = 1 - A, \quad (1.45g)$$

$$\chi_-(0) = 0 \rightarrow D = -C \quad (1.45h)$$

Теперь мы можем найти коэффициенты A , B , C , D

$$(1.44d, 1.44e) : C = -\frac{\Omega + \delta}{k\sqrt{n}} A, \quad D = \frac{k\sqrt{n}}{\Omega + \delta} B, \quad (1.46a)$$

$$(1.45h) : B = \left(\frac{\Omega + \delta}{k\sqrt{n}}\right)^2 A, \quad (1.46b)$$

$$(1.45g, 1.46b) : A = \frac{k^2 n}{(\Omega + \delta)^2 + k^2 n}, \quad B = \frac{(\Omega + \delta)^2}{(\Omega + \delta)^2 + k^2 n}, \quad (1.46c)$$

$$C = -\frac{k\sqrt{n}(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + k^2 n}, \quad D = \frac{k\sqrt{n}(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + k^2 n}.$$

Используя эти выражения, можно выписать решение:

$$\chi_+ = \cos \Omega t + i \frac{k^2 n - (\Omega + \delta)^2}{(\Omega + \delta)^2 + k^2 n} \sin \Omega t, \quad (1.47a)$$

$$\chi_- = -i \frac{2k\sqrt{n}(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + k^2 n} \sin \Omega t. \quad (1.47b)$$

Из вида этого решения видим, что в случае резонанса ($\delta = 0$) мы получаем полные биения Раби — 100% модуляция. В случае конечной расстройки величина максимальной населенности нижнего уровня меньше единицы:

$$|\chi_-|^2 = \left(\frac{2k\sqrt{n}(\Omega + \delta)}{(\Omega + \delta)^2 + k^2 n}\right)^2 = \left(\frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}\right)^2 < 1, \quad (1.48)$$

$$\alpha \equiv \frac{k\sqrt{n}}{\Omega + \delta} < 1. \quad (1.49)$$

На рис. 1.4 представлены графики населенностей для резонансного случая $\delta = 0$ (пунктиром) и для случая конеч-

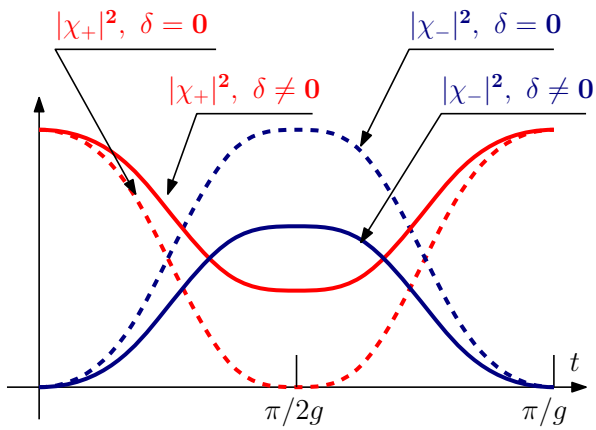


Рис. 1.4: Зависимость населенностей верхнего и нижнего уровней атома в квантовом резонаторе при произвольной расстройке δ . Первоначально атом находился на верхнем уровне ($\chi_+(0) = 1$, $\chi_-(0) = 0$).

ной расстройке $\delta \neq 0$ (сплошная линия) — при увеличении расстройки амплитуда биений уменьшается.

Глава 2

Квантовый парадокс Зенона

Это — красивый эффект, демонстрирующий характерные особенности квантовой механики, точнее квантовой теории измерений. Вначале он назывался квантовый парадокс Зенона или эффект сторожевой собаки и понимался как демонстрация странности и неполности квантовой теории. Позже к нему стали относиться более спокойно просто как к еще одному на первый взгляд парадоксальному следствию квантовой механики и наблюдали экспериментально.

2.1 Точное измерение

Рассмотрим квантовый осциллятор, который первоначально находился в энергетическом состоянии $|\psi\rangle = |n\rangle$. Пусть на осциллятор воздействует что-то (например, сила), что может вызвать переходы на другие уровни и пусть это воз-

действие описывается известным гамильтонианом \mathcal{H} . Решаем уравнение Шредингера, разлагая решение в ряд и выписывая вероятность $W_{nn}(\theta)$ того, что осциллятор останется в n -состоянии через время θ :

$$i\hbar\partial_t|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle, \quad |\psi(0)\rangle = |n\rangle, \quad (2.1a)$$

$$|\psi(\theta)\rangle = \exp\left(\frac{\mathcal{H}\theta}{i\hbar}\right)|n\rangle \approx \left(1 + \frac{\mathcal{H}\theta}{i\hbar} + \frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{H}\theta}{i\hbar}\right]^2\right)|n\rangle, \quad (2.1b)$$

$$W_{nn}(\theta) = |\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle n|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle \approx \quad (2.1c)$$

$$\begin{aligned} &\approx \langle n|\left(1 + \frac{\mathcal{H}\theta}{i\hbar} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{H}\theta}{\hbar}\right]^2\right)|n\rangle\langle n|\left(1 - \frac{\mathcal{H}\theta}{i\hbar} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{H}\theta}{\hbar}\right]^2\right)|n\rangle = \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{\hbar^2}\left(\langle n|\mathcal{H}^2|n\rangle - \langle n|\mathcal{H}|n\rangle^2\right) = 1 - \frac{\theta^2}{\hbar^2}(\Delta\mathcal{E})^2 \quad (2.1d) \end{aligned}$$

Таким образом, если через время θ мы измерим номер уровня (т.е. энергию осциллятора), то с вероятностью $W_{nn}(\theta)$ мы обнаружим осциллятор на начальном уровне n . Пусть через время θ мы опять измерим энергию осциллятора, и так будем измерять ее k раз в течение времени $\tau = k\theta$. Посчитаем вероятность того, что в конце концов осциллятор останется в n -состоянии (произведение вероятностей)¹:

$$W_{nn}(k\theta) = [W_{nn}(\theta)]^k = \left(1 - \frac{\theta^2}{\hbar^2}(\Delta\mathcal{E})^2\right)^{\tau/\theta} \quad (2.2)$$

¹В принципе возможна ситуация, когда осциллятор перешел на верхний (или нижний) уровень, а потом вернулся на первоначальный, но мы такие варианты не рассматриваем.

В пределе $\theta \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ (τ - постоянно):

$$W_{nn}(k\theta) \rightarrow \exp\left(-\frac{\tau\theta}{\hbar^2}(\Delta\mathcal{E})^2\right) \rightarrow 1. \quad (2.3)$$

Здесь мы использовали предел

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a \right\}$$

Таким образом мы получили, что при частом измерении энергии осциллятор *не переходит (!)* с начального уровня². Причина заключается в том, что при каждом измерении мы нарушаем когерентность воздействия (сбиваем фазу). Поясним это с помощью классической аналогии.

2.1.1 Классическая аналогия

Подчеркнем, что приводимые ниже рассуждения ни в коем случае не являются доказательством, а служат лишь аналогией (анalogии — это костыли, на которые опирается здравый смысл, не в силах постичь абстракцию).

Пусть на механический осциллятор (масса m , частота ω_m) действует классическая резонансная сила $F = F_0 \cos \omega_m t$. Известно, что действие такой силы в течение времени вызовет колебания

$$x(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_m} \sin \omega_m t$$

²В качестве шутки физики приводят “чайный” парадокс Зенона: если часто проверять чайник на плите, он никогда не закипит.

Теперь представим себе, что через время θ фаза осциллятора сбивается. При измерении энергии осциллятора он переходит в энергетическое состояние, в котором фаза полностью не определена. Поэтому условие потери фазы является классической аналогией измерения энергии. Далее предположим, что мы сбиваем фазу осциллятора k раз в течение времени $\tau = k\theta$. Тогда естественно, что в течение каждого отрезка θ амплитуда колебаний осциллятора будет получать *случайное приращение* величины Δx_θ , а полная амплитуда через время τ будет равна:

$$\Delta x_\theta = \frac{F_0 \theta}{2m\omega_m}, \quad (2.4)$$

$$\sqrt{\langle x^2(\tau) \rangle} = \Delta x_\theta \sqrt{\frac{\tau}{\theta}} = \frac{F_0 \sqrt{\tau \theta}}{2m\omega_m} \quad (2.5)$$

Заметим, что при стремлении $\theta \rightarrow 0$ при конечном τ амплитуда колебаний $\sqrt{\langle x^2(\tau) \rangle} \rightarrow 0$ (!). Таким образом часто сбивая фазу, мы не даем развиваться резонансу и можем полностью его затормозить.

Еще раз подчеркнем, что это лишь аналогия (ведь с точки зрения классики здесь нет ничего необычного).

2.2 Элементы теории непрерывных квантовых измерений

Для более строгого анализа необходимы сведения из теории измерения и в этом разделе мы рассмотрим вывод уравне-

ния для матрицы плотности системы, в которой непрерывно измеряется некоторая наблюдаемая \hat{q} .

2.2.1 О селективном и неселективном подходе к описанию измерения

При рассмотрении квантовых измерений, в зависимости от того, какие именно детали поведения участвующих в измерении квантовых систем нас интересуют, используются два подхода — более простой неселективный и более сложный селективный. Чтобы уяснить разницу между ними, рассмотрим простой пример.

Пусть имеется квантовая частица, приготовленная в состоянии со средними значениями координаты и импульса $\langle x \rangle_0$ и $\langle p \rangle_0$ и неопределённостями этих наблюдаемых $(\Delta x)_0$ и $(\Delta p)_0$. Пусть затем у этой частицы измеряется координата с ошибкой $(\Delta x)_{\text{meas}}$. Будем считать для простоты, что $(\Delta x)_{\text{meas}} \ll (\Delta x)_0$. Импульс при этом, естественно, возмущается на величину $(\Delta p)_{\text{pert}} \approx \hbar/2(\Delta x)_{\text{meas}} \gg (\Delta p)_0$.

Каковы будут средние значения и неопределенности координаты и импульса этой частицы после измерения?

Ответ на этот вопрос будет разным для разных наблюдателей. Для человека, который узнал показание измерителя (равное, например, x_1), среднее значение координаты частицы после измерения будет близко к x_1 , среднее значение импульса останется равным $\langle p \rangle_0$, а неопределенности

этих величин будут близки к $(\Delta x)_{\text{meas}}$ и $(\Delta p)_{\text{pert}}$.

В то же время для человека, которые знает, что измерение произведено, знает начальное состояние частицы и параметры измерителя, но не знает, какой результат был получен при измерении, средние значения координаты и импульса останутся прежними, $\langle x \rangle_0$ и $\langle p \rangle_0$, неопределенность координаты также не изменится и останется равной $(\Delta x)_0$, а неопределенность импульса возрастет и станет примерно равной $(\Delta p)_{\text{pert}}$.

Описание измерения, соответствующее информации, имеющейся у первого наблюдателя, то есть учитывающее полученный при измерении результат, называется селективным, а то, которое соответствует информации, имеющейся у второго наблюдателя, — неселективным.

Можно показать, что если частица до измерения находилась в чистом состоянии, и измерение было идеальным (то есть все вносимые им неопределенности были чисто квантовыми), то для первого наблюдателя частица после измерения перейдет в также чистое состояние $|\psi(x_1)\rangle$, зависящее, естественно, от полученного результата измерения x_1 .

Для второго наблюдателя состояние частицы в результате измерения станет смешанным и равным

$$\hat{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} w(x_1) |\psi(x_1)\rangle \langle \psi(x_1)| dx_1, \quad (2.6)$$

где $w(x_1)$ — априорная вероятность получить при измерении результат x_1 . Для него все возможные результаты изме-

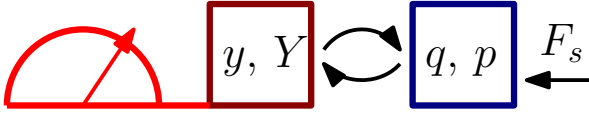


Рис. 2.1: Схема квантового измерения. Измеряемая координата q объекта (синий квадрат), сопряженный ей импульс p . На объект действует внешнее воздействие, например, сигнальная сила F_s . Квантовая считывающая система (КСС, коричневый квадрат, ее координата y и импульс Y) взаимодействует с объектом. Это взаимодействие описывается гамильтонианом (2.7). Затем взаимодействие прекращается и результат регистрируется классическим наблюдателем (красная приборная стрелка).

рения как бы оказываются свалены в общую кучу, отсюда название “неселективный” подход.

2.2.2 Уравнение для матрицы плотности

Пусть измерения наблюдаемой q нашей системы (см. рис. 2.1), описываемой гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}$ происходят с интервалом θ в моменты времени $t_1, t_2 \dots t_i, t_{i+1}, \dots$. Эта последовательность измерений перейдет в непрерывное измерение в пределе $\theta \rightarrow 0$.

Рассмотрим переход системы от момента времени t_j к моменту t_{j+1} . На этом интервале ее гамильтониан равен

$$\hat{\mathcal{H}}_j = \hat{\mathcal{H}}_j - qy_j. \quad (2.7)$$

Здесь $\hat{\mathcal{H}}_j$ — гамильтониан, описывающий эволюцию изолированной системы, $\hat{q}\hat{y}_j$ — связь с измерителем, \hat{y}_j — переменная квантовой считывающей системы (КСС), которая

разрушающим образом измеряется. Здесь зависимость $\hat{\mathcal{H}}_j$ от индекса j отражает возможную зависимость от времени.

При измерении нельзя использовать описание с помощью волновой функции (т.к. нас будет интересовать результат эволюции, усредненный по КСС), поэтому надо пользоваться матрицей плотности. Запишем матрицу плотности в момент времени \mathbf{t}_j в виде разложения по собственным векторам $|\psi_k\rangle$ наблюдаемой \hat{q} , эволюцию описываем с помощью оператора эволюции \hat{U}_j , который раскладываем в ряд:

$$\hat{\rho}_j = \text{Sp}_{\text{КСС}} \left(\sum_{k,m} |\psi_k\rangle \rho_{km}^{(j)} \langle \psi_m| \right), \quad (2.8a)$$

$$\hat{\rho}_{j+1} = \text{Sp}_{\text{КСС}} \left(\sum_{k,m} \hat{U}_j |\psi_k\rangle \rho_{km}^{(j)} \langle \psi_m| \hat{U}_j^+ \right) = \text{Sp}_{\text{КСС}} (\hat{U}_j \hat{\rho}_j \hat{U}_j^+), \quad (2.8b)$$

$$\hat{U}_j = \exp \left(\int \frac{\hat{\mathcal{H}}_j}{i\hbar} dt \right) \approx 1 + \hat{\mathcal{H}}_j \frac{\theta}{i\hbar} - \hat{\mathcal{H}}_j^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} = \quad (2.8c)$$

$$= 1 + (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j) \frac{\theta}{i\hbar} - (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2}, \quad (2.8d)$$

$$\hat{\Upsilon}_{j+1} = (\hat{U}_j \hat{\rho}_j \hat{U}_j^+) \approx \quad (2.8e)$$

$$\approx \left(1 + \hat{\mathcal{H}}_j \frac{\theta}{i\hbar} - \hat{\mathcal{H}}_j^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \right) \hat{\rho}_j \left(1 - \hat{\mathcal{H}}_j \frac{\theta}{i\hbar} - \hat{\mathcal{H}}_j^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \right) \quad (2.8f)$$

$$= \left(1 + (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j) \frac{\theta}{i\hbar} - (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \right) \hat{\rho}_j \quad (2.8g)$$

$$\times \left(1 - (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j) \frac{\theta}{i\hbar} - (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)^2 \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \right) = \quad (2.8h)$$

$$= \hat{\rho}_j + \frac{\theta}{i\hbar} [(\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)\hat{\rho}_j - \hat{\rho}_j(\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)] + \quad (2.8i)$$

$$+ \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \left[-(\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)^2 \hat{\rho}_j - \hat{\rho}_j (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j)^2 + \right. \quad (2.8j) \\ \left. + 2(\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j) \hat{\rho}_j (\hat{\mathcal{H}}_j - \hat{q}\hat{y}_j) \right],$$

Мы должны усреднить по КСС. Полагаем $\langle \hat{y}_j \rangle = 0$,

$$\hat{\rho}_{j+1} = \text{Sp}_{\text{КСС}} \hat{\Upsilon}_{j+1} = \hat{\rho}_j + \frac{\theta}{i\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_j, \hat{\rho}_j] - \quad (2.8k)$$

$$- \frac{\theta^2}{2\hbar^2} \left([\hat{\mathcal{H}}_j, [\hat{\mathcal{H}}_j, \hat{\rho}_j]] + \langle \hat{y}^2 \rangle [\hat{q}, [\hat{q}, \hat{\rho}_j]] \right). \quad (2.8l)$$

Теперь мы можем перейти к пределу для непрерывного измерения:

$$\theta \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{\rho}_{j+1} - \hat{\rho}_j}{\theta} \rightarrow \partial_t \hat{\rho}, \quad (2.9a)$$

$$\theta \langle \hat{y}^2 \rangle \rightarrow \sigma_F^2(t), \quad (2.9b)$$

и переписать уравнение (2.8):

$$\partial_t \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}] - \frac{\sigma_F^2(t)}{2\hbar^2} [\hat{q}, [\hat{q}, \hat{\rho}]] \quad (2.10)$$

Предельный переход (2.9) означает, что непрерывное измерение можно представить как последовательность неточных, но часто повторяющихся измерений. При конечном времени измерения это дает конечную точность (это описывается конечной величиной σ_F).

2.2.3 Физический смысл σ_F

Рассмотрим физический смысл величины σ_F . Для этого вернемся к дискретному описанию и вычислим как изменился

импульс \hat{p}_j после j -ого измерения (мы опускаем в операторе эволюции член $\sim \mathcal{H}_j$, интересуясь лишь отклонением от свободной эволюции):

$$\hat{p}_{j+1} = \hat{U}_j^+ \hat{p}_j \hat{U}_j \simeq \left(1 + \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q} \hat{y}_j\right) \hat{p}_j \left(1 - \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q} \hat{y}_j\right) \simeq \quad (2.11a)$$

$$\simeq \hat{p}_j + \frac{\theta}{i\hbar} \hat{y}_j \underbrace{[\hat{q}, \hat{p}_j]}_{=i\hbar} = \hat{p}_j + \theta \hat{y}_j, \quad (2.11b)$$

$$\Delta p_j^2 = \langle (p_{j+1} - p_j)^2 \rangle = \theta \sigma_F^2, \quad \langle \hat{y}_j \hat{y}_i \rangle = \theta \sigma_F^2 \delta_{ij}, \quad (2.11c)$$

$$\theta \rightarrow 0, \quad \partial_t \hat{p} = \hat{y}, \quad \langle \hat{y}(t) \hat{y}(t') \rangle = \sigma_F^2 \delta(t - t') \quad (2.11d)$$

Мы видим, что параметр σ_F описывает белый шум обратного влияния, в частности, σ_F^2 есть спектральная плотность белого шума случайной силы обратного флуктуационного влияния.

Для того чтобы выяснить, как параметр σ_F связан с ошибкой измерения, рассмотрим эволюцию в КСС. Пусть \hat{y}_j координата, а \hat{Y}_j — импульс в КСС. Опять вернемся к дискретному описанию и вычислим, как изменился импульс \hat{Y}_j после j -ого измерения:

$$\hat{Y}_{j+1} = \hat{U}_j^+ \hat{Y}_j \hat{U}_j \simeq \left(1 + \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q} \hat{y}_j\right) \hat{Y}_j \left(1 - \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q} \hat{y}_j\right) \simeq \quad (2.12)$$

$$\simeq \hat{Y}_j + \frac{\theta}{i\hbar} \hat{q} \underbrace{[\hat{y}_j, \hat{Y}_j]}_{=i\hbar} = \hat{Y}_j + \theta \hat{q}, \quad (2.13)$$

Отсюда мы видим, что ошибка измерения Δq связана с неопределенностью импульса ΔY_j :

$$(\Delta q)^2 = \frac{(\Delta Y_j)^2}{\theta^2}. \quad (2.14)$$

В пределе $\theta \rightarrow 0$ получаем ошибку измерения за конечное время t :

$$\theta \rightarrow 0, \quad \Rightarrow \quad (\Delta q)_t^2 = \frac{(\Delta Y)^2}{\theta^2} \times \frac{\theta}{t} = \frac{(\Delta Y)^2}{\theta t} = \quad (2.15)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4\langle y^2 \rangle \theta t} = \frac{\hbar^2}{4\sigma_F^2 t} = \frac{\sigma_q^2}{t} \quad (2.16)$$

Здесь параметр σ_q описывает шумы измерения. Постоянная величина σ_q^2 соответствует спектральной плотности белого измерительного шума.

Из последнего равенства также следует соотношение неопределенностей для непрерывного измерения:

$$\sigma_q \sigma_F \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.17)$$

2.3 Парадокс Зенона в двухуровневой системе

Рассмотрим парадокс Зенона для двухуровневой частицы, находящейся в классическом резонансном поле.

Используя обозначения и результаты раздела 1.3, выпишем сразу гамильтониан и эволюцию состояния:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad \mathcal{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z, \quad \mathcal{H}_{\text{int}} = 2\hbar g \sigma_x \cos \omega_0 t,$$

$$|\Psi(0)\rangle = \psi_+ |z_+\rangle + \psi_- |z_-\rangle, \quad |\Psi(t)\rangle = \mathbf{U}|\Psi(0)\rangle, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{U}|z_+\rangle = \cos gt |z_+\rangle + i \sin gt |z_-\rangle, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{U}|z_-\rangle = \cos gt |z_-\rangle + i \sin gt |z_+\rangle, \quad (2.20)$$

Теперь включаем измерение — пусть мы измеряем величину σ_z . Тогда имеем уравнение для матрицы плотности (2.10):

$$\partial_t \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}] - \frac{\sigma_F^2(t)}{2\hbar^2} [\hat{\sigma}_z, [\hat{\sigma}_z, \hat{\rho}]] \quad (2.21)$$

Ищем матрицу плотности в виде $\hat{\rho}$ или $\hat{\rho}_1$:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \cdot \hat{I} + \rho_x \hat{\sigma}_x + \rho_y \hat{\sigma}_y + \rho_z \hat{\sigma}_z, \quad (2.22)$$

$$\text{или } \hat{\rho}_1 = \frac{1}{2} \cdot \hat{I} + \rho_+ \hat{\sigma}_+ + \rho_- \hat{\sigma}_- + \rho_z \hat{\sigma}_z, \quad (2.23)$$

Здесь ρ_x, ρ_y, ρ_z — с-числа. В общем случае матрица плотности описывается через числа ρ_i следующим образом:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \rho_z & \rho_x - i\rho_y \\ \rho_x + i\rho_y & \frac{1}{2} - \rho_z \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \rho_z & \rho_+ \\ \rho_- & \frac{1}{2} - \rho_z \end{pmatrix}$$

Здесь использованы определения (1.12) и (1.19).

Нас интересует вероятность нахождения на верхнем уровне, если и первоначально система была на верхнем уровне:

$$\rho_z(0) = \frac{1}{2}, \quad \rho_x = \rho_y = 0, \quad \text{или } \rho_+ = \rho_- = 0. \quad (2.24)$$

Ниже мы будем пользоваться матрицей плотности в виде $\hat{\rho}_1$ — это более удобно. Расписываем уравнение (2.21), пользуясь коммутаторами (1.21):

$$\dot{\rho}_+ \hat{\sigma}_+ + \dot{\rho}_- \hat{\sigma}_- + \dot{\rho}_z \hat{\sigma}_z = \quad (2.25a)$$

$$= i\omega_0 \left(-\rho_+ \hat{\sigma}_+ + \rho_- \hat{\sigma}_- \right) + \quad (2.25b)$$

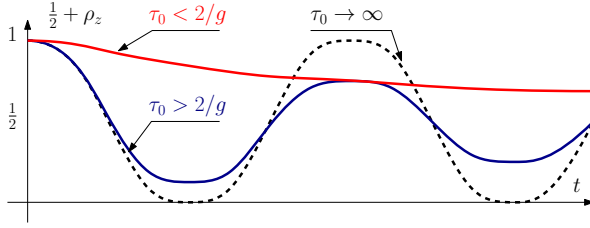


Рис. 2.2: Зависимость населенности верхнего уровня двух-уровневой системы при различных параметрах τ_0 . Случай $\tau \rightarrow \infty$ соответствует отсутствию измерения.

$$\begin{aligned}
 & + 2ig \cos \omega_0 t \left(2\rho_z \hat{\sigma}_+ - 2\rho_z \hat{\sigma}_- + (\rho_+ - \rho_-) \hat{\sigma}_z \right) + \\
 & - \frac{2}{\tau_0} (\rho_+ \hat{\sigma}_+ + \rho_- \hat{\sigma}_-), \quad \frac{1}{\tau_0} = \frac{\sigma_F^2(t)}{\hbar^2} \quad (2.25c)
 \end{aligned}$$

Приравнивая члены с одинаковыми операторами σ , получаем систему уравнений:

$$\dot{\rho}_+ = -i\omega_0 \rho_+ - \frac{2}{\tau_0} \rho_+ + 4ig\rho_z \cos \omega_0 t \quad (2.26a)$$

$$\dot{\rho}_- = +i\omega_0 \rho_- - \frac{2}{\tau_0} \rho_- - 4ig\rho_z \cos \omega_0 t \quad (2.26b)$$

$$\dot{\rho}_z = 2ig (\rho_+ - \rho_-) \cos \omega_0 t \quad (2.26c)$$

Далее надо ввести медленные амплитуды $\rho_{\pm} = e^{\pm i\omega_0 t} r_{\pm}$, их подставить в (2.26) и отбросить быстро осциллирующие члены. Полученную систему можно свести к уравнению второго порядка для ρ_z

$$\ddot{\rho}_z + \frac{2}{\tau_0} \dot{\rho}_z + 4g^2 \rho_z = 0, \quad \rho_z(0) = \frac{1}{2}, \quad \dot{\rho}_z(0) = 0 \quad (2.27)$$

Здесь начальные условия получены из (2.24) и уравнения (2.26c).

Это уравнение колебаний с частотой $2g$ и временем релаксации τ_0 . Напомним, что время τ_0 характеризует ошибку измерения. Для случая малого $\tau_0 \ll 1/2g$ (это означает измерение с малой точностью) получаем для начальных условий (2.24):

$$2g\tau_0 \ll 1, \quad \Omega = \sqrt{4g^2 - \frac{1}{\tau_0^2}}, \quad (2.28)$$

$$\rho_z = \frac{1}{2} \left(\cos \Omega t + \frac{\sin \Omega t}{\Omega \tau_0} \right) e^{-t/\tau_0}. \quad (2.29)$$

Для противоположного случая большого $\tau_0 \gg 1/2g$ (это означает измерение с большой точностью) получаем:

$$2g\tau_0 \gg 1, \quad \Rightarrow \quad \rho_z = \frac{\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}}{2(\tau_1 - \tau_2)}, \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} - \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - 4g^2}, \quad \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_0} + \sqrt{\frac{1}{\tau_0^2} - 4g^2}. \quad (2.31)$$

На рис. 2.2 приведены графики зависимости эволюции населенности верхнего уровня в зависимости от точности измерения. Видно, что при увеличении точности измерения ($\tau_0 \rightarrow 0$) система сколь угодно долго остается на верхнем уровне.

Глава 3

Элементы классической теории информации

3.1 Количество информации

Состояние классических логических элементов, элементов памяти, а также различных каналов связи описывается небольшим количеством макроскопических параметров, которых, однако недостаточно для того, чтобы считать состояние такой физической системы полностью определенной, поскольку оно представляет собой совокупность огромного числа не доступных контролю микросостояний. Для отражения этого понятия в статистической физике вводится понятие *энтропии* системы S (мы будем называть ее физической энтропией):

$$S = \kappa \ln \Delta\Gamma, \quad (3.1)$$

где κ — постоянная Больцмана, $\Delta\Gamma$ — статвес, равный числу микросостояний, охватываемым макросостоянием системы.

С понятием физической энтропии тесно связано понятие информационной энтропии H , которая с классической точки зрения является мерой недостатка информации о системе. Информационную энтропию Шеннона определяют следующим образом [1]:

$$H = \log_2 \Delta\Gamma = - \sum p_n \log_2 p_n, \quad \sum p_n = 1, \quad (3.2)$$

где p_n — вероятность n -го микросостояния макроскопической системы.

Количество информации I (или просто информация) о состоянии классической системы, получаемое в результате измерений внешним прибором определяется как разность начальной информационной энтропии H_0 и информационной энтропии состояния системы после измерения H :

$$I = H_0 - H.$$

В идеальном случае, когда отсутствуют шумы и помехи, создаваемые внешними источниками в канале связи, конечное распределение вероятностей сводится к определенному значению

$$p_n = \begin{cases} 1, & \text{if } n = n_0 \\ 0, & \text{if } n \neq n_0 \end{cases},$$

т.е. $H = 0$ и максимальное значение энтропии будет определяться соотношением $I_{\max} = H_0$. Таким образом информационная энтропия Шеннона имеет смысл максимальной информации в системе, которая может быть определена в идеальных условиях отсутствия шумов и помех.

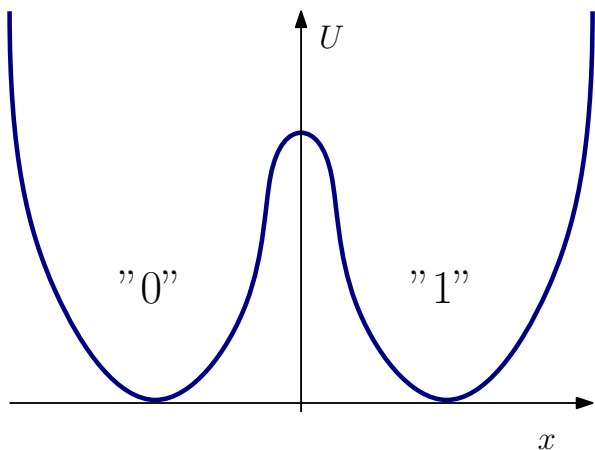


Рис. 3.1: Физическая модель логического элемента, имеющего два устойчивых положения. Частица может находиться в двух устойчивых положениях “0” и “1”.

Рассмотрим в качестве примера логический элемент, который может находиться в одном из двух равновероятных состояниях. Обозначим их **0** и **1**. В качестве физической модели можно представить себе двугорбую яму (см. рис. 3.1):

Нетрудно определить, что для этого случая $\Delta\Gamma = 2$ и максимальное количество информации равно единице, которую принято называть *битом*

$$I_{\max} = \log_2 \Delta\Gamma = 1 \text{ бит}$$

Таким образом, информационная энтропия определяет число битов, которое требуется для кодирования информации в рассматриваемой системе или сообщении.

Изменение физической энтропии двухуровневого элемента, соответствующее изменению информации на один бит равно (т.е. уменьшение энтропии при точном измерении где

— справа или слева — находится частица на рис. 3.1):

$$\Delta S = -\varkappa \ln 2$$

При этом сам элемент переключается в неравновесное состояние относительно окружения.

При переключении элемента над ним производится работа ΔA , которая согласно первому началу термодинамики идет на изменение его внутренней энергии ΔU и на тепло $-\Delta Q$, передаваемое термостату:

$$\Delta A = \Delta U - \Delta Q = \Delta U + T\Delta S_T$$

где $-\Delta Q = T\Delta S_T$, $T = \text{const}$ — температура термостата, ΔS_T — изменение энтропии термостата.

Минимальная работа ΔA_{\min} будет в случае, когда суммарная энтропия логического элемента и термостата не изменяется (так называемый термодинамически обратимый процесс), т.е. $\Delta S + \Delta S_T = 0$ и температура T постоянна:

$$\Delta U - \Delta Q \geq \Delta A_{\min} = \Delta(U - TS) = \Delta F, \quad (3.3)$$

где ΔF — изменение свободной энергии логического элемента, определяющая ту часть изменения внутренней энергии, которая может быть восстановлена в виде обратимой работы.

К фундаментальным понятиям теории информации относится *термодинамический предел для энергии переключения*, определяемое как предельное значение $\Delta A_{\min} = \Delta F$,

которую необходимо сообщить логическому элементу для того, чтобы термодинамически обратимым образом перевести его в состояние, отличающееся от исходного на 1 бит информации. Полагая в (3.3) $\Delta U = 0$, получаем:

$$\Delta A_{\min} = \Delta F_{\min} = \varkappa T \ln 2 \quad (3.4)$$

$\Delta A_{\min} \simeq 3 \times 10^{-21}$ Дж при $T = 300$ К.

Рассмотрим, что значит все вышесказанное для модели логического элемента на рис. 3.1. Для того, чтобы произвести переключение частице в логическом элементе надо сообщить как минимум энергию, равную высоте энергетического барьера E_0 для того, чтобы она оказалась на его вершине. Далее частица “сама” свалится в конечное состояние. Из уравнения (3.4) следует, что $E_0 = \varkappa T \ln 2$. Эта энергия в результате переключения вся переходит в тепло (когда частица сваливается в конечное состояние и релаксирует к состоянию равновесия). Заметим, однако, что при условии (3.4) вероятность того, что частица под действием тепловых флуктуаций случайно перейдет в другое состояние, довольно велика. Ее можно оценить как

$$p \simeq \exp\left(-\frac{\Delta A_{\min}}{\varkappa T}\right) = \frac{1}{2},$$

Поэтому обычно выбирают энергию переключения с запасом по сравнению с (3.4): $\Delta A_{\min} = 4\varkappa T$.

3.2 Пропускная способность канала

В теории информации фундаментальным является также вопрос о максимальном количестве информации, которое можно передать по коммуникационному каналу (в качестве канала может рассматриваться и логическое устройство). В идеальном канале без помех и шумов информация может передаваться с неограниченной скоростью (очевидно, что каждый бит в этом случае может кодироваться, например, сколь угодно коротким импульсом). При наличии же шумов эта скорость ограничена. Для характеристики максимальной скорости передачи информации по каналу (или через логическую структуру) вводится понятие *пропускной способности* или *емкости* канала C :

$$C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_m(t)}{t},$$

где t — длительность передаваемого сообщения, $I_m(t)$ — максимальное количество информации, которое может быть передано за время t при оптимальном кодировании и с исчезающе малой ошибкой при $t \rightarrow \infty$. Для стационарного процесса пропускная способность определяется как

$$C = I_m \Delta f,$$

где Δf — ширина полосы частот, пропускаемой каналом связи, I_m — максимальное количество информации на единицу частотного интервала.

