



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

---

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

кафедра физики колебаний

### Свободное от флуктуационных смещений зеркал и от лазерных флуктуаций детектирование гравитационных волн при помощи двух интерферометров Фабри-Перо

Дипломная работа студента 6-го курса  
Рахубовского Андрея Андреевича

Допущен к защите « » декабря 2008 года

Научный руководитель

Зав. кафедрой физики колебаний  
профессор

доктор физ.-мат. наук  
профессор

А.С. Логгинов

С.П. Вятчанин

---

Москва 2008 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Обзор литературы</b>	<b>2</b>
2.1	Гравитационные антенны . . . . .	2
2.2	Детекторы, «свободные от смещений» . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Два интерферометра Фабри-Перо, накачиваемые с двух сторон</b>	<b>14</b>
3.1	Рассмотрение простейшей модели гравитационной антенны . . . . .	15
3.2	Схема используемой в работе гравитационной антенны . . . . .	17
3.3	Формализм описания распространения света при помощи комплексных амплитуд . . . . .	19
3.4	Расчеты комплексных амплитуд полей, падающих на детекторы . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Два интерферометра Фабри-Перо, установленные на двух платформах</b>	<b>22</b>
4.1	Амплитудное детектирование сигналов на выходе интерферометров . . . . .	22
4.2	Фазовое детектирование сигналов на выходе интерферометров . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Выводы</b>	<b>30</b>
	<b>Приложения</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>Получение выражений для фазовых множителей</b>	<b>31</b>
<b>B</b>	<b>Расчет полей в интерферометре Фабри-Перо</b>	<b>32</b>
<b>C</b>	<b>Учет подвижности платформ</b>	<b>34</b>
<b>D</b>	<b>Расчет амплитудных квадратур</b>	<b>35</b>
<b>E</b>	<b>Исследование возможности исключения лазерных флуктуаций</b>	<b>36</b>
	<b>Литература</b>	<b>39</b>

# 1 Введение

Поиск гравитационного излучения (ГИ) является важной задачей, которая стоит перед наукой в настоящее время, и решение которой позволит существенно обогатить человеческие знания, в частности, в области Общей Теории Относительности (ОТО). Гравитационные волны (ГВ), согласно ОТО, это периодические возмущения метрики пространства-времени, распространяющиеся со скоростью света. Регистрация ГВ будет подтверждением справедливости ОТО в системах с сильными собственными гравитационными полями. Последующее наблюдение за ГВ позволит исследовать эффекты в телах, обладающих сильной собственной гравитацией по-новому: позволит с большой точностью изучать релятивистские эффекты в двойных системах, состоящих из нейтронных звезд и черных дыр; позволит исследовать геометрию искривленного пространства-времени черных дыр; позволит изучить сложный процесс слияния двух черных дыр или нейтронных звезд. Наблюдение ГВ, таким образом, является не столько самоцелью, а преследует интересы создания нового вида «телескопа», поскольку, наблюдая ГВ, можно наблюдать излучение от объектов, не излучающих электромагнитных колебаний. [1, 2]

Существование гравитационных волн следует непосредственно из ОТО и было предсказано самим Эйнштейном вскоре после создания им последней. ОТО допускает волновое решение для уравнений Эйнштейна, что соответствует гармоническим ГВ, распространяющимся со скоростью света. Действие ГВ состоит в возмущении метрики пространства-времени, что сводится к деформации пространства. ГВ «растягивает пространство» вдоль одной, «выбранной», оси и «сжимает» вдоль перпендикулярной. Возможны две поляризации ГВ, соответствующие повороту «выбранной» оси на  $45^\circ$  (см. рисунок 1); в общем случае реализуется суперпозиция этих двух случаев. Амплитудное изменение  $\Delta L$  расстояния  $L$  (соответствующего случаю отсутствия возмущения) между двумя точками под действием ГВ пропорционально амплитуде безразмерного возмущения метрики  $h$ , вносимого волной:  $\Delta L \simeq L \times h/2$ .

Возможны формы ГИ в виде квадрупольного излучения и излучений высшей мультипольности. Ввиду этого и малости константы гравитационного взаимодействия, мощность ГВ оказывается исчезающе мала для источников лабораторного масштаба. Поэтому детектирование ГВ долгое время представлялось экспериментаторам невозможным. Однако В.А. Фок предположил [3] возможность рассматривать тела астрофизических масштабов (сверхновые, нейтронные звезды, черные дыры и др.) в качестве источников ГВ. Такие источники, обладая большой массой, могут излучать ГВ достаточной мощности, чтобы их можно было детектировать в лаборатории. Ожидается, что от сигналы от взрывов сверхновых,

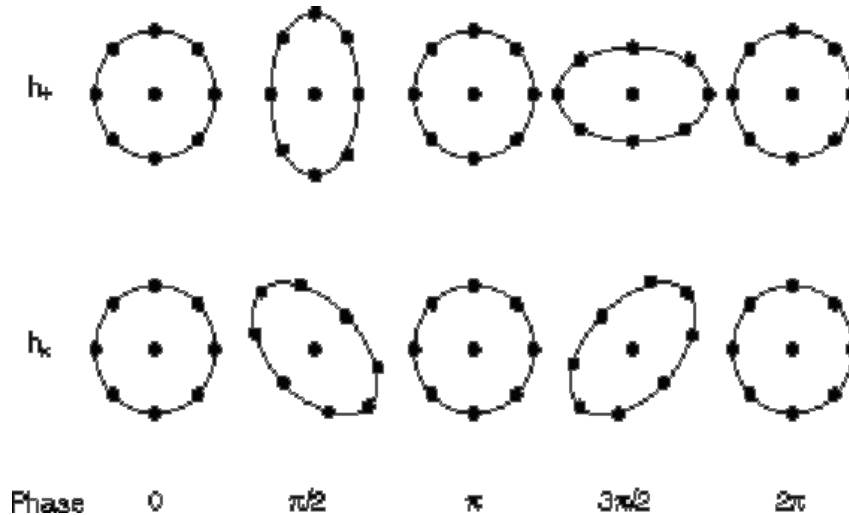


Рис. 1: Действие гравитационной волны на пространство, в котором она распространяется. Показаны два случая возможной поляризации — + («плюс», сверху) и × («крест», снизу)

поглощения тел черными дырами или слияний двойных систем будут иметь форму всплесков; сигналы от вращающихся нейтронных звезд или звезд в двойных системах будут иметь форму непрерывных волн. Кроме того, ожидается, что совокупность значительного количества некоррелированных событий создает стохастический фон излучения, который также планируется детектировать.

## 2 Обзор литературы

### 2.1 Гравитационные антенны

Первым из предложенных способов детектирования ГИ было использование твердотельных антенн. Идея создания твердотельных детекторов ГИ принадлежит Джозефу Веберу и датируется 1960-ми гг. [4, 5]. К т.н. последнему поколению твердотельных детекторов ГИ относят следующие антенны: AURIGA в Леньяро близ Падуи [6], NAUTILUS и EXPLORER, которыми оперирует римская группа [7], а также антенна ALLEGRO в Университете Луизианы [8]. Принцип работы этих детекторов основан на явлении деформации пробного твердого тела под действием падающей ГВ. Проявляющаяся малая деформация в дальнейшем регистрируется системой датчиков — производится преобразование деформации в электрический сигнал, который детектируется. В настоящее время типично помещение пробного тела в криокамеру, что позволяет с одной стороны существенно снизить тепловые шумы, а с другой — использовать сверхпроводящее оборудование с крайне

малыми собственными шумами. Рабочая температура всех упомянутых детекторов не превышает температуры жидкого гелия. Твердотельные детекторы являются резонансными и наиболее чувствительны на частотах, совпадающих с собственными частотами деформируемых ГВ пробных тел, что накладывает ограничения на размеры последних. Чувствительность таких детекторов имеет порядок  $10^{-21}$  Гц<sup>-1/2</sup> (корень из спектральной плотности шумов в единицах безразмерной метрики  $h$ ) в полосе частот шириной в несколько десятков герц [9].

Естественным развитием приборов для обнаружения ГИ является создание интерферометрических детекторов. В детекторах этого типа под влиянием падающей ГВ происходит изменение взаимного расположения деталей интерферометра, что приводит к изменению интерференционной картины на выходе. Впервые идею создания интерферометрической гравитационной антенны предложили советские физики М.Е. Герценштейн и В.И. Пустовойт в 1962 г. [10]. К первому поколению интерферометрических детекторов относят такие антенны, как LIGO в США [11, 12, 13, 14, 15], Virgo в Италии [16, 17, 19], GEO 600 в Германии [20, 21, 22, 23], TAMA 300 неподалеку от Токио, Япония [24, 25], и A3IGA в Австралии [26, 27].

Гравитационная обсерватория LIGO (сокращение от Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) включает в себя три антенны, каждая из которых представляет собой интерферометр Майкельсона. Воздействие ГИ на интерферометр предполагается определять по смещению его зеркал. В состав LIGO входит интерферометр с 4-км плечами, расположенный в обсерватории в Ливингстоне (LLO — Ligo Livingston Observatory) и два интерферометра — с 4- и 2-км плечами, расположенные в обсерватории в Хэнфорде (LHO — LIGO Hanford Observatory, обе — США). Естественно предположить, что флуктуационные сигналы, имеющие не интересующее ученых негравитационное происхождение, не могут появиться и быть задетектированными одновременно в двух обсерваториях (и в Ливингстоне, и в Хэнфорде). Поэтому использование нескольких антенн, существенно удаленных друг от друга, позволит определить, имеет ли зафиксированный сигнал гравитационную природу (в случае совпадения показаний разнесенных детекторов) или нет (в случае, если сигнал фиксируется только одним из детекторов). В тех же целях постоянно используется сотрудничество обсерваторий LIGO с другими обсерваториями.

Примерная схема интерферометрической гравитационной антенны приведена на рисунке 2. В каждом из плеч интерферометров Майкельсона установлены дополнительные зеркала, образующие интерферометры Фабри-Перо. Это позволяет увеличить время взаимодействия света с ГВ — среднее время жизни световой волны в плече составляет около 1 мкс, что соответствует примерно сотне проходов волны от одного зеркала до другого. В LIGO используются зеркала массой

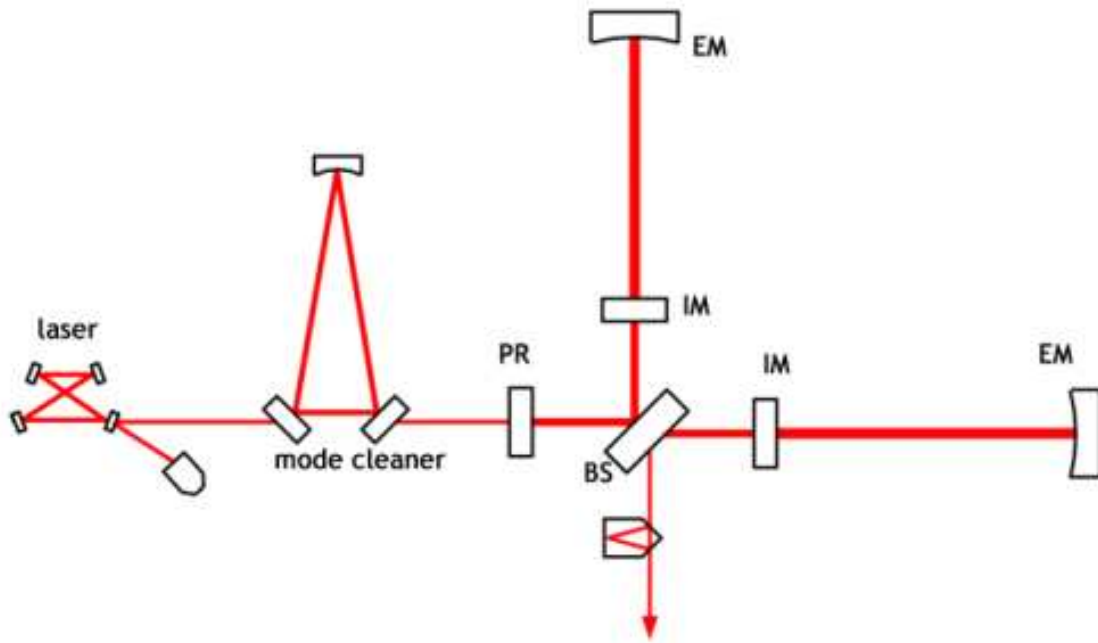


Рис. 2: Примерная схема интерферометрического детектора гравитационного излучения. Здесь laser — лазер накачки, mode cleaner — пространственный фильтр мод, PR — power recycling mirror, зеркало рециркуляции мощности, BS — светоделитель, IM и EM — соответственно, входные и дальние зеркала интерферометров Фабри-Перо.

10 кг на подвесах из стальных нитей. К отражающей способности зеркал, а также к малости оптического поглощения предъявляются высокие требования. Накачка интерферометра производится лазером (Nd:YAG с длиной волны 1064 нм) мощности 10 Вт в основной моде. Излучение лазера перед подачей на вход интерферометра стабилизируется по частоте и амплитуде и претерпевает пространственную фильтрацию моды при помощи треугольного резонатора. Пространственная фильтрация пропускает в интерферометр излучение только в основной пространственной моде  $TEM_{00}$

Интерферометр настраивается в режим «темного порта», т.е. разность плеч подбирается такой, чтобы на выходном порте интерферометра, сигнал с которого измеряется, был интерференционный минимум. Таким образом, все излучение отправляется обратно в сторону лазера, где устанавливается т.н. Power Recycling Mirror, зеркало рециркуляции мощности. При должном согласовании пропускания этого зеркала и потерь в интерферометре значительная часть излучения возвращается обратно в интерферометр. Это позволяет значительно (в несколько десятков раз) увеличить мощность света, циркулирующего в интерферометре. В свою очередь, этот

эффект позволяет управлять циркулирующей внутри интерферометра мощностью оптического излучения посредством относительно малого изменения мощности лазера накачки.