Если характеризовать канал шириной полосы $f_{\max} = 1/2t$, то при мощности $N = \kappa T/2t$ случайных помех, создаваемых тепловым окружением, пропускную способность можно определить с помощью *формулы Шеннона*:

$$C = \frac{I_m}{2t} = \frac{1}{2t} \log_2 \left(1 + \frac{P}{N} \right),$$

где P/N — отношение сигнала к шуму (P — мощность сигнала). Шеннон доказал, что при условии оптимального кодирования передача информации по каналу при наличии шумов возможна с исчезающе малой ошибкой.

Информационный процесс в логическом элементе можно характеризовать также энергией, требуемой для передачи одного бита. Эта энергия E_{bit} называется *энергетической ценой* одного бита и определяется выражением $E_{\text{bit}} = P/N$. Получаем:

$$E_{\text{bit}} = \frac{2Pt}{I_m} = \frac{2Pt}{\log_2 \left(1 + \frac{2Pt}{\kappa T} \right)} = \kappa T \ln 2 \frac{\frac{2Pt}{\kappa T}}{\ln \left(1 + \frac{2Pt}{\kappa T} \right)} \quad (3.5)$$

В отсутствие шумов $T \rightarrow 0$ энергетическая цена может быть произвольно мала. При наличии шумов минимизируя выражение (3.5) получим :

$$E_{\text{min bit}} = \kappa T \ln 2,$$

которое совпадает с (3.4). Необходимо заметить, что это выражение соответствует предельно малой энергии $Pt \rightarrow 0$, т.е. при конечном времени переключения t и конечной тем-

пературе соответствуют предельно малой скорости передачи информации $C \rightarrow 0$. Поскольку в реальных условиях передача сигнала должна происходить с конечной скоростью C , то для энергетической цены получим

$$E_{\text{bit}} > E_{\text{min bit}} = kT \ln 2.$$

3.3 Обратимые логические операции

Возникает вопрос: а нельзя ли преодолеть термодинамический предел ΔA_{min} (3.4)? Оказывается можно! Это особенно легко понять на модели логического элемента, изображенного на рис. 3.1. Ведь предел (3.4) есть плата за то, что энергия, равная высоте барьера E_0 необратимо рассеивается в тепло. Но ведь можно перевести частицу через барьер, затрачивая как можно меньше энергии в тепло. Например, если связь с термостатом соответствует вязкому трению, то такое обратимое переключение должно быть осуществлено очень медленно (так называемая *адиабатически динамическая логика*).

Ландауэром было показано, что если в логическом элементе происходит *логически необратимая операция*, то оно неизбежно вызывает диссипацию энергии (3.4) на каждую такую операцию. Классическим примером логически необратимой операции является стирание. Например, логическая операция AND: в результате ее действия из двух битов на входе получается только один бит на выходе и нет спо-

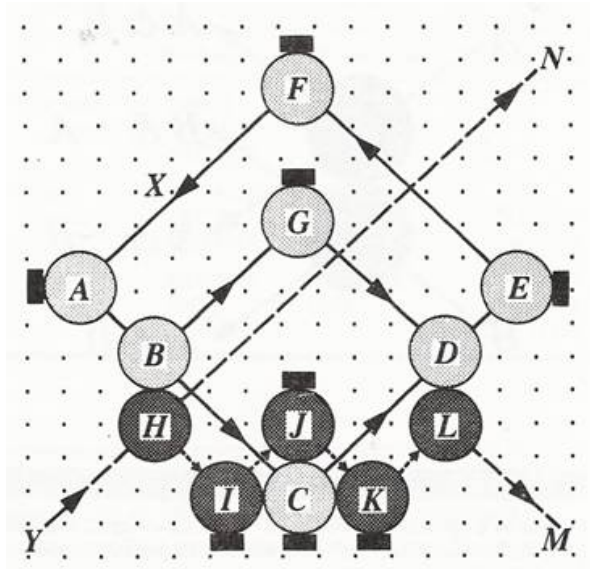


Рис. 3.2: Схема *бездиссипативного* считывания информации о наличии бита в ячейке. Наличие или отсутствие белого шара в ячейке, состоящей из упругих отражателей, проверяется черным шаром. Если в ячейке есть белый шар, то черный шар изменяет направление своего движения.

соба логически восстановить первоначальное состояние. В современных компьютерах реализуются именно такие необратимые операции.

Однако можно сконструировать компьютер из *логически обратимых* элементов. Беннет предложил умозрительную схему компьютера, состоящего из упруго сталкивающихся шаров. В качестве примера на рисунке (3.2) приведена *бездиссипативная* схема считывания информации о наличии бита в ячейке. Это фактически ячейка дублирования (FANOUT) данных,

Для примера ячейки с потенциальной ямой (рис. 3.1), переключение можно совершить без затраты энергии, если во

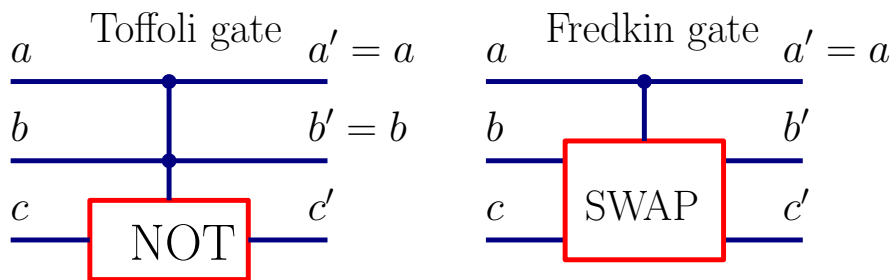


Рис. 3.3: Схемы обратимых вентилей Тoffoli и Фредкина.

время переключения профиль ямы определенным образом деформировать.

Фредкиным и Тoffoli были предложены универсальные логически обратимые ячейки (гейты), которые могут быть и физически обратимыми (например, в умозрительном баллистическом компьютере со сталкивающимися упругими шарами). Их универсальность означает, что из них можно получить любые используемые гейты в логически обратимом варианте. Их схемы приведены на рис. 3.3.

Гейт Тoffoli обозначается как CCNOT (controled-controlled NOT, т.е. дважды контролируемое НЕ). Две контролирующие линии **a** и **b** дублируются на выходе. К линии **c** применяется операция **NOT**, если только на входе обоих контролирующих линий есть по биту ($\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$). В противном случае состояние **c** дублируется на выходе.

Гейт Фредкина обозначается как CSWAP (controlled SWAP, т.е. контролируемый обмен). Контролирующая линия **a** дублируется на выходе. Линии **b** и **c** обмениваются состояниями, если на входе контролирующей линии есть бит ($\mathbf{a} = 1$). В противном случае линии **b** и **c** дублируются на

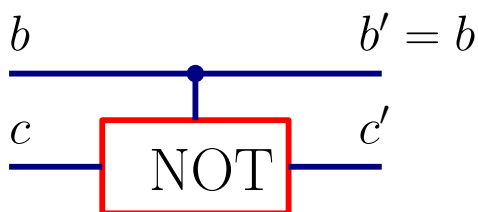


Рис. 3.4: Схема элемента CNOT. Контролирующая линия \mathbf{b} дублируется на выходе. К линии \mathbf{c} применяется операция NOT, только если на входе линии \mathbf{b} есть бит ($\mathbf{b} = 1$). В противном случае состояние \mathbf{c} дублируется на выходе.

Таблица 3.1: Определение действия некоторых логических операций.

A	B	AND \cap	OR \cup	XOR (CNOT) \oplus	NOT B
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

выходе.

Другим примером более простой обратимой (но не универсальной) ячейки является CNOT (controlled-NOT, т.е. контролируемое НЕ), изображенная на рис. 3.4. Более компактные общепринятые обозначения ячеек CNOT и CCNOT изображены на рис. 3.5.

Определение логических операций операций приведены в Таблице 3.1.

Приведем пример использования ячеек CNOT И CCNOT для сложения двух чисел, каждое из которых меньше или равно 1. Пусть в двоичной системе эти числа записываются как $0\mathbf{a}$ и $0\mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} = 0, 1$. Тогда схема, изображенная на рис. 3.6, будет вычислять их сумму $0\mathbf{a} + 0\mathbf{b} = \mathbf{cd}$.

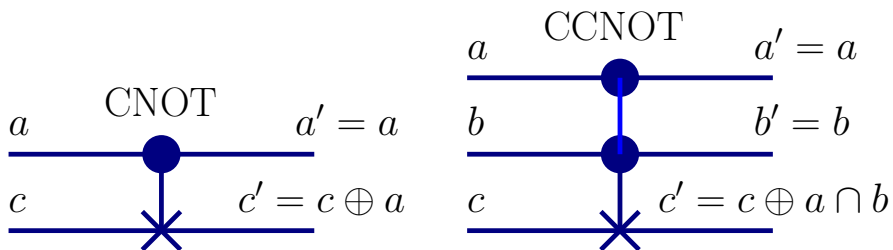


Рис. 3.5: Общепринятое обозначение гейтов CNOT и CCNOT. Знак \oplus обозначает сложение по модулю 2, т.е. это обычное сложение, но для случая $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 1$ результат равен 0. Знак \cap означает логическую операцию И.

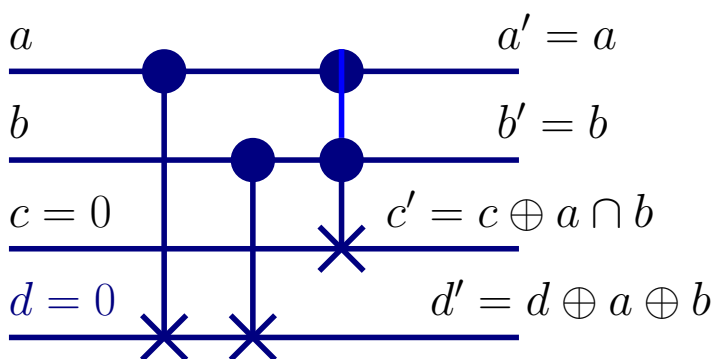


Рис. 3.6: Схема вычисления суммы. В выходные регистры \mathbf{c} , \mathbf{d} записывается сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ в двоичном виде.

3.4 Количество квантовой информации

Понятие информационной энтропии, введенное фон Нейманом [2] (*энтропия фон Неймана*), является основным понятием квантовой теории информации и определяется выражением:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\text{Sp } \hat{\rho} \log_2 \hat{\rho} \geq 0, \\ \text{Sp } \hat{\rho} &= 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности. Нетрудно видеть, что для чистого состояния энтропия $S(\rho) = 0$, что означает его полную определенность. Поскольку энтропия фон Неймана инвариантна относительно представления, то ее удобно рассчитывать переходя в диагональное представление.

Рассмотрим значение информационной энтропии H и энтропии фон Неймана S для двухуровневой частицы (кубит). Пусть частица находится в состоянии с определенным спином, например,

$$|\psi\rangle = |z_+\rangle.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |z_+\rangle\langle z_+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H &= 0, \quad S = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для этого случая информационная энтропия и энтропия фон Неймана совпадают и равны нулю.

Теперь пусть частица находится в смешанном состоянии

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle + |z_-\rangle).$$

В этом случае матрица плотности равна:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Нетрудно посчитать, что информационная энтропия равна $H = \log_2 2$, т.е. одному биту. Чтобы вычислить энтропию фон Неймана, надо перейти к диагональному представлению. В нашем случае нетрудно заметить, что

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle + |z_-\rangle) = |x_+\rangle.$$

В этом представлении матрица плотности диагональна и имеет вид:

$$\hat{\rho} = |x_+\rangle\langle x_+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда сразу получаем, что

$$S = 0.$$

В общем случае выполняется равенство (лемма Клейна):

$$S(\rho) \leq H.$$

Знак равенства относится к случаю, когда состояние частицы чистое и матрица плотности задана в диагональном представлении.

Смысл этого неравенства заключается в том, что энтропия фон Неймана учитывает дополнительную информацию, заключающуюся в недиагональных элементах матрицы плотности, тогда как информационная энтропия Шеннона эту информацию игнорирует. Это означает, что кубит имеет значительно большую информационную емкость, чем классический бит.

Глава 4

Квантовая интерференция

В этом разделе мы рассмотрим несколько примеров квантовой интерференции, которые выглядят несколько парадоксально, по крайней мере с классической точки зрения.

4.1 Бомбовый парадокс: качественное рассмотрение

Бомбовый парадокс был сформулирован в 1993 А. Элицуrom и Л. Вайдманом [3] в нарочито парадоксальной манере. Начнем с качественного рассмотрения.

Пусть на складе военной базы (или секретной службы) находятся супер-бомбы, взрыватели которых очень чувствительные: при падении единичного фотона они сдвигаются на расстояние, которое приводит к взрыву.

Фактически такой взрыватель действует как идеальный

невозмущающий измеритель одиночных фотонов: либо он регистрирует 0 (нет фотонов), либо — 1 , т.е. есть фотон (после этого происходит взрыв). Невозмущаемость измерителя здесь означает, что при регистрации фотон *не* уничтожается (как например, при регистрации фотодетектором).

Известно, однако, что взрыватели части бомб неисправны (замяты) и двигаться не могут. Военному специалисту Васе (выпускнику физфака) командование поставило задачу выбрать хотя бы одну заведомо исправную бомбу дабы положить (в темноте, разумеется) ее в чемодан спец-агента ХХХ.

Казалось бы, что эта задача *не разрешима*. Но Вася оказался не прост и нашел решение. Он соорудил установку, изображенную на рис. 4.1. Это интерферометр Маха-Цандера, одно из отражающих зеркал (B) которого является взрывателем супер-бомбы. Входной и выходной светоделители с вероятностью 50% пропускают или отражают свет.

На вход интерферометра подается свет от лазера, дающего только одиночные фотоны. Это можно сделать за счет уменьшения интенсивности лазера, если поставить на его входе серый фильтр. Коэффициент прозрачности фильтра должен быть настолько мал, чтобы через него проходили только одиночные фотоны.

Вася отрегулировал длину плечей так, что фотоны попадают только на детектор L , если зеркало B неподвижно. Поэтому если взрыватель бомбы неисправен и двигаться не

может (и его положение известно Васе), то регистрировать фотоны будет только детектор L.

В этом случае нельзя сказать, по какому из плеч интерферометра прошел фотон. Это является условием того, что после интерференции на выходном зеркале фотон попадет на детектор L.

Теперь рассмотрим, что будет, если взрыватель бомбы исправен. Повторим, такой взрыватель действует как идеальный измеритель одиночных фотонов: либо он регистрирует 0 (нет фотонов), либо — 1, т.е. есть фотон. В этом случае происходит *редукция* волновой функции фотона, после чего волна пойдет только по одному из плеч интерферометра, а в другом плече волны не будет.

Примерно с равной вероятностью $1/2$ фотон пройдет через зеркало B, либо через зеркало C. В первом случае, к сожалению, произойдет взрыв и Васе надо собирать новую установку (или командованию искать нового Васю). Однако, во втором случае (когда фотон пойдет через зеркало C) фотон после выходного зеркала может с равной вероятностью попасть либо на детектор U, либо на детектор L. Тогда, зарегистрировав фотон в детекторе U, Вася будет точно знать, что бомба исправна.

Легко сообразить, что Вася выберет около $1/4$ из общего числа всех исправных бомб, столько же ($1/4$) будут ошибочно отнесены к неисправным и примерно $1/2$ всех исправных

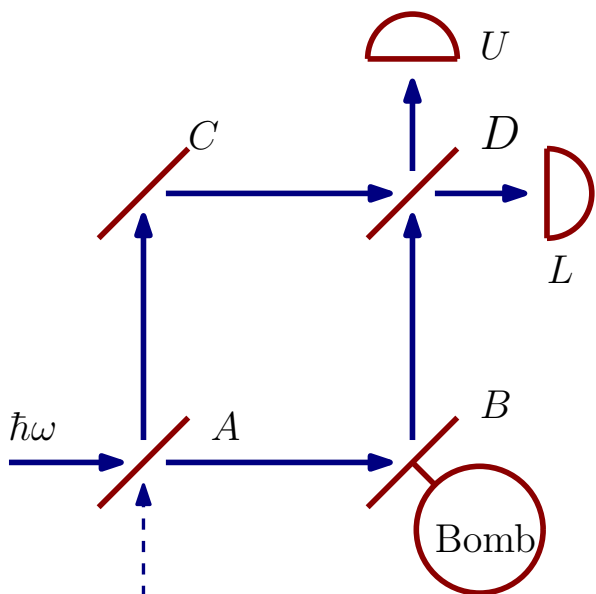


Рис. 4.1: Схема интерферометра Маха-Цандера, одно из непрозрачных зеркал которого является взрывателем супер-бомбы.

бомб будет взорвана.

4.2 Бомбовый парадокс: математическое описание

На входе интерферометра (перед светоделителем A) мы имеем фотон в одном входе и вакуум — во втором. Состояние, поступающее на входной светоделитель интерферометра можно описать как

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \mathbf{a}^\dagger|00\rangle = |10\rangle \quad (4.1)$$

Здесь оператор \mathbf{a}^\dagger относится к моде лазера. Через \mathbf{v} , \mathbf{v}^\dagger обозначают аналогичные операторы, относящиеся к вакуумной моде (пунктирная стрелка на рис. 4.1).

4.2.1 Светоделитель A

Нетрудно выразить (в представлении Гейзенберга) операторы рождения выходных мод \mathbf{a}_b (в плече B) и \mathbf{a}_c (в плече C):

$$\mathbf{a}_b = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{v}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{v}}{\sqrt{2}} \quad (4.2)$$

Отсюда можно выразить оператор \mathbf{a} для входного поля через операторы выходного поля: $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}_b + \mathbf{a}_c}{\sqrt{2}}$ и, подставив его в (4.1), получить состояние поля после светоделителя:

$$|\psi_{\text{after A}}\rangle = \frac{\mathbf{a}_b^\dagger + \mathbf{a}_c^\dagger}{\sqrt{2}} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle) \quad (4.3)$$

Это можно делать, так как вакуумное состояние $|00\rangle_{\text{in}}$ для поля до светоделителя, которое фигурирует в (4.1), и вакуумное состояние $|00\rangle_{\text{after A}}$ для поля после светоделителя неразличимы.

Мы видим, что светоделитель действует на входное состояние следующим образом:

$$|10\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle), \quad (4.4a)$$

$$|01\rangle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - |01\rangle) \quad (4.4b)$$

Таким образом после светоделителя мы имеем состояние, в котором один фотон распределен между двумя модами. При этом, например, член $|10\rangle$ имеет следующий смысл: в моде, соответствующей пути B есть фотон, в моде C — нет.

4.2.2 Светоделитель D

Нетрудно получить состояние поля перед вторым светоделителем, если зеркало В неподвижно. Для этого просто надо учесть эволюцию операторов a_b^\dagger и a_c^\dagger :

$$a_b^\dagger|_{\text{before D}} = e^{i\omega l_b/c} a_b^\dagger = e^{i\omega L/c} e^{i\phi} a_b^\dagger, \quad (4.5a)$$

$$L = \frac{l_b + l_c}{2}, \quad \phi = \frac{(l_b - l_c)\omega}{2c}, \quad (4.5b)$$

$$a_c^\dagger|_{\text{before D}} = e^{i\omega l_c/c} a_c^\dagger = e^{i\omega L/c} e^{-i\phi} a_c^\dagger. \quad (4.5c)$$

где l_b (l_c) — оптическая длина плеча В (С). Подставив это в (4.3), получим состояние поля перед вторым светоделителем:

$$|\psi_{\text{before D}}\rangle = \frac{e^{i\omega L/c}}{\sqrt{2}} (e^{i\phi}|10\rangle + e^{-i\phi}|01\rangle) \quad (4.6)$$

Можем выразить операторы поля после светоделителя D (до детекторов):

$$\begin{aligned} a_L &= \frac{a_b e^{i\omega l_B/c} + a_c e^{i\omega l_C/c}}{\sqrt{2}} = e^{i\omega L/c} \frac{(a + \nu)e^{i\phi} + (a - \nu)e^{-i\phi}}{2} = \\ &= e^{i\omega L/c} (a \cos \phi + i\nu \sin \phi), \end{aligned} \quad (4.7a)$$

$$\begin{aligned} a_D &= \frac{-a_b e^{i\omega l_B/c} + a_c e^{i\omega l_C/c}}{\sqrt{2}} = e^{i\omega L/c} \frac{-(a + \nu)e^{i\phi} + (a - \nu)e^{-i\phi}}{2} = \\ &= e^{i\omega L/c} (-ia \sin \phi - \nu \cos \phi) \end{aligned} \quad (4.7b)$$

Используя (4.7), можно выразить a через a_L , a_D :

$$a = e^{-i\omega L/c} (a_L \cos \phi + a_D i \sin \phi) \quad (4.8)$$

и подставить в (4.1):

$$|\Psi_{\text{after D}}\rangle = e^{i\omega L/c} (\cos \phi |10\rangle + i \sin \phi |01\rangle) \quad (4.9)$$

Очевидно, при $\phi = 0$ (т.е. при равенстве оптических путей $l_b = l_c$) на выходе второго светоделителя будет состояние

$$|\psi_{\text{after D}}\rangle = e^{i\omega l_b/c} |10\rangle, \quad (4.10)$$

т.е. фотон с вероятностью 1 окажется в моде, регистрируемой детектором L. Наоборот, при разности путей в полдлины волны $l_b = l_c \pm \pi c/\omega$ ($\phi = \pi/2$) фотон с вероятностью 1 окажется в моде, регистрируемой детектором U.

Ниже будем считать, что оптические пути одинаковы или отличаются на целое число длин волн.

4.2.3 Описание измерения

Как уже упоминалось, супер-бомба с исправным взрывателем фактически является неразрушающим измерителем энергии в плече В. Повторим, слово “неразрушающий” относится, конечно, к фотону — после отражения от взрывателя фотон не уничтожается (чего не скажешь, к сожалению, о бомбе). В результате измерения возможно только два результата: взрыватель регистрирует или не регистрирует фотон (в нашем случае оба результата равновероятны). Процесс измерения описывается операторами-проекторами:

$$\hat{n}_1 = |1\rangle_b \langle 1|_b, \quad \hat{n}_0 = |0\rangle_b \langle 0|_b, \quad (4.11)$$

где операторы \hat{n}_1 и \hat{n}_0 описывают регистрацию и нерегистрацию фотона соответственно. Индекс b показывает, что измерения производятся в плече **B**.

Если мы регистрируем фотон и в плече **B**, и в плече **C**, то при наличии на входе лишь одного фотона операторы-проекторы будут

$$\mathbf{n}_b = |1\rangle_b \langle 1|_b |0\rangle_c \langle 0|_c, \quad \mathbf{n}_c = |0\rangle_b \langle 0|_b |1\rangle_c \langle 1|_c, \quad (4.12)$$

где оператор \mathbf{n}_b соответствует регистрации фотона в плече **B** и нерегистрации – в плече **C**, оператор \mathbf{n}_c – наоборот.

Допустим, что взрыватель зарегистрировал фотон (опустим пока неизбежность взрыва). Произойдет *редукция* волновой функции и состояние поля после измерения будет

$$\frac{1}{\mathbf{N}} \hat{n}_1 \psi_{\text{after A}} = |10\rangle, \quad (4.13)$$

где \mathbf{N} – нормировочный множитель. Мы видим, что после такого результата измерения состояние значительно изменилось – фотон присутствует в моде **B** и отсутствует в моде **C**.

Теперь нетрудно найти, что после второго светоделителя состояние поля будет

$$|\psi_{\text{after D } n_b=1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_L 0_U\rangle - |0_L 1_U\rangle), \quad (4.14)$$

где, например, состояние $|1_L 0_U\rangle$ означает, что фотон присутствует в моде, регистрируемой детектором **L** и отсутствует в моде детектора **U**.

Нетрудно показать, что если взрыватель не регистрирует фотон, то состояние поля *тоже* кардинально меняется:

$$\frac{1}{N} \hat{n}_0 \psi_{\text{after D}} = |01\rangle,$$

$$|\psi_{\text{after D } n_b=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_L 0_U\rangle + |0_L 1_U\rangle),$$

Для нас важно, что при *любом* результате измерения фотон “размазывается” между выходами и с равной вероятностью он может быть зарегистрирован обоими детекторами. Поэтому, если детектор **U** регистрирует фотон, то Вася будет точно знать, что измерение произошло, т.е. супербомба исправна и он ее может спокойно передать агенту ХХХ.

Задача (16).

4.3 Интерференция на двух щелях

Разобранный бомбовый парадокс является иллюстрацией существования и разрушения квантовой интерференции. Рассмотрим в качестве примера опыт Юнга.

Эксперимент на двух щелях (также известный как двухщелевой интерферометр Юнга) — первый вариант двухщелевого опыта, проведённого Томасом Юнгом в 1803 г. Этот опыт демонстрирует классическую интерференцию и дифракцию света, что является доказательством справедливости волновой теории света.

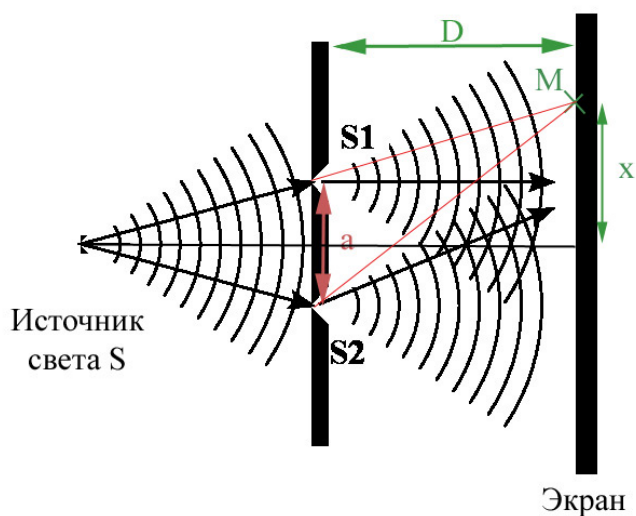


Рис. 4.2: Опыт Юнга

В опыте пучок монохроматического света направляется на непрозрачный экран с двумя параллельными щелями, позади его устанавливается проекционный экран — см. рис. 4.2. При ширине прорезей меньше или порядка длины волны излучаемого света, на проекционном экране получается целый ряд чередующихся интерференционных полос.

Согласно принципу Гюйгенса, каждая щель является источником вторичных волн. Вторичные волны достигнут точек, находящихся на экране на равном удалении от щелей, в одной фазе, следовательно, на серединной линии экрана их амплитуды сложатся, что создаст максимум яркости. Боковые максимумы расположатся симметрично по обеим сторонам в точках, для которых разность хода световых пучков равна целому числу волн.

В тех точках на экране, где разность хода равна нечётному числу полуволн, волны окажутся в противофазе — их

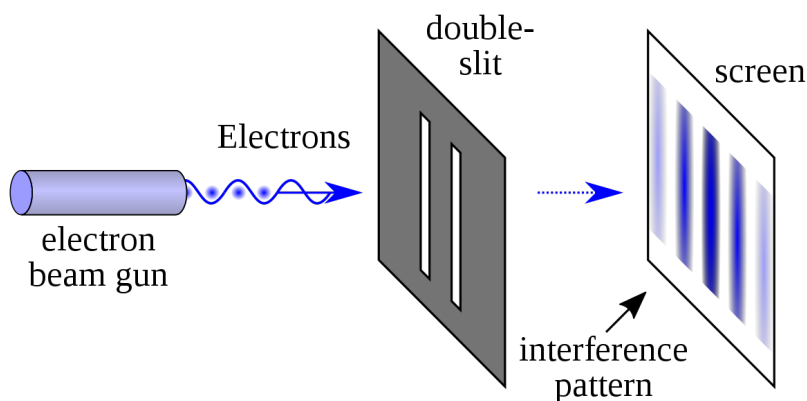


Рис. 4.3: Опыт Юнга: интерференция электронов.

амплитуды компенсируются, что создаст минимумы яркости (тёмные полосы).

Этот опыт относится к экспериментам с “двойным путем”, в которых первоначальная волна разделяется на две отдельные, которые впоследствии снова объединяются в одну. Изменения длины пути обеих волн приводят к сдвигу фаз, создавая интерференционную картину.

Опыт с электронами (рис. 4.3) вместо света демонстрирует аналогичную интерференционную картину, длина волны (а следовательно, и масштаб интерференционной картины) теперь определяется длиной волны электронов.

Опыт может быть сделан с намного более крупными молекулами, чем электроны и фотоны, хотя он становится более сложным. Крупнейшими объектами, для которых был проведен опыт с двумя щелями, были молекулы, каждая из которых содержала 810 атомов (общая масса — более 10000 атомных единиц массы) [4]. Фактически эти опыты являют-

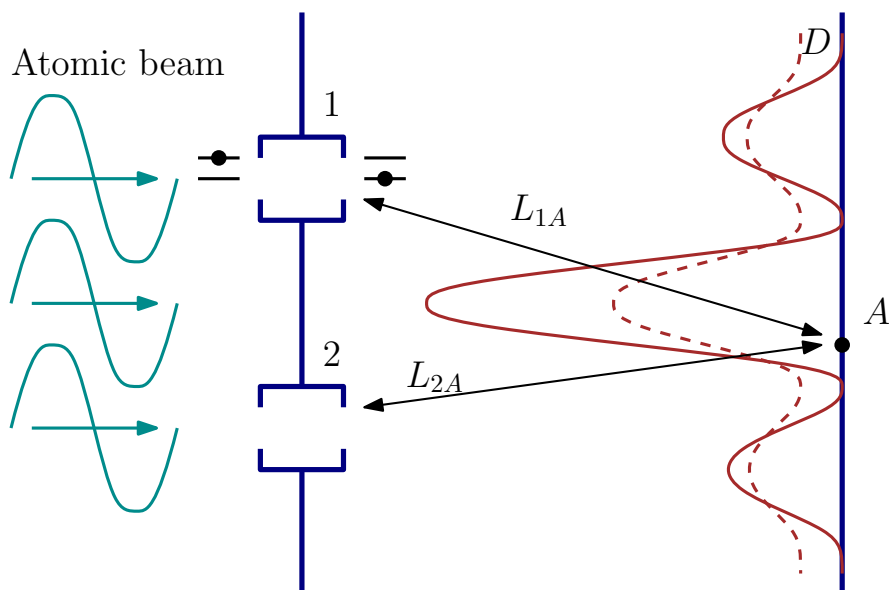


Рис. 4.4: Опыт Юнга: интерференция атомов.

ся прекрасным подтверждением корпускулярно-волнового дуализма, заложенного в квантовой механике: с одной стороны молекулы — вполне осязаемые частицы (они регистрируются матрицей детекторов, т.е. их положение хорошо локализуется детектором), а с другой — они демонстрируют волновые свойства, длина волны λ де Бройля определяется их импульсом mv :

$$\hbar \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) = mv \quad (4.15)$$

Двухщелевой опыт стал классическим мысленным экспериментом, как яркий пример демонстрации сущности квантовой механики. Неслучайно Ричард Фейнман считал, что в этом явлении “заложено сердце квантовой механики”.

В качестве иллюстрации рассмотрим схему дифракции атомов на двух щелях, представленную на рис. 4.4. Бу-

дем считать, поток атомов *монокинетезированным*, т.е. скорость \mathbf{v} атомов хорошо определена. На плоскости \mathbf{D} детекторы регистрируют атомы. Набирая достаточно большую статистику (много зарегистрированных атомов), экспериментатор может получить дифракционную картину.

В дифракционном двухщелевом опыте с частицами ключевым является то, что волны от разных щелей коррелированы и интерферируют на поверхности \mathbf{D} . С точки зрения квантовой механики это означает, что после прохождения щелей атом находится в *суперпозиции*

$$\psi_{\text{after slits}} = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.16)$$

На плоскости \mathbf{D} детекторов волновая функция атома в точке \mathbf{A} записывается в виде:

$$\psi_{\mathbf{A}} = \frac{|1\rangle e^{ikL_{1\mathbf{A}}} + |2\rangle e^{ikL_{2\mathbf{A}}}}{\sqrt{2}}, \quad (4.17)$$

где $k = 2\pi/\lambda$, см. также обозначения на рис. 4.4.

Распределение плотности вероятности определяется квадратом модуля $|\psi_{\mathbf{A}}|^2$. Нетрудно показать, что результат полностью совпадает с формулой, полученной классически.

Подчеркнем, что приведенное рассмотрение основано на том, что мы *принципиально не знаем*, через какую щель прошел атом.

А что будет, если мы знаем, по какому пути (*which-path*)

прошел атом? Для этого рассмотрим *модифицированную* схему на рас. 4.4.

Атом имеет поступательную степень свободы и внутреннюю, определяющую, на каком энергетическом уровне атом находится. В принципе эти степени свободы не связаны друг с другом, по крайней мере это так в классической физике. Будем использовать ридберговские атомы, которые можно рассматривать как двухуровневые системы. Считаем, что атомы (двухуровневые системы) в набегающем потоке находятся в верхнем состоянии.

Частота переходов ридберговского атома лежит в СВЧ диапазоне. Поэтому мы можем на месте щелей расположить СВЧ резонаторы, одна из частот которых совпадает с частотой перехода атома. Первоначально резонаторы пусты, т.е. не содержат СВЧ квантов. Мы также подбираем длину резонаторов так, чтобы за время взаимодействия (пролета) атом перешёл бы в нижнее состояние, отдав СВЧ квант атому. Регистрируя появление СВЧ кванта в резонаторе, мы получим информацию, по какому пути пролетел атом.

В принципе достаточно резонатора лишь в одной щели. Действительно, если даже резонатор оказался пустым после пролета атома, но атом зарегистрирован детекторами на плоскости D — это означает, что атом пролетел через щель без резонатора.

С точки зрения классики, взаимодействие атома с резонатором касается только *внутренних* степеней свободы ато-

ма и не должно влиять на поступательную степень (ответственную за дифракцию). Однако это не так в квантовой механике. Ведь взаимодействие атома с резонатором дает информацию, каким путем пролетел атом, а значит, произойдет редукция волновой функции и после прохождения щели она будет иметь вид:

$$\psi_{\text{after slits}}^{\text{reg. 1}} = |1\rangle, \quad \text{или} \quad \psi_{\text{after slits}}^{\text{reg. 2}} = |2\rangle \quad (4.18)$$

А значит, интерференционная картина будет отсутствовать (точнее будет соответствовать дифракции на одной щели).

Рассмотрим случай, когда регистрация, каким путем прошел атом, не точная. Например, из-за разброса скоростей атома время взаимодействия атома не оптимально и есть вероятность, что резонатор не получит СВЧ квант после пролета атома. Или длина резонатора не соответствует оптимальной. Важно, что мы можем определить, каким путем прошел атом, лишь с какой-то *конечной вероятностью*. В этом случае дифракционная картина будет присутствовать, но с меньшей контрастностью — как показано пунктирной линией на рис. 4.4.

4.4 Измерение без взаимодействия

Так называемое измерение “без взаимодействия” [3] (“interaction-free measurement”¹), как и бомбовый парадокс,

¹Данный термин нельзя считать очень удачным, но он уже используется в литературе, и поэтому мы будем им пользоваться.

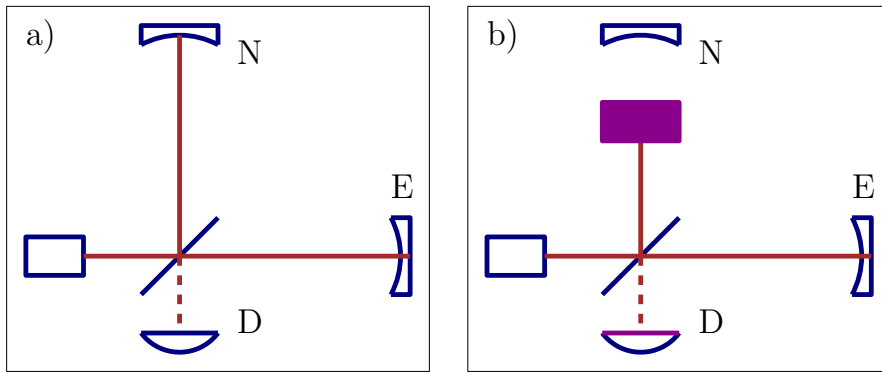


Рис. 4.5: Простой вариант схемы измерения “без взаимодействия”: (а) длины плеч интерферометра подобраны так, что весь свет отражается обратно в лазер; (b) если в одно из плеч вставить поглощающий объект, то появится ненулевая вероятность попадания фотонов на детектор D.

принадлежит к тому классу чисто квантовых явлений, где одновременно работают как волновые, так и корпускулярные свойства квантовых объектов.

В принципе, измерение “без взаимодействия” может быть реализовано на основе различных схем. Это может быть интерференция на двух щелях, интерферометр Маха-Цандера [3]) или Майкельсона [5, 6]. Рассмотрим последний вариант.

Пусть имеется интерферометр Майкельсона, в котором расстояния между центральным светоделителем и зеркалами N и E подобраны так, чтобы все излучение от источника света отражалось обратно и на фотодетектор D ничего не попадало [см.рис. 4.5(а)]. Если теперь в одно из плеч интерферометра вставить поглощающий свет объект [см. рис. 4.5(b)], то интерференция нарушится и появится конечная вероятность срабатывания детектора.

Рассмотрим случай, когда в интерферометр был запу-

щен один фотон. При наличии поглощающего объекта, поскольку интерференция отсутствует (разветвившиеся пути эволюции фотона никогда не сходятся вновь), этот фотон можно рассматривать как классическую частицу. Для него будут возможны три исхода:

- С вероятностью $p_- = R$, где R — коэффициент отражения центрального светоделителя, он может пойти по пути, перекрытому объектом, и поглотиться им (будем называть такой результат неудачным).
- С вероятностью $p_+ = RT$, где $T = 1 - R$, пойти по второму пути и попасть на детектор (удачный результат).
- С вероятностью $p_0 = T^2$ — также пойти по второму пути, но вернуться к источнику (на рис. 4.5(b) — налево).

В последнем случае можно зарегистрировать фотон дополнительным детектором, чтобы отличить этот исход от случая, когда фотон поглотился объектом.

Удачный результат (который, в соответствии со своим названием, собственно и является целью эксперимента), позволяет сделать однозначный вывод, что один из путей интерференции перекрыт. В то же время, в этом случае с некоторой долей условности можно утверждать, что фотон на своем пути к детектору не проходил по этому пути и не взаимодействовал с перекрывающим этот путь объектом (иначе он бы поглотился им). Такое рассуждение, основанное

на представлении о фотоне как о классической частице, и привело к термину “измерение без взаимодействия”.

Неудачный результат также позволяет зарегистрировать наличие объекта, но “неинтересным” способом: фотон явно провзаимодействовал с ним.

Нейтральный результат соответствует ситуации “пропуска цели”: фотон попал туда, куда он мог попасть и при отсутствии объекта. В этом случае эксперимент можно повторить заново, и так до тех пор, пока не будет получен либо удачный, либо неудачный результат, или же пока итоговая вероятность “пропуска цели” $P_0 = p_0^N$ (N — число повторений) не станет меньше некоторого наперед заданного порога. Вероятности удачного и неудачного результата при этом, как легко показать, будут равны

$$P_+ = \frac{1 - p_0^N}{1 - p_0} p_+ \rightarrow \frac{p_+}{p_+ + p_-}, \quad (4.19a)$$

$$P_- = \frac{1 - p_0^N}{1 - p_0} p_- \rightarrow \frac{p_-}{p_+ + p_-}. \quad (4.19b)$$

Хотелось бы сразу подчеркнуть, что однозначного ответа на вопрос, имеет ли здесь место взаимодействие с объектом “на самом деле”, невозможен, по крайней мере в рамках современной физики: он зависит от исповедуемой интерпретации квантовой механики. Причем спектр ответов, даваемых различными интерпретациями, помимо простых “да” и “нет” включает также и варианты “да, но в параллельной

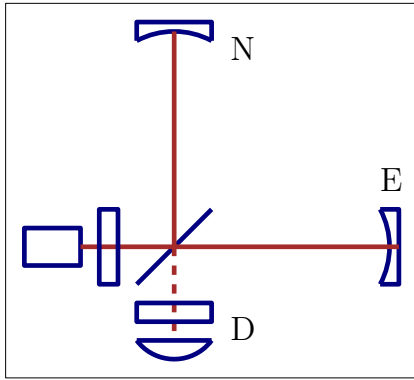


Рис. 4.6: Используя дополнительные зеркала в “южном” и “западном” плечах, можно довести квантовую эффективность схемы “измерения без взаимодействия” до величины, сколь угодно близкой к единице.

Вселенной” и “не знаем и знать не можем”. Разумно подойти к этому явлению позитивистским образом, то есть с чисто “потребительской” точки зрения рассмотреть ограничения и возможности такого класса измерений.

Из (4.19) (при $N \rightarrow \infty$) можно найти квантовую эффективность простой схемы измерения “без взаимодействия”, приведенной на рис. 4.5

$$P_+ = \frac{T}{1 + T}. \quad (4.20)$$

При $T = 0.5$ (светоделитель делит свет пополам) $P_+ = 1/3$. при $T \rightarrow 1$ она больше и близка к $1/2$.

Было показано, что добавив к интерферометру Майкельсона дополнительное зеркало S в “южном” плече, можно довести квантовую эффективность до величины, сколь угодно близкой к единице [7]. В схеме, где имеется еще одно дополнительное зеркало в “западном” плече (см. рис. 4.6), вероятности как неудачного, так и нейтрального результата могут

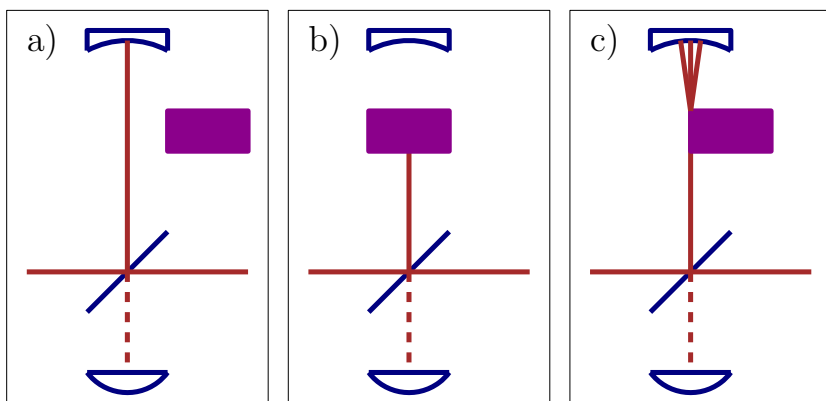


Рис. 4.7: При измерении “без взаимодействия” возмущение импульса объекта имеет место только если он *частично* перекрывает луч света (случай c).

быть сделаны сколь угодно малыми даже при однократном измерении [8].

Принято считать, что локализация объекта (то есть получение информации о его координате при измерении) должна сопровождаться возмущением его импульса. Дополнительный случайный импульс при этом должен быть обеспечен измерителем.

Измеритель “без взаимодействия”, казалось бы, не может сделать этого. Действительно, если объект находится вне интерферометра, то он не может получить никакого импульса от поля в последнем [см. рис. 4.7(a)]. Если объект находится внутри своего плеча интерферометра, целиком перекрывая его, то возмущение его импульса также отсутствует, поскольку в этом случае фотоны не попадают в это плечо [рис. 4.7(b)]. Однако возможен третий, промежуточный, случай, когда объект *частично* перекрывает плечо

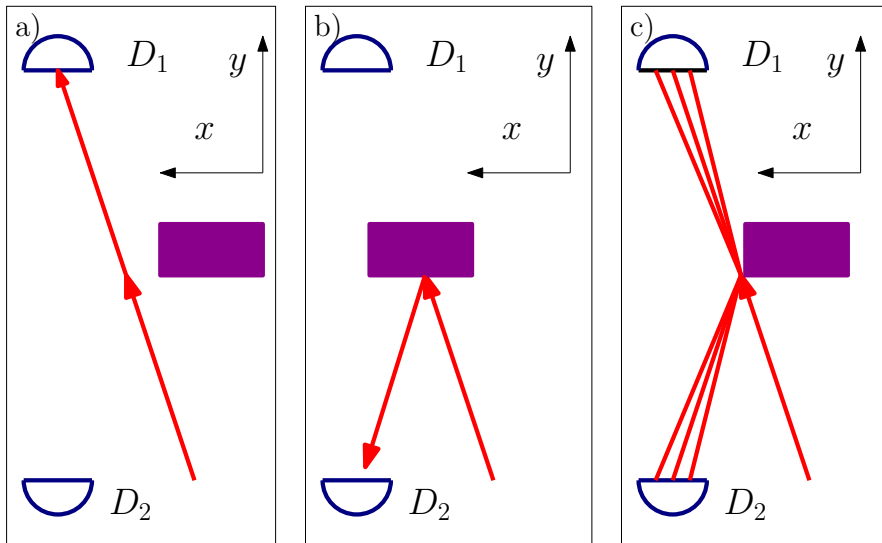


Рис. 4.8: В “да-нет” измерении возмущение импульса может быть равно нулю.

интерферометра. В этом случае фотоны будут с некоторой конечной вероятностью попадать в северное плечо, рассеиваться на объекте и передавать ему случайный импульс [рис. 4.7(c)].

Рассмотренная ситуация имеет место не только для измерения “без взаимодействия”. Рассмотрим простой пример, изображенный на рис. 4.8 и являющийся вариантом известного метода “ножа и щели”. Здесь требуется определить местонахождение отражающего свет объекта M на оси x . Для этого на место его предполагаемого расположения посылается луч света, который либо не отражается от объекта и регистрируется фотодетектором D_1 [рис. 4.8(a)], либо отражается и регистрируется фотодетектором D_2 [рис. 4.8(b)]. Возмущение импульса объекта очевидно отсутствует в случае (a). В случае (b) возмущение x -компоненты импульса,

в принципе, может быть сделано сколь угодно малым, так как при отражении света от идеально отражающего зеркала последнему в тангенциальном направлении (вдоль оси x) не передается никакого импульса. Возмущение x -компоненты импульса здесь также имеет место только в том случае, когда луч касается края объекта и дифрагирует на нем [рис. 4.8(с)].

В обоих рассмотренных примерах измеритель дает информацию не о координате объекта, а о том, находится ли его координата в некотором заданном диапазоне значений. Впервые квантовые измерения такого типа были рассмотрены в книге [2]. Измеряемой величиной в них являются бинарные наблюдаемые — *Eigenschaften* (в русском переводе книги — *альтернативные свойства*), которые могут принимать лишь два значения: “да” или “нет”. Такие измерения называют “да-нет” измерениями.

Известным примером “да-нет” измерения является процедура which-path [9], в которой невозмущающим (в смысле квантовых невозмущающих измерений [10]) образом определяется, по какому из двух возможных путей пролетела частица в схеме интерференции с двумя щелями, которая была рассмотрена выше в подразделе 4.3.

Интересно отметить, что which-path измерение является фактически вариантом измерения “без взаимодействия”, только рассматриваемого с “противоположной стороны”. Действительно, один из резонаторов на рис. 4.4, например

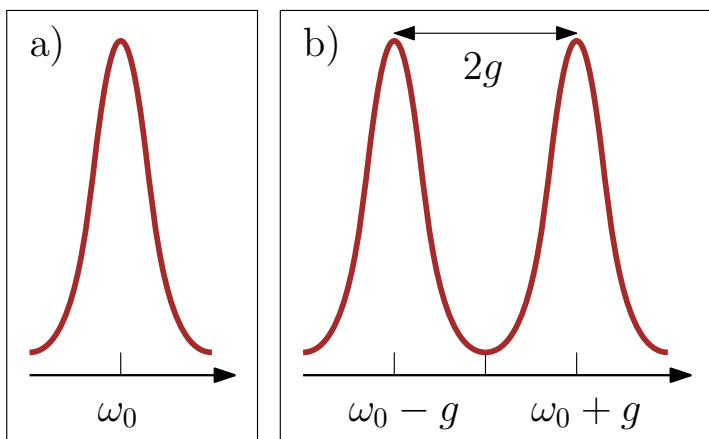


Рис. 4.9: Резонансная кривая резонатора Фабри-Перо на просвет: а) без атома и б) с атомом внутри.

нижний, может быть удален. Тогда мы получаем схему измерения “без взаимодействия”: частицы, пролетевшие по нижнему пути, и заведомо не взаимодействовавшие с резонатором в верхней щели, тем не менее “чувствуют” его наличие. Отличие от процедуры *which-path* здесь лишь в том, что в ней интерферирующие частицы выступают в роли исследуемых объектов, а резонаторы — в роли измерительного прибора, а в измерении “без взаимодействия” — наоборот.

Отметим, что в разобранный схеме на рис. 4.5 можно вместо поглотителя использовать резонатор Фабри-Перо и проверять “без взаимодействия”, есть или нет атом внутри него. Напомним, резонансный свет, падающий на резонатор Фабри-Перо с одинаковыми зеркалами (частично пропускающими), полностью проходит через него. Поэтому пустой резонатор Фабри-Перо будет себя вести как полностью поглощающий объект для падающих *резонансных* фотонов.

Пусть частота одного из переходов атома близка к соб-

ственной частоте резонатора Фабри-Перо. Тогда этот атом, находясь внутри резонатора, расщепляет резонансную частоту последнего:

$$\omega_0 \Rightarrow \omega_0 \pm g, \quad (4.21)$$

где g — частота биений Раби, см. рис. 4.9. Пусть величина отстройки g превышает как полосу пропускания резонатора Фабри-Перо γ , так и ширину линии γ_{\perp} атома (последняя определяется собственной релаксацией двухуровневой системы).

Будем считать, что частота фотонов равна $\omega_0 \pm g$. Тогда при наличии атома внутри резонатора этот резонатор будет вести себя как поглощающий объект, а при отсутствии атома внутри него — как хорошо отражающее зеркало. Для квантов с частотой ω_0 ситуация будет противоположной.

Резонатор Фабри-Перо, удовлетворяющий условию $g \gg \gamma$, а также условию $g \gg \gamma_{\perp}$ (γ_{\perp} — постоянная распада атома с верхнего уровня), также необходимому в такого рода экспериментах, был продемонстрирован в работе [11]. В этой работе использовался резонатор Фабри-Перо с резкостью (finesse) $\mathcal{F}_{\text{FP}} = \pi/T_{\text{FP}} = 4.2 \times 10^5$. При длине волны рабочего перехода $\lambda_{\text{atom}} \simeq \lambda_{\text{FP}} = 852.4$ нм, длине резонатора $L_{\text{FP}} = 44.6$ мкм и ширине луча $w_0 = 29$ мкм частота биений Раби ридберговского атома цезия составляла

$$g = 2\pi \times 32.2 \times 10^6 \text{ сек}^{-1}, \quad (4.22)$$

а значения γ и γ_{\perp} были равны

$$\gamma_{\perp} = 2.6 \times 10^6 \text{ сек}^{-1}, \quad (4.23)$$

$$\gamma = \frac{\pi c}{2\mathcal{F}_{\text{FP}}L_{\text{FP}}} \simeq 25.3 \times 10^6 \text{ сек}^{-1} \quad (4.24)$$

Коэффициент отражения отстроенного на величину g резонатора Фабри-Перо при этом лишь незначительно отличался от единицы:

$$|K_{\text{FP}}| = \frac{g}{\sqrt{\gamma^2 + g^2}} \simeq 0.992, \quad (4.25)$$

тогда как коэффициент отражения резонатора *без* атома равен практически нулю.

Этот пример демонстрирует, что современный технологический уровень позволяет обнаруживать “без взаимодействия” единичные атомы.

4.5 Интерферометр с подвижным зеркалом

Начнем с опыта с двумя щелями, одна из которых подвижна и может испытывать отдачу — рис. 4.10. Эта модификация опыта Юнга была предложена Бором как мысленный эксперимент. Фактически это аналог схемы на рис. 4.4 с той только разницей, что это схема для интерференции света, тогда как схема на рис. 4.4 — для интерференции атомов.

Пусть поток света, падающий на щели, достаточно мал, т.е. расстояние между отдельными фотонами велико по

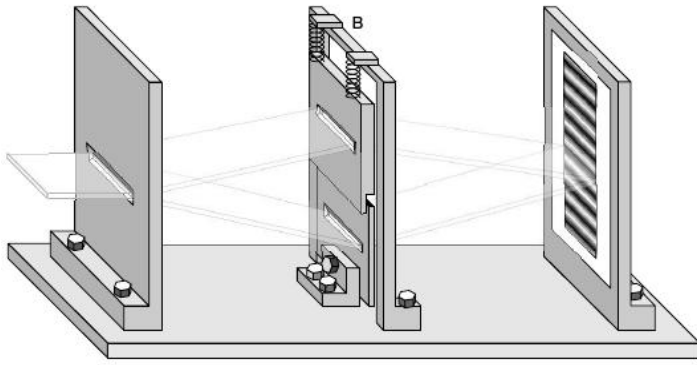


Рис. 4.10: Мысленный опыт Бора интерференции света на двух щелях, одна (верхняя) из которых может испытывать отдачу и двигаться, тогда как нижняя фиксирована и не может двигаться.

сравнению с размерами установки. Тогда мы можем рассматривать интерференцию отдельного фотона. А интерференционные полосы появятся только после регистрации большого числа фотонов.

Верхняя щель на пластине **B** висит на пружинках. Пусть первоначально этот механический осциллятор частоты ω_m находится в основном состоянии. После пролета фотона осциллятор получит *случайный* импульс порядка

$$|p_{\text{diff}}| \simeq \hbar \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2\pi d} \simeq \frac{\hbar}{d} \quad (4.26)$$

где d ширина щели.

Если верхняя щель имеет достаточно малую массу m , то этот импульс $|p_{\text{diff}}|$ будет сравним или больше, чем флуктуационный импульс $\sqrt{\langle \Delta^2 p_0 \rangle} \simeq \sqrt{m\hbar\omega_m/2}$ первоначального состояния осциллятора. Значит, после пролета фотон и верхняя щель окажутся в переплетенном (entangled) состоянии друг с другом. Это даст информацию о том, каким

путем пролетел фотон (which-path). В этом случае интерференционные полосы пропадут.

Если же масса верхней щели достаточно велика так, что импульс, полученный от пролетевшего фотона, много меньше чем $\sqrt{\langle \Delta^2 p_0 \rangle}$, тогда информация which-pass недоступна и интерференционные полосы будут наблюдаться отчетливо.

Важно, что в первом случае легкой щели интерференция пропадет даже в том случае, если экспериментатор *не измеряет* импульс щели после пролета. Все равно информация which-path записана, а значит и интерференция пропадает.

4.5.1 Интерферометр Маха-Цандера

Рассмотрим аналогичную схему с механической отдачей, но на примере интерферометра Маха-Цандера, следуя работе [12] — см. рис. 4.11а. Входной луч разделяется на светоделителе B_1 на лучи \mathbf{a} и \mathbf{b} и рекомбинируют на светоделителе B_2 . На выходе свет регистрируется детектором D . Другой выход (показан пунктирной линией) не используется. Дефазирующий элемент вносит разность фаз Φ между плечами. Светоделитель B_1 есть часть маятника вращения, который может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. Первоначально осциллятор находится в основном

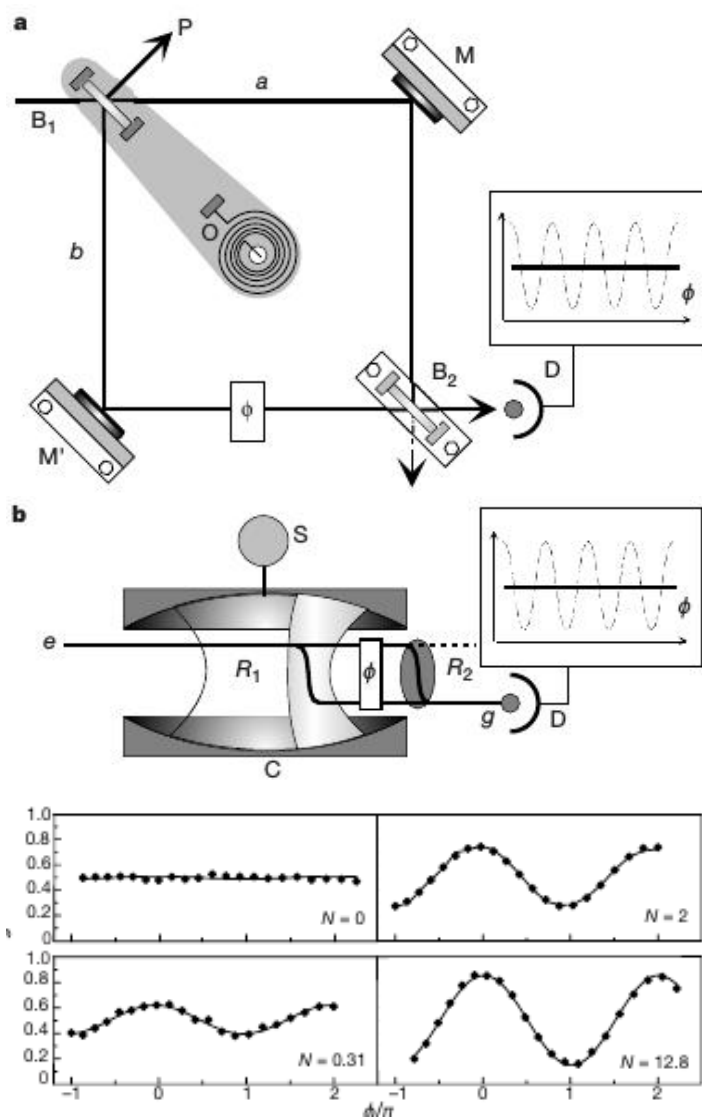


Рис. 4.11: Другие варианты мысленного опыта Бора с 2-мя щелями. а) Интерферометр Маха-Цандера. б) Атомный интерферометр Рамзея. в) Интерференционные кривые для атомного интерферометра в зависимости от числа квантов в импульсе R_1 .

состоянии. Если светоделитель B_1 имеет большую массу, то при отражении фотона передаваемый им импульс меньше, чем импульс $\sqrt{\langle \Delta^2 p_0 \rangle}$ осциллятора в основном состоянии — наблюдается дифракционная картина (показана пунктиром). Если же светоделитель B_1 имеет малую массу, то при отражении фотона он получает импульс больше импульса $\sqrt{\langle \Delta^2 p_0 \rangle}$ — интерференционная картина пропадает (показана сплошной прямой).

Очевидно, что после светоделителя B_1 волновая функция фотона записывается в виде

$$|\Psi_{\text{after } B_1}\rangle = \frac{|\Psi_a\rangle|\Psi_{B1,a}\rangle + |\Psi_b\rangle|\Psi_{B1,b}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.27)$$

где $|\Psi_a\rangle$, $|\Psi_b\rangle$ описывает по какому пути (**a** или **b**) прошел фотон, тогда как вектора $|\Psi_{B1,a}\rangle$, $|\Psi_{B1,b}\rangle$ описывает состояние светоделителя после прохождения фотона.

Перед светоделителем B_2 :

$$|\Psi_{\text{before } B_2}\rangle = e^{i\omega L/c} \cdot \frac{e^{i\phi}|\Psi_a\rangle|\Psi_{B1,a}\rangle + e^{-i\phi}|\Psi_b\rangle|\Psi_{B1,b}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.28)$$

где L , ϕ определены в (4.5).

После светоделителя B_2 :

$$|\Psi_{\text{after } B_2}\rangle = \frac{e^{i\omega L/c}}{2}. \quad (4.29)$$

$$\cdot \{e^{i\phi} (|\Psi_D\rangle + |\Psi_{D1}\rangle)|\Psi_{B1,a}\rangle + e^{-i\phi} (|\Psi_D\rangle - |\Psi_{D1}\rangle)|\Psi_{B1,b}\rangle\} =$$

$$= \frac{e^{i\omega L/c}}{2} \{|\Psi_D\rangle (e^{i\phi}|\Psi_{B1,a}\rangle + e^{-i\phi}|\Psi_{B1,b}\rangle) \quad (4.30)$$

$$+ |\Psi_{D1}\rangle (e^{i\phi}|\Psi_{B1,a}\rangle - e^{-i\phi}|\Psi_{B1,b}\rangle)\} \quad (4.31)$$

Здесь $|\Psi_D\rangle$ соответствует фотону, падающему на детектор D , а $|\Psi_{D2}\rangle$ – фотону в другом канале вниз (без детектора) на рис. 4.11а.

Вероятность $P(\phi)$ того, что щелкнет детектор D , определяется формулой:

$$\begin{aligned} P(\phi) &= \frac{1}{4} \left| \left(e^{-i\phi} \langle \Psi_{B1,a} | + e^{i\phi} \langle \Psi_{B1,b} | \right) \left(e^{i\phi} |\Psi_{B1,a}\rangle + e^{-i\phi} |\Psi_{B1,b}\rangle \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \Re \left[\langle \Psi_{B1,b} | \Psi_{B1,a} \rangle e^{2i\phi} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Если светоделитель B_1 достаточно тяжелый, то произведение $\langle \Psi_{B1,b} | \Psi_{B1,a} \rangle$ по модулю близко к единице и $P(\phi) \simeq \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi)$ и мы наблюдаем отчетливую интерференцию. В случае же легкой массы светоделителя B_1 произведение $\langle \Psi_{B1,b} | \Psi_{B1,c} \rangle$ по модулю будет малым и интерференция будет подавлена.

Задача (17).

4.5.2 Атомный интерферометр “с отдачей”

Рассмотрим атомный интерферометр на рис. 4.11b как другой аналог схемы Бора на рис. 4.10. Ридберговский атом (двухуровневая система), первоначально находившийся в основном состоянии g , приготавливается в состояние между уровнями e и g классическим полем R_1 (аналог светоделителя B_1). Через некоторое время перед самым детектированием атом опять подвергается воздействию классического импульса R_2 (аналог светоделителя B_2). Между импульса-

ми \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 включается дополнительное поле, которое регулирует набег фаз между амплитудами населенностей за счет эффекта Штарка (аналог разности хода ϕ на рис. 4.11а).

После воздействия импульса \mathbf{R}_1 в *когерентном* состоянии состояние атома + светоделитель записывается в виде аналогичном (4.27)

$$\Psi_{\text{afterR}_1} = \frac{|e\rangle|\alpha_e\rangle + |g\rangle|\alpha_g\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \text{where} \quad (4.33a)$$

$$|\alpha_e\rangle = \sqrt{2} \left(\sum_n C_n \cos [\Omega\sqrt{n+1}t_\alpha] |n\rangle \right), \quad (4.33b)$$

$$|\alpha_g\rangle = \sqrt{2} \left(\sum_n C_n \sin [\Omega\sqrt{n+1}t_\alpha] |n+1\rangle \right), \quad (4.33c)$$

$$\sum_n |C_n|^2 \cos^2 [\Omega\sqrt{n+1}t_\alpha] = \frac{1}{2}. \quad (4.33d)$$

Здесь C_n — коэффициенты разложения когерентного поля \mathbf{R}_1 по энергетическим состояниям, t_α — длительность импульса \mathbf{R}_1 , определяемая уравнением (4.33d).

После воздействия второго (классического) поля \mathbf{R}_2 вероятность найти атом в основном состоянии равна, ср. с (4.32):

$$P(g) = \frac{1}{2} (1 + \Re [\langle \alpha_e | \alpha_g \rangle e^{2i\phi}]) \quad (4.34)$$

Если поле \mathbf{R}_1 классическое, т.е. количество фотонов в нем $N \gg 1$ (или на другом языке $|\langle \alpha_e | \alpha_g \rangle| \simeq 1$), то интерференционная картина наблюдается.

Если же поле \mathbf{R}_1 квантовое, т.е. $N \simeq 1$, это аналог квантовой отдачи в интерферометре рис. 4.11а — контраст-

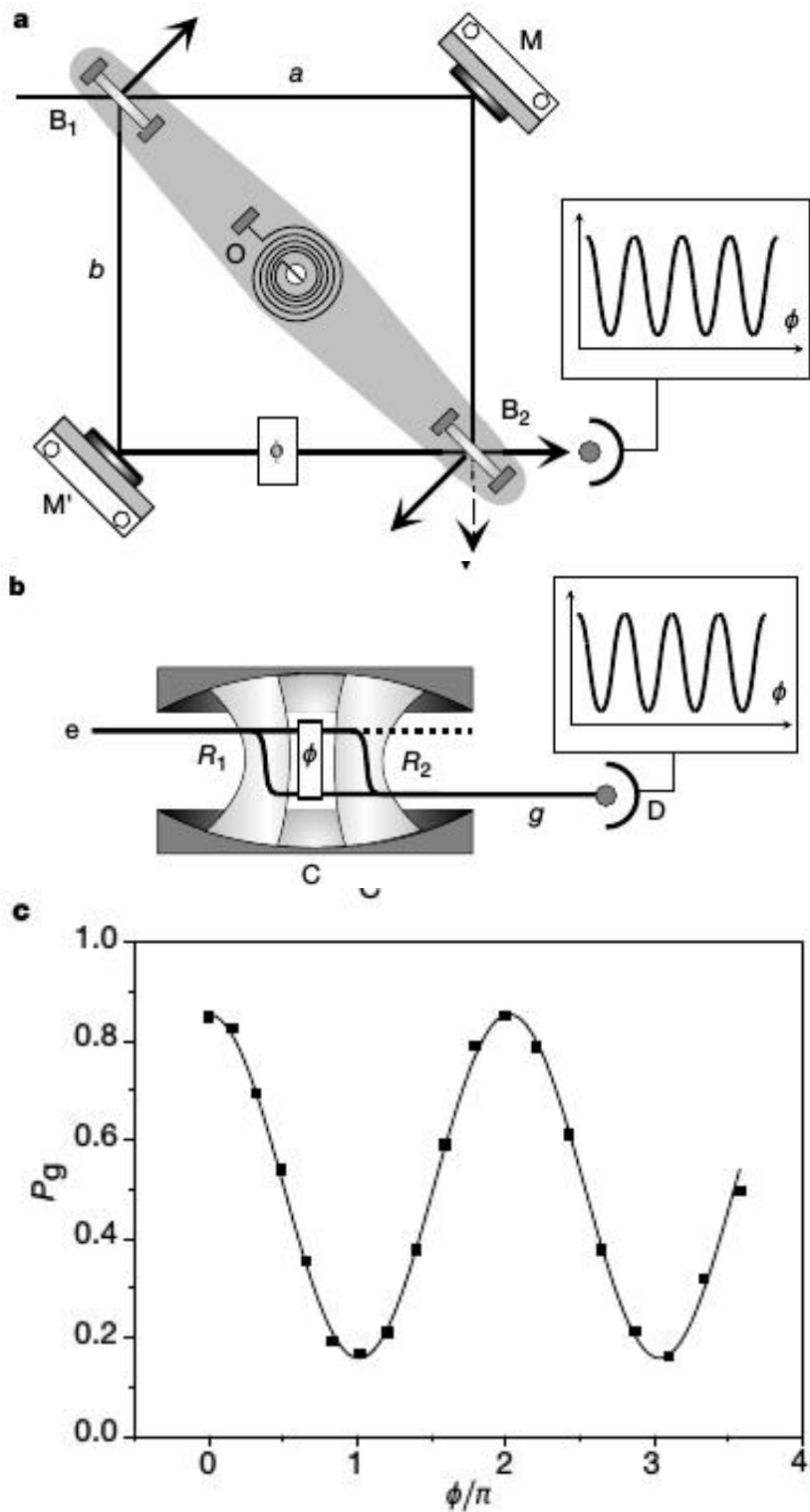


Рис. 4.12: а) Интерферометр Маха-Цандера с компенсацией отдачи: светоделители B_1 , B_2 закреплены на одной штанге. б) Атомный интерферометр Рамзея с компенсацией обратного влияния. в) Интерференционные кривые демонстрируют большую контрастность при слабом поле R_1 .

ность интерференционной картины пропадает. см. дифракционные кривые на рис. 4.11с. Этот случай соответствует $|\langle \alpha_e | \alpha_g \rangle| \ll 1$.