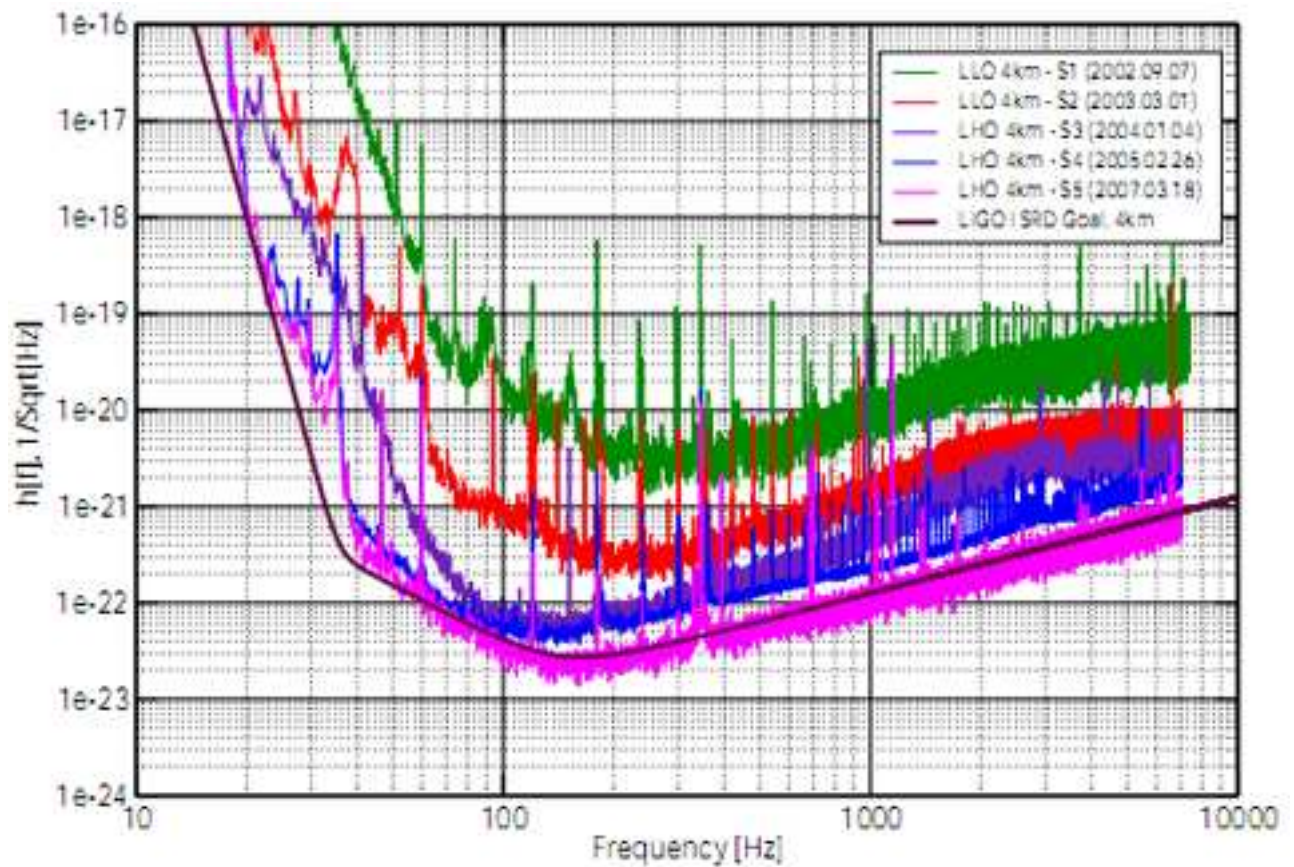


Рис. 3: Графики развития чувствительности антенн LIGO [11]

К пятому экспериментальному испытанию (т.н. «Science Run 5» или S5), который начался в ноябре 2005 г. и закончился в октябре 2007 г., продлившись таким образом почти два года, чувствительность антенн LIGO значительно превысила  $10^{-22}$  Гц $^{-1/2}$  в полосе частот шириной в несколько сотен Hz, достигая максимальной чувствительности порядка  $2 \times 10^{-23}$  Гц $^{-1/2}$ . Такая чувствительность соответствует возможностям, запланированным в проекте. Графики, отражающие постепенное улучшение чувствительности антенн во время различных испытаний, приведены на рисунке 3. Там же отмечена также проектная чувствительность (сплошной плавной линией). Графики имеют достаточно характерную форму, определяемую шумами, действующими в различных элементах конструкции антенн — зеркалах, подвесах, в лазерном излучении. На низких частотах (менее 30 Гц) форма графиков определяется, в основном, сейсмическими шумами, а на высоких — оптическим дробовым шумом.

Для обеспечения столь высоких точностей измерения смещений, которые

доступны LIGO, приходится использовать различные вспомогательные системы. Для правильного функционирования интерферометра необходима высокая точность позиционирования всех оптических элементов — пространственного (для сохранения режима «темного порта») и углового (для стабильности работы резонатора). В штатном режиме работы антенны мощность, циркулирующая в плечах интерферометра достигает десятков kW, поэтому даже относительно малое поглощение (порядка тысячных долей процента) приводит к существенному нагреванию зеркал и последующей деформации поверхностей, что, в свою очередь, влияет на характеристики оптической стабильности резонаторов, составляющих антенну. Дело в том, что нагревание зеркал происходит не равномерно, а в соответствии с профилем распределения мощности в профиле лазерного пучка, а именно основной TEM<sub>00</sub> моды. Для подавления этого эффекта, называемого также эффектом появления «тепловых линз», используют системы тепловой компенсации. Выбранные зеркала дополнительно подсвечиваются газовым (CO<sub>2</sub>) лазером через маску таким образом, чтобы в целом освещение зеркала по всей поверхности было бы однородным, вследствие чего и профиль нагревания должен также быть однороден.

Достижению высокой точности измерений мешают разнообразные флуктуации. На рисунке 4 представлен т.н. бюджет шумов в LIGO. Это график, на котором изображены спектральные плотности различных шумов. Данный график приведен для интерферометра H1 — четырехкилометровой антенны в Хэнфорде, однако для других антенн LIGO кривые аналогичны. По оси ординат отложены значения спектральной плотности действующих шумов, измеренные в м/Гц<sup>-1/2</sup>, что соответствует корню из спектральной плотности смещения зеркала, эквивалентного действию соответствующего шума.

Различные линии на графике 4 соответствуют следующим величинам. Линия DARM — измеренный уровень суммы всех шумов, действующих в интерферометре, SRD — проектный уровень чувствительности, Total — суммарная величина всех известных флуктуаций. На низких частотах преобладают механические шумы — сейсмический шум (Seismic), шумы различных систем стабилизации (TCS — системы тепловой компенсации) и успокоения оптических элементов (ETM и ITM — соответственно, дальних и входных зеркал, BS — делителя пучка (смотри рисунок 2)), тепловые шумы, соответственно, в подвесах и в пробных массах — SusTherm и IntTherm. На более высоких частотах однозначно преобладает оптический дробовой шум (Shot), существенно менее значительны амплитудные и фазовые флуктуации излучения лазера накачки (соответственно, Intensity и Frequency) а также темновые шумы используемых оптических датчиков (Dark).

Среди прочих шумов следует выделить координатные шумы зеркал, в том числе,



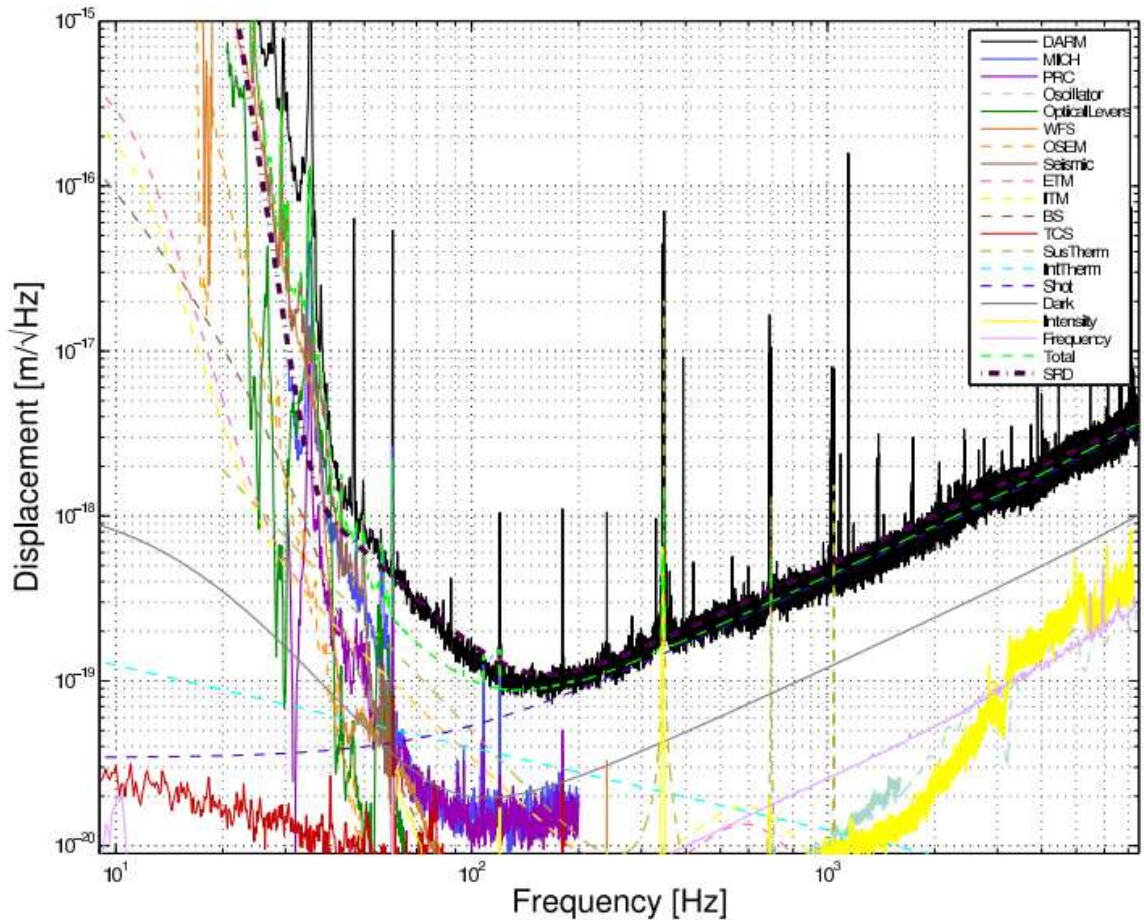


Рис. 4: Бюджет шумов в LIGO — различные шумы, действующие в антенне [14]

шум сейсмического происхождения; различные тепловые шумы, среди которых отметим следующие. Собственно тепловой шум покрытия и основы зеркала — шум, также называемый брауновским, ввиду того, что он вызван хаотическим тепловым движением частиц вещества как покрытия зеркала, так и его основы. Термоупругий шум [28, 29] — вид флуктуаций, проявляющийся в веществах, обладающих ненулевым коэффициентом теплового расширения. Флуктуации температуры в толще вещества вызывают посредством теплового расширения соответствующие флуктуационные деформации, которые передаются поверхности зеркал. Обычно рассматривается отдельно термоэластичный шум в основе зеркала и в его покрытии. Далее следует отметить т.н. терморелактивный шум [30, 31], обусловленный зависимостью оптической плотности веществ, составляющих зеркала, от температуры. Зеркала, используемые в LIGO имеют многослойные покрытия для обеспечения существенно высоких коэффициентов отражения, и свет, отражаясь от такого зеркала, «проникает» внутрь него на толщину нескольких слоев. Поэтому в случае, когда коэффициент преломления веществ зеркал зависит от температуры, флуктуации последней преобразуются в нежелательные флуктуации

фазы света. Флуктуации температуры в покрытии и основе зеркал могут иметь как независимую флуктуационную природу, так и быть вызванными поглощением света, циркулирующего в резонаторе. Температурные флуктуации, вызванные поглощением света порождают т.н. фото-термоупругие и фото-терморелаксационные шумы, подробнее о которых написано в [32, 33].

В настоящее время детекторы сети LIGO достигли проектных возможностей чувствительности, в связи с чем планируется их модернизация до статуса Enhanced LIGO, для чего запланировано увеличить мощность лазера накачки до 30 Вт, добавить модовый фильтр на выход схемы. Осуществление этих улучшений схемы должно увеличить чувствительность антенн в несколько раз. Кроме того, в планах постройка интерференционной антенны Advanced LIGO, чувствительность которой должна будет превзойти чувствительность Initial LIGO примерно на порядок на всех частотах. Такого эффекта планируется достигнуть за счет установки более мощного лазера накачки, установки более тяжелых зеркал, обладающих меньшими поглощением и рассеянием, использование более добротных подвесов на нитях плавленого кварца, лучшей системой сейсмической изоляции и других улучшений. Постройку Advanced LIGO планируется начать в 2011 году на базе уже имеющихся у LIGO экспериментальных установок, на 2013 год запланированы отладка уже собранной антенны и получение первых экспериментальных результатов [15].

Обсерватория LIGO развивается усилиями научного сообщества LSC — LIGO Scientific Collaboration, к которой относится также англо-немецкая научная группа, работающая с интерферометрической антенной GEO 600. Последняя расположена неподалеку от Ганновера в Германии. Работа антенны основана на том же принципе, что и LIGO — под действием падающей ГВ соотношение плеч интерферометра Майкельсона, первоначально настроенного в режим «темного порта» изменяется, что приводит к появлению сигнала на выходе измерительной схемы. Однако в схеме этой антенны имеются отличия от LIGO — в GEO перед выходным детектором было установлено зеркало SRM — Signal Recycling Mirror, зеркало рециркуляции сигнала. Это первый случай использования двух рециркулирующих зеркал в интерферометре такого масштаба. При установке этого зеркала, по сути, образуется еще один резонатор, изменение частотных свойств которого (осуществляемое передвижением зеркала) позволяет реализовывать различные режимы детектирования. Использование различных режимов позволяет «акцентировать» чувствительность антенны на различных участках спектра. Кроме того, в плечах интерферометра Майкельсона у GEO 600 нет дополнительных зеркал, образующих интерферометры Фабри-Перо.

Зеркала в GEO закреплены при помощи трехступенчатых подвесов, последний

из участков которых выполнен из нитей плавленного кварца и монолитно присоединен к зеркалу. Плавленый кварц является малодиссипативным веществом, а выбранный способ соединения с зеркалом позволяет избежать трения в креплениях — совокупность этих мер позволяет существенно снизить флуктуационное влияние подвесов на движение зеркал. В свою очередь, подвесы установлены на гидравлически стабилизированных основаниях, служащих защитой от низкочастотных сейсмических флуктуаций. Также для улучшения шумовых характеристик подвесов, при помощи специальных успокоителей гасятся добротности поперечных колебаний кварцевых нитей (т.н. «струнных» мод, в основном, нижних), практически не воздействуя на добротность подвеса, как целого.

Антенна GEO вместе с антеннами LIGO участвовала в эксперименте S5 в период с января 2006 г. по октябрь 2007 г. Наилучшая полученная чувствительность антенны GEO во время эксперимента превысила  $3 \times 10^{-22}$  Гц<sup>-1/2</sup> [22]. В планах научной группы GEO 600 длительный этап накопления сигнала в то время, пока будет производиться существенная модернизация антенн LIGO и Virgo. Во время этого этапа был запланирован также ряд экспериментов с различными режимами настройки зеркала рециркуляции сигнала. В более отдаленной перспективе использование в интерферометре сжатого света.