4.5.3 Интерферометр Маха-Цандера и атомный интерферометр с компенсацией отдачи

Теперь рассмотрим схему с компенсацией отдачи, светоделители M_1 , M_2 закреплены на штанге, которая может вращаться — см. рис. 4.12а. Здесь оба светоделителя имеют малую массу и испытывают отдачу. Но информация о том, по какому пути прошел фотон, стирается. Действительно, независимо от того по какому пути \mathbf{a} или \mathbf{b} прошел фотон, штанге передается одинаковый импульс. Поэтому принципиально невозможно определить, по какому пути прошел фотон.

Схема аналога в виде атомного интерферометра представлена на рис. 4.12б. Атом взаимодействует с сначала с импульсом \mathbf{R}_1 , затем эволюционирует, накручивая фазу ϕ (опять используется Штарк эффект), а потом подвергается воздействию импульса \mathbf{R}_2 . Отличие от предыдущего случая оба импульса \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 слабые (мало квантов) и возникают при пролете атома из-за взаимодействия с одной и той же модой резонатора. В пределе будем считать $|\alpha_e\rangle = |0\rangle$, $|\alpha_g\rangle = |1\rangle$. В этом случае непосредственно перед вторым импульсом \mathbf{R}_2

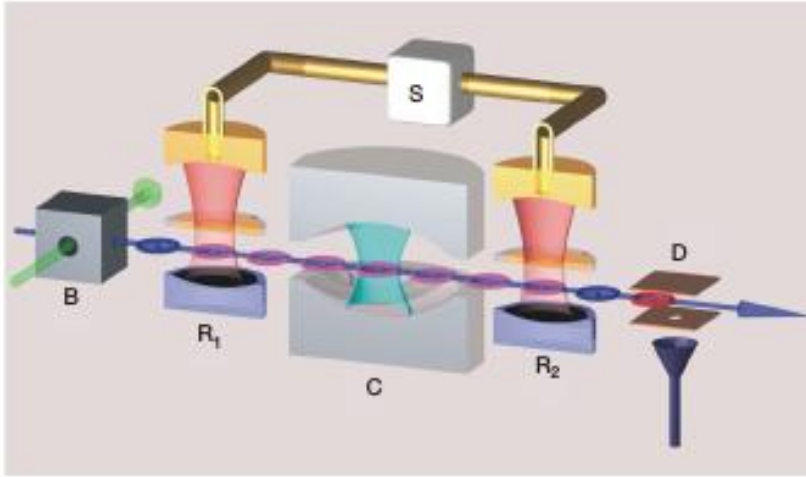


Рис. 4.13: Схема квантового невозмущающего измерения (КНИ) фотона.

и после него состояние поле + атом описывается как

$$\Psi'_{\text{before}R_2} = \frac{|e\rangle|0\rangle e^{2i\phi} + |g\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.35)$$

$$\Psi'_{\text{after}R_2} = \frac{-|e\rangle|0\rangle e^{2i\phi} (1 - e^{2i\phi}) + |g\rangle|1\rangle (1 + e^{2i\phi})}{2} = \quad (4.36)$$

$$= \frac{-|e\rangle|0\rangle e^{2i\phi} i e^{i\phi} \sin \phi + |g\rangle|1\rangle e^{i\phi} \cos \phi}{2} \quad (4.37)$$

Мы видим, что интерференция полностью сохраняется.

Подчеркнем, что схемы на рис. 4.11а, 4.12а — это умозрительный опыты, его реализация практически невозможна. Однако атомные аналоги, представленные на рис. 4.11b, 4.12b — это реально проведенные эксперименты [12].

4.6 Квантовое невозмущающее измерение фотона атомным интерферометром

Рассмотрим схему квантовое невозмущающее измерение (КНИ) одиночных квантов в СВЧ резонатора, представленную на рис. 4.13 [13]. СВЧ резонатор C частоты 51 ГГц находится при температуре $T = 0.8\text{К}$ (среднее число тепловых квантов $n_T \simeq 1/3$). Это означает, что он чаще находится в основном состоянии $|0\rangle$, реже в $|1\rangle$, а в состоянии $|2\rangle$ резонатор попадает редко и мы такую возможность ниже не рассматриваем. Время релаксации резонатора достаточно велико $\tau^* \simeq 0.129$ сек.

Рубидиевые атомы монокинетизированы (имеют примерно одинаковую скорость) и предварительно приготовлены в устройстве B так, что они находятся на долгоживущем уровне 50 (это уровень $|g\rangle$), а частота перехода на уровень 51 (это $|e\rangle$) совпадает с частотой резонатора. Далее под действием классического поля R_1 атом переходит в состояние “между уровнями” типа (1.38)

$$|\psi_0\rangle = \frac{|e\rangle - i|g\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.38)$$

и влетает в резонатор. Можно подобрать время пролета в резонаторе так, что

- Если в резонаторе нет фотонов (т.е. резонатор в состоянии $|0\rangle$), то состояние атома на выходе не изменяется.

- Если резонатор находится в состоянии $|1\rangle$, то состояние атома на выходе из резонатора меняет фазу

$$|\psi_1\rangle = \frac{|e\rangle + i|g\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.39)$$

Далее на атом действует второе классическое поле R_2 так, что

- Если атом был в состоянии $|\psi_0\rangle$, то он переводится в состояние $|0\rangle$
- Если же атом был в состоянии $|\psi_1\rangle$, то он переводится в состояние $|1\rangle$

Такая возможность есть, мы ее рассматривали в разделе [1.3.2.](#)

Таким образом, детектируя атом в состоянии $|1\rangle$, экспериментатор делает вывод, что в резонаторе присутствует фотон. Если же оказалось, что атом в состоянии $|0\rangle$, то в резонаторе нет фотона.

Мы получили квантовое невозмущающее измерение энергии СВЧ резонатора. Действительно, атом после пролета *не уносит* энергию (энергия атома до и после пролета через резонатор — та же самая). Информацию мы получаем за счет изменения *фазы* волновой функции атома.

Глава 5

Парадокс ЭПР

Парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена [14] был сформулирован дабы продемонстрировать, что вероятностное описание квантовой механики неполно и противоречиво. Предполагалось, что вместо квантовой механики можно использовать классическое описание, но учесть существование скрытых параметров — как известно, этого сделать нельзя.

5.1 Качественное рассмотрение

Пусть мы имеем частицу 1, координата и импульс (рассматриваем одномерный случай) которой описываются гейзенберговскими операторами \hat{x}_1 и \hat{p}_1 , Эти операторы не коммутируют

$$[\hat{x}_1, \hat{p}_1] = i\hbar, \quad (5.1)$$

поэтому неопределенности координаты Δx_1 и импульса Δp_1 подчиняются соотношению неопределенности Гейзенберга

$$\Delta x_1 \Delta p_1 \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (5.2)$$

т.е. координата и импульс не могут быть заданы (измерены) точно одновременно. Подчеркнем, что соотношение неопределенности (5.2) есть следствие того, что коммутатор (5.1) не равен нулю.

Пусть теперь мы имеем вторую частицу операторы координаты и импульса которой обозначим через \hat{x}_2 и \hat{p}_2 соответственно. Они подчиняются такому же соотношению неопределенности поскольку их коммутатор $[\hat{x}_2, \hat{p}_2] = i\hbar$ не равен нулю.

Однако заметим, что операторы \hat{p}_+ , \hat{x}_- коммутируют друг с другом:

$$\hat{p}_+ = \hat{p}_1 + \hat{p}_2, \quad \hat{x}_- = \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \quad (5.3)$$

$$[\hat{x}_-, \hat{p}_+] = [\hat{x}_1, \hat{p}_1] - [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = 0 \quad (5.4)$$

Но тогда можно задать такое *совместное* состояние двух частиц, что в начальный момент (а следовательно, и все последующие)

$$\Delta x_- = 0, \quad \Delta p_+ = 0.$$

Таким образом мы задали *коррелированное* квантовое состояние. Такие состояния получили в литературе название переплетенных или перепутанных (*entangled states*). Заметим, что для каждой отдельно взятой частицы, например, частицы 1, неопределенности Δx_1 , Δp_1 конечны и не равны нулю.

Рассуждения в работе [14] были следующие. Пусть мы имеем такое переплетенное состояние двух частиц, которые

в начальный момент находясь рядом, со временем удаляются друг от друга и в конце расходятся на значительное расстояние. Затем мы измеряем точно, допустим, импульс частицы **1**. Но из-за наличия корреляции (переплетённости) мы получаем *точную* информацию об импульсе частицы **2**. Если теперь одновременно с первым измерением мы точно измеряем координату частицы **2**, то в результате будем знать точно координату и импульс частицы **2**, что противоречит соотношению неопределенности (5.2).

Детальный анализ на основе теории квантовых измерений показывает, что нарушения принципа неопределенности в такой схеме не происходит. Однако наличие *мгновенного* изменения волновой функции частицы **2** приводит к мысли, что, возможно, описание состояния с помощью волновой функции *не полно*. Поэтому по мысли авторов [14] должны существовать какие-то *скрытые параметры*, которые более полно, чем квантовая механика будут описывать эксперимент.

Рассмотрим этот парадокс на более простом примере, предложенном Бомом [15] и допускающем более простой математический анализ. Пусть рождается пара частиц **A** и **B** со спином $1/2$, причем суммарный спин пары равен нулю. После того, как частицы родились, они разлетаются на большое расстояние. После этого экспериментатор может производить измерение какой-либо величины каждой из частиц.

Если, например, измерена проекция спина частицы **A**, то это означает, что проекция спина частицы **B** стала точно известна.

Рассуждения Ейнштейна, Подольского и Розена опираются на следующие утверждения:

1. *Полная антикорреляция*: Направления спинов частиц **A** и **B** противоположны.
2. *Локальность*: Во время измерения частицы не взаимодействуют, поэтому не может иметь места никакое реальное изменение состояния частицы **B** из-за того, что произведено измерение над частицей **A**.
3. *Причинность (Reality)*: Если, не возмущая состояние частицы, мы можем точно (с вероятностью 1) предсказать значение физической величины этой частицы, то должен существовать элемент физической реальности, соответствующий этой физической величине.
4. *Полнота*: Каждый элемент физической реальности должен соответствовать определенной величине в физической теории.

Тогда, опираясь на эти утверждения, можно рассуждать следующим образом. Если экспериментатор измеряет проекцию спина частицы **A**, то он точно знает и проекцию спина частицы **B** (антикорреляция). Из-за принципа локальности измерение над частицей **A** не должно изменить состоя-

ние частицы **B**. Следовательно, из-за причинности (reality) спин частицы **B** есть элемент физической реальности. Но это утверждение относится к проекции на любую ось спина частицы **B**. Однако, нельзя указать такого состояния частицы **B**, в котором все проекции спина были бы определены. Следовательно, опираясь на принцип полноты, можно утверждать, что квантовая механика не является полной теорией, поскольку пара наших частиц является элементом физической реальности, для которой квантовая механика не предполагает наличие физической величины. Поэтому должна существовать другая (полная) теория, которая лишена этих недостатков. Должны быть какие-то *скрытые* параметры, которые дают непротиворечивое описание. Таков ход рассуждений работы [14].

Рассмотрим, как описывает эту ситуацию квантовая механика. Известно, что проекция спина каждой частицы на какую-нибудь заранее выбранную ось (пусть это будет ось **z**) может иметь только два значения. Состояния, например, частицы **A** будем обозначать $|z_+^A\rangle$, $|z_-^A\rangle$. Состояние двух частиц с полностью антикоррелированными спинами называется *синглетным ЭПР-состоянием* и записывается в виде:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|z_+^A z_-^B\rangle - |z_-^A z_+^B\rangle \right) \quad (5.5)$$

Заметим, что вид записи такого состояния инвариантен относительно базиса, т.е. если записать состояние (5.5) в другом базисе, например, через состояния $|x_+^A\rangle$, $|x_-^A\rangle$, то оно

будет иметь вид $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_+^A\chi_-^B\rangle - |\chi_-^A\chi_+^B\rangle)$. Задача (18).

Можно показать (см. Приложение В), что если мы будем измерять проекции спина на произвольную ось u одной и другой частиц, то получим полную антикорреляцию. Например, если измерять проекцию спина на ось x , то получим следующие амплитуды вероятности

$$\langle \chi_+^A\chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle \chi_-^A\chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (5.6)$$

$$\langle \chi_+^A\chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.7)$$

$$\langle \chi_-^A\chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}. \quad (5.8)$$

Поэтому мы можем сделать вывод, что состояние (5.5) действительно соответствует полностью антикоррелированным спинам: проекция суммарного спина на *любую* ось равна нулю.

Такое состояние называется перепутанным (entangled state), поскольку это состояние не может быть представлено в виде произведения двух векторов, каждый из которых описывает только одну частицу.

Вернемся к измерениям. Измеряя проекцию спина частицы A на ось z , я получу либо $+1$ либо -1 . В результате измерения произойдет *редукция* волновой функции. Пусть после измерения мы получили $+1$. Тогда состояние системы двух частиц будет описываться с помощью проекционного

оператора

$$\frac{1}{N} |z_+^A\rangle \langle z_+^B | \Psi_{AB}\rangle = |z_-^B\rangle \quad (5.9)$$

(N — нормировочный множитель). Таким образом после измерения мы получили, что состояние частицы B точно определено.

Главный вопрос парадокса ЕПР касается описания процесса измерения. После измерения волновая функция частицы B кардинально изменилась. Поэтому можно спросить, а является ли описание с помощью волновой функции полным? Нельзя ли результат эксперимента описать на классическом языке, вводя скрытый параметр?

Для ответа на этот вопрос Беллом [16] были предложены схемы экспериментов и сформулированы *неравенства Белла*, которые позволяют определить, какое описание правильно: квантово-механическое или квазиклассическое с помощью скрытых параметров. Были проведены эксперименты (см. [17] и ссылки там) которые продемонстрировали, что правильно квантовомеханическое описание. Мы не будем детально останавливаться на этом, а только приведем пример, который демонстрирует разницу между этими двумя описаниями.

5.1.1 Пример 1

Пусть у частицы A измеряется проекция спина на ось x , а у частицы B — на ось, которая лежит в плоскости xu и

составляет угол ϕ с осью x . Оба измерения производятся одновременно. Каждое измерение может дать два результата: либо $+1$, либо -1 .

Нас будут интересовать следующие величины: вероятность P_{++} того, что оба измерения дали $+1$, вероятность P_{--} (оба измерения -1), и вероятности P_{-+} и P_{+-} (одно измерение дало $+1$, другое — -1).

Квантовомеханическое рассмотрение позволяет рассчитать амплитуды вероятности (В.60) (детали см. в Приложении В), а затем посчитать вероятности и рассчитать величину:

$$S_{\text{qu}} = P_{++} + P_{--} - P_{-+} - P_{+-} = -\cos \phi \quad (5.10)$$

Задача (19).

Теперь рассмотрим ситуацию с классических позиций. Пусть мы имеем два магнитика, магнитные моменты которых направлены произвольно, но всегда противоположно другому.

Если я измеряю проекцию момента частицы A на ось x , то в одной половине случаев я получу положительную проекцию, в другой — отрицательную. Я могу мысленно провести сферу из начала координат и считать, что концы векторов магнитного момента равномерно распределены по сфере. Тогда плоскость $x = 0$ будет разделять всю сферу на две равные части, на одной из которых проекция на ось x положительна, а на другой — отрицательна. Назовем эти

полусферы \mathbf{x} -полусферами.

Пусть теперь я измеряю проекцию момента частицы \mathbf{B} на единичный вектор \mathbf{n}_ϕ , лежащий в плоскости $\mathbf{x}\mathbf{y}$ и составляющий угол ϕ с осью \mathbf{x} . Опять в одной половине случаев я получу положительную проекцию, в другой — отрицательную. Я могу провести плоскость перпендикулярную вектору \mathbf{n}_ϕ , которая будет разделять всю сферу на две равные части, на одной из которых проекция на \mathbf{n}_ϕ положительна, а на другой — отрицательна. Назовем эти полусферы \mathbf{n}_ϕ полусферами.

Очевидно, что границы \mathbf{x} -сфер и \mathbf{n}_ϕ -сфер, не совпадают и делят всю сферу на участки, на которых знаки проекций частиц \mathbf{A} и \mathbf{B} на соответствующие оси либо одинаковые, либо разные. Эти области подобны поверхностям глобуса, ограниченными меридианами (или долькам, на которые часто нарезают арбуз). Теперь нетрудно рассчитать классический аналог (5.10):

$$S_{cl} = P_{++} + P_{--} - P_{-+} - P_{+-} = -1 + \frac{2\phi}{\pi} \quad (5.11)$$

Задача (20).

Графики функций S_{qu} и S_{cl} приведены на рис. 5.1. Мы видим, что по результатам эксперимента можно сделать выбор в пользу правильного описания. Действительно, надо измерять величину $S_{qu}(\phi)$ как функцию ϕ , наибольшая разница между квантовым и квазиклассическим описанием должна

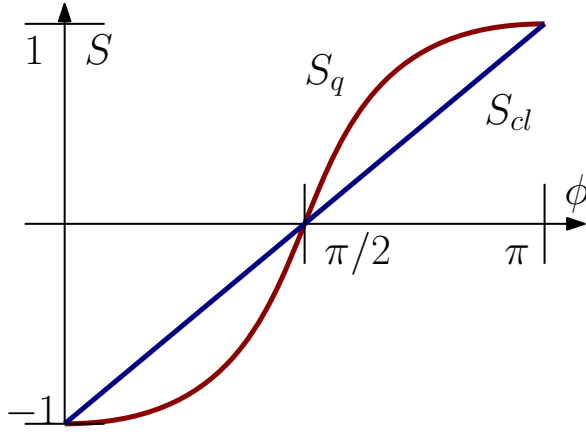


Рис. 5.1: Графики функций S_{qu} и S_{cl} . Очевидно, что измеряя в эксперименте величину S_{exp} , можно проверить, какое рассмотрение — квантово-механическое или квазиклассическое соответствует эксперименту

наблюдаться при $\phi = \pi/4, 3\pi/4$.

Детальный анализ (см. например [18]) показывает, что рассмотрение с введением скрытых параметров дает при некоторых значениях угла ϕ *меньшие* значения величины S , чем предсказывает квантовая теория.

Подчеркнем, эксперимент доказывает, справедливо квантовое описание, т.е. формула (5.10), а не (5.11).

5.1.2 Пример 2

Рассмотрим состояние трех частиц A, B, C , которое в литературе называется GHZ- (Greenberg-Horne-Zeulinger)

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B z_+^C\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B z_-^C\rangle \quad (5.12)$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов трех частиц имеем

$$\langle z_+^A z_+^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.13)$$

$$\langle z_-^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.14)$$

$$\langle z_+^A z_+^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle = \langle z_+^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0, \quad (5.15)$$

$$\langle z_+^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle = \langle z_-^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0. \quad (5.16)$$

Пусть эти частицы разлетаются в разные стороны и проекция спина каждой измеряются тремя разными детекторами. Если детекторы измеряют проекцию каждого спина на ось z , то нетрудно посчитать амплитуды вероятностей различных исходов и найти, что возможны только два варианта: либо все три детектора фиксируют состояние $|z_+\rangle$, либо все три детектора фиксируют состояние $|z_-\rangle$.

Таким образом, пытаясь описать это состояние на классическом языке, мы можем сделать вывод, что состояние симметрично в том смысле, что либо все три магнетика направлены вверх, либо — вниз. При этом (опять рассуждая классически) проекции магнетиков на оси x и y , по видимому, должны быть направлены произвольно.

Однако квантовое описание дает совершенно неожиданный результат. Пусть все три детектора регистрируют проекции спинов на ось x . Тогда можно рассчитать амплитуды

вероятностей, пользуясь таблицей (A.11)

$$\langle \mathbf{x}_+^A \mathbf{x}_+^B \mathbf{x}_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{(1)^3}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \quad (5.17)$$

$$\langle \mathbf{x}_+^A \mathbf{x}_+^B \mathbf{x}_-^C | \Psi_{ABC} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \quad (5.18)$$

$$\langle \mathbf{x}_+^A \mathbf{x}_-^B \mathbf{x}_-^C | \Psi_{ABC} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{(-1)^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \quad (5.19)$$

$$\langle \mathbf{x}_-^A \mathbf{x}_-^B \mathbf{x}_-^C | \Psi_{ABC} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{(-1)^3}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}. \quad (5.20)$$

(Очевидно, что частицы неразличимы, и амплитуды вероятности не изменяются при заменах частиц.)

То есть возможны только следующие результаты:

- Все три частицы будут зарегистрированы в состоянии $|\mathbf{x}_-\rangle$. (Вероятность такого исхода — $1/4$.)
- Одна частица будет зарегистрирована в состоянии $|\mathbf{x}_-\rangle$, а две других — в состоянии $|\mathbf{x}_+\rangle$. (Вероятность такого исхода — $3/4$.)
- *Никогда* не будут зарегистрированы все три частицы в состоянии $|\mathbf{x}_+\rangle$.
- *Никогда* не будет зарегистрирована одна частица в состоянии $|\mathbf{x}_+\rangle$, а две других — в состоянии $|\mathbf{x}_-\rangle$

Т.е. состояние $|\mathbf{x}_-\rangle$ может быть зарегистрировано только

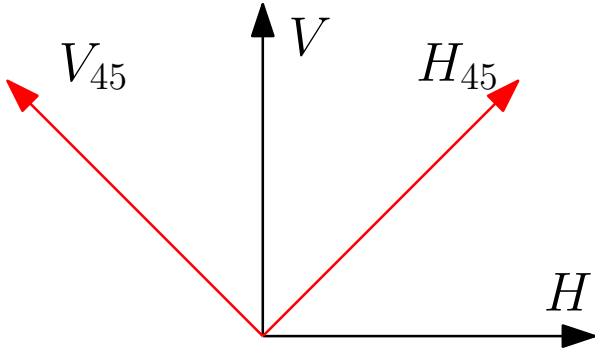


Рис. 5.2: В зависимости от поляризации фотон может соответствовать спиновой частице

нечетным (1, 3) числом детекторов¹.

Очевидно, что такая несимметрия результатов не может быть объяснена классически.

5.2 Эксперимент

Подчеркнем сразу, что результаты экспериментов [17] однозначно свидетельствуют в пользу квантового описания.

Очевидно, что проводить эксперименты со спиновыми частицами крайне сложно. Вместо этого были проведены оптические эксперименты.

¹Заметим, что если первоначально три частицы были в состоянии

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B z_+^C\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B z_-^C\rangle,$$

то состояния $|x_+\rangle$ и $|x_-\rangle$ меняются местами, т.е. состояние $|x_+\rangle$ может быть зарегистрировано только *нечетным* (1, 3) числом детекторов.

5.2.1 Один фотон. Качественное рассмотрение

Пусть мы имеем один фотон. Договоримся, что фотон поляризованный вертикально (по оси \mathbf{V} – см. рис. 5.2) будем соотносить с состоянием спиновой частицы $|z_+\rangle$, а фотон поляризованный горизонтально (по оси \mathbf{H}) – с состоянием спиновой частицы $|z_-\rangle$:

$$|z_+\rangle \equiv |\mathbf{V}\rangle, \quad |z_-\rangle \equiv |\mathbf{H}\rangle \quad (5.21)$$

В этом случае фотон, поляризованный под 45° (вдоль оси \mathbf{H}_{45} на рис. 5.2), будет соответствовать состоянию частицы $|x_+\rangle$, а поляризованный вдоль оси \mathbf{V}_{45} – состоянию частицы $|x_-\rangle$:

$$|x_+\rangle \equiv |\mathbf{H}_{45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{V}\rangle + |\mathbf{H}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle + |z_-\rangle), \quad (5.22)$$

$$|x_-\rangle \equiv |\mathbf{V}_{45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{V}\rangle - |\mathbf{H}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle - |z_-\rangle) \quad (5.23)$$

Теперь вспоминая определения $|y_\pm\rangle$ получаем:

$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle + i|z_-\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{V}\rangle + i|\mathbf{H}\rangle), \quad (5.24)$$

$$|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle - i|z_-\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{V}\rangle - i|\mathbf{H}\rangle) \quad (5.25)$$

Теперь очевидно, что собственным векторам $|y_\pm\rangle$ будет соответствовать право- и лево-поляризованные фотоны.

Таким образом, измерение наличия фотона в базисе \mathbf{H} и \mathbf{V} (например, с помощью поляризационного светоделителя)

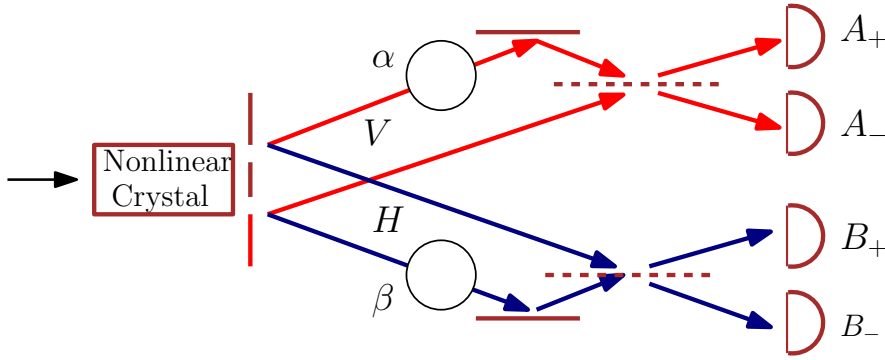


Рис. 5.3: Схема оптического эксперимента по проверке неравенств Белла с двумя наблюдателями. Кругок означает задержку луча на фазовый угол α и β соответственно.

будет соответствовать измерению проекции спина воображаемой частицы на ось \mathbf{z} . Измерение фотона в базисе \mathbf{H}_{45} и \mathbf{V}_{45} (с помощью того же поляризационного светоделителя, повернутого на угол 45°) будет соответствовать измерению проекции спина на ось \mathbf{x} . А измерение фотона в базисе круговых поляризаций будет соответствовать измерению проекции спина на ось \mathbf{y} .

Подчеркнем, что эта аналогия (фотон как спиновая ферми-частица) работает только пока мы имеем дело с *одиночными* фотонами в каждой световой моде.

В дальнейшем нам будет также полезно разложение через собственные вектора оператора $\hat{\sigma}_\phi = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi$

$$|\sigma_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad |\sigma_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

$$|z_+\rangle = \frac{|\sigma_+\rangle + |\sigma_-\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (5.27)$$

$$|z_-\rangle = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} (|\sigma_+\rangle - |\sigma_-\rangle), \quad (5.28)$$

$$|\sigma_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle + e^{i\phi}|z_-\rangle), \quad (5.29)$$

$$|\sigma_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle - e^{i\phi}|z_-\rangle). \quad (5.30)$$

Очевидно, что векторам $|\sigma_+$, $|\sigma_-$ соответствуют эллиптически поляризованные фотоны.

5.2.2 Один фотон в двух модах

Рассмотрим множество двухмодовых однофотонных состояний, в которых один фотон принадлежит одной из двух мод:

$$\psi = C_+|10\rangle + C_-|01\rangle, \quad |C_+|^2 + |C_-|^2 = 1 \quad (5.31)$$

$$a_1^+|0\rangle = |10\rangle \Rightarrow |z_+\rangle, \quad a_2^+|0\rangle = |01\rangle \Rightarrow |z_-\rangle \quad (5.32)$$

Чтобы связать фотоны со спинами введем следующие операторы

$$\begin{aligned} \sigma_- &\equiv a_1 a_2^+ = (\sigma_x - i\sigma_y)/2, \\ \sigma_+ &\equiv a_1^+ a_2 = (\sigma_x + i\sigma_y)/2, \\ \sigma_x &= \sigma_- + \sigma_+, \quad \sigma_y = i(\sigma_- - \sigma_+), \\ \sigma_z &\equiv a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2 = n_1 - n_2 = [\sigma_+, \sigma_-] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Откуда

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = 4j(j+1), \quad j = \frac{n_1 + n_2}{2}$$

Из приведенных соотношений видно, что оператор σ_- переводит фотон из первой моды во вторую (т.е. это оператор уничтожения для двухуровневой частицы), а оператор σ_+ производит обратное действие:

$$\sigma_-|10\rangle = |01\rangle, \quad \sigma_-|01\rangle = 0, \quad (5.34)$$

$$\sigma_+|01\rangle = |10\rangle, \quad \sigma_+|10\rangle = 0, \quad (5.35)$$

Эти соотношения можно переписать нагляднее:

$$\sigma_-|z_+\rangle = |z_-\rangle, \quad \sigma_-|z_-\rangle = 0, \quad (5.36)$$

$$\sigma_+|z_-\rangle = |z_+\rangle, \quad \sigma_+|z_+\rangle = 0, \quad (5.37)$$

Приведем также соотношения, используя (5.31, 5.33):

$$\sigma_-|\psi\rangle = C_+|z_-\rangle, \quad \sigma_+|\psi\rangle = C_-|z_+\rangle, \quad (5.38)$$

$$\sigma_x|\psi\rangle = C_+|z_-\rangle + C_-|z_+\rangle \quad (5.39)$$

$$\sigma_y|\psi\rangle = -iC_+|z_-\rangle + iC_-|z_+\rangle, \quad (5.40)$$

$$\sigma_z|\psi\rangle = C_+|z_+\rangle - C_-|z_-\rangle \quad (5.41)$$

Заметим также, измерению проекции спина на ось, составляющую угол α с осью x (и лежащую в плоскости x, y) соответствует оператор σ_α :

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha = \sigma_- e^{i\alpha} + \sigma_+ e^{-i\alpha} = \quad (5.42)$$

$$= a_1 a_2^+ e^{i\alpha} + a_1^+ a_2 e^{-i\alpha} \quad (5.43)$$

5.2.3 Бифотоны в опытах с двумя наблюдателями

Теперь понятно, что для получения переплетенных состояний, соответствующих паре спиновых частиц, нужен источник пар *коррелированных* фотонов — бифотонов. Такие бифотоны были предсказаны Д.Н. Клышко.

Ключевым элементом оптических опытов является источник бифотонов, который рождает коррелированные пары фотонов. Для определенности будем считать, что в паре бифотоны поляризованы ортогонально — один вертикально, другой горизонтально. Важно, чтобы в каждом импульсе было не более одного бифотона². Рассмотрим, например, поляризационную схему на рис. 5.3. Через отверстия 1 и 2 в маске на выходе из нелинейного кристалла фотоны появляются парами. Будем обозначать операторы уничтожения фотонов, излученных вверх (вертикальная поляризация), как \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 (индекс указывает из какой щели излучен фотон). Будем обозначать операторы уничтожения фотонов, излученных вниз (горизонтальная поляризация), как \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 . Тогда состояние поля сразу после излучения из кри-

²Заметим, что в паре могут рождаться бифотоны и одинаковой поляризации, это зависит от свойств и ориентации нелинейного кристалла. Мы рассматриваем пары ортогонально поляризованных бифотонов исключительно для наглядности.

сталла, можно записать как

$$|\Psi_{\text{init}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{a}_1^+ \mathbf{b}_1^+ + \mathbf{a}_2^+ \mathbf{b}_2^+ \right) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|V_1, H_1\rangle + |V_2, H_2\rangle \right) \quad (5.44)$$

Очевидно, что здесь полная аналогия с двухуровневыми системами и можно записать

$$|\Psi_{\text{init}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|z_+^a\rangle |z_+^b\rangle + |z_-^a\rangle |z_-^b\rangle \right) \quad (5.45)$$

Эта аналогия базируется на том, что по условиям эксперимента в каждом луче может быть *не больше* одного фотона. Мы видим, что оптические эксперименты с бифотонами эквивалентны экспериментам с двухуровневыми частицами. В нашем случае детектирование фотонов в каждой паре каналов (такая возможность на рисунке 5.3 не показана) эквивалентно измерению проекций спинов двух частиц на ось \mathbf{z} . Очевидно, что всего можно зарегистрировать два фотона. Например, если бы мы зарегистрировали фотоны в каналах \mathbf{a}_1 и \mathbf{b}_2 , мы могли бы сказать, что это эквивалентно тому, что частицы обнаружены в состояниях $|z_+^a\rangle$ и $|z_-^b\rangle$.

Продолжаем описание прохождения волн после их выхода из кристалла в схеме на рис. 5.3. Операторы поля перед светоделителями получают фазовые множители (описывающие задержку α и β):

$$\mathbf{a}_1 \Rightarrow \mathbf{a}_1 e^{-i\alpha}, \quad \mathbf{a}_2 \Rightarrow \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_1 \Rightarrow \mathbf{b}_1 e^{-i\beta}, \quad \mathbf{b}_2 \Rightarrow \mathbf{b}_2.$$

Обозначим через \mathbf{a}_\pm операторы лучей идущих на детекторы \mathbf{A}_\pm , а через \mathbf{b}_\pm — на \mathbf{B}_\pm и выразим их через операторы

ВХОДНЫХ ПОЛЕЙ:

$$a_+ = \frac{a_1 e^{-i\alpha} + a_2}{\sqrt{2}}, \quad a_- = \frac{a_1 e^{-i\alpha} - a_2}{\sqrt{2}}, \quad (5.46a)$$

$$a_1 = e^{i\alpha} \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{2}}, \quad (5.46b)$$

$$b_+ = \frac{b_1 e^{-i\beta} + b_2}{\sqrt{2}}, \quad b_- = \frac{b_1 e^{-i\beta} - b_2}{\sqrt{2}}, \quad (5.46c)$$

$$b_1 = e^{i\beta} \frac{b_+ + b_-}{\sqrt{2}}, \quad b_2 = \frac{b_+ - b_-}{\sqrt{2}}. \quad (5.46d)$$

Выпишем операторы чисел фотонов в каналах \mathbf{A} :

$$n_{\pm}^a = a_{\pm}^+ a_{\pm} = \frac{1}{2} \{n_1^a + n_2^a \pm (\sigma_-^a e^{i\alpha} + \sigma_+^a e^{-i\alpha})\}, \quad (5.47)$$

$$\sigma_-^a = a_1 a_2^+, \quad \sigma_+^a = a_1^+ a_2. \quad (5.48)$$

Поскольку каждый раз излучается только *одна* пара фотонов (излучение двух пар крайне редки и эти случаи могут быть исключены из статистики эксперимента), то очевидно, что в канале, например, \mathbf{A} будет щелкать лишь один из детекторов. Чтобы различать, какой из детекторов (\mathbf{A}_+ или \mathbf{A}_-) сработал, будем приписывать щелчку детектора в канале \mathbf{A}_+ величину $(+1)$, а щелчку в канале \mathbf{A}_- величину (-1) . Этой договоренности соответствует измерение величины

$$A_{\alpha} = n_+^a - n_-^a = \sigma_-^a e^{i\alpha} + \sigma_+^a e^{-i\alpha} = \sigma_{\alpha}^a \quad (5.49)$$

А это, как следует из (5.42)) соответствует измерению спина воображаемой частицы на ось, составляющей с осью x угол α .