Также на схеме интерферометра Майкельсона в режиме «темного порта» с интерферометрами Фабри-Перо в плечах основана работа антенны Virgo, которая расположена в Италии около Пизы и управляется итальяно-французской группой ученых. Длина плеч в Virgo составляет 3 км — это вторая по величине гравитационная антенна в мире. Virgo использует схему рециркуляции мощности, но не сигнала. Проектная чувствительность Virgo сравнима с чувствительностью LIGO на частотах порядка сотен Герц и существенно превосходит LIGO на более низких частотах благодаря использованию лучшей системы сейсмической изоляции, т.н. «суператтенюаторов». По состоянию на апрель 2008 года, антенна Virgo достигла проектной чувствительности в  $10^{-22}$  Гц<sup>-1/2</sup> в частотном диапазоне 100-1000 Hz, уступая в максимальной чувствительности LIGO [18].

В планах развития Virgo — модернизация до статуса Virgo+, для чего планируется увеличить мощность лазера накачки с 20 до 30-50 Вт, установить систему тепловой компенсации, заменить зеркала для увеличения резкости. Также планируется использовать кварцевые подвесы для крепления зеркал.

На рисунке 5 приведены графики чувствительностей описанных выше антенн.

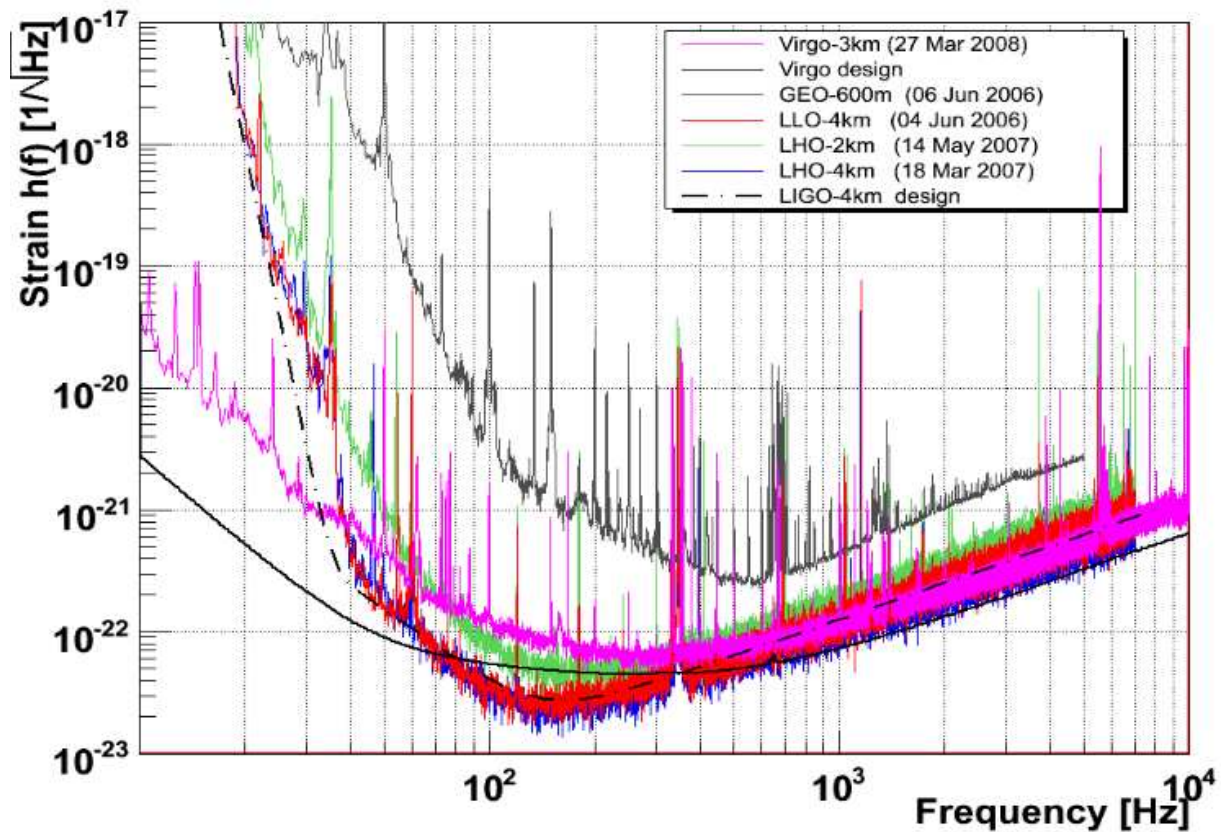


Рис. 5: Графики чувствительности гравитационных антенн LIGO, Virgo и GEO 600 в единицах корня из спектральной плотности безразмерного возмущения метрики  $h$  [18]

## 2.2 Детекторы, «свободные от смещений»

Ожидается, что в гравитационных антеннах нового поколения основной причиной, ограничивающей чувствительность, будут квантовые флуктуации, обязанные своим появлением соотношению неопределенности Гейзенберга. При измерении координаты пробного тела производится неизбежное случайное возмущение канонически сопряженной ей величины — импульса, тем большее, чем больше точность произведенного измерения, в соответствии с соотношением неопределенности. Возмущение импульса приводит к дальнейшему случайному изменению координаты пробного тела. Можно определить оптимальную точность первого измерения координаты, которая позволит добиться максимальной точности измерения смещения пробного тела. Эта максимальная точность называется обычно СКП (стандартным квантовым пределом) [34].

СКП возникает при измерении какой-либо величины, не являющейся интегралом движения, в частности, при координатном измерении. Поэтому, одним из путей его преодоления является модификация схемы для измерения интеграла движения

(такие измерения называются квантовыми невозмущающими — КНИ). Однако, такой способ является неудобным и сопряжен с техническими сложностями, связанными с необходимостью переделывания схемы для измерения новой величины.

В случае, когда характерные размеры гравитационной антенны близки по величине к длине волны ГИ, для описания ГИ можно пользоваться моделью, согласно которой действие ГВ на антенну сводится к изменению фазовой скорости света, распространяющегося в антенне. Таким образом, ГВ влияет на фазу света непрерывно в процессе его распространения, тогда как информация о флуктуациях пробных тел примешивается к фазе света только в моменты взаимодействия света с телами — излучения, отражения и т.д. Получается, что механизм воздействия на фазу является существенно различным для флуктуаций и для ГВ, чем и было предложено воспользоваться для получения выражений, содержащих информацию только о изменении фазы интерферирующего света, вызванном ГВ, но не флуктуациями координат пробных тел (такие выражения будем называть «свободными от смещений»).

Впервые идею исключить флуктуации пробных тел предложили S.Kawamura и Y.Chen сравнительно недавно — в 2004 г. Они же предложили термин «displacement-noise-free» («свободный от смещений»). В статье [35] авторы предлагают модель гравитационной антенны, состоящей из трех пробных тел, расположенных эквидистантно на одной прямой, перпендикулярно которой распространяется гравитационная волна. Авторы предлагают измерить времена пролета световых импульсов от среднего пробного тела до крайних, времена обратного пролета мгновенно отраженных импульсов, а затем должным образом скомбинировать четыре полученных величины (длительности путешествия света). Таким образом авторам удастся получить величину, зависящую только от сигнала, имеющего гравитационное происхождение, но не от флуктуационного движения пробных тел. Возможность подобного исключения авторы объясняют тем, что четыре измеренных промежутка времени содержат в себе информацию о пяти неизвестных — гравитационном сигнале и координатах пробных тел в моменты взаимодействия со светом (этих координат будет четыре, поскольку большой точностью оба отраженных сигнала прибывают обратно к среднему пробному телу одновременно). Однако, ввиду того, что «абсолютное» положение прибора не имеет смысла, от одной из этих координат можно избавиться за счет выбора начала отсчета, следовательно, всего неизвестных величин будет четыре. Таким образом, имея четыре уравнения относительно четырех неизвестных, вполне можно получить свободное от флуктуаций выражение для гравитационного сигнала. Статья [35], являясь первой в своей области, обладает некоторыми недостатками —

необходимостью обладать идеальными часами, установленными на каждом из трех пробных тел и необходимостью идеальной синхронизации этих часов. Идеализация часов соответствует пренебрежению оптическими флуктуациями.

Свое развитие идеи, впервые обозначенные в статье [35], получили в работе [36] тех же авторов. В этой работе произведен более подробный анализ использования времен распространения световых импульсов между пробными телами для построения выражений, свободных от флуктуаций координат пробных тел и показаний часов. Авторы приводят следующие рассуждения. Пусть используемый в  $d + 1$ -мерном пространстве-времени (обладающем числом  $d$  пространственных координат) прибор состоит из  $N$  пробных тел, каждое из которых снабжено часами, показания которых могут иметь флуктуационные составляющие. Если от каждого пробного тела отправить световой импульс к каждому из оставшихся пробных тел и измерить длительности времен распространения этих импульсов, то можно получить  $N(N - 1)$  величин. Число флуктуационных величин, от которых нужно избавиться, в общем случае равно  $N(d + 1)$ , из которых  $Nd$  соответствует пространственным флуктуациям положения пробных тел, и еще  $N$  — флуктуациям показаний часов. Тогда, если  $N$  достаточно велико (а именно таково, что  $N(N - 1) > N(d + 1)$ , т.е.  $N > d + 2$ ), то число имеющихся уравнений окажется больше, чем число неизвестных, что позволит исключить флуктуации и получить выражение для гравитационного сигнала, свободное от флуктуаций.

Авторы предлагают состоящий из пяти пробных тел плоский прибор для свободного от флуктуаций измерения гравитационного сигнала (согласно построенной авторами теории, пять — минимальное необходимое количество пробных тел для создания такого прибора в пространстве с двумя пространственными координатами, т.е. плоского). Рассчитанная зависимость получаемого сигнала от частоты ГИ  $\Omega_{gw}$  имеет асимптотику  $\sim (\Omega_{gw}\tau)^3$  на низких частотах ( $\tau$  — характерное время распространения света в приборе), т.е. на низких частотах сигнал ослаблен во столько раз по сравнению с сигналом простого датчика, измеряющего фазу распространяющегося света.

В работе [37] впервые предлагается реализуемая на практике схема гравитационной антенны, допускающая измерения, свободные от флуктуаций. Авторы предлагают использовать две пары интерферометров Маха-Цандера, накачиваемых «навстречу друг другу» с обеих сторон, что позволяет им автоматически частично исключить флуктуации излучения накачки. Устройство схемы изображено на рисунке 6 слева, там же отмечены входные и выходные порты для четырех интерферометров  $A_{(1,2)}$  и  $B_{(1,2)}$ . А и В — светоделители 50-50,  $C_{1,2}$  и  $D_{1,2}$  — идеально отражающие зеркала. Оптические пути, по

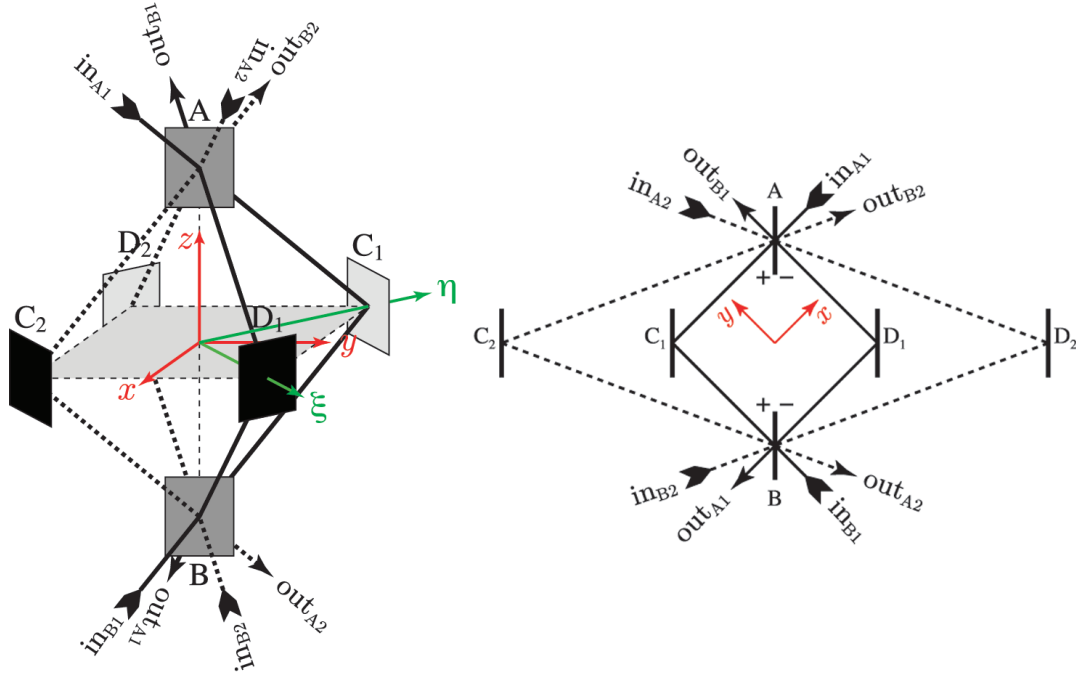


Рис. 6: Схемы антенн, предложенные в статье [37]. Справа на рисунке плоская модель (2D), слева — объемная (3D).

которым распространяются лучи в интерферометрах, следующие: для  $A_1$ :  $A_t C_1 B_r - A_r D_1 B_t$ , для  $B_1$ :  $B_t C_1 A_r - B_r D_1 A_t$  (показаны сплошными линиями), для  $A_2$ :  $A_t D_2 B_r - A_r C_2 B_t$ , для  $B_2$ :  $B_t D_2 A_r - B_r C_2 A_t$  (показаны пунктирными линиями). Индексы  $r$  и  $t$  обозначают, соответственно, отражение и прохождение сквозь соответствующий светоделитель. Как нетрудно заметить, каждый из оптических элементов антенны участвует в схемах не менее чем двух интерферометров Маха–Цандера. Благодаря этому возможно исключить флуктуации их координат из выходного сигнала. Комбинируя надлежащим образом сигналы от интерферометров  $A_1$  и  $B_1$ , можно исключить флуктуации зеркал  $C_1$  и  $D_1$ , а комбинируя сигналы от  $A_2$  и  $B_2$  — зеркал  $C_2$  и  $D_2$ . Наконец, используя полученные комбинации, можно исключить координатные флуктуации светоделителей.

Частотная характеристика прибора имеет асимптотику  $(\Omega_{gw}\tau)^2$  на низких частотах. Авторы утверждают, что это наилучшая чувствительность прибора, свободного от смещений, для случая трехмерного детектора ГИ. Авторы также предлагают для экспериментальных нужд плоскую антенну (см. рисунок 6, справа), более простую в экспериментальной реализации. Чувствительность плоской антенны на низких частотах имеет асимптотику  $(\Omega_{gw}\tau)^3$ , которая также объявлена авторами наилучшей достижимой для плоской антенны, свободной от смещений.

Возможность экспериментальной реализации интерферометра Маха–Цандера,

частично свободного от смещений зеркал, была показана в работах [39, 40]. Авторы этих работ использовали интерферометры Маха–Цандера лабораторного масштаба для того, чтобы продемонстрировать возможность исключения флуктуаций одного из зеркал или светоделителя. Флуктуации координаты оптического элемента имитировались электро-оптическим модулятором, установленным в плече интерферометра. Авторы сообщают, что им удалось достигнуть шумоподавления в 30 дБ в широкой полосе частот и величины шумоподавления в 45 дБ при настройке в узкой полосе частот.

Как вариант конструкции детектора, свободного от флуктуаций, авторы [41] предлагают использовать интерферометр Саньяка. Предложенный авторами прибор является резонансным — рассмотренная авторами антенна позволяет исключать флуктуации зеркал в узкой полосе частот. В отличие от схем, где используется интерферометр Маха–Цандера, в котором информация о положении зеркал «считывается» непрерывно, в предлагаемой схеме информация о положении зеркал считывается через некоторый временной интервал  $\Delta t$ . Если за это время фаза движения зеркала изменяется на  $2\pi$ , то посредством вычитания сигнала можно будет избавиться от флуктуаций этого зеркала. Из таких соображений следуют фазовые соотношения, которые делают детектор резонансным.

Для исключения флуктуаций координат оптических элементов авторы [38] используют способ, отличный от упомянутых выше. Они используют плоскую модель интерферометра Фабри–Перо, накачиваемую двумя лазерами с противоположных сторон. Им удастся избавиться от флуктуаций координат зеркал интерферометра, но не от флуктуаций платформ, на которых установлены лазеры накачки и детекторы. Этого результата авторам удастся добиться благодаря использованию специфики интерферометра Фабри-Перо, заключающейся в существовании в отраженном от интерферометра сигнале компоненты, отраженной непосредственно от ближнего зеркала и не взаимодействующей с дальним зеркалом. Таким методом авторам удастся добиться чувствительности прибора, на низких частотах существенно превосходящую асимптотику  $\sim (\Omega_{gw}\tau)^3$ , предсказанную в качестве наилучшей для плоского прибора авторами [37]. Настоящая работа является развитием идей, предложенных в [38].

### **3 Два интерферометра Фабри-Перо, накачиваемые с двух сторон**

В этой главе мы рассматриваем простейшую модель гравитационной антенны, состоящей из трех пробных тел, расположенных на одной прямой. Мы также



описываем схему антенны, при помощи которой предполагаем осуществлять детектирование ГВ — антенны, состоящей из двух интерферометров Фабри-Перо с параллельными оптическими осями, каждый из которых накачивается с двух сторон. Также мы вводим формализм, при помощи которого будем описывать распространение оптических волн и приводим расчеты откликов интерферометра Фабри-Перо на накачку с одной стороны.

### 3.1 Рассмотрение простейшей модели гравитационной антенны

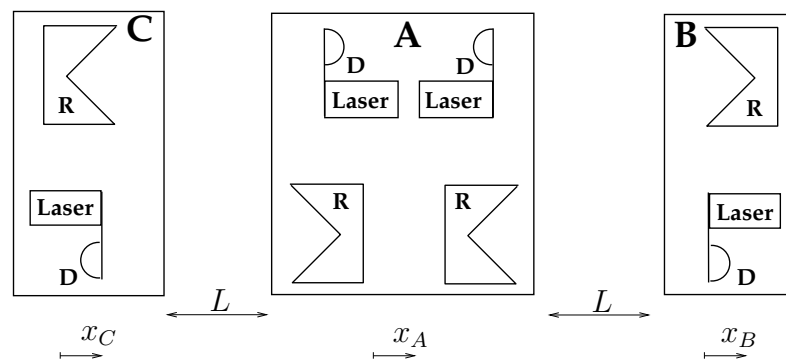


Рис. 7: Схема упрощенной модели гравитационной антенны, состоящей из трех пробных тел, расположенных на одной прямой.

Для того, чтобы продемонстрировать возможность исключения смещений платформ, рассмотрим следующую наглядную задачу. Пусть на три пробных тела, расположенных вдоль одной прямой, падает перпендикулярно этой прямой ГВ с плоским фронтом (см. рисунок 7). Положим, что присутствие ГВ мы будем определять, измеряя набег фазы, которые получают световые импульсы, распространяющиеся от одного тела к другому, а затем обратно. Таким образом, в схеме реализуется конфигурация измерения «round-trip», когда излучение и регистрация света осуществляются в одной и той же точке пространства. В этом случае (в отличие от конфигурации «forward-trip», когда излучение и регистрация осуществляются в точках, существенно удаленных друг от друга) нет нужды задаваться вопросами синхронизации часов в различных точках пространства, и можно представить действие ГВ на антенну в виде изменения показателя преломления светонесущей среды (подробнее см. [42]). Движение пробных тел в таком приближении можно рассматривать независимо от действия ГВ.

Для того, чтобы можно было реализовать описанную схему измерения, предположим, что на каждом из тел установлены лазеры (или какие-либо

другие источники монохроматического излучения, на рисунке отмечены словом «Laser»), посылающие световые импульсы в направлении соседних тел; абсолютно отражающие зеркала (на рисунке — R), от которых отражаются посылаемые импульсы; и детекторы (D), регистрирующие возвращающиеся импульсы. Детекторы пусть измеряют фазовые набег, которые получают импульсы за время такого путешествия. Покажем, что существует такая комбинация этих фазовых набегов, которая не содержит информацию о смещениях пробных тел, однако сохраняет информацию о ГВ. Схема с тремя телами на одной прямой была предложена в работе [35], однако там предполагается, что излучение и регистрация фазы света осуществляется на разных телах, здесь же оба этих действия (излучение и регистрация) происходят на одном теле.

Пусть в положении равновесия тела располагаются эквидистантно, и расстояние между соседними равно  $L = c\tau$ ,  $c$  — фазовая скорость света. Смещения тел от положения равновесия обозначим как  $x_A(t)$ ,  $x_B(t)$  и  $x_C(t)$ , как это обозначено на рисунке 7. Свет, распространяющийся от одного пробного тела к другому и затем обратно, будет приобретать фазовый набег из-за движения пробных тел и из-за присутствия ГВ. Этот фазовый набег, очевидно, будет функцией времени. Обозначим набег фазы света, распространяющегося от **A** к **B** и обратно, детектируемого на **A** в момент  $t$  через  $\varphi_{ABA}(t)$ . Он равен

$$\varphi_{ABA}(t) = \varphi_{grav}(t) - \frac{\omega_0}{c} [x_A(t - 2\tau) - 2x_B(t - \tau) + x_A(t)].$$

Здесь  $\omega_0$  — частота света,  $\varphi_{grav}(t)$  — фазовый набег, вызываемый присутствием ГВ. Не будем пока интересоваться точным выражением для него, отметим только, что он является функцией времени.

Аналогично выражению для  $\varphi_{ABA}(t)$  можно получить выражение для  $\varphi_{BAB}(t)$  — фазового набег для импульса, распространяющегося от **B** к **A** и обратно, регистрируемого на **B** в момент времени  $t$ :

$$\varphi_{BAB}(t) = \varphi_{grav}(t) + \frac{\omega_0}{c} [x_B(t - 2\tau) - 2x_A(t - \tau) + x_B(t)].$$

Используя величины  $\varphi_{ABA}$  и  $\varphi_{BAB}$ , можно составить комбинацию, не содержащую  $x_B$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{AB}(t) &= \varphi_{ABA}(t) - 2\varphi_{BAB}(t + \tau) + \varphi_{ABA}(t + 2\tau) = \\ &= \frac{\omega_0}{2} [-x_A(t - 2\tau) + 2x_A(t) - x_A(t + 2\tau)] + \varphi_{grav}(t) - 2\varphi_{grav}(t + \tau) + \varphi_{grav}(t + 2\tau). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно скомбинировать фазовые набег света, распространяющегося между **A** и **C**. Получающаяся комбинация будет свободна от

$x_C$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{AC}(t) &= \varphi_{ACA}(t) - 2\varphi_{CAC}(t + \tau) + \varphi_{ACA}(t + 2\tau) = \\ &= -\frac{\omega_0}{2} \left[ -x_A(t - 2\tau) + 2x_A(t) - x_A(t + 2\tau) \right] + \varphi_{grav}(t) - 2\varphi_{grav}(t + \tau) + \varphi_{grav}(t + 2\tau). \end{aligned}$$

Заметим, что величины  $\varphi_{ABA}$  и  $\varphi_{BAB}$  содержат одинаковые слагаемые, описывающие информацию о ГВ. Однако, информация об оставшемся смещении платформы **A** входит с противоположными знаками. Поэтому, просто складывая  $\varphi_{ABA}$  и  $\varphi_{BAB}$ , можно избавиться от смещений всех платформ, но оставить информацию о ГВ.

$$\Phi_{grav} = \frac{1}{2} \left( \Phi_{AB}(t) + \Phi_{AC}(t) \right) = \varphi_{grav}(t) - 2\varphi_{grav}(t + \tau) + \varphi_{grav}(t + 2\tau). \quad (1)$$

Заметим, что выражение справа пропорционально так называемой дискретной второй производной  $\varphi_{grav}(t)$ . Перепишем выражение (1) в представлении образов Фурье (будем считать, что требования сходимости выполнены, и таковые существуют).

$$\Phi_{grav}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{grav}(t) e^{i\Omega t} dt = \varphi_{grav}(\Omega) (1 - 2e^{-i\Omega\tau} + e^{-i2\Omega\tau}) = \varphi_{grav}(\Omega) (1 - e^{-i\Omega\tau})^2.$$

В случае низкочастотной ГВ, что соответствует приближению больших длин волн ГВ  $\lambda_{GW}$ , значительно превосходящих характерные размеры прибора ( $\lambda_{GW} \gg L$ ), можно считать, что  $\Omega\tau \ll 1$ , и  $e^{-i\Omega\tau} \simeq 1 - i\Omega\tau$ . Тогда последнее выражение примет вид

$$\Phi_{grav}(\Omega) = -(\Omega\tau)^2 \varphi_{grav}(\Omega).$$

Таким образом, исключение из сигнала информации о флуктуациях на частоте  $\Omega_{gw}$  сказывается в виде ослабления измеряемого сигнала на той же частоте в  $(\Omega_{gw}\tau)^2$  раз (для случая низких частот, на которых  $\Omega_{gw}\tau \ll 1$ ).

## 3.2 Схема используемой в работе гравитационной антенны

Упрощенная схема, рассмотренная в разделе 3.1, может быть усовершенствована. Схема, исследуемая в настоящей работе, имеет следующий вид. Пусть три пробных тела, называемых далее платформами, **A**, **B** и **C** расположены вдоль одной оси аналогично тому, как это было описано в разделе 3.1. Между платформами теперь помещены зеркала, так что образуются два интерферометра Фабри-Перо с параллельными оптическими осями. Интерферометр, образованный платформами **A** и **B**, изображен на рисунке 8. Аналогичный интерферометр образуется платформами **A** и **C**. Платформы и зеркала могут двигаться поступательно вдоль линии,

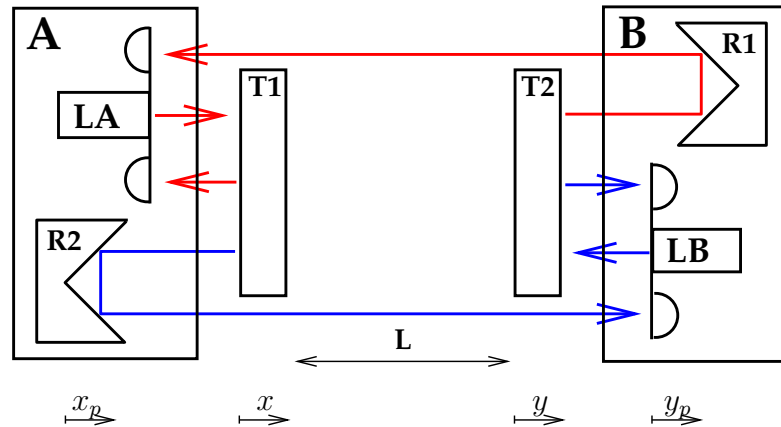


Рис. 8: Схема интерферометра Фабри–Перо, накачиваемого с двух сторон. L1 и L2 — лазеры накачки, T1 и T2 — частично прозрачные зеркала, R1 и R2 — абсолютно отражающие зеркала. Стрелками показаны оптические пути лучей, красными — соответствующие накачке лазером LA, синими — LB. Стрелками снизу обозначены отклонения зеркал и платформ от положения равновесия.

параллельной оптическим осям интерферометров. Каждый из интерферометров накачивается двумя лазерами, закрепленными на соседних платформах.

Накачка каждого из интерферометров и регистрация откликов интерферометра на накачку производится следующим образом. Излучение каждого из лазеров порождает два луча отклика — отраженный и прошедший. Отраженный луч регистрируется на той же платформе детектором, закрепленным на ней. Прошедший луч отражается от специального абсолютно отражающего зеркала (на рисунке 8 обозначены как R1 и R2), установленного на противоположной платформе и неподвижного относительно нее, и возвращается к платформе, на которой был испущен, более не взаимодействуя с зеркалами. Там он также регистрируется детектором, закрепленным на платформе. Так регистрируются отклики каждого из интерферометров на накачку с каждой из сторон. Для того, чтобы можно было независимо регистрировать отклики интерферометра на накачку разными лазерами, будем считать, что лазеры, накачивающие один и тот же интерферометр, обладают излучением, поляризованным ортогонально друг другу.

На описанную конструкцию перпендикулярно ее оптической оси падает ГВ с плоским фронтом аналогично тому, как описано в разделе 3.1. Воздействие ГВ на прибор сказывается в изменении скорости света, поэтому это воздействие можно представить в виде соответствующего изменения показателя преломления светонесущей среды. Таким образом, задача детектирования ГВ сводится к задаче детектирования изменения показателя преломления, происходящего по закону  $n(t) =$

$1 + h(t)/2$ ,  $h \ll 1$ . Здесь  $h(t)$  — безразмерная вариация метрики, вызываемая действием ГВ. Ввиду того, что в модели используется конфигурация «ground-trip», можно представить действие ГВ в виде изменения показателя преломления, а движение платформ рассматривать независимо от действия ГВ (см. [42]).