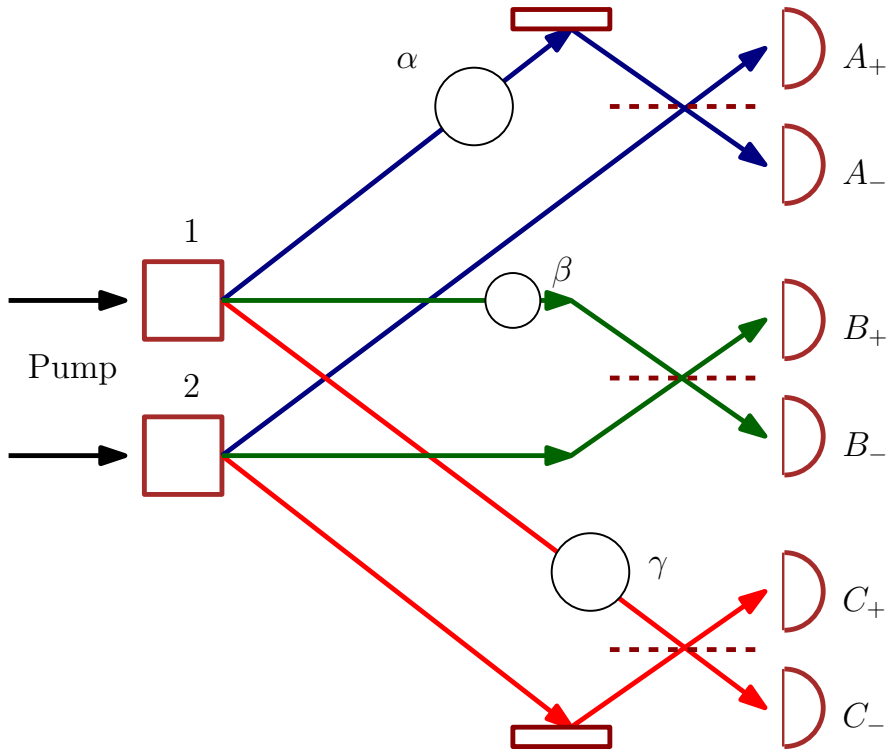


Рис. 5.4: Схема оптического эксперимента по проверке неравенств Белла с тремя наблюдателями. Кругок означает задержку луча на фазовый угол α , β и γ соответственно.

Аналогично в канале **B** будет измеряться величина

$$\begin{aligned}
 B_\beta &= n_+^b - n_-^b = \sigma_-^b e^{i\alpha} + \sigma_+^b e^{-i\alpha} = \sigma_\beta^b, \\
 \sigma_-^b &= b_1 b_2^+, \quad \sigma_+^b = b_1^+ b_2.
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$

Таким образом, регистрация щелчков детекторов в канале **A** и **B** будет соответствовать измерению воображаемых спиновых частиц на произвольные оси в зависимости от оптических задержек α в канале **A** и β в канале **B**.

5.2.4 Бифотоны в опытах с тремя наблюдателями

Пусть два параметрических источника испускают тройки фотонов, как это показано на рис. (5.4)³. Таким образом состояние поля (сразу после выхода из кристалла) можно записать как

$$|\Psi_{\text{init}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_1^+ b_1^+ c_1^+ + a_2^+ b_2^+ c_2^+ \right) |0\rangle \quad (5.51)$$

В этом случае, например, в канале **A** мы измеряем величины разности чисел фотонов с учетом вносимой задержки:

$$A_\alpha = n_+^a - n_-^a = \sigma_-^a e^{i\alpha} + \sigma_+^a e^{-i\alpha} \quad (5.52)$$

А это, как следует из (5.42) соответствует измерению спина на одной (из трех) воображаемой частицы на ось, которая лежит в плоскости **xy** и составляет с осью **x** угол α .

Аналогично, в каналах **B** **C** мы измеряем величины

$$B_\alpha = n_+^b - n_-^b = \sigma_-^b e^{i\beta} + \sigma_+^b e^{-i\beta}, \quad (5.53)$$

$$A_\alpha = n_+^c - n_-^c = \sigma_-^c e^{i\gamma} + \sigma_+^c e^{-i\gamma}, \quad (5.54)$$

что соответствует измерению спина двух других воображаемых частиц на оси, составляющей с осью **x** углы β , γ .

Таким образом, опыт с тройками коррелированных фотонов (коррелированное испускание фотонов здесь принципиально) полностью эквивалентен измерению проекций спина

³Как будет излучать источник — двойками или тройками фотонов, — зависит от вида нелинейности кристалла, а направления и поляризация фотонов — от его ориентации.

на различные оси трех частиц, находящимся в перепутанном GHZ-состоянии (5.12).

Глава 6

Квантовая телепортация

6.1 Квантовое клонирование

Клонирование отличается от копирования тем, что при клонировании оператор, желающий создать копию неизвестного состояния, знает только, что копия должна быть идентична оригиналу (первоначальному состоянию), но он ничего не знает о самом состоянии.

Покажем, что квантовое клонирование запрещено. Пусть имеется два сигнальных состояния квантовой системы S : $|a_s\rangle$ и $|b_s\rangle$ и некоторое устройство, описываемое оператором K . Это устройство создает копии этих состояний в системе C , находящейся в начальном состоянии $|0_c\rangle$:

$$K|a_s 0_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |a_s a_c\rangle, \quad (6.1a)$$

$$K|b_s 0_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |b_s b_c\rangle, \quad (6.1b)$$

Тогда при клонировании суперпозиции этих состояний:

$$|d_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_s\rangle + |b_s\rangle) \quad (6.2)$$

получим

$$K|d_s 0_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |d_s d_c\rangle = \frac{1}{2} |a_s + b_s\rangle \otimes |a_c + b_c\rangle = \quad (6.3)$$

$$= \frac{1}{2} |a_s a_c + a_s b_c + b_s a_c + b_s b_c\rangle. \quad (6.4)$$

С другой стороны, мы естественно предполагаем линейность и унитарность оператора K . Но тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} K|(a_s + b_s) 0_c\rangle = \frac{1}{2} (|a_s a_c\rangle + |b_s b_c\rangle), \quad (6.5)$$

Сравнивая (6.4) и (6.5), получаем, что

$$K|d_s 0_c\rangle \neq \frac{1}{\sqrt{2}} K|(a_s + b_s) 0_c\rangle, \quad (6.6)$$

т.е. операция клонирования суперпозиции противоречит принципу линейности унитарных операций.

6.2 Вариант телепортации

Рассмотрим пример, приведенный в [19]. Пусть Алиса имеет переплетенное состояние КШ+ типа “Кота Шредингера” из двух частиц:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B\rangle \quad (6.7)$$

Частицу A Алиса посылает Бобу, а частица B остается у Алисы.

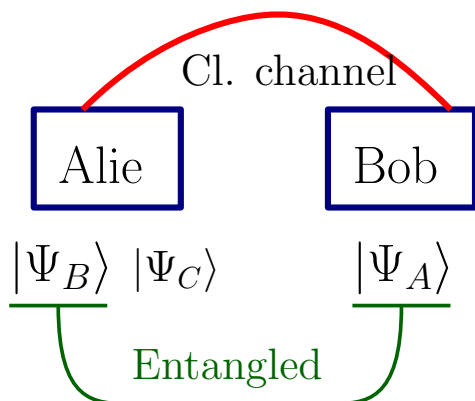


Рис. 6.1: Схема опыта по телепортации. Алиса передает Бобу частицу A , которая находится в перепутанном состоянии с частицей B , оставшейся у Алисы. Алиса должна передать состояние частицы C Бобу, т.е. частица A должна оказаться в первоначальном состоянии частицы C .

Кроме того у Алисы есть третья (контрольная) частица, состояние которой она и хочет передать (телепортировать) Бобу — см. рис. 6.1.

Пусть контрольная частица находится в произвольном состоянии

$$|\Psi_C\rangle = a|z_-^C\rangle + b|z_+^C\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (6.8)$$

Таким образом общее начальное состояние двух запутанных кубитов A и B вместе с контрольным кубитом C можно представить в виде:

$$|\Psi_{ABC}\rangle = (a|z_-^C\rangle + b|z_+^C\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+^A z_+^B\rangle + |z_-^A z_-^B\rangle)$$

Рассмотрим сначала частный упрощенный случай.

6.2.1 Частный случай: $|\mathbf{b}| = 1$

Упростим ситуацию: пусть $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{b}| = 1$. В этом случае общее начальное состояние можно представить в виде:

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{2}} (|z_+^A\rangle \otimes |z_+^B z_+^C\rangle + |z_-^A\rangle \otimes |z_-^B z_+^C\rangle)$$

Тогда Алиса должна измерить проекции спинов на ось \mathbf{z} своих частиц \mathbf{B} и \mathbf{C} . Из (6.9) видно, что есть корреляция: если спины частиц \mathbf{B} и \mathbf{C} одно-направлены, то частица \mathbf{A} у Боба находится в состоянии $|z_+^A\rangle$, если же противоположны, то частица \mathbf{A} — в состоянии $|z_-^A\rangle$.

Рассмотрим обе возможности отдельно:

1. Спины частиц \mathbf{B} и \mathbf{C} одно-направлены (т.е. результат измерения $(++)$ или $(--)$). Тогда Алиса по обычному каналу передает Бобу 1 бит, который означает “да”. У Боба в этом случае оказалась частица в том же состоянии, что и *начальное* состояние контрольной частицы \mathbf{C} .
2. Спины частиц \mathbf{B} и \mathbf{C} противоположны (т.е. результат измерения $(+-)$ или $(-+)$). Тогда Алиса по обычному каналу передает Бобу 1 бит, который означает “нет”. У Боба в этом случае оказалась частица в другом состоянии, не совпадающем с *начальным* состоянием контрольной частицы \mathbf{C} . Но важно, что Боб знает это. Поэтому получив от Алисы “нет”, он на свою частицу

действует так, чтобы перевести ее в состояние $|z_+^B\rangle$. А именно он действует оператором σ_x (операция NOT), который, как известно, характеризуется следующими равенствами:

$$\sigma_x|z_+^B\rangle = |z_-^B\rangle, \quad \sigma_x|z_-^B\rangle = |z_+^B\rangle$$

Таким образом, Боб получает частицу В в том же состоянии, что и *начальное* состояние контрольной частицы С.

Подчеркнем, что ограничение $|b| = 1$ является существенным и рассмотренный случай интересен лишь в методическом плане.

Поэтому рассмотрим произвольный случай.

6.2.2 Общий случай

В этом случае независимые измерения z -проекций спинов частиц В и С *не* позволяют Алисе определить фазы коэффициентов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Поэтому она должна поступать более изоциренно. Перепишем начальное состояние (6.9) трех частиц в виде:

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{\mathbf{a}|z_-^A\rangle + \mathbf{b}|z_+^A\rangle}{2} \otimes \left[\frac{|z_+^B z_+^C\rangle + |z_-^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \quad (6.9a)$$

$$\frac{-\mathbf{a}|z_-^A\rangle + \mathbf{b}|z_+^A\rangle}{2} \otimes \left[\frac{|z_+^B z_+^C\rangle - |z_-^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \right] + (6.9b)$$

$$\frac{\mathbf{a}|z_+^A\rangle + \mathbf{b}|z_-^A\rangle}{2} \otimes \left[\frac{|z_-^B z_+^C\rangle + |z_+^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \right] + \quad (6.9c)$$

$$\frac{-a|z_+^A\rangle + b|z_-^A\rangle}{2} \otimes \left[\frac{|z_-^B z_+^C\rangle - |z_+^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \right] \quad (6.9d)$$

Разложение (6.9) по векторам

$$|C_+\rangle = \frac{|z_+^B z_+^C\rangle + |z_-^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (6.10a)$$

$$|C_-\rangle = \frac{|z_+^B z_+^C\rangle - |z_-^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (6.10b)$$

$$|E_+\rangle = \frac{|z_-^B z_+^C\rangle + |z_+^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (6.10c)$$

$$|E_-\rangle = \frac{|z_-^B z_+^C\rangle - |z_+^B z_-^C\rangle}{\sqrt{2}} \quad (6.10d)$$

называется разложением по ортонормированному *базису Белла* (J. Bell).

Алиса должна измерить частицы **B** и **C** в базисе Белла (иначе говоря, производит проектирование на состояния этого базиса). Результат она сообщает по *классическому* каналу Бобу. Тем самым она сообщает Бобу, какие операции надо произвести с его частицей, чтобы получить начальное состояние контрольной частицы. Возможны четыре ситуации, которые мы рассмотрим отдельно.

- Алиса получила $|C_+\rangle$

В этом случае состояние частицы **A** у Боба

$$|\Psi_A\rangle = a|z_-^A\rangle + b|z_+^A\rangle \quad (6.11)$$

которое совпадает с *начальным* состоянием (6.8) кон-

трольной частицы. Алиса сообщает об этом Бобу и процесс телепортации заканчивается.

- Алиса получила $|C_-\rangle$

В этом случае состояние частицы A у Боба

$$|\Psi_A\rangle = -\mathbf{a}|z_-^A\rangle + \mathbf{b}|z_+^A\rangle \quad (6.12)$$

и оно отличается знаком от *начального* состояния (6.8). Алиса сообщает Бобу об этом, поэтому он должен воздействовать на свою частицу оператором σ_z . Оператор σ_z , как известно, характеризуется следующими свойствами:

$$\sigma_z|z_+^B\rangle = |z_+^B\rangle, \quad \sigma_z|z_-^B\rangle = -|z_-^B\rangle. \quad (6.13)$$

На этом процесс телепортации заканчивается.

- Алиса получила $|E_+\rangle$

В этом случае Боб знает, что состояние его частицы

$$|\Psi_A\rangle = \mathbf{a}|z_+^A\rangle + \mathbf{b}|z_-^A\rangle \quad (6.14)$$

и оно отличается перестановкой от *начального* состояния (6.8). Тогда он должен воздействовать на свою частицу оператором σ_x (NOT). Оператор σ_x , как известно, характеризуется следующими свойствами:

$$\sigma_x|z_+^B\rangle = |z_-^B\rangle, \quad \sigma_x|z_-^B\rangle = |z_+^B\rangle. \quad (6.15)$$

На этом процесс телепортации заканчивается.

- Алиса получила $|E_-\rangle$

В этом случае состояние частицы **A** у Боба

$$|\Psi_A\rangle = -\mathbf{a}|z_+^A\rangle + \mathbf{b}|z_-^A\rangle \quad (6.16)$$

и оно отличается перестановкой и знаком от *начального* состояния (6.8). Тогда он должен воздействовать на свою частицу сначала оператором $-\sigma_z$, а потом оператором σ_x :

$$\begin{aligned} \sigma_x \times (-\sigma_z) [-\mathbf{a}|z_+^A\rangle + \mathbf{b}|z_-^A\rangle] &= \\ &= \sigma_x [\mathbf{a}|z_+^A\rangle + \mathbf{b}|z_-^A\rangle] = \mathbf{a}|z_-^A\rangle + \mathbf{b}|z_+^A\rangle. \end{aligned}$$

На этом процесс телепортации заканчивается.

Повторим еще раз, что у Боба оказалась частица *точно в таком состоянии*, что была у Алисы. При этом само состояние этой частицы остается неизвестным (коэффициенты **a** и **b**) не определены). Кроме того, первоначальное состояние частицы, которая была у Алисы, разрушено в процессе измерения (*клонирования нет*).

Некоторые детали рассмотрения представлены в [20] п. 5.7.

6.3 Эксперимент

Одним из первых опытов, продемонстрировавших квантовую телепортацию, был [21], который мы кратко расскажем.

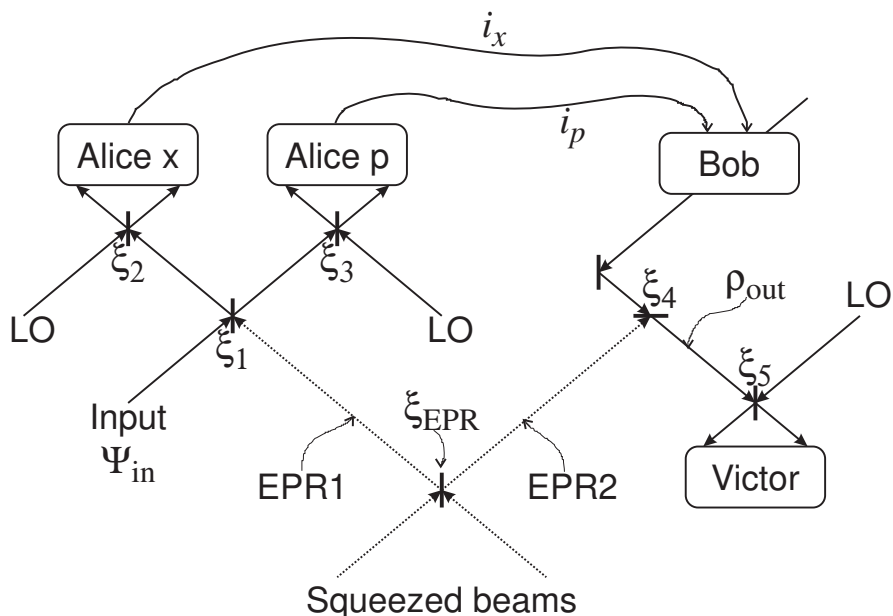


Рис. 6.2: Принципиальная схема эксперимента, использованная в [21].

Напомним, для двух частиц выполняется $[(x_A - x_B), (p_A + p_B)] = 0$.

Можно сколь угодно точно измерять величины

$$x_- = x_1 - x_2, \quad p_+ = p_1 + p_2$$

Пусть у Алисы есть частица **C**, состояние которой надо передать. Кроме того, она имеет две частицы **A** и **B** в “перепутанном” состоянии, для которых переменные x_- и p_+ хорошо определены. Частицу **B** она передает Бобу. Дальше все аналогично.

В эксперименте вместо частиц в “переплетенном” состоянии использовались импульсы света в сжатом состоянии, для них роль переменных x и p играют квадратурные компоненты световых импульсов — см. рис. 6.2. В схеме добавлена возможность проверки, которую осуществляет Виктор

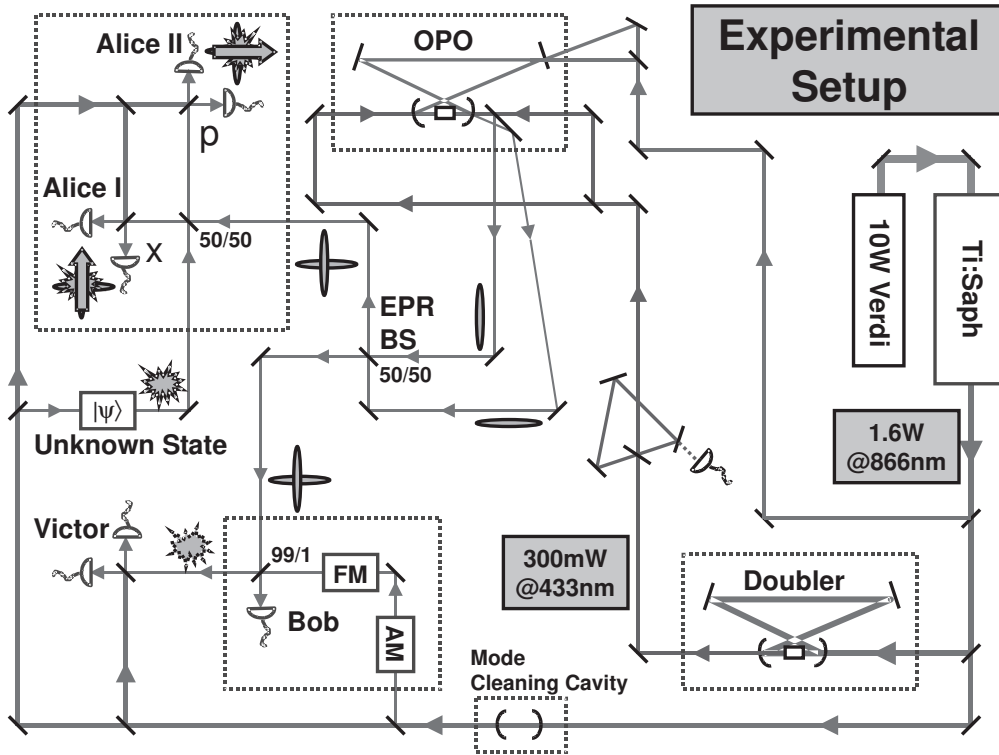


Рис. 6.3: Реальная схема эксперимента, использованная в [21].

(от англ. verify).

Мы не будем останавливаться на описании схемы, которая в реальности была довольно сложна — см. рис. 6.3.

Результаты оказались вполне удовлетворительны.

Дисперсии, измеренные Виктором (накачка 40 mW):
С “переплетением” (entanglement)

$$\sigma_V^x = \sigma_V^p = 3.54 \pm 0.19 \text{ dB}$$

Без “переплетения”

$$\sigma_V^x = \sigma_V^p = 4.86 \pm 0.12 \text{ dB}$$

“Переплетение” дает уменьшение квантового шума на $1.32 \pm 0.16 \text{ dB}$.

Качество телепортации (fidelity):

$$F = \langle \psi_{\text{in}} | \rho_{\text{out}} | \psi_{\text{in}} \rangle \simeq 0.61 \pm 0.02, \quad (6.17)$$

Качество оказалось не слишком высоким, но для пионерского опыта этого было вполне достаточно.

Глава 7

Квантовые ячейки

Рассмотрим логические ячейки, которые можно использовать для квантового преобразования сигнала. Начнем с хорошо известного интерферометра Маха-Цандера.

7.1 Интерферометр Маха-Цандера

Рассмотрим интерферометр Маха-Цандера, на вход которого подается один квант в один или другой канал. В нашем рассмотрении мы исключаем возможность, когда в обоих каналах присутствует по кванту.

Состояние $|01\rangle$ будет соответствовать отсутствию фотона в горизонтальном входном канале, и наличие фотона в вертикальном канале как показано на рис. 7.1. (Состояние $|10\rangle$ будет соответствовать фотону в горизонтальном входном канале и отсутствию фотона в вертикальном). Эти состояния соответствуют информационным состояниям входного кубита.

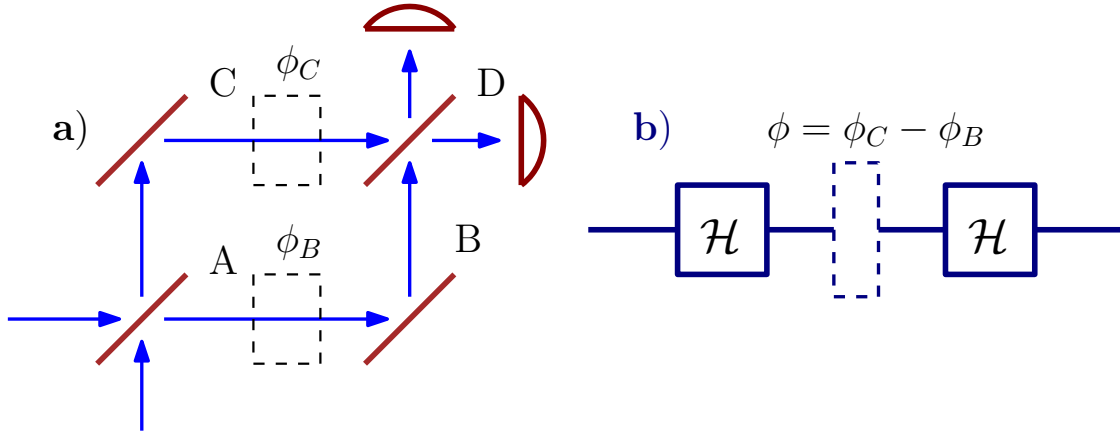


Рис. 7.1: а) Интерферометр Маха-Цандера; б) Логическая ячейка, которая соответствует интерферометру

Будем обозначать операторы рождения и уничтожения в горизонтальном канале как \mathbf{a}_g , \mathbf{a}_g^\dagger , в вертикальном канале — \mathbf{a}_v , \mathbf{a}_v^\dagger . Тогда входные состояния могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{in}}(1)\rangle &= |01\rangle = \mathbf{a}_v^\dagger|00\rangle \Rightarrow |1\rangle, \\ |\psi_{\text{in}}(0)\rangle &= |10\rangle = \mathbf{a}_g^\dagger|00\rangle \Rightarrow |0\rangle. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Эти состояния соответствуют информационным состояниям входного кубита. Договоримся, что состояние $|01\rangle$ соответствует состоянию входного кубита $|1\rangle$, а состояние $|10\rangle$ — $|0\rangle$.

7.1.1 Первый светоделитель

Пусть на вход светоделителя поступает состояние $|\psi_{\text{in}}(0)\rangle$, соответствующее состоянию кубита 0.

Нетрудно выразить (в представлении Гейзенберга) операторы рождения \mathbf{a}_b в плече В и \mathbf{a}_c в плече С (см рис. 7.1),

соответствующие полю после первого светоделителя:

$$a_b = \frac{a_g + a_v}{\sqrt{2}}, \quad a_c = \frac{a_g - a_v}{\sqrt{2}}$$

Отсюда можно выразить операторы входного поля через операторы выходного поля:

$$a_g = \frac{a_b + a_c}{\sqrt{2}}, \quad a_v = \frac{a_b - a_c}{\sqrt{2}}$$

и, подставив их в (7.1), получить состояние поля после первого светоделителя:

$$|\psi_{\text{after } 1}\rangle = \frac{a_b^\dagger + a_c^\dagger}{\sqrt{2}} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \quad (7.2)$$

Это можно делать, так как вакуумное состояние $|00\rangle_{\text{in}}$ для поля до светоделителя, которое фигурирует в (7.1), и вакуумное состояние $|00\rangle_{\text{after } 1}$ для поля после светоделителя неразличимы.

Таким образом после первого светоделителя мы имеем состояние, в котором один фотон распределен между двумя модами. При этом, например, член $|10\rangle$ имеет следующий смысл: в моде, соответствующей пути В есть фотон, в моде С — нет.

Если вернуться к описанию кубита, то действие светоделителя можно описать оператором Адамара:

$$|\psi_{\text{in}}\rangle \Rightarrow |\psi_{\text{after } 1}\rangle = \mathcal{H}|\psi_{\text{in}}\rangle, \quad (7.3)$$

$$\mathcal{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \quad (7.4)$$

$$\mathcal{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \quad (7.5)$$

7.1.2 Фазовый набег

Пусть длины оптических путей между светоделителями соответствуют набегу фазы ϕ_B по пути В и ϕ_C по пути С: Тогда для операторов, описывающих поле перед вторым светоделителем, имеем

$$a_b^\dagger \rightarrow a_b^\dagger e^{i\phi_B}, \quad a_c^\dagger \rightarrow a_c^\dagger e^{i\phi_C}. \quad (7.6)$$

Состояние поля будет соответственно:

$$|\psi_{\text{before}2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\phi_B} |01\rangle + e^{i\phi_C} |10\rangle \right) \quad (7.7)$$

Возвращаясь к описанию кубита, это состояние можно записать в виде

$$|\psi_{\text{before}2}\rangle = \frac{e^{i\phi_C}}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + e^{-i\phi} |1\rangle \right), \quad (7.8)$$

где $\phi = \phi_C - \phi_B$.

7.1.3 Второй светоделитель

Операторы описывающие поле на выходе после второго светоделителя обозначим через b_g (горизонтальный канал) и b_v (вертикальный канал), для которых получаем:

$$b_g = \frac{a_b e^{-i\phi_B} + a_c e^{-i\phi_C}}{\sqrt{2}} = \quad (7.9)$$

$$= \frac{e^{-i\phi_B}}{2} \left(a_g [1 + e^{-i\phi}] + a_v [1 - e^{-i\phi}] \right) = \quad (7.10)$$

$$= e^{-i\phi+/2} \left(a_g \cos \frac{\phi}{2} + i a_v \sin \frac{\phi}{2} \right), \quad (7.11)$$

$$\mathbf{b}_v = e^{-i\phi_+/2} \left(i\mathbf{a}_g \sin \frac{\phi}{2} + \mathbf{a}_v \cos \frac{\phi}{2} \right), \quad (7.12)$$

$$\phi_+ = \phi_B + \phi_C, \quad \phi = \phi_C - \phi_B. \quad (7.13)$$

Обращаем систему и получаем:

$$\mathbf{a}_g = e^{i\phi_+/2} \left(\mathbf{b}_g \cos \frac{\phi}{2} + i\mathbf{b}_v \sin \frac{\phi}{2} \right), \quad (7.14)$$

$$\mathbf{a}_v = e^{i\phi_+/2} \left(-i\mathbf{b}_g \sin \frac{\phi}{2} + \mathbf{b}_v \cos \frac{\phi}{2} \right). \quad (7.15)$$

Теперь мы можем выписать состояние поля после второго светоделителя (по-прежнему считаем, что на входе интерферометра состояние $|10\rangle = \mathbf{a}_g^+|00\rangle$):

$$|\psi_{\text{after } 2}\rangle = e^{-i\phi_+/2} \left(i \sin \frac{\phi}{2} |01\rangle + \cos \frac{\phi}{2} |10\rangle \right) \quad (7.16)$$

Возвращаясь к описанию в состояниях кубита, переписываю:

$$|\psi_{\text{after } 2}\rangle = e^{i\phi_+/2} \left(\cos \frac{\phi}{2} |0\rangle - i \sin \frac{\phi}{2} |1\rangle \right) \quad (7.17)$$

Таким образом действие интерферометра Маха-Цандера на языке квантовых ячеек может быть выражено схемой на рис. 7.1b. Ниже рассмотрим это подробнее.

7.2 Контролируемая логическая операция

Мы уже видели, что первый светоделитель на языке квантового компьютера соответствует гейту Адамара.

Рассмотрим набег фазы как действие отдельного гейта. Введем дополнительный (“холостой”) бит $|u\rangle$ который преобразуется под действием некоторого оператора контролируемого фазового сдвига “controlled- \mathcal{U} ”. Контролирующим битом является наш основной кубит $|\psi\rangle$, а оператор \mathcal{U} действует так:

$$\mathcal{U}|u\rangle = e^{i\theta}|u\rangle, \quad \text{if } |\psi\rangle = |1\rangle, \quad (7.18)$$

$$\mathcal{U}|u\rangle = |u\rangle, \quad \text{if } |\psi\rangle = |0\rangle, \quad (7.19)$$

Рассмотрим следующую последовательность эволюции кубита (действие оператора Адамара описывается формулами (7.4, 7.5)):

$$|0\rangle|u\rangle \xrightarrow{\mathcal{H}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|u\rangle \quad (7.20a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|u\rangle \xrightarrow{c-\mathcal{U}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle)|u\rangle \quad (7.20b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle)|u\rangle \xrightarrow{\mathcal{H}} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + i \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) e^{i\theta/2} |u\rangle$$

Мы видим, что это соответствует эволюции кубита в интерферометре Маха-Цандера при условии, что $\theta = \phi$ и $\phi_B = 2\pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

7.3 Задача Дойча

Рассмотрим в качестве примера задачи, эффективно решаемой с помощью квантового компьютера, Задачу Дойча, следуя работе [22]. Там же можно найти ссылки на источники.

Сначала предположим, что разница фаз ϕ в интерферометре Маха-Цандера может быть или $\phi = 0$, или $\phi = \pi$. Сможем ли мы заметить эту разницу? Конечно, да. Ведь при $\phi = 0$ детектор *всегда* покажет состояние “0”, а при $\phi = \pi$ — состояние “1” (опять же *всегда*). Именно это свойство используется при решении задачи Дойча.

Рассмотрим булевскую функцию

$$f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad (7.21)$$

т.е. функция $f(x)$ принимает два значения $\{0, 1\}$ в зависимости от значения аргумента x , который в простейшем рассматриваемом случае также может принимать два значения $\{0, 1\}$. В нашем случае может быть четыре такие функции: две постоянные функции:

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{и} \quad f(0) = f(1) = 1 \quad (7.22)$$

и две “сбалансированные”

$$f(0) = 0, f(1) = 1 \quad \text{и} \quad f(0) = 1, f(1) = 0. \quad (7.23)$$

Задача Дойча заключается в том, чтобы определить к какому классу относится наша функция f — к классу постоянных или сбалансированных функций (другими словами, числа $f(0)$ и $f(1)$ одинаковы или различны). Заметим, что нам не нужно по условиям задачи вычислять конкретные значения функций $f(0)$ и $f(1)$, а требуется определить только глобальное свойство f . Классическая интуиция говорит,

что в любом случае нам надо вычислить оба значения $f(0)$ и $f(1)$, т.е. дважды вычислить функцию f . Мы покажем, что в квантовом компьютере для решения проблемы Дойча достаточно вычислить функцию *один* раз.