В настоящей работе будет показано, что можно образовать комбинацию из откликов интерферометров на накачку, содержащую информацию только о падающей ГВ, но не о флуктуационных смещениях зеркал, которые мы будем считать закрепленными на платформах. Также будет указана конфигурация, в которой возможно измерение ГВ, свободное не только от флуктуационных смещений зеркал, но также и от флуктуаций излучения лазера накачки.

### 3.3 Формализм описания распространения света при помощи комплексных амплитуд

Пусть плоская световая волна, близкая к монохроматической, распространяется вдоль оси  $X$ . В настоящей работе рассматриваются только линейно поляризованные почти монохроматические оптические волны, для которых имеет место следующая зависимость какой-либо компоненты напряжённости поля от координат и времени.

$$F(X, t) = F_{\pm}^A(X_0, t)e^{-i[\omega t \mp k(X - X_0)]}. \quad (2)$$

Здесь  $\omega$  — циклическая частота несущей,  $k = \omega/c$  — волновое число рассматриваемого излучения,  $c$  — фазовая скорость света. Верхние знаки соответствуют монохроматической волне, распространяющейся в положительном направлении оси, нижние — отрицательном.  $F_{\pm}^A(X_0, t)$  — комплексная амплитуда вектора в точке с координатой  $X_0$  в момент времени  $t$ . У чисто монохроматической волны комплексная амплитуда, вводимая согласно равенству (2), не зависит от времени:  $F_{\pm}^A(X_0, t) = F_{\pm}^A(X_0)$ .

Комплексную амплитуду почти монохроматической волны можно представить в виде суммы двух компонент: «средней», не зависящей от времени, и «малой», зависящей от времени (малые компоненты удобно рассматривать в виде разложения в интеграл Фурье).

$$F_{\pm}^A(X_0, t) = F_{\pm}(X_0) + f_{\pm}(X_0, t) \equiv F_{\pm}(X_0) + \int f_{\pm}(X_0, \Omega)e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (3)$$

Здесь  $F_{\pm}(X_0)$  — средняя комплексная амплитуда поля,  $f_{\pm}(X_0, t)$  — малая,  $f_{\pm}(X_0, \Omega)$  — Фурье-образ малой амплитуды. Отдельное обозначение для Фурье-образа не вводится, чтобы не загромождать запись. Терминология «малых» и «средних» комплексных амплитуд, а также обозначение первых строчными буквами, а вторых — заглавными будет и далее использоваться в настоящей работе.

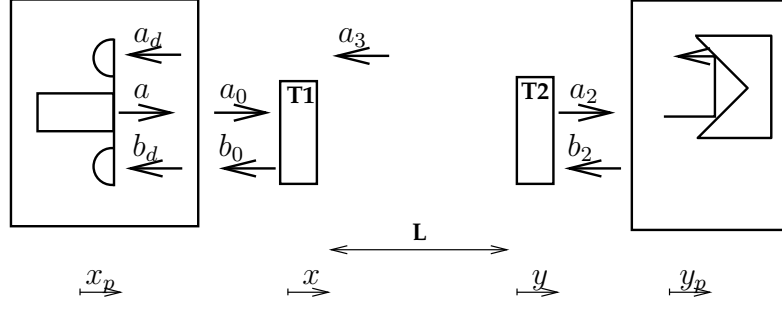


Рис. 9: Схема накачки интерферометра и регистрации откликов на накачку

Для дальнейших нужд полезно выписать зависимость комплексных амплитуд от координат.

$$F_{\pm}(X_0 \pm l) = F_{\pm}(X_0)\theta_0; \quad (4a)$$

$$f_{\pm}(X_0 \pm l, \Omega) = f_{\pm}(X_0, \Omega)\theta + F_{\pm}(X_0 \pm l)g_+(\Omega). \quad (4b)$$

Здесь  $\theta_0 = e^{i\delta\tau}$  — фазовый множитель для средних амплитуд,  $\delta = \omega - \omega_{res}$  ( $\omega_{res} = \pi nc/L$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) — расстройка от резонансной частоты,  $\theta = e^{i(\Omega+\delta)\tau}$  — фазовый множитель для малых амплитуд,  $g_+ = \frac{h(\Omega)\omega}{2\Omega}(e^{i\Omega\tau} - 1)$  — множитель, соответствующий влиянию ГВ на распространение света, пропорциональный возмущению метрики, вызванному ГВ. Подробный вывод формул (4) приведен в Приложении А, там же более подробно определена величина  $g_+$ .

### 3.4 Расчеты комплексных амплитуд полей, падающих на детекторы

Ввиду того, что в настоящей работе предполагается манипулировать с откликами на накачку интерферометров Фабри-Перо, полезно получить выражения для двух откликов одного интерферометра на накачку одним определенным лазером, тогда остальные можно будет получить, пользуясь аналогией между интерферометрами.

Рассмотрим схему, изображенную на рисунке 9. Интерферометр образован зеркалами с амплитудными коэффициентами пропускания  $T_1$  и  $T_2$ , соответствующие коэффициенты отражения —  $R_1$  и  $R_2$ ,  $T_i^2 + R_i^2 = 1$ . Зеркала, как и среду между ними, будем считать непоглощающими. Как уже говорилось, зеркала могут двигаться поступательно вдоль линии, параллельной оптической оси интерферометра. В положении равновесия расстояние между ними пусть равно  $L = c\tau$ . Смещения зеркал от положения равновесия пусть будут  $x(t)$  и  $y(t)$ , эти величины в дальнейшем будем считать малыми. Смещения платформ, на которых установлены лазеры и детекторы, от положения равновесия будем обозначать  $x_p(t)$  и  $y_p(t)$ . Вместо функций времени

далее будет удобно пользоваться Фурье-образами, вычисляемыми по формулам

$$f(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\Omega t} dt$$

Связь между комплексными амплитудами  $a_0(\Omega), b_2(\Omega)$  полей на входе интерферометра и амплитудами  $a_2(\Omega), b(\Omega)$  полей на выходе дается следующими формулами (см. обозначения на рисунке 9, детали расчета приведены в Приложении В):

$$b = T_\theta b_2 + R_b a_0 + R_2 T_1^2 \theta_0 \xi_0 \xi A_0 (-v_x R^2 \theta_0 \theta^2 + \theta(v_y + v_h)) - v_x R_1 A; \quad (5a)$$

$$a_2 = T_\theta a_0 + R_a b_2 + R^2 \theta \xi A_2 (-\theta_0 v_x + \theta(v_y + v_h)) + A_2 g_+; \quad (5b)$$

При написании этих равенств введены следующие новые обозначения:  $R^2 = R_1 R_2$ ,  $T^2 = T_1 T_2$ ;  $\xi_0 = [1 - R^2 \theta_0^2]^{-1}$ ,  $\xi = [1 - R^2 \theta^2]^{-1}$  — резонансные множители, соответственно, для средних и малых амплитуд;  $T_\theta = -\xi \theta T^2$  — величина, имеющая смысл коэффициента пропускания интерферометра, как целого (отношения комплексной амплитуды на выходе интерферометра к комплексной амплитуде на входе);  $R_a = \xi(R_1 \theta^2 - R_2)$ ,  $R_b = \xi(R_2 \theta^2 - R_1)$  — аналогично, величины, характеризующие отражение от интерферометра для волн, падающих на зеркала  $T_2$  и  $T_1$ , соответственно.  $A$  — средняя амплитуда поля, падающего на зеркало  $T_1$ ,  $A_2$  — средняя амплитуда поля на выходе, на зеркале  $T_2$ .

В выражения (5) входят также величины, описывающие флуктуации координат зеркал  $v_x(\Omega) \equiv i2kx(\Omega)$ ,  $v_y(\Omega) \equiv i2ky(\Omega)$ , и величина  $v_h = g_+(1 + \theta_0/\theta)$ , пропорциональная вариации метрики, вызванной ГВ (подробнее см. Приложение А).

Для простоты положим, что в положении равновесия расстояние от зеркала до ближайшей платформы содержит целое число длин волн несущей оптической волны. Кроме того, будем считать, что фазовый набег, который получают спектральные компоненты на ненулевой частоте (обладающие частотой, отличной от частоты несущей) пренебрежимо мал. Тогда в положении равновесия на детекторы будут падать те же лучи, что есть на выходе интерферометра. В случае же, когда платформы выходят из положений равновесия, дополнительные фазовые набег для лучей будут определяться движением платформ. На детекторы будут падать лучи с комплексными амплитудами  $a_d$  и  $b_d$ . Для того, чтобы получить выражения для них, следует воспользоваться выражениями (5) и условиями связи

$$a_0 = a - Aikx_p \equiv a - A\frac{P_x}{2}, \quad b_d = b - B\frac{P_x}{2}, \quad a_3 = -a_2\theta - i2ky_p A_2\theta - A_2\theta_0 g_+, \quad a_d = a_3 - A_3\frac{P_x}{2} \quad (6)$$

В Приложении С приведены расчеты комплексных амплитуд полей, падающих на детекторы. Полученные там выражения связывают эти поля с полями на входе,

сигналом гравитационной природы, а также флуктуационными смещениями зеркал и платформ. Далее мы положим, что зеркала интерферометра закреплены на соответствующих платформах (формально, это соответствует требованию  $x = x_p$  и  $y = y_p$ ). В рамках этого допущения выражения для регистрируемых комплексных амплитуд принимают вид

$$a_d = -\left[T_\theta a + R_a b_2\right]\theta_0\psi - \xi_0\xi T^2 A\theta_0^2 \left[\left(\frac{1+\psi^2}{2}\right)v_x - \psi(v_y + v_h)\right]. \quad (7a)$$

$$b_d = T_\theta b_2 + R_b a - \xi_0\xi R_2 T_1^2 A\theta_0^2 \left[\left(\frac{1+\psi^2}{2}\right)v_x - \psi(v_y + v_h)\right]. \quad (7b)$$

## 4 Два интерферометра Фабри-Перо, установленные на двух платформах

В этой главе мы рассматриваем два возможных варианта детектирования — амплитудного и фазового — откликов интерферометров на накачку. Мы показываем, что при помощи амплитудного детектирования возможно измерение комбинации откликов, свободной от флуктуаций зеркал, но не флуктуаций излучения накачки, а в случае использования фазового детектирования, можно избавиться также и от лазерных флуктуаций.

### 4.1 Амплитудное детектирование сигналов на выходе интерферометров

Пусть на платформе **A** осуществляется измерение амплитудных квадратур выходных сигналов интерферометра, т.е., детекторы, установленные там, измеряют величины  $a_d^{(a)} = a_d A_d^* + a_d^* A_d$  и  $b_d^{(a)} = b_d B_d^* + b_d^* B_d$ , здесь  $a_- = a(-\Omega)$ , символом  $\ll * \gg$  обозначено комплексное сопряжение. Расчеты, приводимые в Приложении D дают следующие выражения для этих величин:

$$a_d^{(a)} = |\xi_0\xi A|^2(\theta_0^{*2} - \theta_0^2)T_1^2 T_2^2 R^2 \psi^2 \left[\frac{\psi^2 + 1}{2}v_x - \psi(v_y + v_h)\right] + a_{fl}^{(a)}; \quad (8a)$$

$$b_d^{(a)} = |\xi_0\xi A|^2(\theta_0^2 - \theta_0^{*2})R^2 T_1^2 (1 - R_2^2 \psi^2) \left[\frac{\psi^2 + 1}{2}v_x - \psi(v_y + v_h)\right] + b_{fl}^{(a)}; \quad (8b)$$

где величины  $a_{fl}^{(a)}$  и  $b_{fl}^{(a)}$  представляют собой вклад оптических флуктуаций (лазерных и вакуумных) в показания амплитудного детектора.

Из формул (8) видно, что амплитудные квадратурные компоненты обоих выходных сигналов несут одинаковую информацию о ГИ и смещениях зеркал с точностью до множителя. Рассмотрим теперь воздействие на прибор лазера,



установленного на платформе **B** (лазера B), излучение которого поляризовано ортогонально излучению лазера, установленного на платформе **A** (лазера A). Комплексные амплитуды полей, создаваемых лазером B обозначим теми же буквами, что и для лазера A, но отметим их чертой сверху. Для простоты пусть параметры лазера B совпадают с параметрами лазера A — напряжённость поля, которую он создаёт на входе интерферометра  $\bar{B}_2 = A$ , пусть также лазер B настроен на ту же частоту  $\omega$ , что и лазер A. Квадратурные компоненты получающегося выходного излучения можно получить, совершив в формулах (8)

$$a_d^{(a)} \rightarrow \bar{b}_d^{(a)}, b_d^{(a)} \rightarrow \bar{a}_d^{(a)}; \quad (T, R)_1 \longleftrightarrow (T, R)_2; \quad v_{x,y} \longleftrightarrow -v_{y,x}, v_h \rightarrow v_h.$$

Величину  $v_h$  следует оставить без изменений, как это следует из непосредственно из ее определения. После описанной замены получим для отражённого интерферометром сигнала

$$\bar{a}_d^{(a)} = |\xi_0 \xi A|^2 R^2 T_2^2 (\theta_0^2 - \theta_0^{*2}) (1 - R_1^2 \psi^2) \left[ -v_y \frac{\psi^2 + 1}{2} - \psi(-v_x + v_h) \right] + \bar{a}_{fl}^{(a)};$$

и для прошедшего

$$\bar{b}_d^{(a)} = |\xi_0 \xi A|^2 R^2 T_1^2 T_2^2 \psi^2 (\theta_0^{*2} - \theta_0^2) \left[ -v_y \frac{\psi^2 + 1}{2} - \psi(-v_x + v_h) \right] + \bar{b}_{fl}^{(a)}.$$

Величины с индексом «fl» также соответствуют вкладу оптических флуктуаций в измеряемые величины.