Формально определим операцию “вычисления” функции f в терминах f -controlled-NOT (f -с-NOT) операции на двух битах: первый из них содержит входную переменную x (аргумент функции), а второй — вычисляемую функцию $f(x)$. Если первоначально второй бит был в состоянии 0 , то f -с-NOT операция переводит $(x, 0)$ в $(x, f(x))$. Ясно, что это просто формализация операции вычисления f . Чтобы сделать эту операцию обратимой и определенной для *любой* входных значений определим, что произвольное начальное состояние (x, y) переводится в $(x, y \oplus f(x))$ ¹. В квантовых обозначениях операция f -controlled-NOT запишется в виде:

$$|x\rangle|y\rangle \xrightarrow{f\text{-с-NOT}} |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle. \quad (7.25)$$

Квантовая сеть (последовательность операций) для вычисления задачи Дойча представлена на рис. 7.2b. Первоначально основной и вспомогательный кубит находятся в состоянии

$$|0\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \quad (7.26)$$

¹Напомним, что операция \oplus (сложение по модулю 2) определяется следующим образом:

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0. \quad (7.24)$$

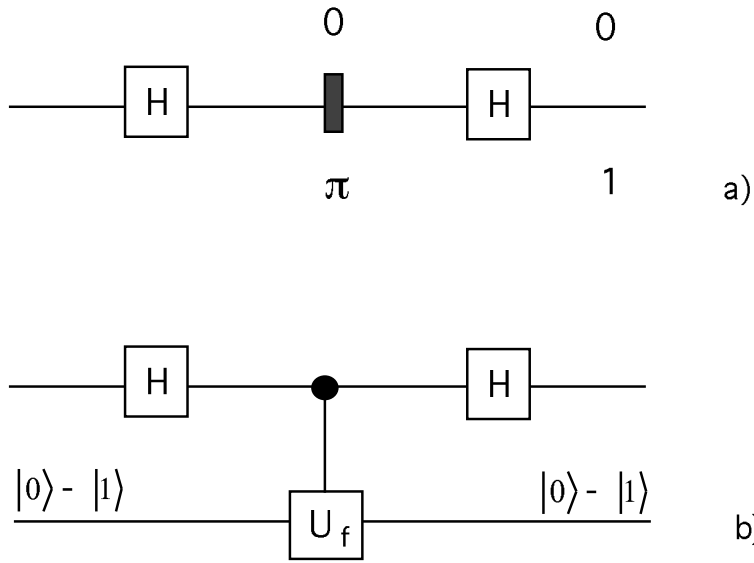


Рис. 7.2: Квантовая сеть (последовательность операций) для вычисления задачи Дойча.

(нормирующие множители опускаем). После первого действия оператора Адамара это состояние перейдет в

$$(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle) \quad (7.27)$$

Посмотрим действие f -с-NOT на это состояние, замечая, что $x \in \{0, 1\}$:

$$|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \xrightarrow{f\text{-с-NOT}} |x\rangle(|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle) = \quad (7.28a)$$

$$= (-1)^{f(x)} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.28b)$$

Таким образом состояние после операции f -controlled-NOT можно записать в виде:

$$[(-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle](|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.29)$$

Мы видим, что каждому значению x соответствует свой фазовый множитель $(-1)^{f(x)}$. Это состояние может быть также

переписано в виде

$$(-1)^{f(0)} \left(|0\rangle + (-1)^{f(0) \oplus f(1)} |1\rangle \right) (|0\rangle - |1\rangle) . \quad (7.30)$$

После второго действия оператора Адамара это состояние превращается (опускаем норм. множитель)

$$\begin{aligned} & (-1)^{f(0)} \left(\left(|0\rangle + |1\rangle \right) + (-1)^{f(0) \oplus f(1)} \left(|0\rangle - |1\rangle \right) \right) (|0\rangle - |1\rangle) = \\ & = (-1)^{f(0)} |f(0) \oplus f(1)\rangle (|0\rangle - |1\rangle) . \end{aligned} \quad (7.31)$$

Следовательно, первый кубит переходит в состояние $|0\rangle$, если функция f постоянна. Но если функция f сбалансированная, первый кубит переходит в состояние $|1\rangle$. Важно, что измерение состояния этого кубита даст *точную* информацию о том, является ли функция f постоянной или сбалансированной.

Подчеркнем, что мы в результате *одной* операции выяснили сбалансированная функция или нет, мы *не* вычисляли значение этой функции для разных $(0, 1)$ аргументов.

Конечно, для определения сбалансированности функции от одной переменной (кубита) выигрыш по сравнению с классическим компьютером невелик, всего в два раза. Однако для определения сбалансированности функции от большого числа кубитов мы получим существенный выигрыш. Рассмотрим это подробнее.

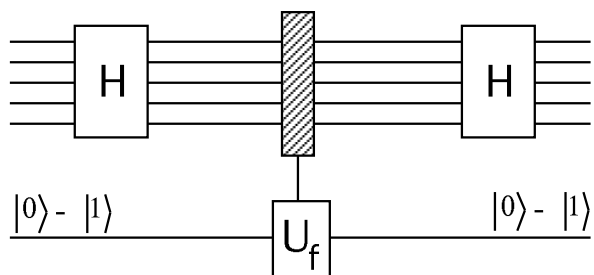


Рис. 7.3: Квантовая сеть (последовательность операций) для вычисления обобщенной задачи Дойча.

7.4 Обобщенная задача Дойча

Обобщенная задача Дойча (см. [22] и ссылки там) формулируется для булевых функций $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ следующим образом. Пусть известно, что одна из этих функций либо постоянна, либо сбалансирована (т.е. она принимает равное число раз значение 0 и значение 1 на всех n битах $\{0, 1\}^n$). Обобщенная задача Дойча состоит в том, чтобы определить: постоянная эта функция или сбалансированная.

Сколько вычислений требуется для этого? Любой классический алгоритм в худшем случае потребует для этого $2^{n-1} + 1$ операций². Мы покажем, что существует алгоритм квантового компьютера, позволяющий решить эту задачу с помощью всего лишь одной вычислительной операции.

Этот алгоритм представлен на рис. 7.3. Контрольный регистр состоит из n кубитов, которые первоначально находятся в нулевом состоянии, которое мы будем обозначать

²Количество всех комбинаций из n битов равно 2^n . Если один бит фиксирован, то после измерений для 2^{n-1} всех комбинаций оставшихся битов останется неизмеренным только один бит. выяснить.

как $|00 \dots 0\rangle$. Вспомогательный бит первоначально находится в состоянии $|0\rangle - |1\rangle$ и после вычисления он остается в том же состоянии.

Сначала применяем преобразование Адамара ко всем n контрольным кубитам. В данном случае оно определяется как

$$|x\rangle \xrightarrow{H} \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle, \quad (7.32)$$

для $x \in \{0, 1\}^n$, где

$$x \cdot y = (x_1 \wedge y_1) \oplus \dots \oplus (x_n \wedge y_n), \quad (7.33)$$

т.е. скалярное произведение по модулю 2.³ Заметим, что это эквивалентно последовательному применению однобитового преобразование Адамара к каждому из n кубитов. Вычисление функции f производим опять с помощью операции (гейта) f -controlled-NOT (средний гейт на рис. 7.3), которое определяется как

$$|x\rangle|y\rangle \xrightarrow{f\text{-c-N}} |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle. \quad (7.34)$$

Это практически совпадает с определением (7.25), за исключением того, что $x \in \{0, 1\}^n$. В заключение применяем опять преобразование Адамара ко всем n контрольным битам.

Рассмотрим последовательность перечисленных действий. После первого применения преобразования Адамара

³Здесь операция $(x_1 \wedge y_1)$ означает $(x_1 \text{ AND } y_1)$. Для $x_1 \in \{0, 1\}$, $y_1 \in \{0, 1\}$ операция $(x_1 \text{ AND } y_1)$ дает 1, если $x_1 = y_1 = 1$, и 0 во всех других случаях.

состояние всех битов есть

$$\sum_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} |\mathbf{x}\rangle (|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.35)$$

Заметим, что сумма содержит *все* возможные значения \mathbf{x} (а их 2^n !). После гейта f -controlled-NOT получаем

$$\sum_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(\mathbf{x})} |\mathbf{x}\rangle (|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.36)$$

Фактически этим *одним* вычислением функции f мы получили информацию о всех (!) возможных значениях $f(\mathbf{x})$. Наконец после последнего преобразования Адамара состояние всех битов есть

$$\sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(\mathbf{x}) \oplus (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})} |\mathbf{y}\rangle (|0\rangle - |1\rangle). \quad (7.37)$$

Теперь заметим, что амплитуда состояния $|00 \dots 0\rangle$ (контрольных n битов) равна

$$\sum_{\mathbf{x} \in \{0,1\}^n} \frac{(-1)^{f(\mathbf{x})}}{2^n}. \quad (7.38)$$

Поэтому, если f постоянна, то амплитуда этого состояния есть

$$(-1)^{f(00 \dots 0)} |00 \dots 0\rangle (|0\rangle - |1\rangle),$$

т.е. она отлична от нуля. Однако, если функция f сбалансированная, тогда сумма (7.38) будет равна нулю. Таким

образом, измеряя n контрольных кубитов (точнее, их проекцию на состояние $|00 \dots 0\rangle$), можно определить, является ли функция f постоянной или сбалансированной.

Глава 8

Классический и квантовый шум

Данная глава посвящена описанию шума. Мы используем подход, изложенный в обзоре [23]. Начнем с классического шума.

8.1 Описание классического шума

Рассмотрим классический *стационарный* шум напряжения $v(t)$ с нулевым средним (т.е. $\langle v(t) \rangle = 0$). Его корреляционная функция

$$G_{vv}(t - t') = \langle v(t) v(t') \rangle \quad (8.1)$$

описывает степень корреляции флуктуаций напряжений в моменты времени t и t' . Стационарность шума означает, что автокорреляционная функция G_{vv} зависит только от разности времен $(t - t')$. Ниже мы будем использовать *эргодическую гипотезу*, которая утверждает, что для *ста-*

ционарных гауссовых случайных процессов усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по большому времени. Будем считать шум *гауссовым* — тогда автокорреляционная функция полностью описывает свойства шума. Напомним, что согласно центральной предельной теореме распределение случайного процесса стремится к гауссовому, если он представляет собой сумму большого числа независимых случайных процессов. Также будем предполагать, что автокорреляционная функция спадает к нулю за характерное время корреляции τ_c .

Спектральная плотность шума, которая измеряется анализатором спектра, пропорциональна мощности шумового сигнала на различных частотах. Для того, чтобы ввести понятие спектральной плотности, сначала введем Фурье преобразование случайной реализации шума, измеренного на отрезке времени T ¹:

$$V_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) e^{i\omega t} dt \quad (8.2)$$

В пределе $T \gg \tau_c$ интеграл по времени фактически равен сумме большого числа $\simeq T/\tau_c$ интегралов, которые практически не коррелируют друг с другом. Это подобно задаче о случайных блужданиях, в которой, как известно, среднеквадратичный уход пропорционален \sqrt{T} . Из этих соображе-

¹Здесь мы используем формулы преобразования Фурье в виде (8.2) экспонентой $e^{i\omega t}$, как это принято в квантовой теории. В классической физике обычно принимают другой знак в экспоненте, т.е. $e^{-i\omega t}$.

ний мы выбрали нормировку на \sqrt{T} (с тем, чтобы величина $V_T(\omega)$ практически не зависела от длины отрезка времени T). Заметим, что Фурье образ $V_T(\omega)$ имеет размерность Вольт $\sqrt{\text{сек}}$, которая обычно записывается как $V/\sqrt{\text{Гц}}$.

Спектральная плотность (часто говорят “спектральная плотность мощности флуктуаций”) определяется как усреднение по ансамблю²:

$$S_{VV}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle |V_T(\omega)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle V_T(\omega) V_T(-\omega) \rangle \quad (8.3)$$

Здесь второе равенство следует из того факта, что $v(t)$ является вещественной величиной, т.е. $V^*(\omega) = V(-\omega)$.

По теореме Винера-Хинчина двусторонняя спектральная плотность связана с корреляционной функцией преобразованием Фурье:

$$S_{VV}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{VV}(t) e^{i\omega t} dt, \quad (8.4)$$

$$G_{VV}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{VV}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (8.5)$$

Из свойств преобразования Фурье следует, что время корреляции τ_c обратно пропорционально ширине спектра. В предельном случае “белого” шума (т.е. $\tau_c \rightarrow 0$) спектральная плотность становится постоянной величиной:

$$G_{VV}(t) = \sigma^2 \delta(t), \quad \rightarrow \quad S_{VV}(\omega) = \sigma^2 \quad (8.6)$$

²Здесь и далее идет речь о “двустороннем” определении спектральной плотности.

В противоположном случае длинного времени корреляции спектральная плотность ограничена узкой полосой частот (не обязательно около нуля частот).

Поскольку $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ является действительной классической величиной, ее корреляционная функция $\mathbf{G}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ всегда вещественна. Кроме того, классическая величина $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ коммутирует сама с собой: $\langle \mathbf{v}(\mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{t}') \rangle = \langle \mathbf{v}(\mathbf{t}') \mathbf{v}(\mathbf{t}) \rangle$. Именно отсюда следует четность как корреляционной функции $\mathbf{G}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\mathbf{t})$, так и спектральной плотности $\mathbb{S}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\omega)$:

$$\mathbf{G}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\mathbf{t}) = \mathbf{G}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(-\mathbf{t}), \quad \mathbb{S}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\omega) = \mathbb{S}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(-\omega) \quad (8.7)$$

В качестве примера рассмотрим классический гармонический осциллятор массы M и собственной частоты ω_0 , который находится в равновесии с большим термостатом при температуре T . В пределе *бесконечно малого затухания* уравнения движения известны:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(0) \cos \omega_0 \mathbf{t} + \frac{\mathbf{p}(0)}{M\omega_0} \sin \omega_0 \mathbf{t}, \quad (8.8)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{t}) = \mathbf{p}(0) \cos \omega_0 \mathbf{t} - \mathbf{x}(0) M\omega_0 \sin \omega_0 \mathbf{t}, \quad (8.9)$$

где $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{p}(0)$ случайные координата и импульс в момент времени $\mathbf{t} = 0$ (в последующие моменты осциллятор свободно эволюционирует, но дополнительных шумов не добавляется). Отсюда можно сразу найти автокорреляционную функцию для координаты

$$\mathbf{G}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \equiv \langle \mathbf{x}(\mathbf{t}) \mathbf{x}(0) \rangle =$$

$$= \langle x(0)x(0) \rangle \cos \omega_0 t + \frac{\langle p(0)x(0) \rangle}{M\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (8.10)$$

В классике в состоянии теплового равновесия координата и импульс не коррелируют друг с другом — поэтому второй член в последней формуле равен нулю. Используя теорему о равномерном распределении, получаем:

$$\frac{M\omega_0^2 \langle x^2 \rangle}{2} = \frac{k_B T}{2}, \Rightarrow G_{xx}(t) = \frac{k_B T}{M\omega_0^2} \cos \omega_0 t \quad (8.11)$$

Используя теорему Винера-Хинчина, находим спектральную плотность

$$S_{VV}(\omega) = \frac{k_B T}{2M\omega_0^2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad (8.12)$$

которая действительно является четной функцией частоты.

Появление дельта-функций в (8.12) связано с приближением бесконечно малого затухания. Это же является и причиной бесконечно большого времени корреляции, что проявляется в поведении автокорреляционной функции (8.11), которая не спадает к нулю при $t \rightarrow \infty$.

В случае конечного малого затухания $\gamma \ll \omega_0$ получим:

$$G_{xx}(t) = \frac{k_B T}{M\omega_0^2} e^{-\gamma|t|} \cos \omega_0 t, \quad (8.13)$$

$$S_{VV}(\omega) = \frac{k_B T}{M\omega_0^2} \left[\frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right].$$

Подчеркнем, эта формула выписана в предположениях а) начальное состояние осциллятора соответствует тепловому;

б) при эволюции дополнительного шумового воздействия не вносится³.

8.2 Спектральная плотность классического шума

Для измерения спектральной плотности классического шума существует 2 способа.

Измерение по оцифрованной реализации. Современная техника позволяет достаточно просто получить реализацию $v(t)$ случайного процесса длины T , записанную в цифровой форме, а затем численно рассчитать корреляционную функцию $G_{vv}(t)$ в соответствии с определением (8.1). А спектральная плотность может быть рассчитана по теореме Винера-Хинчина (8.4). Следует заметить, что в определении (8.1) предполагается усреднение по ансамблю, что практически сделать затруднительно. Обычно усреднение по ансамблю заменяют усреднением по достаточно большому времени T (по сравнению с временем корреляции: $T \gg \tau_c$), обосновывая это эргодической гипотезой. Но в этом случае спектральная плотность может оказаться отрицательной или комплексной для некоторых частот, это

³Это довольно искусственное допущение, поскольку обычно затухание сопровождается дополнительными шумовыми силами, действующими на осциллятор со стороны термостата.

издержки численных вычислений при конечном времени усреднения.

Более надежный способ заключается в расчете Фурье образа $V_T(\omega)$ по реализации $v(t)$ в соответствии с ф-лой (8.2), а затем по ф-ле (8.3) — рассчитать спектральную плотность. В этом случае спектральная плотность по определению будет всегда положительной. Такой метод измерения по оцифрованной реализации случайного процесса широко применяется для сигналов радио диапазона с частотами ≤ 100 МГц.

Стандартная процедура измерения спектральной плотности сигналов СВЧ диапазона частот выше 100 МГц состоит из нескольких этапов. Сначала с помощью гетеродинирования спектр сигнала сдвигают в область более низких промежуточных частот на некоторую величину Ω . Затем полученный сигнал подают на вход фильтра, который пропускает частоты внутри узкой полосы частот $\Delta\omega$ вокруг выбранной средней ω_0 частоты. Сигнал с выхода фильтра подается на квадратичный детектор (диод), а сигнал с детектора затем усредняется в течение достаточно большого времени $\gg 1/\Delta\omega$. Этот усредненный сигнал пропорционален спектральной плотности исходного сигнала на частоте $\omega_0 + \Omega$.

Запишем эту процедуру аналитически, для простоты опуская этап гетеродинирования. Обозначим через $v_f(t)$ напряжение на выходе фильтра. Для Фурье образа $V_f(\omega)$ это-

го напряжения имеем

$$V_f(\omega) = f(\omega) V(\omega), \quad (8.14)$$

где $f(\omega)$ — коэффициент передачи фильтра, а $V(\omega)$ — Фурье образ напряжения на входе фильтра (которое мы измеряем). Из (8.5) следует, что напряжение на выходе *квадратичного* детектора будет пропорционально величине $\langle I \rangle$:

$$\langle I \rangle \sim \langle v_f^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)|^2 S_{VV}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (8.15)$$

Узкополосный фильтр пропускает только напряжение вблизи частот $\pm\omega_0$, в предельном случае мы можем принять ⁴

$$|f[\omega]|^2 = \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0), \quad (8.16)$$

откуда сразу получаем

$$\langle I \rangle = S_{VV}(-\omega_0) + S_{VV}(\omega_0) \quad (8.17)$$

Как и ожидалось, квадратичный детектор измеряет симметричную по частоте спектральную плотность классического шума.

Таким образом, мы рассмотрели два способа измерения спектральной плотности классического шума:

⁴Напряжение на выходе линейного пассивного фильтра определяется сверткой $V_{\text{out}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' F(t - t') V_{\text{in}}(t')$, где вещественная функция $F(t)$ описывает действие фильтра (в силу причинности $F(t < 0) = 0$). Отсюда следует, что ее Фурье образ $f(\omega)$ подчиняется условию $f(-\omega) = f^*(\omega)$, а функция $|f(\omega)|^2$ является четной (по частоте).

1. Для низких частот ≤ 100 МГц радио-диапазона непосредственно записывают достаточно длинную реализацию случайного процесса, по ней вычисляют преобразование Фурье $V_T(\omega)$ (8.2). В свою очередь по ней вычисляют двустороннюю спектральную плотность $S_{VV}(\omega)$ (8.3), а по ней — автокорреляционную функцию;
2. Для более высоких СВЧ частот используют узкополосный фильтр и квадратичный детектор. Для промежуточных частот используют комбинацию этих способов. В реальности методы не ограничиваются упомянутыми. Для более высоких частот (ближнего инфракрасного диапазона) используют так называемые фурье-спектрометры (“Fourier Transform spectrometer”), которые основаны на прямом измерении автокорреляционной функции сигнала. В инфракрасном, видимом и ультрафиолетовом диапазоне используют другие методы с использованием комбинации дифракционных решеток и щели.

8.3 Введение в квантовое описание шума

Следуя теореме Винера-Хинчина, использованной для описания классического шума, можно выписать выражение для

спектральной плотности квантового шума

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \hat{x}(t) \hat{x}(0) \rangle \quad (8.18)$$

где $\hat{x}(t)$ — квантовый оператор координаты (в представлении Гейзенберга), а угловые скобки описывают квантовое статистическое усреднение с помощью матрицы плотности. Далее будем обозначать заглавной буквой $S(\omega)$ спектральную плотность классического шума, а для спектральной плотности квантового шума используем заглавную букву $S(\omega)$.

Заметим, что в определении (8.18) выбран определенный порядок — именно $\langle \hat{x}(t) \hat{x}(0) \rangle$, а не $\langle \hat{x}(0) \hat{x}(t) \rangle$. Такой порядок обычно используется в литературе.

В качестве простейшего примера рассмотрим тот же гармонический осциллятор частоты ω_0 (в состоянии теплового равновесия и при бесконечно слабой связи с термостатом). Для операторов в представлении Гейзенберга справедливы те же уравнения движения, что и в классической механике с той лишь разницей, что начальные условия определяются соответствующими операторами:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}(0) \cos(\omega_0 t) + \hat{p}(0) \frac{1}{M\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ \hat{p}(t) &= \hat{p}(0) \cos(\omega_0 t) - \hat{x}(0) M\omega_0 \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Вычисление корреляционной функции очевидно:

$$G_{xx}(t) = \langle \hat{x}(t) \hat{x}(0) \rangle = \quad (8.20)$$

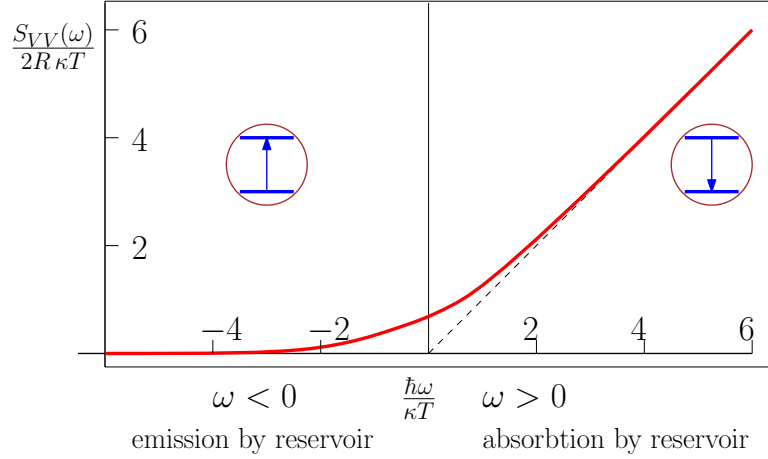


Рис. 8.1: Спектральная плотность флуктуации напряжения на сопротивлении как функция частоты при нулевой температуре (пунктирная линия) и конечной температуре (сплошная линия). Классический случай соответствует $\hbar\omega/\kappa T \ll 1$.

$$= \langle \hat{x}(0)\hat{x}(0) \rangle \cos(\omega_0 t) + \langle \hat{p}(0)\hat{x}(0) \rangle \frac{1}{M\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

В классике второй член исчезает, поскольку в состоянии теплового равновесия координата и импульс не коррелируют. Как мы вскоре убедимся, в квантовом случае симметризованный коррелятор (иногда называемый “классическим”) в состоянии теплового равновесия равен нулю:

$$\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} \rangle = 0, \quad (8.21)$$

(как и в классике). Однако в квантовом случае не равен нулю коммутатор

$$[\hat{x}(0), \hat{p}(0)] = i\hbar. \quad (8.22)$$

Формально это означает, что в квантовом случае должна быть корреляция между координатой и импульсом (замет-

тим, мнимая), поскольку $\langle \hat{x}(0)\hat{p}(0) \rangle - \langle \hat{p}(0)\hat{x}(0) \rangle = i\hbar$. Для расчета флуктуаций удобно ввести операторы рождения и уничтожения

$$\hat{x} = x_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (8.23a)$$

$$\hat{p} = \frac{i\hbar}{2x_0}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (8.23b)$$

где x_0 есть неопределенность координаты в основном состоянии

$$x_0^2 \equiv \langle 0|\hat{x}^2|0 \rangle = \frac{\hbar}{2M\omega_0}. \quad (8.24)$$

В состоянии теплового равновесия

$$\langle \hat{p}(0)\hat{x}(0) \rangle = -i\frac{\hbar}{2}, \quad \langle \hat{x}(0)\hat{p}(0) \rangle = +i\frac{\hbar}{2}, \quad (8.25a)$$

$$\langle \hat{p}(0)\hat{x}(0) + \hat{x}(0)\hat{p}(0) \rangle = 0, \quad (8.25b)$$

$$\langle x(0)^2 \rangle = x_0^2 (2n_T + 1), \quad n_T = \langle a^\dagger a \rangle_T = \frac{\hbar\omega_0}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1},$$

где n_T — среднее тепловое число квантов в осцилляторе, k — постоянная Больцмана, T — температура. Мало того, что в квантовом случае координата и момент коррелируют, но их коррелятор является мнимым!⁵ Это означает, что несмотря на то, что координата есть эрмитова переменная, чьи собственные значения вещественны, ее автокорреляционная функция комплексна (это следует из (8.20 и 8.25)):

$$G_{xx}(t) = x_0^2 \{ n_T e^{+i\omega_0 t} + [n_T + 1] e^{-i\omega_0 t} \}, \quad (8.26)$$

⁵Формально причина этого заключается в том, что произведение эрмитовых операторов не всегда есть эрмитов оператор.

Оператор координаты \hat{x} не коммутирует сам с собой в различные моменты времени — именно “благодаря” этому обстоятельству корреляционная функция (8.26) является комплексной, а спектральная плотность *не является четной* по частоте

$$\frac{S_{xx}[\omega]}{2\pi\chi_0^2} = n_T\delta(\omega + \omega_0) + [n_T + 1]\delta(\omega - \omega_0), \quad (8.27)$$

$$n_T = \langle a^\dagger a \rangle_T, \quad n_T + 1 = \langle a a^\dagger \rangle_T. \quad (8.28)$$

Часть спектральной плотности для положительных частот “отвечает” за излучение *из термостата* в осциллятор (она пропорциональна $\langle a a^\dagger \rangle_T$), тогда как спектральная плотность для отрицательных частот описывает излучение *из осциллятора* в термостат (она пропорциональна $\langle a^\dagger a \rangle_T$). Иными словами, спектральная плотность для положительных частот есть мера способности осциллятора *поглощать* энергию, тогда как спектральная плотность для отрицательных частот есть мера способности осциллятора *излучать* энергию. Это иллюстрирует рис. 8.1.

Качественно описание, приведенное выше, будет детально подтверждено при рассмотрении работы квантовых анализаторов спектра. Конечно, мы не можем измерить комплексную автокорреляционную функцию $G_{xx}(t)$. Однако, как будет ниже показано, возможно определить ее Фурье-образ $S_{xx}[\omega]$ как для положительных, так и для отрицательных частот [24, 25, 26].

Очевидно, в пределе высоких температур $\kappa T \gg \hbar\omega_0$

$$n_T \sim n_T + 1 \sim \frac{\kappa T}{\hbar\omega_0}. \quad (8.29)$$

формула (8.27) переходит в классическое выражение (8.17).

8.4 Квантовые анализаторы спектра

Рассмотрим квантовую частицу (атом или электрическую цепь), имеющую два уровня $|g\rangle$ and $|e\rangle$, разность энергий которых $E = \hbar\omega_{01}$. Будем считать, что все другие уровни имеют значительно большую энергию и мы не будем их принимать во внимание. Такая двухуровневая система может быть использована как спектрометр для измерения квантового шума [26].

8.4.1 Классический шум

Известно, что двухуровневой системе можно сопоставить частицу со спином $1/2$ в магнитном поле (направленном по оси \mathbf{z}): состояние со спином вниз есть $|g\rangle$, а со спином вверх — $|e\rangle$. Гамильтониан такой частицы равен (энергия частицы на уровне $|g\rangle$ равна $-\hbar\omega_{01}/2$)

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_{01}}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (8.30)$$

где $\hat{\sigma}_z$ — оператор проекции спина на ось \mathbf{z} (описывается одной из матриц Паули).

Наша цель — использовать скорость переходов двухуровневой системе с одного уровня на другой под действием внешнего шума для измерения шума. Если, например, шум характеризуется амплитудой $F(\mathbf{t})$, тогда гамильтониан взаимодействия равен:

$$\hat{V} = AF(\mathbf{t})\hat{\sigma}_x, \quad (8.31)$$

где A есть константа связи, $\hat{\sigma}_x$ — оператор проекции спина на ось \mathbf{x} ⁶. Пока мы считаем $F(\mathbf{t})$ классической величиной (ниже будет приведено и обобщение на квантовый случай).

Двухуровневая система является резонансной, это выражается в том, что

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t} + \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_0 t}, \quad (8.32a)$$

$$\text{напомним: } \hat{\sigma}_- |g\rangle = 0, \quad \hat{\sigma}_- |e\rangle = |g\rangle, \quad (8.32b)$$

$$\hat{\sigma}_+ |g\rangle = |e\rangle, \quad \hat{\sigma}_+ |e\rangle = 0 \quad (8.32c)$$

Поэтому представляем $F(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t})e^{-i\omega_0 t} + f^*(\mathbf{t})e^{i\omega_0 t}$, где $f(\mathbf{t})$ — медленные амплитуды и оставляем в гамильтониане взаимодействия только медленные члены, а быстро осциллирующие отбрасываем:

$$\hat{V} = A\{f(\mathbf{t})\hat{\sigma}_+ + f^*(\mathbf{t})\hat{\sigma}_-\}, \quad (8.33)$$

⁶В общем случае возмущение будет содержать и оператор $\hat{\sigma}_y$ проекции спина на ось \mathbf{y} . Однако простым поворотом системы координат вокруг оси \mathbf{z} энергию взаимодействия можно записать через оператор $\hat{\sigma}_x$.

Будем считать, что константа связи Λ может быть сделана достаточно малой, чтобы можно было применить метод возмущений. Состояние двухуровневой системы описывается суперпозицией:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha_g(t)|g\rangle + \alpha_e(t)|e\rangle, \quad (8.34)$$

В представлении взаимодействия теория возмущений дает в первом порядке малости

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \hat{V}(\tau) |\psi(0)\rangle. \quad (8.35)$$

Если первоначально двухуровневая система находится в нижнем состоянии ($\alpha_e(0) = 0$, $\alpha_g(0) = 1$), то амплитуда перехода в верхнее состояние за время t находится из Eq. (8.35)

$$\begin{aligned} \alpha_e(t) &= -\frac{i\Lambda}{\hbar} \int_0^t d\tau \langle e|\hat{\sigma}_x(\tau)|g\rangle F(\tau), \\ &= -\frac{i\Lambda}{\hbar} \int_0^t d\tau e^{i\omega_{01}\tau} F(\tau). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Для нас важен знак (+) в экспоненте $e^{i\omega_{01}\tau}$, который получается из применения формул для $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-$ (8.32). Поскольку подынтегральная функция $F(t)$ в (8.36) есть случайная величина, то α_e есть сумма большого числа случайных членов, т.е. мы имеем задачу случайных блужданий по комплексной плоскости. В результате при времени интегрирования значительно больше времени корреляции τ_c

интеграл будет возрастать не линейно со временем \mathbf{t} , а пропорционально $\sqrt{\mathbf{t}}$ (как для задачи случайных блужданий).

Теперь нетрудно посчитать вероятность

$$p_e(\mathbf{t}) \equiv |\alpha_e|^2 = \frac{A^2}{\hbar^2} \int_0^{\mathbf{t}} \int_0^{\mathbf{t}} d\tau_1 d\tau_2 e^{-i\omega_{01}(\tau_1 - \tau_2)} F(\tau_1) F(\tau_2).$$

После усреднения по ансамблю получим

$$\bar{p}_e(\mathbf{t}) = \frac{A^2}{\hbar^2} \int_0^{\mathbf{t}} \int_0^{\mathbf{t}} d\tau_1 d\tau_2 e^{-i\omega_{01}(\tau_1 - \tau_2)} \langle F(\tau_1) F(\tau_2) \rangle \quad (8.37)$$

Подчеркнем, именно такой порядок $\langle F(\tau_1) F(\tau_2) \rangle$ при усреднении следует из квантового рассмотрения (см. ниже формулу (8.46) и объяснения там).

Перейдем к новым переменным интегрирования в интеграле (8.37):

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1 - \tau_2, & T &= (\tau_1 + \tau_2)/2, \\ \bar{p}_e(\mathbf{t}) &= \frac{A^2}{\hbar^2} \int_0^{\mathbf{t}} dT \int_{-B}^B d\tau e^{-i\omega_{01}\tau} \langle F(T + \tau/2) F(T - \tau/2) \rangle, \\ B &= \begin{cases} T & \text{if } T < \mathbf{t}/2, \\ \mathbf{t} - T & \text{if } T > \mathbf{t}/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, что вероятность $\bar{p}_e(\mathbf{t})$ будет расти квадратично по времени \mathbf{t} для коротких времен $\mathbf{t} < \tau_c$ и линейно для длинных времен $\mathbf{t} > \tau_c$. Нас будет интересовать именно второй случай, это позволяет во втором интеграле перейти к бесконечным пределам ($B \rightarrow \infty$). Кроме того, предположим стационарность шума. В результате получаем:

$$\bar{p}_e(\mathbf{t})|_{\mathbf{t} \gg \tau_c} \simeq \frac{A^2}{\hbar^2} \int_0^{\mathbf{t}} dT \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega_{01}\tau} \langle F(\tau) F(0) \rangle =$$

$$= \frac{tA^2}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega_{01}\tau} \langle F(\tau) F(0) \rangle \quad (8.38)$$

Напомним теорему Винера-Хинчина (8.4):

$$S_{FF}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle F(\tau) F(0) \rangle, \quad (8.39)$$

Подставляя эту формулу в (8.38), находим вероятность найти систему на верхнем состоянии, которая *линейно* растет со временем при больших временах⁷

$$\bar{p}_e(t) = t \frac{A^2}{\hbar^2} S_{FF}(-\omega_{01}) \quad (8.40)$$

Производная этой вероятности дает скорость перехода в верхнее состояние

$$\Gamma_{\uparrow} = \frac{A^2}{\hbar^2} S_{FF}(-\omega_{01}) \quad (8.41)$$

Важно, что в последнее выражение входит спектральная плотность для отрицательных частот. Если F описывает классический шум, $\langle F(\tau) F(0) \rangle$ действительно, а $S_{FF}(-\omega_{01}) = S_{FF}(+\omega_{01})$. Однако, ниже бы будем также рассматривать F как оператор, действующий со стороны термостата, $[\hat{F}(\tau), \hat{F}(0)] \neq 0$ и $S_{FF}(-\omega_{01}) \neq S_{FF}(+\omega_{01})$.