Пусть в рассмотренной схеме из двух откликов на излучение каждого лазера измеряется амплитудная квадратурная компонента только одного, для определенности пусть это будут амплитудные квадратуры прошедших через интерферометр  $a_d^{(a)}$  и  $\bar{b}_d^{(a)}$ . Составим из них следующую комбинацию:

$$F_{AB} = a_d^{(a)} \frac{\psi^2 + 1}{2} - \bar{b}_d^{(a)} \psi = |\xi_0 \xi A|^2 R^2 T_1^2 T_2^2 \psi^2 (\theta_0^{*2} - \theta_0^2) \left[ v_x \left( \frac{\psi^2 - 1}{2} \right)^2 - \psi \frac{(\psi - 1)^2}{2} v_h \right] + F_{AB,fl}; \quad (10)$$

где последнее слагаемое соответствует вкладу оптических флуктуаций:

$$F_{AB,fl} = a_d^{(a)} \frac{\psi^2 + 1}{2} - \bar{b}_d^{(a)} \psi.$$

Такая комбинация содержит информацию о смещении только одной из платформ. Для его исключения следует использовать третью платформу, **C**, положение которой отмечено на рисунке 10. Смещение этой платформы дается малой величиной  $z(t)$ . На этой платформе также закреплены лазер, детекторы и абсолютно отражающее зеркало так, что платформы **A** и **C** с установленными на них объектами образуют интерферометр **AC**, в точности аналогичный интерферометру **AB**, образованным

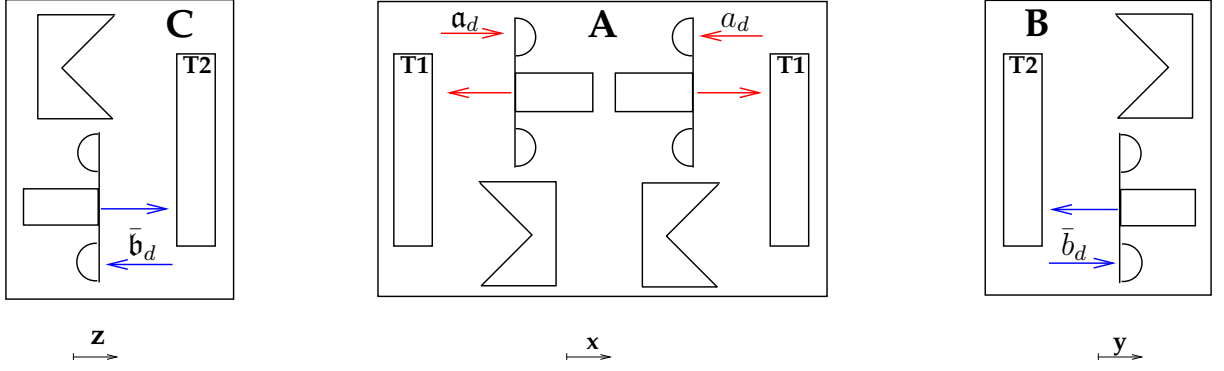


Рис. 10: Использование платформы **C** для исключения смещений платформ. Явно обозначены только поля, детектируемые для дальнейших манипуляций

платформами **A** и **B**. Вследствие аналогии ясно, что можно скомбинировать амплитудные квадратуры сигналов на выходе интерферометра **AC** таким образом, что полученная комбинация будет свободна от одного из флуктуационных смещений платформ. Построим выражение, свободное от  $z$ .

Пусть на выходе интерферометра **AC** также измеряются квадратуры прошедших лучей, из которых составляется комбинация, аналогичная  $F_{AB}$ . В нее также войдут  $x$  и  $v_h$ :  $v_h$  войдет в это выражение с тем же знаком, что и в (10),  $x$  же войдет с противоположным. Это становится ясно, если учесть, что действие ГВ совершенно одинаково на оба интерферометра, в то же время интерферометр **AC** является зеркальным отображением интерферометра **AB**. Обозначим луч, детектируемый на платформе **A**, как  $\mathbf{a}_d$ , а луч, детектируемый на платформе **C**, как  $\bar{\mathbf{b}}_d$ . Тогда из их квадратурных компонент можно будет составить следующую комбинацию.

$$\begin{aligned}
 F_{AC} &= \mathbf{a}_d^{(a)} \frac{\psi^2 + 1}{2} - \bar{\mathbf{b}}_d^{(a)} \psi = \\
 &|\xi_0 \xi A|^2 R^2 T_1^2 T_2^2 \psi^2 (\theta_0^{*2} - \theta_0^2) \left[ -v_x \left( \frac{\psi^2 - 1}{2} \right)^2 - \psi \frac{(\psi - 1)^2}{2} v_h \right] + F_{AC,fl} \quad (11) \\
 F_{AC,fl} &= \mathbf{a}_{fl}^{(a)} \frac{\psi^2 + 1}{2} - \bar{\mathbf{b}}_{fl}^{(a)} \psi.
 \end{aligned}$$

Величина  $F_{AC,fl}$  имеет роль вклада оптических флуктуаций — технических лазерных и вакуумных.

Выражения (10) и (11), как и в разделе 3.1, содержат одинаковую информацию о ГВ, однако слагаемое, несущее информацию о смещении платформы **A**, входит в эти выражения с разными знаками. Поэтому для окончательного исключения смещения  $x$  платформы **A**, сложим (10) и (11), получим итоговое выражение для отклика прибора на гравитационную волну, свободного от флуктуационных смещений зеркал,

но не от оптических флуктуаций, вклад которых обозначим через  $F_{fl}$ .

$$F = F_{AB} + F_{AC} = |\xi A_2|^2 R^2 \psi^3 (\theta_0^2 - \theta_0^{*2}) [(\psi - 1)^2 v_h] + F_{fl}; \quad (12)$$

$$F_{fl} = \left( a_{fl}^{(a)} + \mathbf{a}_{fl}^{(a)} \right) \frac{\psi^2 + 1}{2} - \left( \bar{b}_{fl}^{(a)} + \bar{\mathbf{b}}_{fl}^{(a)} \right) \psi.$$

Вклад лазерных и вакуумных флуктуаций в сигнал, описываемый величиной  $F_{fl}$ , можно оценить примерно величиной  $a_{fl}^{(a)}$ . Таким образом, в этом случае вклад оптических флуктуаций в полезный сигнал примерно равен аналогичному вкладу для антенны, рассмотренной в разделе 3.1.

В иллюстративных целях стоит переписать выражение (12) в приближении больших длин волн ГВ или, что то же, низких частот, когда  $\Omega\tau \ll 1$ . Мы используем термины расстройки  $\delta$  и полуширины полосы пропускания интерферометра  $\gamma \equiv T^2/2\tau$ . Будем считать, что для этих величин справедливо  $\gamma \approx \delta \approx \Omega$ . Для простоты положим,  $T_1 = T_2 = T$  (как и ранее,  $T_1 T_2 = T^2$ ) и, к тому же,  $T_1, T_2 \ll 1$ , а для большей иллюстративности средней комплексной амплитуде поля на выходе интерферометра  $A_2$  присвоим обозначение  $A_{out}$ . Тогда выражение (12) примет вид

$$F = |A_{out}|^2 \frac{i\Omega^2 \tau \delta}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta^2} v_h + F_{fl} = -|A_{out}|^2 \frac{(\Omega\tau)^2 \delta}{\tau((\gamma - i\Omega)^2 + \delta^2)} \omega\tau h(\Omega) + F_{fl}. \quad (13)$$

Выражения (12,13) содержат информацию только о гравитационном сигнале, но не о флуктуационных смещениях платформ. На низких частотах, когда  $\Omega\tau \ll 1$ , «платой» за исключение флуктуаций платформ является ослабление сигнала ГВ на частоте  $\Omega_{gw}$  в  $(\Omega_{gw}\tau)^2$  раз. Однако, по сравнению с простейшей антенной, данная схема обеспечивает выигрыш в чувствительности в виде резонансного множителя, равного здесь

$$\frac{\delta}{\tau((\gamma - i\Omega)^2 + \delta^2)}.$$

Полезно будет сравнить чувствительность этой антенны с чувствительностью простейшей антенны, состоящей из двух платформ и основанной на конфигурации «ground-trip». Схема этой антенны такова, что сигнал, испущенный на одной платформе (пусть она неподвижна для простоты), проходит расстояние до второй платформы (подвижной), отражается от нее и проходит то же расстояние обратно до первой платформы, где регистрируется. Выражение для амплитудной квадратуры сигнала на детекторе для случая такой схемы можно написать в виде:

$$F_{simple} = A_{out} a_{in} + |A_{out}|^2 i2kx + |A_{out}|^2 \omega\tau h. \quad (14)$$

Здесь  $A_{out}$  — средняя амплитуда поля на детекторе,  $a_{in}$  — флуктуации излучения лазера накачки,  $x$  — смещение подвижной платформы. Сравнивая выражения (13)

и (14), видим, что платой за избавление от флуктуационных смещений платформ является ослабление сигнала на множитель

$$\frac{(\Omega\tau)^2\delta}{\tau((\gamma - i\Omega)^2 + \delta^2)}$$

Слагаемые, отвечающие за лазерные флуктуации, имеют примерно одинаковый порядок величины в этих выражениях.

В выражения (12,13) входят также слагаемые, соответствующие оптическим флуктуациям — лазерным и вакуумным ( $F_{fl}$ ). При получении этих выражений мы пользовались амплитудной квадратурной компонентой только одного из откликов на накачку каждого интерферометра. Можно было бы использовать квадратуру второго отклика для того, чтобы избавиться от флуктуаций накачки, однако анализ показывает, что при измерении амплитудных квадратур сделать это не удастся. Таким образом, в случае амплитудного детектирования выходных сигналов интерферометра, рассмотренная схема не вполне оправдывает название «свободной от смещений», поскольку вводившие этот термин авторы предполагали также возможность избавиться от лазерных флуктуаций.

Мы рассмотрели амплитудное детектирование сигналов, поскольку оно наиболее просто реализуемо на практике, хотя и не позволяет избавиться от флуктуаций излучения накачки. Анализ показывает, что от них можно избавиться, если измерять *фазовые* квадратуры *обоих* откликов на накачку *каждого* из интерферометров, когда оба интерферометра настроены в резонанс с излучением накачки. Подробно рассмотрено фазовое детектирование выходных сигналов в следующем разделе.

## 4.2 Фазовое детектирование сигналов на выходе интерферометров

Пусть теперь на платформе **A** осуществляется гомодинное детектирование сигналов  $a_d$  и  $b_d$ , т.е. детекторы, установленные там, измеряют, соответственно, величины (т.н. квадратуры)  $a_d^q = a_d e^{i\Phi_a} A_d^* + a_{d-}^* e^{-i\Phi_a} A_d$  и  $b_d^q = b_d e^{i\Phi_b} B_d^* + b_{d-}^* e^{-i\Phi_b} B_d$ , здесь, как и ранее,  $a_- \equiv a(-\Omega)$ , символом «\*» обозначено комплексное сопряжение. Величины  $\Phi_{(a,b)}$  назовем гомодинными углами. Для реализации амплитудного детектирования нужно положить  $\Phi_i = 0$ , а для фазового —  $\Phi_i = \pi/2$ .

Существуют режимы работы интерферометра, когда можно подобрать гомодинные углы таким образом, чтобы существовала комбинация квадратур  $C_a a_d^q + C_b b_d^q \equiv C_a (a_d^q + \Gamma b_d^q)$ , не содержащая лазерных флуктуаций  $a$ . В Приложении E приведены выкладки, позволяющие определить такой режим. Отметим, что использование какой-либо комбинации квадратур выходных сигналов

равносильно предположению о том, что после регистрации детекторами, квадратуры будут пропущены через соответствующие фильтры с зависящими от частоты коэффициентами передачи  $C_a(\Omega)$  и  $C_b(\Omega)$ . Эти коэффициенты, очевидно, можно определить с точностью до множителя  $C_a$  (возможно, также зависящего от частоты), строго же определено только отношение этих коэффициентов  $\Gamma = C_b/C_a$ .

В частности, такую комбинацию можно образовать в случае резонансной настройки интерферометра и излучения накачки ( $\theta_0 = 1$ ). Анализ показывает, что в этом случае нужно измерять в обоих выходных портах одинаковые квадратуры ( $\Phi_a = \Phi_b$ ). Также из физических соображений ясно, что в случае резонансной настройки следует измерять фазовые квадратуры обоих сигналов, что соответствует  $\Phi_a = \Phi_b = \pi/2$ . Коэффициент  $\Gamma$  в таком случае равен

$$\Gamma = \frac{T^4\psi^2}{R^2(1 + \psi^2) - R_2^2\psi^2 - R_1^2}.$$

Применяя к квадратурам фильтры с описанными коэффициентами пропускания  $C_a$  и  $C_b$  (такими, что  $C_b/C_a = \Gamma$ ), можно построить комбинацию квадратур, не содержащую технического лазерного шума. Ввиду произвольности в выборе коэффициентов  $C_a$  и  $C_b$ , положим их равными, соответственно,  $C_a = (R_2\psi^2 - R_1)(R_2 - R_1)$  и  $C_b = -T^4\psi^2$  (в случае такого выбора коэффициентов линейная комбинация, которую мы желаем построить, будет иметь, по-видимому, наиболее простой вид). Получим

$$a^P \equiv C_a a_d^q + C_b b_d^q = -i2\xi|A_2|^2 \left[ \frac{1 + \psi^2}{2} v_x - \psi(v_y + v_h) \right] (1 + R^2\psi^2)(R_1^2 + R_2^2) + b_{vac}.$$

$b_{vac}$  — слагаемое, связанное с вакуумным шумом  $b_2$ , избавиться от которого тождественно не удается. Это слагаемое имеет следующий вид:

$$b_{vac} = (R_2 - R_1) \left[ (R_1\psi^2 - R_2)(R_1 - R_2\psi^2) - T^4\psi^2 \right] \left( i\xi^* A_2 \psi b_{2-}^* - i\xi A_2^* \psi b_2 \right).$$

Можно грубо выражение  $b_{vac}$  по величине примерно как произведение  $A_2 b_2$ , примерно соответствующее вкладу вакуумных флуктуаций в сигнал в схеме, рассмотренной в разделе 3.1.

Далее рассмотрим накачку того же интерферометра лазером В, установленным на платформе В. Формулы, описывающие отклики интерферометра на накачку этим лазером, а также квадратуры этих откликов, аналогичны соответствующим формулам для лазера А, и для их получения следует использовать замену, как это делалось в разделе 3.4. Не вдаваясь в детали вычислений, можно сразу написать выражение для комбинации квадратур, свободной от флуктуаций накачки:

$$\bar{a}^P \equiv \bar{C}_a \bar{a}_d^q + \bar{C}_b \bar{b}_d^q = -i2\xi|A_2|^2 \left[ -\frac{1 + \psi^2}{2} v_y + \psi(v_x - v_h) \right] (1 + R^2\psi^2)(R_2^2 + R^2) + \bar{b}_{vac}.$$

Величина  $\bar{b}_{vac}$  — аналогично, слагаемое, связанное с вакуумным шумом  $\bar{a}$ . Выражение для этого слагаемого аналогично выражению для  $b_{vac}$ , и мы не будем его выписывать.