⁷Заметим, что при слишком больших временах теория возмущений становится неприменима (это означает, что формально $\bar{p}_e(t) > 1$). Однако, при достаточно малой константе A существует широкий диапазон времен $\tau_c \ll t \ll 1/\Gamma$ для которых справедливо (8.40). При этом уравнения (8.41) и (8.42) дают правильные скорости переходов, которые могут быть использованы для описания динамики системы, включая и большие времена.

Другая возможность использования двух уровневой частицы как детектора — приготовить двухуровневую систему в возбужденном состоянии и регистрировать переход на нижний уровень. Вычисления для этого случая совершенно аналогичны за исключением знака перед частотой

$$\Gamma_{\downarrow} = \frac{A^2}{\hbar^2} S_{\text{FF}}(+\omega_{01}). \quad (8.42)$$

Мы видим, что рассмотренная двухуровневая система действительно может быть использована как квантовый анализатор спектра. Для этого мы должны приготовить двухуровневую системы в нижнем (или возбужденном) состоянии, реализовать слабую связь с термостатом и по истечении достаточно длительного времени измерить, на каком уровне оказалась система. После повторения этой процедуры много раз мы можем измерить спектральную плотность. Важно, что в отличие от классического анализатора спектра мы можем измерять спектральную плотность для положительных и отрицательных частот отдельно, поскольку мы измеряем отдельно скорости перехода вверх или вниз. Шум на отрицательных частотах приводит к передаче энергии *от источника шума анализатору спектра*, тогда как шум на положительных частотах проволит к передаче энергии *от спектрометра источнику шума*.

Заметим, что существует несколько определений спектральной плотности. Часто используют так называемое “одностороннее” определение, подразумевая под спектраль-

ной плотностью $S_{FF}(+\omega) + S_{FF}[-\omega]$. Это удобно для описания классического шума, для которого, как известно, $S_{FF}(+\omega) = S_{FF}[-\omega]$. Для описания квантовых шумов иногда вводят антисимметричную комбинацию $S_{FF}(+\omega) - S_{FF}(-\omega)$. На наш взгляд, более физически осмысленным является выделение спектральной плотности для положительных и отрицательных частот. Такое разделение оказывается особенно удобным при описании неравновесных систем.

Обычно интуитивно предполагают, что спектрометр измеряет малую часть шумового сигнала, *получаемого* от источника шума. В случае измерения квантового шума это не так, поскольку для полного измерения шума надо измерять *потоки энергии в обоих направлениях*: как от источника шума (термостата) к спектрометру (для отрицательных частот), так и от спектрометра к термостату (для положительных частот).

8.4.2 Квантовый шум

Теперь мы рассмотрим квантовый случай. Возникает вполне правомочный вопрос о порядке членов в классических скобках (8.37). Для пояснения мы должны рассматривать квантовый случай и считать случайную силу квантовым оператором Гейзенберга, действующем в гильбертовом пространстве шумовых источников, т.е. ставить шляпку $\hat{F}(t)$. В этом случае надо учитывать что, состояние системы

надо записывать в виде:

$$|\psi(t)\rangle = (\alpha_e(t)|e\rangle + \alpha_g(t)|g\rangle) |n_T\rangle, \quad (8.43)$$

где $|n_T\rangle$ описывает состояние термостата, характеризуемое средним тепловым числом квантов n_T .

Пусть опять первоначально двухуровневая система находится в нижнем состоянии ($\alpha_e(0) = 0$, $\alpha_g(0) = 1$). Тогда амплитуда перехода в верхнее состояние за время t находится из Eq. (8.35)

$$\alpha_e(t) = \langle n_T | \langle e | \psi(t) \rangle = -\frac{iA}{\hbar} \int_0^t d\tau e^{i\omega_{01}\tau} \hat{F}(\tau). \quad (8.44)$$

Теперь можем выписать вероятность перехода в возбужденное состояние

$$\begin{aligned} \bar{p}_e &= |\alpha_e(t)|^2 = \langle \psi(t) | n_T \rangle \langle e | \langle n_T | \langle e | \psi(t) \rangle = & (8.45) \\ &= \frac{A^2}{\hbar^2} \left\langle \int_0^t d\tau_1 \hat{F}(\tau_1) e^{-i\omega_{01}\tau_1} \int_0^t d\tau_2 \hat{F}(\tau_2) e^{i\omega_{01}\tau_2} \right\rangle & (8.46) \end{aligned}$$

Отсюда сразу получается уравнение (8.37). (Если бы у атома было несколько верхних уровней $|e_i\rangle$, то для вероятности перейти в одно из возбужденных состояний надо было бы писать $\sum_i \langle \psi(t) | e_i \rangle \langle e_i | \psi(t) \rangle$.)

Таким образом, выкладки выше остаются в силе (порядок в определении величины $\hat{F}(\tau_1)\hat{F}(\tau_2)$ выбран правильно), уравнения (8.41, 8.42) справедливы для квантового случая и мы можем подразумевать под угловыми скобками в

(8.37,8.39) квантовое усреднение (рассчитанное при отсутствии связи со спектрометром). Для спектральной плотности получим следующую формулу:

$$S_{\text{FF}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \sum_{\alpha,\gamma} \rho_{\alpha\alpha} \langle \alpha | \hat{F}(\tau) | \gamma \rangle \langle \gamma | \hat{F}(0) | \alpha \rangle. \quad (8.47)$$

Здесь мы предположили стационарность, когда матрица плотности ρ термостата (источника шума) диагональна в энергетическом представлении. (Это не означает, однако, что термостат находится в тепловом равновесии.) Отсюда получаем стандартное выражение для спектральной плотности в квантовом случае :

$$\begin{aligned} S_{\text{FF}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \sum_{\alpha,\gamma} \rho_{\alpha\alpha} e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_\alpha - \epsilon_\gamma)\tau} |\langle \alpha | \hat{F} | \gamma \rangle|^2 \\ &= 2\pi\hbar \sum_{\alpha,\gamma} \rho_{\alpha\alpha} |\langle \alpha | \hat{F} | \gamma \rangle|^2 \delta(\epsilon_\gamma - \epsilon_\alpha - \hbar\omega). \end{aligned} \quad (8.48)$$

Подставляя эту формулу в (8.41,8.42), можно вывести известное золотое правило Ферми для скоростей переходов.

Представленный подход позволяет рассматривать скорость перехода системы с дискретными уровнями, пользуясь золотым правилом Ферми, как действие термостата (источника квантового шума), вызывающего квантовые случайные блуждания. В частности, рассматривая возмущение (связь с континуумом термостата) как квантовый шум с малым, но конечным временем релаксации, мы можем объяснить, почему вероятность перехода растет квадратично со временем на коротких временах и линейно — на длинных.

Важно помнить, что полученные выше выражения справедливы только для случая, когда время релаксации мало по сравнению с типичным характерным временем порядка обратной скорости перехода. Малость времени корреляции релаксации также означает широкополосность шума. В стандартной модели термостат представляют как бесконечный набор гармонических осцилляторов, частоты которых образуют непрерывный набор (континуум).

В простейшем случае, когда термостат находится в термодинамическом равновесии, скорости переходов в двухуровневой системе *должны* подчиняться условию детального равновесия

$$\frac{\Gamma_{\downarrow}}{\Gamma_{\uparrow}} = e^{\hbar\omega_{01}/kT} \quad (8.49)$$

для того, чтобы равновесные населенности уровней в двухуровневой системе описывались правильными выражениями. Это, в свою очередь, дает отношение для спектральных плотностей ⁸:

$$S_{FF}(+\omega_{01}) = e^{\hbar\omega_{01}/kT} S_{FF}(-\omega_{01}). \quad (8.50)$$

Отсюда, кстати, сразу следует, что для классического шума, когда $kT \gg \hbar\omega_{01}$, спектральные плотности для положительных и отрицательных частот равны: $S_{FF}(\omega_{01}) =$

⁸Конечно, можно доказать условие детального равновесия простым расчетом квантового шума для термостата в термодинамическом равновесии, например, используя (8.26) и используя тождество $(1 + n_{\uparrow})/n_{\uparrow} = \exp \hbar\omega/kT$.

$S_{FF}(-\omega_{01})$.

Сказанное можно интерпретировать следующим образом. В классике двусторонняя спектральная плотность $S_{FF}(\omega)$ случайной силы F , действующей со стороны термостата, определяется по формуле:

$$\langle F(\omega)F^*(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega - \omega') S_{FF}(\omega) \quad (8.51)$$

Термостат представляет собой набор большого числа осцилляторов, находящихся в тепловом равновесии. Обозначая комплексные амплитуды этих осцилляторов через $f(\omega_k)$ мы можем записать

$$F(t) = \sum_k \beta_k (f(\omega_k)e^{-i\omega_k t} + f^*(\omega_k)e^{i\omega_k t}), \quad (8.52)$$

где β_k численные коэффициенты, учитывающие вклад каждого теплового осциллятора (в пределе сумма переходит в интеграл). Для резонансных взаимодействий, которые мы рассматриваем, мы можем считать $\beta_k = 1$ (сила взаимодействия описывается коэффициентом A в формулах выше). Тогда можно записать:

$$\langle F(\omega)F^*(\omega') \rangle = \langle f(\omega)f^*(\omega') \rangle + \langle f^*(\omega)f(\omega') \rangle + \quad (8.53)$$

$$+ \langle f^*(\omega)f^*(\omega') \rangle + \langle f(\omega)f(\omega') \rangle = \quad (8.54)$$

$$= \langle f(\omega)f^*(\omega') \rangle + \langle f^*(\omega)f(\omega') \rangle \quad (8.55)$$

В квантовом случае мы можем записать

$$\langle \hat{F}(\omega)\hat{F}^*(\omega') \rangle = \langle \hat{f}^\dagger(\omega)\hat{f}(\omega') \rangle + \langle \hat{f}(\omega)\hat{f}^\dagger(\omega') \rangle.$$

И тогда можно просто определить спектральную плотность как

$$\begin{aligned}\langle \hat{f}(\omega) \hat{f}^\dagger(\omega') \rangle &= 2\pi \delta(\omega - \omega') S_{FF}(\omega), \quad \text{if } \omega > 0, \\ \langle \hat{f}^\dagger(\omega) \hat{f}(\omega') \rangle &= 2\pi \delta(\omega - \omega') S_{FF}(\omega), \quad \text{if } \omega < 0\end{aligned}$$

8.4.3 Гармонический осциллятор

Рассмотрим гармонический осциллятор, слабо связанный с термостатом, как анализатор спектра. В отличие от двухуровневой системы, осциллятор имеет бесконечный набор эквидистантных энергетических уровней. Однако также как и двухуровневая система, осциллятор имеет собственную частоту, что и позволяет его рассматривать как анализатор спектра. Более того, это позволит с еще одной точки зрения рассматривать квантовый шум и проанализировать понятие “эффективной температуры” термостата в неравновесном состоянии.

Гармонический осциллятор частоты ω_0 и массы M описывается гамильтонианом

$$H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{M\omega_0^2 \hat{x}^2}{2} = \hbar\omega_0 \left(\hat{c}^\dagger \hat{c} + \frac{1}{2} \right) \quad (8.56)$$

где \hat{c} — оператор уничтожения осциллятора. Шум действует как слабая флуктуационная сила $F(t)$, он описывается гамильтонианом взаимодействия:

$$\hat{V} = A\hat{x}\hat{F} = A \left[x_0(\hat{c} + \hat{c}^\dagger) \right] \hat{F}, \quad x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_0}} \quad (8.57)$$

где \mathbf{A} есть постоянная связи (которая опять предполагается достаточно малой). Время корреляции шума $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ мы опять предполагаем достаточно малым. Шум $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ вызывает переходы осциллятора с уровня на уровень. Для расчета скоростей перехода применяем метод возмущений и для скорости перехода из состояния $|\mathbf{n}\rangle$ в $|\mathbf{n} + 1\rangle$:

$$|\psi(\mathbf{t})\rangle = |\psi(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^{\mathbf{t}} d\tau \hat{\mathbf{V}}(\tau) |\psi(0)\rangle, \quad |\psi(0)\rangle = |\mathbf{n}\rangle, \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{n}+1} &\equiv \langle \mathbf{n} + 1 | \psi(0) \rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\mathbf{t}} d\tau \langle \mathbf{n} + 1 | \hat{\mathbf{V}}(\tau) | \mathbf{n} \rangle = \\ &= -\frac{i\mathbf{A}x_0}{\hbar} \sqrt{\mathbf{n} + 1} \int_0^{\mathbf{t}} \hat{\mathbf{F}}(\tau) e^{i\omega_0\tau} d\tau \end{aligned} \quad (8.59)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}+1} &\equiv \langle \psi(0) | \mathbf{n} + 1 \rangle \langle \mathbf{n} + 1 | \psi(0) \rangle = \\ &= \frac{\mathbf{A}^2 x_0^2}{\hbar^2} (\mathbf{n} + 1) \int_0^{\mathbf{t}} \int_0^{\mathbf{t}} \langle \hat{\mathbf{F}}(\tau_1) \hat{\mathbf{F}}(\tau_2) \rangle e^{-i\omega_0(\tau_1 - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Действуя также, как при вычислении перехода в двухуровневой системе (8.38), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}+1} &= \frac{\mathbf{A}^2}{\hbar^2} [(\mathbf{n} + 1)x_0^2] \mathbf{S}_{\text{FF}}(-\omega_0) \equiv \\ &\equiv (\mathbf{n} + 1)\Gamma_{\uparrow}. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Как и ожидалось, скорость перехода “вверх” определяется спектральной плотностью на отрицательной частоте $-\omega_0$ (поглощение энергии из термостата). Множитель в квадратных скобках представляет собой просто матричный элемент переход $|\langle \mathbf{n} + 1 | \hat{\mathbf{x}} | \mathbf{n} \rangle|^2$. Аналогично получаем скорость пере-

хода с уменьшением числа квантов в осцилляторе:

$$c_{n-1} \equiv \langle n-1 | \psi(0) \rangle = -\frac{iAtx_0}{\hbar} \sqrt{n} \int_0^t \hat{F}(\tau) e^{-i\omega_0\tau} d\tau,$$

$$\Gamma_{n \rightarrow n-1} = \frac{A^2}{\hbar^2} [nx_0^2] S_{FF}(\omega_0) \equiv n\Gamma_{\downarrow} \quad (8.61)$$

Скорость перехода “вниз” определяется спектральной плотностью на положительной частоте $+\omega_0$ (излучение энергии в термостат).

С помощью этих формул для скоростей переходов несложно записать кинетическое уравнение для вероятности $p_n(t)$ найти осциллятор на уровне n :

$$\frac{d}{dt} p_n = [n\Gamma_{\uparrow} p_{n-1} + (n+1)\Gamma_{\downarrow} p_{n+1}] - \quad (8.62)$$

$$- [n\Gamma_{\downarrow} + (n+1)\Gamma_{\uparrow}] p_n \quad (8.63)$$

Здесь два первых члена описывают переходы в состояние $|n\rangle$ из состояний $|n+1\rangle$ и $|n-1\rangle$, которые увеличивают p_n . Два последних члена описывают переходы из состояния $|n\rangle$ в состояния $|n+1\rangle$ and $|n-1\rangle$, уменьшающие вероятность p_n .

Для стационарного состояния осциллятора (т.е. положив $\frac{d}{dt} p_n = 0$) нетрудно решить уравнение (8.63). С учетом (8.50) получаем:

$$p_n = e^{-n\hbar\omega_0/(\kappa T_{\text{eff}})} \left(1 - e^{-\hbar\omega_0/(\kappa T_{\text{eff}})} \right). \quad (8.64)$$

$$\kappa T_{\text{eff}}(\omega_0) \equiv \frac{\hbar\omega_0}{\log \left[\frac{\Gamma_{\downarrow}}{\Gamma_{\uparrow}} \right]} = \frac{\hbar\omega_0}{\log \left[\frac{S_{FF}(\omega_0)}{S_{FF}(-\omega_0)} \right]} \quad (8.65)$$

Уравнение (8.64) описывает осциллятор в тепловом равновесии с эффективной температурой $T_{\text{eff}}(\omega_0)$, которая определяется спектром квантового шума \hat{F} . Это та же эффективная температура, которая появлялась при рассмотрении двухуровневой системы как анализатора спектра. Для равновесного источника шума спектральная плотность $S_{\text{FF}}(\omega)$ должна удовлетворять условию детального равновесия (Eq. (8.49, 8.50)), а T_{eff} совпадает с физической температурой термостата (источника шума). В более общем случае, когда термостат не находится в равновесии, T_{eff} характеризует лишь асимметрию квантового шума и может зависеть от частоты⁹.

Мы можем получить больше информации о спектре квантового шума \hat{F} рассматривая динамику осциллятора. В частности, для его средней энергии $\langle E \rangle$

$$\langle E(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) p_n(t), \quad (8.66)$$

мы можем получить из кинетического уравнения (8.63):

$$\frac{d}{dt} \langle E \rangle = P - \gamma \langle E \rangle, \quad (8.67)$$

$$P = \frac{\hbar \omega_0}{2} (\Gamma_{\uparrow} + \Gamma_{\downarrow}) = \frac{A^2}{4M} [S_{\text{FF}}(\omega_0) + S_{\text{FF}}(-\omega_0)], \quad (8.68)$$

$$\gamma = \Gamma_{\downarrow} - \Gamma_{\uparrow} = \frac{A^2 \chi_0^2}{\hbar^2} [S_{\text{FF}}(\omega_0) - S_{\text{FF}}(-\omega_0)]. \quad (8.69)$$

⁹Эффективная температура может быть отрицательной, если излучение термостата превалирует над поглощением, что, как известно, приводит к нестабильности.

Два члена в правой части уравнения (8.67) описывают соответственно нагревание и затухание осциллятора, вызванное термостатом. Нагревание полностью аналогично классическому случаю: случайная сила вызывает случайные блуждания осциллятора (диффузию), которая в свою очередь вызывает линейное по времени увеличение энергии $\langle E \rangle$ со скоростью P . Из условия $d\langle E \rangle/dt = 0$ нетрудно найти среднюю энергию

$$\langle E \rangle = \frac{P}{\gamma} = \frac{\hbar^2 [S_{FF}(\omega_0) + S_{FF}(-\omega_0)]}{4Mx_0^2 [S_{FF}(\omega_0) - S_{FF}(-\omega_0)]}. \quad (8.70)$$

Как видно из уравнения (8.68) в квантовом случае именно *симметричная по частоте* часть спектральной плотности отвечает за этот эффект, который играет роль источника классического шума. Это еще одна причина считать $(S_{FF}(\omega_0) + S_{FF}(-\omega_0))$ “классическим шумом”.

В духе такого описания энергия основного состояния осциллятора $\langle E \rangle = \hbar\omega_0/2$ определяется балансом между “нагреванием” нулевыми флуктуациями из термостата (оно описывается симметричным коррелятором при $T = 0$) и затухания. В качестве альтернативы (вполне корректной) можно рассматривать только отклонение энергии $\langle \delta E \rangle = \langle E \rangle - \hbar\omega_0/2$. Для него уравнение эволюции

$$\frac{d}{dt} \langle \delta E \rangle = \langle \delta E \rangle (\Gamma_{\uparrow} - \Gamma_{\downarrow}) + \Gamma_{\uparrow} \hbar\omega_0 \quad (8.71)$$

при $T = 0$ содержит только член затухания, что приводит к $\langle \delta E \rangle \rightarrow 0$.

На первый взгляд, появление члена, описывающего затухание в (8.67), вызвано исключительно квантовыми причинами, поскольку пропорционален *антисимметричной по частоте* части спектральной плотности. Это не удивительно: затухание вызвано поглощением энергии термостатом и антисимметричная часть прямо характеризует свойство термостата сильнее поглощать, чем излучать энергию. А классическое описание затухания основано на действии случайной силы с нулевым средним, т.е.

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(t) \rangle = -M\gamma \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (8.72)$$

Строго говоря, оба способа описания затухания эквивалентны. Как в классическом, так и в квантовом случае мы считаем, что причина затухания лежит в изменении состояния термостата в результате эволюции осциллятора, а следовательно, средней силы \mathbf{F} . В квантовом случае мы описываем этот эффект, рассчитывая $\langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$ из-за связи $\mathbf{V} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{F}}$. В представлении взаимодействия мы получаем обычное линейное уравнение:

$$\delta \langle \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{F}}(t) \rangle = \mathbf{A}^2 \int dt' \chi_{\mathbf{FF}}(t - t') \langle \hat{\mathbf{x}}(t') \rangle, \quad (8.73)$$

$$\text{где } \chi_{\mathbf{FF}}(t) = \frac{-i}{\hbar} \theta(t) \langle [\hat{\mathbf{F}}(t), \hat{\mathbf{F}}(0)] \rangle \quad (8.74)$$

Удерживая только часть $\delta \langle \mathbf{F}(t) \rangle$, отвечающую за диссипацию (т.е. пропорциональную скорости, а не координате) и учитывая то, что эволюция осциллятора происходит на ча-

стоте ω_0 , переписываем (8.73) в той же форме, что и уравнение (8.72):

$$\gamma = \frac{2A^2\chi_0^2}{\hbar} [-\text{Im}\chi_{\text{FF}}[\omega_0]] = \frac{2A^2\chi_0^2}{\hbar} \left[-\text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega_0 t} \chi_{\text{FF}}(t) \right] \quad (8.75)$$

Стоит отметить, что прямые преобразования уравнения (8.74) для χ_{FF} показывают, что выражение для γ эквивалентно прежней формуле:

$$\gamma = \frac{2A^2\chi_0^2}{\hbar} [-\text{Im}\chi_{\text{FF}}[\omega_0]] = \frac{A^2\chi_0^2}{\hbar^2} [S_{\text{FF}}[\omega_0] - S_{\text{FF}}(-\omega_0)] \quad (8.76)$$

Таким образом, мы можем рассматривать затухание с двух эквивалентных точек зрения: как результат ответного воздействия термостата на движение осциллятора или передача энергии от осциллятора к термостату через те же переходы, которые отвечают за возникновение шума.

Возвращаясь к (8.68) и (8.69), мы видим, что можно иначе взглянуть на квантовый шум. Симметричная по частоте часть спектральной плотности шума отвечает за нагрев (возбуждение тепловых колебаний осциллятора), тогда как антисимметричная по частоте часть отвечает за внесение термостатом диссипации.

Мы также видим, что гармонический осциллятор может быть анализатором спектра квантового шума — измерения скорости нагрева \mathbf{P} (или, что эквивалентно, средней энергии

$\langle E \rangle$) и затухания γ вполне достаточно для получения информации о спектральной плотности шума как на положительных, так и на отрицательных частотах $\pm\omega_0$. Эта идея была недавно проверена экспериментально [27] с использованием высокодобротного резонатора для измерения шума обратного влияния одноэлектронного транзистора как на положительных, так и на отрицательных частотах.

Из обсуждения, представленного выше, сразу следует квантовый вариант флуктуационно-диссипативной теоремы [28]. Как было показано для термостата, находящегося в равновесии, положительные и отрицательные частоты спектральной плотности шума связаны между собой условием детального равновесия (8.50)). Это, в свою очередь, дает связь между симметричной по частоте спектральной плотности с затуханием, а антисимметричной по частоте — с шумом. Вводя обозначение $\beta = 1/(kT)$, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\text{FF}}(\omega) &\equiv \frac{S_{\text{FF}}(\omega) + S_{\text{FF}}(-\omega)}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\beta\hbar\omega})S_{\text{FF}}(\omega) = \\ &= \frac{1(1 + e^{-\beta\hbar\omega})}{2(1 - e^{-\beta\hbar\omega})}(1 - e^{-\beta\hbar\omega})S_{\text{FF}}(\omega) = \end{aligned} \quad (8.77)$$

$$= \frac{1}{2} \coth(\beta\hbar\omega/2) (S_{\text{FF}}(\omega) - S_{\text{FF}}(-\omega)) \quad (8.78)$$

$$= \coth(\beta\hbar\omega/2) \frac{\hbar\omega M}{A^2} \gamma(\omega) \quad (8.79)$$

Таким образом, условие детального равновесия приводит к связи между шумом и затуханием, описываемой температурой. Для случая больших температур $T \gg \hbar\omega_0$

получаем хорошо известную классическую формулу для флуктуационно-диссипативной теоремы:

$$A^2 S_{FF}(\omega_0) = 2kT M \gamma \quad (8.80)$$

Этот вывод немного отличается от встречающегося обычно в литературе вывода для классических систем, основанного на теореме о равномерном распределении.

8.5 Измерение спектра в эксперименте

Как мы видели, квантовым анализатором спектра может быть двухуровневая система (или гармонический осциллятор), в котором мы можем отдельно измерять скорости переходов вверх или вниз между состояниями, различающимися на некоторую энергию $\hbar\omega > 0$, где частота ω есть интересующая нас частота. Скорость переходов вниз определяется спектральной плотностью на положительной частоте $+\omega$, а скорость переходов вверх — спектральной плотностью на отрицательной частоте $-\omega$. В эксперименте эти идеи реализуются, с помощью других, более удобных в работе систем. В ряде экспериментов для измерения квантового шума были использованы переходы типа сверхпроводник-изолятор-сверхпроводник [29, 30], поскольку вольт-амперные характеристики таких переходов очень чувствительны к поглощению или излучению энергии (так называемые *photon-assisted transport processes*).

В этом разделе мы рассмотрим дополнительные методы детектирования квантового шума. В разделе 8.2 мы упомянули, что одна из основных схем анализатора спектра состоит из узкополосного фильтра и квадратичного детектора. Поэтому мы рассмотрим, такой анализатор с квантовой точки зрения, пока не касаясь устройства самого детектора. Затем рассмотрим схемы детектирования с фотоумножителем и покажем, что в зависимости от измерительной схемы можно измерять как симметричную $[S(\omega) + S(-\omega)]$, так и антисимметричную $[S(\omega) - S(-\omega)]$ спектральные плотности.

8.5.1 “Фильтр плюс диод”

Пусть гармонический осциллятор, рассмотренный как анализатор спектра в разделе 8.4.3, используется для квантового измерения шума в классической схеме “фильтр плюс диод” (разд. 8.2). Пусть есть резонатор (например, LC-контур) частоты ω_0 и малого собственного затухания γ_0 (т.е. $\gamma_0 \ll \omega_0$), первоначальная температура которого T_{eq} (т.е. он связан со своим термостатом, чья температура T_{eq}). Обозначим через n_{eq} среднее число в резонаторе:

$$n_{\text{eq}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T_{\text{eq}}}\right) - 1}. \quad (8.81)$$

В начальный момент на осциллятор начинает действовать квантовый шум $\hat{F}(t)$, чью спектральную плотность на

частоте ω_0 мы хотим измерить. Другими словами, в начальный момент мы включаем связь между резонатором и квантовым термостатом при некоторой температуре T_{eff} и хотим зарегистрировать его воздействие. Пусть n_{eff} — среднее число квантов, соответствующее температуре $T_{\text{eff}}[\omega_0]$ исследуемого источника шума $\hat{F}(t)$:

$$n_{\text{eff}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T_{\text{eff}}(\omega_0)}\right) - 1}. \quad (8.82)$$

В классической схеме “фильтр плюс детектор” выходной сигнал с фильтра подается на квадратичный детектор, чей усредненный по времени отклик и дает величину спектральной плотности. Мы же для простоты мы будем рассматривать изменение средней энергии резонатора (очевидно, что это эквивалентно). В классическом случае действия классического шума это вызовет увеличение средней энергии резонатора $\langle E \rangle$ пропорционально классической спектральной плотности $S_{\text{FF}}[\omega_0]$.

По прошествии достаточно длинного времени ($\gg 1/\gamma, 1/\gamma_0$) средняя энергия резонатора станет равной $\langle E \rangle$, изменившись на величину $\Delta\langle E \rangle$:

$$\langle E \rangle = \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{n_{\text{eq}}\gamma_0 + n_{\text{eff}}\gamma}{\gamma + \gamma_0} \right), \quad (8.83)$$

$$\Delta\langle E \rangle \equiv \langle E \rangle - \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + n_{\text{eq}} \right) = \quad (8.84)$$

$$= \hbar\omega_0 \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0 + \gamma} (n_{\text{eff}} - n_{\text{eq}}). \quad (8.85)$$

Первый член в (8.85) описывает нагревание от измеряемого источника ($\sim \mathbf{n}_{\text{eff}}$), а второй ($\sim \mathbf{n}_{\text{eq}}$) — нагревание от “собственного” шума с учетом изменения затухания ($\gamma_0 \rightarrow \gamma_0 + \gamma$). Перепишем это уравнение через симметричную и антисимметричную части спектральной плотности $S_{\text{FF}}[\omega_0]$:

$$\Delta\langle E \rangle = \frac{A^2}{2m(\gamma_0 + \gamma)} \left[\frac{S_{\text{FF}}(\omega_0) + S_{\text{FF}}(-\omega_0)}{2} + \right. \quad (8.86)$$

$$\left. + \left(\mathbf{n}_{\text{eq}} + \frac{1}{2} \right) (S_{\text{FF}}(\omega_0) - S_{\text{FF}}(-\omega_0)) \right] \quad (8.87)$$

Мы видим, что изменение энергии $\Delta\langle E \rangle$ в общем случае *не* пропорционально симметризованной спектральной плотности $\bar{S}_{\text{FF}}(\omega_0)$ (т.е. схема “фильтр плюс диод” не измеряет просто симметризованную плотность квантового шума. Это отражает лишь тот факт, что связь резонатора с источником шума проявляется двояко: изменяет затухание и увеличивает среднюю энергию. Как это следует из (8.87), для того, чтобы этот анализатор спектра измерял симметризованную часть спектральной плотности, требуется выполнение условия:

$$\frac{\mathbf{n}_{\text{eq}}\gamma_0 + \mathbf{n}_{\text{eff}}\gamma}{\gamma + \gamma_0} \gg \mathbf{n}_{\text{eq}}, \quad \text{или } \mathbf{n}_{\text{eff}} \gg \mathbf{n}_{\text{eq}}. \quad (8.88)$$

Очевидно, что в квантовом случае, когда $\mathbf{n}_{\text{eff}} \ll 1$, это условие выполнить практически невозможно.

8.5.2 “Фильтр плюс фотоумножитель”

Рассмотрим фотоумножитель с узкополосным фильтром перед ним. Его средний ток равен:

$$\langle I \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |f(\omega)|^2 r(\omega) S_{VV}(\omega), \quad (8.89)$$

где f — коэффициент передачи фильтра (по амплитуде), $r(\omega)$ описывает отклик фотоумножителя на частоте ω , а S_{VV} — спектральная плотность электрического поля волны, падающей на детектор. Обычно предполагают, что ток фотоумножителя пропорционален квадрату поля падающей волны, т.е. оптической мощности. Однако в соответствии с теорией идеального детектирования [31, 32, 33], фототок присутствует только если фотон поглощается детектором (выбивая электрон). Глаубер описывает это в терминах нормального упорядочения операторов корреляционной функции падающего поля. На нашем языке положительных и отрицательных частот это соответствует тому, что $r(\omega > 0) = 0$. В приближении узкой полосы фильтра вокруг средней частоты $\pm\omega_0$ уравнение (8.16) дает:

$$\langle I \rangle = r[-\omega_0] S_{VV}[-\omega_0] \quad (8.90)$$

Таким образом, в этой реализации квантового спектрометра измеряется спектральная плотность только на отрицательных частотах. Это также означает, что “вакуумный шум” не может быть зарегистрирован в этой схеме. Конечно, реаль-

ный фотоумножитель имеет конечную квантовую эффективность и ненулевой темновой ток. Кроме того, мы предполагаем отсутствие дополнительных шумов в фильтре. Таким образом наш результат совпадает с результатом для схемы “фильтр плюс диод” (ср. (8.87) в пределе нулевой температуры (т.е. $n_{\text{eq}} = 0$)).

8.5.3 Гетеродинная схема: две гармоники

Спектрометры, работающие в радио и СВЧ диапазоне содержат гетеродин для понижения частоты, на которой измеряется сигнал или шум. Рассмотрим схему со смесителем, которая смешивает напряжение опорной волны с входным сигналом на верхней частоте $\omega_u = \omega_{\text{LO}} + \omega_{\text{IF}}$ и нижней частоте $\omega_l = \omega_{\text{LO}} - \omega_{\text{IF}}$, чтобы в результате регистрировать напряжение на частоте ω_{IF} . Это может быть описано гамильтонианом, в котором присутствует член, перемешивающий три частоты. В приближении волн вращающейся поляризации это есть

$$V = \lambda[\hat{a}_{\text{IF}}\hat{a}_l\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger + \hat{a}_{\text{IF}}^\dagger\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_{\text{LO}}] + \lambda[\hat{a}_{\text{IF}}^\dagger\hat{a}_u\hat{a}_{\text{LO}}^\dagger + \hat{a}_{\text{IF}}\hat{a}_u^\dagger\hat{a}_{\text{LO}}] \quad (8.91)$$

Здесь присутствуют два процесса (с сохранением энергии), которые приводят к появлению фотона на частоте ω_{IF} , который затем регистрируется фотодетектором. Первый — это поглощение фотона опорного генератора (ω_{LO}) и излучение двух фотонов на частотах ω_{IF} и ω_l . Второй процесс — поглощение фотона на частоте ω_u и рождение двух фотонов

на частотах ω_{IF} и ω_{LO} . Таким образом ток фотоумножителя, регистрирующего фотоны на частоте ω_{IF} будет пропорционален следующей сумме спектральных плотностей

$$I \propto S[+\omega_l] + S[-\omega_u], \quad (8.92)$$

поскольку появление регистрируемого фотона на частоте ω_{IF} сопровождается или поглощением фотона ω_l , или излучением фотона ω_u в смесителе. В пределе малых частот $\omega_{\text{IF}} \ll \omega_{\text{LO}}$ это выражение сводится к симметризованной спектральной плотности

$$I \propto S[+\omega_{\text{LO}}] + S[-\omega_{\text{LO}}] = 2\bar{S}[\omega_{\text{LO}}], \quad (8.93)$$

что соответствует “классическому” анализатору спектра с квадратичным детектором, описанным в разделе 8.2. В частности, для спектральной плотности равновесного шума от сопротивления R_0 это есть

$$S_{\text{W}}[\omega] + S_{\text{W}}[-\omega] = 2R_0\hbar|\omega|[2n_{\text{T}}(\hbar|\omega|) + 1], \quad (8.94)$$

Если входное сопротивление анализатора достаточно велико (больше R_0), именно этот спектр напряжения будет зарегистрирован. Причем эта симметризованная спектральная плотность будет зарегистрирована и пределе нулевых температур, когда будет измеряться вакуумный шум. Этот вакуумный шум был измерен экспериментально [34].