Комбинируя величины, свободные от лазерных флуктуаций, получим выражение, свободное от флуктуаций одной из платформ

$$F_{AB}^P \equiv a^P \frac{1}{R_1^2 + R^2} \frac{1 + \psi^2}{2} - \bar{a}^P \frac{1}{R_2^2 + R^2} \psi = \\ - i2\xi |A_2|^2 (1 + R^2 \psi^2) \left[ v_x \left( \frac{1 - \psi^2}{2} \right)^2 - \psi \frac{(1 - \psi)^2}{2} v_h \right] + F_{AB,fl}^P.$$

Здесь  $F_{AB,fl}^P$  — слагаемое, связанное со вкладами вакуумных шумов в сигнал:

$$F_{AB,fl}^P = \frac{1 + \psi^2}{2} \frac{1}{R_1^2 + R^2} b_{vac} - \psi \frac{1}{R_2^2 + R^2} \bar{b}_{vac}.$$

Далее следует исключить из сигнала информацию о  $v_x$ . Это можно сделать аналогично тому, как было сделано в разделе 4.1 — привлечь к рассмотрению также и второй интерферометр. Воспользовавшись аналогией между интерферометрами, можно записать для интерферометра, образованного платформами **A** и **C**, комбинацию фазовых квадратур выходных сигналов, свободную от смещения платформы **C**.

$$F_{AC}^P = -i2\xi |A_2|^2 (1 + R^2 \psi^2) \left[ -v_x \left( \frac{1 - \psi^2}{2} \right)^2 - \psi \frac{(1 - \psi)^2}{2} v_h \right] + F_{AC,fl}^P.$$

Аналогично,  $F_{AC,fl}^P$  — слагаемое, связанное с вакуумными шумами:

$$F_{AC,fl}^P = \frac{1 + \psi^2}{2} \frac{1}{R_1^2 + R^2} \mathbf{b}_{vac} - \psi \frac{1}{R_2^2 + R^2} \bar{\mathbf{b}}_{vac}.$$

Теперь, как и ранее, мы имеем две величины, в которые слагаемое, описывающее ГВ, входит с одинаковыми знаками, а слагаемое, описывающее смещение платформы **A** — с разными. Поэтому, как и ранее, для того, чтобы избавиться от  $v_x$ , сложим  $F_{AB}^P$  и  $F_{AC}^P$ :

$$F^{fl} = F_{AB}^P + F_{AC}^P = i2\xi |A_2|^2 (1 + R^2 \psi^2) \left[ \psi (1 - \psi)^2 v_h \right] + F_{fl}^P. \quad (15)$$

В этом выражении последнее слагаемое отвечает за вклад вакуумных оптических флуктуаций. Это слагаемое имеет вид

$$F_{fl}^P = \frac{1 + \psi^2}{2} \frac{1}{R_1^2 + R^2} (b_{vac} + \mathbf{b}_{vac}) - \psi \frac{1}{R_2^2 + R^2} (\bar{b}_{vac} + \bar{\mathbf{b}}_{vac}).$$

Величины с индексом «vac» определяются аналогично тому, как мы определили величину  $b_{vac}$  и имеют смысл вклада вакуумных флуктуаций в измеряемый сигнал. По порядку величина  $F_{fl}^P$  примерно равна величинам  $b_{vac}$  и пр. Таким образом,

величина вклада вакуумных флуктуаций в полезный сигнал в данной конфигурации примерно совпадает с величиной их вклада в полезный сигнал в конфигурации простейшей антенны, рассмотренной в разделе 3.1.

Как и в случае амплитудного детектирования сигналов на выходе, полезно выписать полученное выражение в приближении низкой частоты ГВ, когда  $\Omega\tau \ll 1$ . Здесь также воспользуемся терминами полуширины полосы пропускания интерферометра  $\gamma = T^2/2\tau$  и частоты  $\Omega$ . Соотношения  $\gamma \approx \Omega$  будем считать выполненными. Тогда вместо (15) получим

$$F^P = -2|A_{out}|^2 \frac{\Omega^2\tau}{\gamma - i\Omega} v_h = -2i|A_{out}|^2 \frac{(\Omega\tau)^2}{\tau(\gamma - i\Omega)} \omega\tau h(\Omega) + F_{fl}^P. \quad (16)$$

Сравнение чувствительности данной антенны с чувствительностью простейшей антенны, состоящей из двух пробных тел, (см. (14)) показывает, что в случае использования данной конфигурации и фазового детектирования, полезный сигнал ослабляется на множитель, примерно равный

$$\frac{(\Omega\tau)^2}{\tau(\gamma - i\Omega)}$$

Однако, данная конфигурация позволяет не только полностью избавиться от флуктуационных смещений пробных тел, но также исключить флуктуации излучения лазеров накачки. Уровень вакуумных шумов остается неизменным.

## 5 Выводы

По итогам проделанной работы можно сделать следующие выводы.

- На примере простейшей модели гравитационной антенны, состоящей из трех тел, показана возможность свободного от флуктуационных смещений пробных тел детектирования ГВ.
- Рассмотрена возможность детектирования ГВ в схеме, состоящей из двух интерферометров Фабри-Перо с параллельными оптическими осями. Продемонстрировано, что при амплитудном детектировании выходных сигналов интерферометра возможно построить комбинацию откликов интерферометра, не содержащую информации о смещениях зеркал интерферометров. Полезный сигнал такой антенны уменьшается на низких частотах приблизительно на множитель  $(\Omega_{gw}\tau)^2$ .
- Рассмотрена возможность использования фазового детектирования выходных сигналов интерферометров в схеме из двух интерферометров Фабри-Перо с параллельными оптическими осями. Показано, что при фазовом детектировании возможно исключить из итоговой комбинации не только информацию о смещениях зеркал, но также и флуктуации излучения накачки. Полезный сигнал при этом также уменьшается на низких частотах приблизительно на множитель  $(\Omega_{gw}\tau)^2$ .



## А Получение выражений для фазовых множителей

Пусть, для определённости, волна распространяется в положительном направлении оси. Формулы (2, 3) можно переписать в следующем виде:

$$F(X, t) = \left[ F_+(X_0)e^{-ikX_0} + f_+(X_0, t)e^{-ikX_0} \right] e^{-i(\omega t - kX)}.$$

Так как это равенство должно быть справедливо при любом значении  $X_0$ , то выражение  $F_+(x_0)e^{-ikx_0}$  не должно зависеть от  $X_0$ . Поэтому можно записать

$$F_+(X_0 + l)e^{-ik(X_0+l)} = F_+(X_0)e^{-ikX_0}, \Rightarrow F_+(X_0 + l) = F_+(X_0)e^{ikl}.$$

Для получения связи  $f_+(X_0, t)$  и  $f_+(X_0 + l, t)$ , следует учесть, что произведение  $f_+(X_0)e^{-ikX_0}$  также не должно зависеть от  $X_0$ , и, согласно принципу причинности, должно быть  $f_+(X_0 + l, t) = f_+(X_0, t - \tau)e^{ikl}$ , где  $\tau = l/c$ . Тогда, учитывая известную теорему Фурье–анализа, получим для образов  $f_+(X_0 + l, \Omega) = f_+(X_0, \Omega)e^{ikl + i\Omega\tau}$ . Далее используем  $kl = \omega l/c = \omega\tau$  и заметим, что  $e^{i\omega\tau} = e^{i\delta\tau}$ , где  $\delta = \omega - \omega_{res}$  – расстройка между несущей  $\omega$  и частотой, которая является собственной для резонатора длины  $l$ .

Теперь следует ввести обозначения  $\theta_0 = e^{i\delta\tau}$ ,  $\theta = e^{i(\Omega+\delta)\tau} = \theta_0\psi$ ,  $\psi = e^{i\Omega\tau}$ , в которых можно написать следующие важные формулы.

$$\begin{aligned} F_+(X_0 + l) &= F_+(X_0)\theta_0; \\ f_+(X_0 + l, \Omega) &= f_+(X_0, \Omega)\theta. \end{aligned}$$

Теперь пусть показатель преломления среды, в которой распространяется волна, изменяется по закону  $n(t) = 1 + \Delta n(t)$ ,  $\Delta n(t) \ll 1$ . В этом случае фаза распространяющейся волны получит малую дополнительную добавку  $\Delta\varphi$ , такую что

$$\begin{aligned} i\Delta\varphi &= i\omega \int_{t-\tau}^t \Delta n(t') dt' = i\omega \int_{t-\tau}^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n(\Omega) e^{-i\Omega t'} \frac{d\Omega}{2\pi} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{i\Omega\tau} - 1}{\Omega} \omega \Delta n(\Omega) \right] e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} g_+(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}. \end{aligned}$$

Здесь  $g_+ = \Delta n(\Omega) \frac{\omega}{\Omega} (e^{i\Omega\tau} - 1)$ . С учетом написанного,

$$\begin{aligned} F_+(X_0 + l) + f_+(X_0 + l, t) &= F_+(X_0)e^{i(\delta\tau + \Delta\varphi)} + f_+(X_0 + l, t) \simeq \\ &= F_+(X_0)\theta_0 \left( 1 + \int_{-\infty}^{\infty} g_+(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \right) + f_+(X_0, t - \tau)\theta_0 = \\ &= F_+(X_0)\theta_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f_+(X_0, \Omega)\theta + F_+(X_0)\theta_0 g_+(\Omega) \right] e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (18) \end{aligned}$$

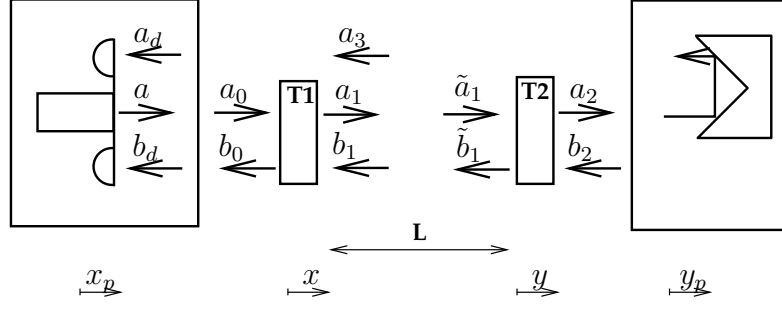


Рис. 11: Принятые обозначения для комплексных амплитуд полей, распространяющихся в интерферометре.

Разделяя порядки малости в выражении (18), можно получить окончательные выражения для связи комплексных амплитуд в волне, распространяющейся в положительном направлении оси.

$$\begin{aligned} F_+(X_0 + l) &= F_+(X_0)\theta_0; \\ f_+(X_0 + l, \Omega) &= f_+(X_0, \Omega)\theta + F_+(X_0 + l)g_+(\Omega). \end{aligned}$$

Аналогично можно получить формулы, связывающие комплексные амплитуды в волне, распространяющейся против положительного направления оси:

$$\begin{aligned} F_-(X_0 - l) &= F_-(X_0)\theta_0; \\ f_-(X_0 - l, \Omega) &= f_-(X_0, \Omega)\theta + F_-(X_0 - l)g_+(\Omega). \end{aligned}$$

Также вместо  $g_+$  будет удобнее оперировать с величиной  $v_h$ , вводимой следующим образом (в условиях рассматриваемой задачи  $\Delta n = h/2$ ):

$$v_h \equiv g_+ \frac{\theta_0 + \theta}{\theta} = h(\Omega) \frac{\omega}{2\Omega} (e^{i\Omega\tau} - 1)(e^{-i\Omega\tau} + 1) = h(\Omega) \frac{\omega}{2\Omega} (e^{i\Omega\tau} - e^{i\Omega\tau}) = i\tau\omega h(\Omega) \text{sinc}(\Omega\tau).$$

При условии  $h(t) \in \mathbb{R}$ ,  $v_h^*(-\Omega) = -v_h(\Omega)$ , что удобно для вычислений.

## В Расчет полей в интерферометре Фабри-Перо

На зеркалах интерферометра можно написать следующие краевые условия для средних комплексных амплитуд, отмеченных на рисунке 11:

$$A_1 = iT_1A - R_1B_1; \quad (21a)$$

$$A_2 = iT_2A_1 - R_2B_2; \quad (21b)$$

$$\tilde{B}_1 = -R_2\tilde{A}_1; \quad (21c)$$

$$B = iT_1B_1 - R_1A. \quad (21d)$$

Также должны выполняться условия связи (4):  $\tilde{A}_1 = A_1\theta_0$ ,  $B_1 = \tilde{B}_1\theta_0$ . С учетом этих условий, решением системы (21) будет

$$A_2 = T_0 A \equiv -\xi_0 T^2 \theta_0 A, \quad B = R_{b0} A = \xi_0 (R_2 \theta_0^2 - R_1) A. \quad (22)$$

Здесь  $\xi_0 = [1 - R^2 \theta_0^2]^{-1}$ ,  $T^2 = T_1 T_2$ ,  $R^2 = R_1 R_2$

Для малых комплексных амплитуд будут выполняться следующие граничные условия на зеркалах интерферометра:

$$a_1 = iT_1 a - R_1 b_1 + i2kx R_1 B_1; \quad (23a)$$

$$a_2 = iT_2 a_1 - R_2 b_2; \quad (23b)$$

$$\tilde{b}_1 = iT_2 b_2 - R_2 \tilde{a}_1 - i2ky R_2 \tilde{A}_1; \quad (23c)$$

$$b = iT_1 b_1 - R_1 a - i2kx R_1 A. \quad (23d)$$

Также для комплексных амплитуд, входящих в систему, справедливы условия связи:

$$\tilde{a}_1 = a_1 \theta + \tilde{A}_1 g_+; \quad (24a)$$

$$b_1 = \tilde{b}_1 \theta + B_1 g_+. \quad (24b)$$

Подставим (23a) в (23c) и воспользуемся (24a):

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 = iT_2 b_2 - R_2 [iT_1 \theta a - R_1 \theta b_1 + i2kx R_1 \theta B_1 + \tilde{A}_1 g_+] - i2ky R_2 \tilde{A}_1 = \\ iT_2 b_2 - iT_1 R_2 \theta a + R^2 \theta b_1 - i2kx R^2 \theta B_1 - R_2 \tilde{A}_1 g_+ - i2ky R_2 \tilde{A}_1. \end{aligned}$$

Затем воспользуемся (24b)

$$b_1 [1 - R^2 \theta^2] = B_1 g_+ - R_2 \theta \tilde{A}_1 g_+ + iT_2 \theta b_2 - iT_1 R_2 \theta^2 a - i2ky R_2 \theta \tilde{A}_1 - i2kx R^2 \theta^2 B_1. \quad (25)$$

Тогда из (25) и (23d) получим:

$$b = iT_1 [1 - R^2 \theta^2]^{-1} \left( B_1 g_+ - R_2 \theta \tilde{A}_1 g_+ + iT_2 \theta b_2 - iT_1 R_2 \theta^2 a - i2ky R_2 \tilde{A}_1 \theta - i2kx R^2 \theta^2 B_1 \right) - R_1 a - i2kx R_1 A;$$

В итоге

$$b = T_\theta b_2 + R_b a - \frac{iT_1 R_2}{1 - R^2 \theta^2} \tilde{A}_1 (i2kx \theta_0 R^2 \theta^2 + i2ky \theta + g_+(\theta_0 + \theta)) - i2kx R_1 A;$$