8.5.4 Гетеродинная схема: одна гармоника

С помощью соответствующего фильтрования (и достаточно большой частоты ω_{IF}) можно выделить одну из гармоник и, следовательно, оставить только один член (8.92). Таким образом можно измерять шум либо на отрицательных, либо на положительных частотах.

Например, рассмотрим схему накачиваемого лазером резонатора Фабри-Перо, одно из зеркал которого подвижно и представляет собой механический резонатор частоты ω_M . Пусть накачка лазера ω_L сдвинута от резонансной частоты ω_{FP} ФП резонатора в красную область приблизительно на механическую частоту: $\omega_L = \omega_0 - \omega_M$. Тогда в отраженном от ФП резонатора свете появятся фотоны на комбинационных частотах, основными из которых будут $\omega_L \pm \omega_M$. Но анти-стоксова гармоника на частоте $\omega_L + \omega_M$ будет усилена, поскольку совпадет с резонансной частотой ω_{FP} , тогда как стоксова гармоника $\omega_L - \omega_M$ будет подавлена (не попадает в резонанс). Таким образом, выходной сигнал после детектирования на частоте ω_M будет содержать информацию о спектральной плотности механических колебаний на отрицательной частоте. Очевидно, что смещая частоту лазера в голубую область, можно измерять спектральную плотность механических колебаний на положительной частоте.

Приложение А

Матрицы Паули

Имеем 3 матрицы Паули, описывающие спин электрона:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Их собственные вектора удовлетворяют уравнению, например, для x -компоненты:

$$|\mathbf{x}\rangle = \lambda \sigma_x \cdot |\mathbf{x}\rangle$$

Нетрудно найти, что $\lambda = \pm 1$, а собственные вектора следующие:

$$|\mathbf{x}_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{x}_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$|\mathbf{y}_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{y}_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Здесь индекс $+$ соответствует $\lambda = 1$, а индекс $-$ соответствует $\lambda = -1$.

Эти вектора ортонормированы и попарно ортогональны:

$$\langle x_+ | x_+ \rangle = \langle x_- | x_- \rangle = 1, \quad \langle x_- | x_+ \rangle = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\langle y_+ | y_+ \rangle = \langle y_- | y_- \rangle = 1, \quad \langle y_- | y_+ \rangle = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\langle z_+ | z_+ \rangle = \langle z_- | z_- \rangle = 1, \quad \langle z_- | z_+ \rangle = 0. \quad (\text{A.9})$$

Таким образом каждая пара образует базис в пространстве состояний.

A.1 Амплитуды вероятностей

Пусть, к примеру, спин направлен по оси z , т.е. электрон находится в состоянии $|z_+\rangle$. Тогда можно найти амплитуды вероятности того, что при измерении проекции спина вдоль оси x я получу значение $+1$ или -1 :

$$\langle x_+ | z_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle x_- | z_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.10})$$

Полезно выписать полную таблицу:

$$\langle x_+ | z_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle x_- | z_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.11a})$$

$$\langle y_+ | z_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle y_- | z_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.11b})$$

$$\langle x_+ | z_- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle x_- | z_- \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.11c})$$

$$\langle y_+ | z_- \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}, \quad \langle y_- | z_- \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.11d})$$

A.2 Оператор σ_ϕ

Найдем собственные вектора оператора

$$\sigma_\phi = \sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi,$$

который соответствует повороту спина на угол ϕ в плоскости $xу$.

Нетрудно получить, что собственные значения равны $\lambda \pm 1$ и равны

$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad |\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

Здесь индекс $+$ соответствует $\lambda = 1$, а индекс $-$ соответствует $\lambda = -1$.

Полезно выписать полную таблицу для проекций этого состояния на ось z :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_+ | z_+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \langle \Phi_- | z_+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & (\text{A.13}) \\ \langle \Phi_+ | z_- \rangle &= \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}, & \langle \Phi_- | z_- \rangle &= \frac{-e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Приложение В

2 частицы со спином

Рассмотрим примеры перепутанных состояний (entangled states) двух частиц A и B и рассчитаем для них амплитуды вероятностей результатов измерений различных парных компонент спинов.

В.1 Кот Шредингера (КШ+)

Пусть мы имеем перепутанное состояние КШ+ типа “Кот Шредингера” :

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B\rangle \quad (\text{В.1})$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов обеих частиц имеем

$$\langle z_+^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{В.2})$$

$$\langle z_+^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0. \quad (\text{В.3})$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя

x -проекцию спина я получу в результате либо $(++)$, либо $(--)$, либо $(+-)$, либо $(-+)$?

Используя таблицу (A.11), получаю

$$\begin{aligned}\langle x_+^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle x_-^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}\langle x_+^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{B.5}$$

Аналогично для y -компоненты:

$$\begin{aligned}\langle y_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(i)^2}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0 \\ \langle y_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0,\end{aligned}\tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}\langle y_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle y_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{B.7}$$

Эти результаты могут быть качественно описаны следующей “фазовой” диаграммой на рис. B.1:

Перекрестные амплитуды вероятности:

$$\begin{aligned}\langle x_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{-i}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}, \\ \langle x_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1-i}{2\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{B.8}$$

$$\langle x_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1+i}{2\sqrt{2}},\tag{B.9}$$

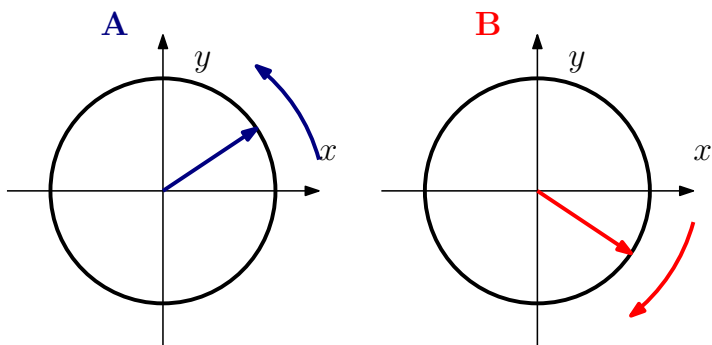


Рис. В.1: Эта диаграмма для КШ+ может быть объяснена следующим образом. x - и y - компоненты спина каждой частицы распределены случайно, НО они коррелированы между собой, как показано на диаграмме.

$$\langle x_{-}^A y_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{B.10})$$

В.1.1 Амплитуды для состояний Φ_{\pm}

Для справки выпишем амплитуды вероятности для состояний Φ_{\pm} :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{+}^A \Phi_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(-e^{-i\phi})^2}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \quad (\text{B.11}) \\ &= \frac{1 + e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\langle \Phi_{-}^A \Phi_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{B.12})$$

$$\langle \Phi_{+}^A \Phi_{-}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_{-}^A \Phi_{+}^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{B.13})$$

Выпишем также перекрестные амплитуды

$$\langle \Phi_+^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{e^{-i\phi}}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \quad (\text{B.14})$$

$$= \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{B.15})$$

$$\langle \Phi_+^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{B.16})$$

В.2 КШ–

Пусть мы имеем другое перепутанное состояние КШ– того типа “Кота Шредингера”, отличающееся от (B.1) только знаком:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B\rangle \quad (\text{B.17})$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов обеих частиц имеем

$$\langle z_+^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.18})$$

$$\langle z_-^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.19})$$

$$\langle z_+^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0. \quad (\text{B.20})$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя x -проекцию спина я получу в результате либо $(++)$, либо

(--), либо (+-), либо (-+)?

Используя таблицу (A.11), получаю

$$\begin{aligned}\langle x_+^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0,\end{aligned}\tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}\langle x_+^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle x_-^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{B.22}$$

Аналогично для y -компоненты:

$$\begin{aligned}\langle y_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(i)^2}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle y_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}\langle y_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{|i|^2}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0, \\ \langle y_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{B.24}$$

Эти результаты могут быть качественно описаны фазовой диаграммой на рис. B.2:

Перекрестные амплитуды вероятности:

$$\begin{aligned}\langle x_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{-i}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}, \\ \langle x_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1+i}{2\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{B.25}$$

$$\langle x_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1-i}{2\sqrt{2}},\tag{B.26}$$

$$\langle x_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}.\tag{B.27}$$

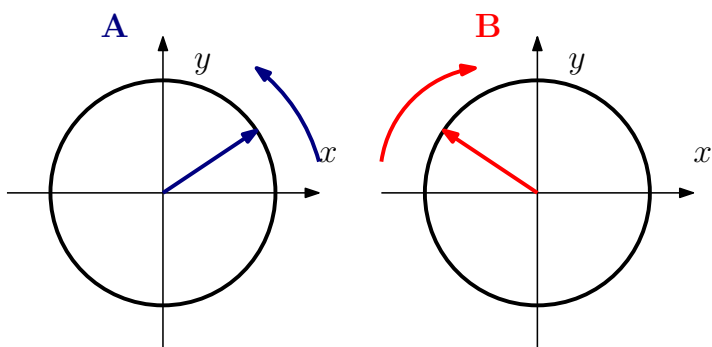


Рис. В.2: КШ-. x - и y - компоненты спина каждой частицы распределены случайно, НО они коррелированы между собой, как показано на диаграмме.

Важно, что при измерении x -проекции спина вероятность получить результат $(+-)$ или $(-+)$ равна нулю а вероятности результатов $(++)$ или $(--)$ равны $1/2$ каждая для состояния шредингеровского кота (В.1). Наоборот, для другого состояния шредингеровского кота (В.17) вероятность получить результат $(++)$ или $(--)$ равна нулю, а вероятности результатов $(+-)$ или $(-+)$ равны $1/2$ каждая. Это является чисто *квантовым эффектом*, связанным с перепутыванием. С точки зрения классической теории очевидно, что вероятности получить при измерении x -проекции результаты $(++)$, $(--)$, $(+-)$ и $(-+)$ равновероятны для обоих состояний (В.1) и (В.17).

В.2.1 Амплитуды для состояний Φ_{\pm}

Для справки выпишем амплитуды вероятности для состояний Φ_{\pm} :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_+^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 - e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_-^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 - e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi_+^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 + e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_-^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 + e^{-2i\phi}}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{B.29}$$

Выпишем также перекрестные амплитуды

$$\begin{aligned}\langle \Phi_+^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{e^{-i\phi}}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \\ &= \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{B.30}$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},\tag{B.31}$$

$$\langle \Phi_+^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}.\tag{B.32}$$

В.3 Состояние ЕПР₊

Пусть мы имеем перепутанное состояние ЕПР₊ типа “Einstein-Podolsky-Rosen”:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_-^B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_+^B\rangle \quad (\text{B.33})$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов обеих частиц имеем

$$\langle z_+^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{B.34})$$

$$\langle z_+^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.35})$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя x -проекцию спина я получу в результате либо $(++)$, либо $(--)$, либо $(+-)$, либо $(-+)$?

Используя таблицу (A.11), получаю

$$\begin{aligned} \langle x_+^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle x_-^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle x_+^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Аналогично для y -компоненты:

$$\langle y_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.37})$$

$$\langle y_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.38})$$

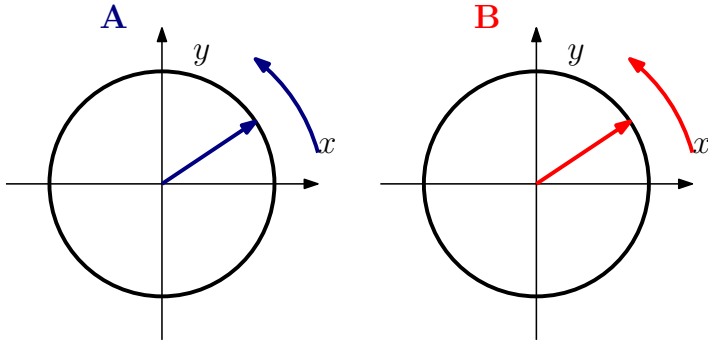


Рис. В.3: EPR+. x - и y -компоненты спина каждой частицы распределены случайно, НО они коррелированы между собой, как показано на диаграмме.

$$\langle \mathbf{y}_+^A \mathbf{y}_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{B.39})$$

$$\langle \mathbf{y}_-^A \mathbf{y}_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0. \quad (\text{B.40})$$

Эти результаты могут быть качественно описаны следующей фазовой диаграммой на рисю **В.3**:

Перекрестные амплитуды вероятности:

$$\langle \mathbf{x}_+^A \mathbf{y}_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{B.41})$$

$$\langle \mathbf{x}_-^A \mathbf{y}_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1+i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{B.42})$$

$$\langle \mathbf{x}_+^A \mathbf{y}_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{B.43})$$

$$\langle \mathbf{x}_-^A \mathbf{y}_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1-i}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{B.44})$$

В.3.1 Амплитуды для состояний Φ_{\pm}

Для справки выпишем амплитуды вероятности для состояний Φ_{\pm} :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_+^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_-^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{B.45}$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi_+^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0, \\ \langle \Phi_-^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{B.46}$$

Выпишем также перекрестные амплитуды

$$\begin{aligned}\langle \Phi_+^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_-^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{-1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{B.47}$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi_+^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{-1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \\ \langle \Phi_-^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle &= \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}\tag{B.48}$$

В.4 Состояние ЕПР–

Пусть мы имеем перепутанное состояние ЕПР–, отличающееся от (B.33) только знаком:

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_-^B\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_+^B\rangle\tag{B.49}$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов обеих частиц имеем

$$\langle z_+^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \langle z_-^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{B.50})$$

$$\langle z_+^A z_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.51})$$

$$\langle z_-^A z_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.52})$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя x -проекцию спина я получу в результате либо $(++)$, либо $(--)$, либо $(+-)$, либо $(-+)$?

Используя таблицу (A.11), получаю

$$\langle x_+^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = 0,$$

$$\langle x_-^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0 \quad (\text{B.53})$$

$$\langle x_+^A x_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{-1}{(\sqrt{2})^2} \right\} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle x_-^A x_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.54})$$

Аналогично для y -компоненты:

$$\langle y_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{B.55})$$

$$\langle y_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{B.56})$$

$$\langle y_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.57})$$

$$\langle y_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.58})$$

Эти результаты могут быть качественно описаны следующей фазовой диаграммой на рис. B.4:

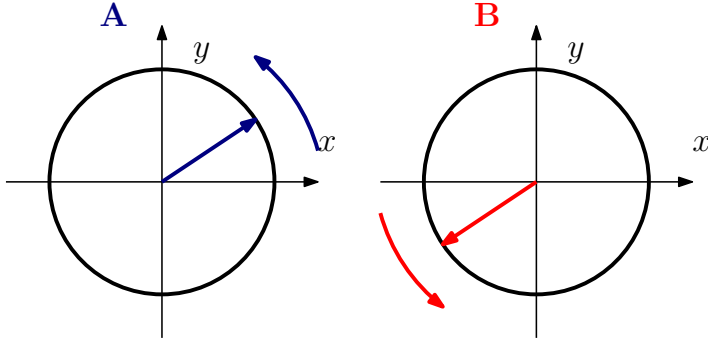


Рис. В.4: EPR–. x - и y -компоненты спина каждой частицы распределены случайно, НО они коррелированы между собой, как показано на диаграмме.

Перекрестные амплитуды вероятности:

$$\langle x_+^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1 - i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{В.59a})$$

$$\langle x_-^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{В.59b})$$

$$\langle x_+^A y_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1 + i}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{В.59c})$$

$$\langle x_-^A y_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - i}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{В.59d})$$

Опять, как и для состояний типа шредингеровских котов, для состояний типа EPR при измерении x -проекции спина вероятность получить результат $(+-)$ или $(-+)$ равна нулю а вероятности результатов $(++)$ или $(--)$ равны $1/2$ каждая для EPR+ состояния (В.33). Наоборот, для другого EPR– состояния (В.49) вероятность получить результат $(++)$ или $(--)$ равна нулю, а вероятности результатов $(+-)$ или $(-+)$ равны $1/2$ каждая. Это является чисто квантовым эффектом, связанным с перепутыванием. С

точки зрения классической теории очевидно, что вероятности получить при измерении χ -проекции результаты $(++)$, $(--)$, $(+-)$ и $(-+)$ равновероятны для обоих состояний (В.33) и (В.49).

В.4.1 Амплитуды для состояний Φ_{\pm}

Для справки выпишем амплитуды вероятности для состояний Φ_{\pm} :

$$\langle \Phi_+^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{В.60a})$$

$$\langle \Phi_-^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = 0, \quad (\text{В.60b})$$

$$\langle \Phi_+^A \Phi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{В.60c})$$

$$\langle \Phi_-^A \Phi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{В.60d})$$

Выпишем также перекрестные амплитуды

$$\langle \Phi_+^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}, \quad (\text{В.60e})$$

$$\langle \Phi_+^A \chi_-^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{-1 - e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\langle \Phi_-^A \chi_+^B | \Psi_{AB} \rangle = \frac{1 + e^{-i\phi}}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{В.60f})$$

Приложение С

3 ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ

Рассмотрим примеры перепутанных состояний (entangled states) трех частиц **A**, **B**, **C** и рассчитаем для них амплитуды вероятностей результатов измерений различных парных компонент спинов.

С.1 Состояние GHZ_+

Пусть мы имеем состояние GHZ_+ (Greenberg-Horne-Zeulinger) (это похоже на “тройного кота Шредингера”), упомянутое в [35] (гл. 3):

$$|\Psi_{\text{ABC}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^{\text{A}} z_+^{\text{B}} z_+^{\text{C}}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^{\text{A}} z_-^{\text{B}} z_-^{\text{C}}\rangle \quad (\text{C.1})$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов трех частиц имеем

$$\begin{aligned} \langle z_+^{\text{A}} z_+^{\text{B}} z_+^{\text{C}} | \Psi_{\text{ABC}} \rangle &= \langle z_-^{\text{A}} z_-^{\text{B}} z_-^{\text{C}} | \Psi_{\text{ABC}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle z_+^{\text{A}} z_+^{\text{B}} z_-^{\text{C}} | \Psi_{\text{ABC}} \rangle &= \langle z_+^{\text{A}} z_-^{\text{B}} z_+^{\text{C}} | \Psi_{\text{ABC}} \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\langle z_+^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle = \langle z_-^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0.$$

Вопрос: какова амплитуда вероятности того, что измеряя x -проекцию спина у всех трех частиц я получу в результате либо $(+++)$, либо $(++-)$, либо $(+-+)$, либо $(+--)$? Это соответствует комбинации детекторов T_1 в [35].

Используя таблицу (A.11), получаю

$$\begin{aligned} \langle x_+^A x_+^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_+^A x_+^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_+^A x_-^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0, \\ \langle x_+^A x_-^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Это совпадает с результатами, приведенными в [35] без доказательства.

Однако амплитуды вероятности измерения x -проекций вида $(---)$, либо $(-+-)$, либо $(-+-)$, либо $(-++)$ прямо противоположны:

$$\begin{aligned} \langle x_-^A x_-^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A x_+^B x_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A x_-^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A x_+^B x_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{(-1)^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Теперь посчитаем амплитуды вероятностей, соответствующие конфигурации детекторов T_2 в [35]. Используя таблицу (A.11), получаю первую серию (x_+^A):

$$\begin{aligned}\langle x_+^A y_+^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_+^A y_+^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{(-i)^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_+^A y_-^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{-i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_+^A y_+^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Аналогично для второй серии (x_-^A):

$$\begin{aligned}\langle x_-^A y_+^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{-i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A y_-^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}, \\ \langle x_-^A y_-^B y_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} + \frac{i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle x_-^A y_+^B y_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

C.2 Состояние GHZ $-$

Пусть мы имеем состояние GHZ $-$, отличающееся от (C.1) только знаком:

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B z_+^C\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B z_-^C\rangle \quad (C.3)$$

Очевидно, что для измерений z -компоненты спинов трех частиц имеем

$$\begin{aligned}\langle z_+^A z_+^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle z_-^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle z_+^A z_+^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \langle z_+^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0, \\ \langle z_+^A z_-^B z_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \langle z_-^A z_-^B z_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = 0.\end{aligned}$$

Используя таблицу (A.11), получаю для комбинации детекторов T_1 в [35] с χ_+^A :

$$\begin{aligned}\langle \chi_+^A \chi_+^B \chi_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle \chi_+^A \chi_+^B \chi_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle \chi_+^A \chi_-^B \chi_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}, \\ \langle \chi_+^A \chi_-^B \chi_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0\end{aligned}$$

Амплитуды вероятности измерения χ -проекций вида $(- - -)$, либо $(- + -)$, либо $(- + -)$, либо $(- + +)$ прямо противоположны:

$$\begin{aligned}\langle \chi_-^A \chi_-^B \chi_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{-1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle \chi_-^A \chi_+^B \chi_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle \chi_-^A \chi_-^B \chi_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0,\end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{x}_-^A \mathbf{x}_+^B \mathbf{x}_+^C | \Psi_{ABC} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{(-1)^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Теперь посчитаем амплитуды вероятностей, соответствующие конфигурации детекторов \mathbf{T}_2 в [35]. Используя таблицу (A.11), получаю первую серию (\mathbf{x}_+^A):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_+^A \mathbf{y}_+^B \mathbf{y}_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle \mathbf{x}_+^A \mathbf{y}_-^B \mathbf{y}_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{(-i)^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle \mathbf{x}_+^A \mathbf{y}_-^B \mathbf{y}_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle \mathbf{x}_+^A \mathbf{y}_+^B \mathbf{y}_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично для второй серии (\mathbf{x}_-^A):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_-^A \mathbf{y}_+^B \mathbf{y}_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{-i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = 0, \\ \langle \mathbf{x}_-^A \mathbf{y}_-^B \mathbf{y}_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{x}_-^A \mathbf{y}_-^B \mathbf{y}_+^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2})^3} - \frac{i^2}{(\sqrt{2})^3} \right\} = \frac{1}{2}, \\ \langle \mathbf{x}_-^A \mathbf{y}_+^B \mathbf{y}_-^C | \Psi_{ABC} \rangle &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приложение D

Задачи

1. Связанные осцилляторы. Для связанных осцилляторов, описываемыми гамильтонианом (1.4), доказать формулы (1.8).
2. Коммутаторы σ_i .
Доказать формулу (1.17).
3. Антисимметричные коммутаторы σ_i .
Доказать формулу (1.18).
4. Собственные значения σ_x .
Найти собственные значения и собственные состояния оператора σ_x .
5. Собственные значения σ_y .
Найти собственные значения и собственные состояния оператора σ_y .
6. Таблица амплитуд вероятностей
Вычислить таблицу амплитуд вероятностей (A.11).

7. Собственные значения Φ .
Найти собственные состояния и собственные значения оператора $\Phi = \sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi$.
8. Амплитуды вероятностей с σ_{\pm} .
Доказать соотношения для амплитуд вероятностей (1.20).
9. Атом в классическом нерезонансном поле.
Рассчитать зависимость населенностей двухуровневого атома в *нерезонансном* классическом поле. Считать, что частоты атома и поля близки $\omega_a = \omega_e + \delta$, $\delta \ll \omega_e$. Первоначально атом находился в нижнем состоянии $|z_{-}\rangle$.
10. Атом в классическом поле: “антирезонанс”.
На атом действует резонансное классическое поле. Его начальные условия (1.37). Найти, при каких значениях фазы ϕ населенности $|\chi_{\pm}|^2$ будут оставаться постоянными, несмотря на действие резонансного поля. Построить графики зависимости населенностей от времени при различных значениях ϕ . Пояснить физический смысл полученного результата.
11. Атом в квантовом поле.
Рассчитать зависимость населенностей двухуровневого атома в квантовом резонаторе. Считать, что частоты атома и резонатора близки $\omega_a = \omega_e + \delta$, $\delta \ll \omega_e$. Пер-

воначально атом находился в нижнем состоянии $|z_-\rangle$, а резонатор – в состоянии $|1\rangle$.

12. Атом в квантовом поле 2.

Рассчитать зависимость населенностей двухуровневого атома в квантовом резонаторе. Считать, что частоты атома и резонатора близки $\omega_a = \omega_e + \delta$, $\delta \ll \omega_e$. Первоначально атом находился в нижнем состоянии $|z_+\rangle$, а резонатор – в состоянии $|n\rangle$.

13. Парадокс Зенона для двухуровневой системы. Вывести уравнения эволюции двухуровневой системы (2.26) под действием внешней силы и под действием постоянно действующего измерителя $\hat{\sigma}_z$ при различной точности измерения. Из системы (2.26) вывести уравнение (2.27) второго порядка для ρ_z . Найти его решение и графики населенностей для случая, когда в начальный момент система была в нижнем состоянии.

Указание. Для упрощения (2.26) ввести медленные амплитуды $\rho_{\pm} = e^{\mp i\omega_0 t} r_{\pm}$, их подставить в (2.26) и отбросить быстро осциллирующие члены. Полученную систему свести к уравнению (2.27). См. также пояснения в разделе 2.3.

14. Сумматор.

На рис. 3.6 представлена схема простейшего сумматора. Представьте схему сумматора, когда на вход пода-

ются числа (\mathbf{ab}) и (\mathbf{cd}) , записанные в двоичной системе (т.е. \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} принимают значения 0, 1).

15. Энтропия фон Неймана.

Найти энтропию Неймана для состояния двухуровневой частицы, описываемого матрицей плотности:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

16. Бомбовый парадокс.

Рассчитать сколько исправных бомб будет взорвано, сколько исправных бомб будет причислено к классу неисправных для случая когда полупрозрачные зеркала интерферометра Маха-Цандера (см. рис. 4.1) имеют равные коэффициенты пропускания, но не равные 50%. Считать, что при фиксированном положении зеркала В фотоны регистрируются детектором Ц.

17. Интерферометр с отдачей.

Используя результаты раздела 4.5 вывести формулу (4.32).

18. Парадокс ЭПР.

Доказать, что синглетное ЭПР-состояние (5.5) инвариантно к представлению, т.е. может быть записано в виде

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x_+^A x_-^B\rangle - |x_-^A x_+^B\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|y_+^A y_-^B\rangle - |y_-^A y_+^B\rangle \right) \quad (\text{D.2})$$

19. Неравенство Белла. Квантовые случаи

Доказать формулу (5.10).

Указание: использовать Приложение В.

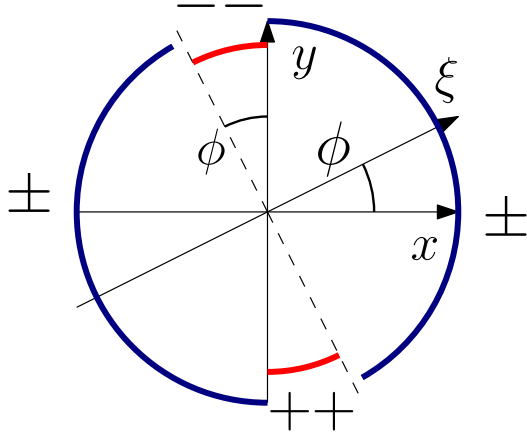


Рис. D.1: К задаче 20.

20. Неравенство Белла. Классический случай

Доказать формулу (5.11) для квазиклассических рассуждений.

Указание: использовать Приложение В. Возможно, будет полезен рис. D.1.

21. 3 частицы в перепутанном состоянии

3 частицы находятся в состоянии GHZ+ (Greenberg-Horne-Zeulinger)

$$|\Psi_{ABC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_+^A z_+^B z_+^C\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |z_-^A z_-^B z_-^C\rangle \quad (D.3)$$

Это состояние отличается знаком от рассмотренного в тексте состояния GHZ− (5.12). Измеряются проекции каждой частицы на ось y .

Рассчитать вероятности того, что все три частицы окажутся в состоянии $|\mathbf{y}_+\rangle$ или все в состоянии $|\mathbf{y}_-\rangle$.

Рассчитать вероятности того, что две частицы окажутся в состоянии $|\mathbf{y}_+\rangle$, а одна — в состоянии $|\mathbf{y}_-\rangle$ (и наоборот).

22. Интерферометр Маха-Цандера как квантовый гейт

В *вертикальный* входной канал интерферометра Маха-Цандера (рис.7.1) поступает фотон. а) Найти выходное состояние света (после 2-ого светоделителя). б) Описать действие интерферометра как последовательность квантовых гейтов подобно (7.20), считая, что фотон в вертикальном канале на входе соответствует кубиту в состоянии $|1\rangle$.

Литература

- [1] К. Шеннон, *Работы по теории информации и кибернетике*. Иностранная Литература, 1963.
- [2] И. фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*. Наука, 1974.
- [3] A. Elitzur and L. Vaidman, “Quantum mechanical interaction free measurements,” *Foundations of Physics*, vol. 23, no. 7, p. 987, 1993.
- [4] S. Eibenberger, “Matter-wave interference with particles selected from a molecular library with masses exceeding 10000 amu,” *Physical Chemistry Chemical Physics journal*, vol. 15, no. 35, p. 14696–14700, 2013.
- [5] P. Kwiat, H. Weinfurter, and A. Z. Thomas Herzog, “Interaction-Free Measurement,”
- [6] A. White, J. Mitchell, O. Nairz, and P. Kwiat, ““Interaction-free” imaging,” *Physical Review A*, vol. 58, p. 605–613, 1998.
- [7] P. Kwiat, A. White, J. Mitchell, O. Nairz, G. Weihs,

- H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “High-efficiency quantum interrogation measurements via the quantum Zeno effect,” *Physical Review Letters*, vol. 83, p. 4725–4728, 1999.
- [8] С.П. Вятчанин и Ф.Я. Халили, “Измерение “без взаимодействия”: возможности и ограничения,” *УФН*, vol. 174, no. 7, p. 765–777, 2004.
- [9] M. Scully, B.-G. Englert, and H. Walther, “Quantum optical tests of complementarity,” *Nature*, vol. 351, p. 111–116, 1991.
- [10] V.B.Braginsky, F.Ya.Khalili, *Quantum Measurement*. Cambridge University Press, 1992.
- [11] C. Hood, H. J. Kimble, and J. Ye, “Characterization of high-finesse mirrors: Loss, phase shifts, and mode structure in an optical cavity,” *Physical Review A*, vol. 64, p. 033804, 2001.
- [12] P. Bertet, S. Osnaghi, A. Rauschenbeutel, G. Nogues, A. Auffeves, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, “A complementarity experiment with an interferometer at the quantum classical boundary,” *Nature*, vol. 411, p. 166, 2001.
- [13] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, and U. Hoff, “Quantum jumps of light recording the birth and

- death of a photon in a cavity,” *Nature*, vol. 446, p. 297, 2007.
- [14] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?,” *Physical Review*, vol. 47, p. 777, 1935.
- [15] Бом, *Квантовая теория*. Физматгиз, 1961.
- [16] J. Bell *Physics*, vol. 15, p. 195, 1964.
- [17] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger *Physical Review Letters*, vol. 49, p. 1804, 1982.
- [18] А.В. Белинский and Д.Н. Клышко *УФН*, vol. 163, no. 8, p. 14696–14700, 1993.
- [19] К. А. Валиев and А. А. Кокин, *Квантовые компьютеры: надежды и реальность*. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- [20] Э. Стин, *Квантовые вычисления*. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
- [21] T. C. Zhang, K. W. Goh, C. W. Chou, P. Lodahl, and H. J. Kimble, “Quantum teleportation of light beams,” *Physical Review A*, vol. 67, p. 033802, 2003.
- [22] R. Cleve, A. Ekkert, C. Macchiavello, and M. Mosca, “Quantum Algorithms Revisited,” *Proceedings of the Royal*

- Society of London. Series A*, vol. 454, no. 1969, p. 339–354, 1998. arXiv quant-ph/9708016 (1997).
- [23] A. Clerk, M. Devoret, S. Girvin, F. Marquardt, and R. Schoelkopf, “Introduction to quantum noise, measurement, and amplification,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, p. 1155, 2010.
- [24] G. Lesovik and R. Loosen *JETP Lett*, vol. 65, p. 295, 1997.
- [25] U. Gavish, Y. Levinson, and Y. Imry *Physical Review B*, vol. 62, p. 10637, 2000.
- [26] R. Aguado and L. P. Kouwenhoven *Physical Review Letters*, vol. 84, p. 1986, 2000.
- [27] A. Naik, O. Buu, M. LaHaye, A. Armour, A. Clerk, M. Blencowe, and K. Schwab *Nature*, vol. 443, p. 193, 2006.
- [28] H. Callen and T. Welton, “Irreversibility and generalized noise,” *Physical Review*, vol. 83, p. 34–40, 1951.
- [29] R. Deblock, E. Onac, L. Gurevich, and L. P. Kouwenhoven *Science*, vol. 301, p. 203, 2003.
- [30] E. Onac, F. Balestro, B. Trauzettel, C. F. J. Lodewijk, and L. P. Kouwenhoven *Physical Review Letters*, vol. 96, p. 026803, 2006.
- [31] R. Glauber *Review of Mod. Physics*, vol. 78, p. 1267, 2006.

- [32] D. Walls and G. Milburn, *Quantum Optics*. Springer, 1994.
- [33] C. Gardiner, *Quantum Noise*. Springer, 2000.
- [34] R. Schoelkopf, P. J. Burke, A. Kozhevnikov, D. Prober, and M. J. Rooks *Physical Review Letters*, vol. 78, p. 3370, 1997.
- [35] G. J. Milburn, *The Feynman Processor*. Perseus book, 1998.