Действуя аналогично, получим выражение для выхода из другого порта.

$$a_2 = T_\theta a + R_a b_2 + \frac{iT_2 R^2 \theta}{1 - R^2 \theta^2} \tilde{A}_1 (i2ky \theta - i2kx \theta_0 + g_+(\theta_0 + \theta)) + A_2 g_+;$$

Введем обозначения  $i2kx \equiv v_x$ ;  $i2ky \equiv v_y$ ;  $v_h \equiv g_+(1 + \theta_0/\theta)$ . Смысл этих обозначений станет ясен далее, а сейчас следует отметить, что  $v_{x,y}^*(-\Omega) = -v_{x,y}(\Omega)$ , так как величины  $x(t)$  и  $y(t)$  действительны. Также введем обозначение  $\xi_\theta = (1 - R^2 \theta^2)^{-1}$  и учтем, что  $\tilde{A}_1 = iT_1 \theta_0 \xi_0 A$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} b &= T_\theta b_2 + R_b a + R_2 T_1^2 \theta_0 \xi_0 \xi_\theta A (-v_x R^2 \theta_0 \theta^2 + \theta v_y + g_+(\theta_0 + \theta)) - v_x R_1 A; \\ a_2 &= T_\theta a + R_a b_2 + R^2 \theta \xi_\theta A_2 (-\theta_0 v_x + \theta v_y + g_+(\theta_0 + \theta)) + A_2 g_+; \end{aligned}$$

## С Учет подвижности платформ

В качестве основных воспользуемся формулами (5), а также условиями (6)

$$b = T_\theta b_2 + R_b a + R_2 T_1^2 \theta_0 \xi_0 \xi A (-v_x R^2 \theta_0 \theta^2 + \theta(v_y + v_h)) - v_x R_1 A; \quad (26a)$$

$$a_2 = T_\theta a + R_a b_2 + R^2 \theta \xi A_2 (-\theta_0 v_x + \theta(v_y + v_h)) + A_2 g_+; \quad (26b)$$

$$a = a - A \frac{p_x}{2}, \quad b_d = b - B \frac{p_x}{2}, \quad a_d = a_3 - A_3 \frac{p_x}{2}; \quad (27)$$

Используем (26b) и (27):

$$\begin{aligned} a_3 &= -a_2 \theta - p_y A_2 \theta - A_2 \theta_0 g_+ = \\ &= - \left[ T_\theta a + R_a b_2 \right] \theta - \xi \theta^2 T^2 A \frac{p_x}{2} - \xi \theta^2 R^2 A_2 \left( -\theta_0 v_x - \theta(v_y + v_h) \right) - A_2 \theta v_h - A_2 \theta p_y, \end{aligned}$$

где  $p_y = i2ky_p$ .

$$\begin{aligned} a_d &= a_3 - A_3 \frac{p_x}{2} = - \left[ T_\theta a + R_a b_2 \right] \theta + \xi R^2 \theta^2 A_2 \left( \theta_0 v_x - \theta(v_y + v_h) \right) - A_2 \theta (v_h + p_y) - \xi \theta^2 T^2 A \frac{p_x}{2} - A_3 \frac{p_x}{2} = \\ &= - \left[ T_\theta a + R_a b_2 \right] \theta + \xi R^2 \theta^2 A_2 \left( \theta_0 v_x - \theta(v_y + v_h) \right) - A_2 \theta (v_h + p_y) - T^2 A \frac{p_x}{2} (\xi \theta^2 + \xi_0 \theta_0^2). \end{aligned}$$

$$\xi \theta^2 + \xi_0 \theta_0^2 = \xi_0 \xi \left( \theta_0^2 (1 - R^2 \theta^2) + \theta^2 (1 - R^2 \theta^2) \right) = \xi_0 \xi \left( \theta_0^2 + \theta^2 - 2R^2 \theta_0^2 \theta^2 \right);$$

$$\begin{aligned} a_d &= - \left[ T_\theta a + R_a b_2 \right] \theta + \xi R^2 \theta^2 A_2 (\theta_0 v_x - \theta(v_y + v_h)) - A_2 \theta (v_h + p_y) - T^2 A p_x \xi_0 \xi \left( \frac{\theta_0^2 + \theta^2}{2} - R^2 \theta_0^2 \theta^2 \right) = \\ &= - \left[ T_\theta a + R_a b_2 \right] \theta - \xi_0 \xi T^2 A \left[ R^2 \theta_0^2 \theta^2 v_x - R^2 \theta^3 \theta_0 v_y - \theta_0 \theta (1 - R^2 \theta^2) p_y + \left( \frac{\theta_0^2 + \theta^2}{2} - R^2 \theta_0^2 \theta^2 \right) p_x - \theta_0 \theta v_h \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогично, используя (26a) и (27)

$$b = T_\theta b_2 + R_b a - R_b A_0 \frac{p_x}{2} + R_2 T_1^2 \theta_0 \xi_0 \xi A (-v_x R_2 \theta_0 \theta^2 + \theta(v_y + v_h)) - v_x R_1 A;$$

$$b_d = b - R_B \frac{p_x}{2} = T_\theta b_2 + R_b a - A \frac{p_x}{2} (R_B + R_b) + R_2 T_1^2 \xi_0 \xi \theta_0 \theta A (v_y + v_h) - v_x A (R_1 + R_2 T_1^2 \xi_0 \xi R^2 \theta_0^2 \theta^2);$$

$$\begin{aligned} R_B + R_b &= \xi_0 (R_2 \theta_0^2 - R_1) + \xi (R_2 \theta^2 - R_1) = \xi_0 \xi \left( (R_2 \theta_0^2 - R_1) (1 - R^2 \theta^2) + (R_2 \theta^2 - R_1) (1 - R^2 \theta_0^2) \right) = \\ &= \xi_0 \xi \left[ (R_2 + R_1 R^2) (\theta_0^2 + \theta^2) - 2(R_1 + R_2 R^2 \theta_0^2 \theta^2) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 T_1^2 R^2 \xi_0 \xi \theta_0^2 \theta^2 &= R_1 \xi_0 \xi \left[ 1 - R^2 (\theta_0^2 + \theta^2) + R^4 \theta_0^2 \theta^2 + R_2^2 (1 - R_1^2) \theta_0^2 \theta^2 \right] = \\ &= R_1 \xi_0 \xi \left[ 1 - R^2 (\theta_0^2 + \theta^2) + R_2^2 \theta_0^2 \theta^2 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_d = & T_\theta b_2 + R_b a - A \frac{p_x}{2} \xi_0 \xi \left[ (R_2 + R_1 R^2)(\theta_0^2 + \theta^2) - 2(R_1 + R_2 R^2 \theta_0^2 \theta^2) \right] + \\
& R_2 T_1^2 \xi_0 \xi \theta_0 \theta A (v_y + v_h) - v_x A \xi_0 \xi R_1 \left[ 1 - R^2(\theta_0^2 + \theta^2) + R_2^2 \theta_0^2 \theta^2 \right] = \\
& T_\theta b_2 + R_b a + A \xi_0 \xi \left\{ p_x \left[ (R_1 + R_2 R^2 \theta_0^2 \theta^2) - (R_2 + R_1 R^2) \frac{\theta_0^2 + \theta^2}{2} \right] + \right. \\
& \left. R_2 T_1^2 \theta_0 \theta (v_y + v_h) + v_x \left[ R_1 R^2 (\theta_0^2 + \theta^2) - (R_1 + R_2 R^2 \theta_0^2 \theta^2) \right] \right\}; \quad (29)
\end{aligned}$$

Если зеркала закреплены на соответствующих платформах, то  $v_x = p_x$ ,  $v_y = p_y$ , и формулы (28) и (29) принимают следующий вид.

$$\begin{aligned}
a_d = & - \left[ T_\theta a + R_a b_2 \right] \theta - \xi_0 \xi T^2 A \left[ \left( \frac{\theta_0^2 + \theta^2}{2} \right) v_x - \theta_0 \theta (v_y + v_h) \right]. \\
b_d = & T_\theta b_2 + R_b a - \xi_0 \xi R_2 T_1^2 A \left[ \left( \frac{\theta_0^2 + \theta^2}{2} \right) v_x - \theta_0 \theta (v_y + v_h) \right].
\end{aligned}$$

## Д Расчет амплитудных квадратур

Используя в качестве исходных формулы для сигналов на выходе схемы (7а) и (7б), можно рассчитать соответствующие амплитудные квадратуры:

$$\begin{aligned}
a_d = & - \left[ T_\theta a + R_a b_2 \right] \theta_0 \psi - \xi_0 \xi T^2 A \theta_0^2 \left[ \left( \frac{1 + \psi^2}{2} \right) v_x - \psi (v_y + v_h) \right]. \\
b_d = & T_\theta b_2 + R_b a - \xi_0 \xi R_2 T_1^2 A \theta_0^2 \left[ \left( \frac{1 + \psi^2}{2} \right) v_x - \psi (v_y + v_h) \right].
\end{aligned}$$

Выражение для амплитудной квадратуры первого сигнала запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_d^{(a)} \equiv & A_d a_{d-}^* + h.c. = \\
& A_0 \theta_0^2 T^2 \xi_0 \left[ - \left[ T_\theta a + R_a b_2 \right] \theta_0 \psi - \xi_0 \xi T^2 A \theta_0^2 \left[ \left( \frac{1 + \psi^2}{2} \right) v_x - \psi (v_y + v_h) \right] \right]^* + \text{к.с.} = \\
& a_{fl}^{(a)} + |A \xi_0|^2 T^4 \left[ \left( \frac{1 + \psi^2}{2} \right) v_x - \psi (v_y + v_h) \right] \left( \xi^* - \xi \right).
\end{aligned}$$

Обозначение к.с. соответствует комплексно сопряженному с заменой  $\Omega \rightarrow -\Omega$ . Также явно не выписано выражение для составляющей квадратуры, обусловленной флуктуациями лазерного излучения и вакуумными шумами на входе интерферометра  $a_{fl}^{(a)}$ .

$$a_{fl}^{(a)} \equiv T^4 \psi^2 \left[ \xi_0^* \xi A^* a + \xi_0 \xi^* A a_-^+ \right] - T^2 \psi \left[ \xi_0^* \xi A^* \theta_0^* (R_1 \theta_0^2 \psi^2 - R_2) b_2 + \xi_0 \xi^* A \theta_0 (R_1 \theta_0^{*2} \psi^2 - R_2) b_{2-}^+ \right].$$

Итого, первая искомая квадратура

$$a_d^{(a)} = |\xi_0 \xi A|^2 (\theta_0^{*2} - \theta_0^2) T_1^2 T_2^2 R^2 \psi^2 \left[ v_x \frac{1 + \psi^2}{2} - \psi(v_y + v_h) \right] + a_{fl}^{(a)}.$$

Амплитудная компонента второго сигнала вычисляется аналогично:

$$\begin{aligned} b_d^{(a)} &\equiv B_d b_d^* + h.c. = \\ &\xi_0 A (R_2 \theta_0^2 - R_1) \left[ T_\theta b_2 + R_b a - \xi_0 \xi R_2 T_1^2 A \theta_0^2 \left[ \left( \frac{1 + \psi^2}{2} \right) v_x - \psi(v_y + v_h) \right] \right]^* + \text{к.с.} = \\ &- |\xi_0 A|^2 R_2 T_1^2 \left[ (R_2 \theta_0^2 - R_1) \xi^* \theta_0^{*2} - (R_2 \theta_0^{*2} - R_1) \xi \theta_0^2 \right] \left[ v_x \frac{1 + \psi^2}{2} - \psi(v_y + v_h) \right] + b_{fl}^{(a)}. \end{aligned}$$

Слагаемое флуктуационной природы в этой квадратуре имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} b_{fl}^{(a)} &= -T^2 \psi \left[ (R_2 \theta_0^* - R_1 \theta_0) \xi_0^* \xi A^* b_2 + (R_2 \theta_0 - R_1 \theta_0^*) \xi_0 \xi^* A b_{2-}^+ \right] + \\ &\left[ \left( R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^{*2} + \theta_0^2 \psi^2) \right) \xi_0^* \xi A^* a + \left( R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^2 + \theta_0^{*2} \psi^2) \right) \xi_0 \xi^* A a_-^+ \right]. \end{aligned}$$

В итоге для  $b_d^{(a)}$  вычисления дают следующий результат:

$$b_d^{(a)} = |\xi_0 \xi A|^2 R^2 T_1^2 (\theta_0^2 - \theta_0^{*2}) (1 - R^2 \psi^2) \left[ v_x - \psi(v_y + v_h) + p_x \frac{\psi^2 - 1}{2} \right] + b_{fl}^{(a)}.$$

## Е Исследование возможности исключения лазерных флуктуаций

Измеряемые квадратуры даются выражениями

$$\begin{aligned} a_d^a &= T^4 \psi^2 \left[ \xi_0^* \xi A^* e^{i\Phi_a} a + \xi_0 \xi^* A e^{-i\Phi_a} a_-^+ \right] - \\ &T^2 \psi \left[ \xi_0^* \xi A^* e^{i\Phi_a} \theta_0^* (R_1 \theta_0^2 \psi^2 - R_2) b_2 + \xi_0 \xi^* A e^{-i\Phi_a} \theta_0 (R_1 \theta_0^{*2} \psi^2 - R_2) b_{2-}^+ \right] - \\ &T^4 |\xi_0 A|^2 \left( \xi e^{i\Phi_a} - \xi^* e^{-i\Phi_a} \right) \left[ \frac{1 + \psi^2}{2} v_x - \psi(v_y + v_h) \right]. \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_d^a &= -T^2 \psi \left[ (R_2 \theta_0^* - R_1 \theta_0) \xi_0^* \xi A^* e^{i\Phi_b} b_2 + (R_2 \theta_0 - R_1 \theta_0^*) \xi_0 \xi^* A e^{-i\Phi_b} b_{2-}^+ \right] + \\ &\left[ \left( R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^{*2} + \theta_0^2 \psi^2) \right) \xi_0^* \xi A^* e^{i\Phi_b} a + \left( R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^2 + \theta_0^{*2} \psi^2) \right) \xi_0 \xi^* A e^{-i\Phi_b} a_-^+ \right] - \\ &R_2 T_1^2 |\xi_0 A|^2 \left( (R_2 - R_1 \theta_0^2) \xi e^{i\Phi_b} - (R_2 - R_1 \theta_0^{*2}) \xi^* e^{-i\Phi_b} \right) \left[ \frac{1 + \psi^2}{2} v_x - \psi(v_y + v_h) \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

Из полученных сигналов можно образовать линейную комбинацию следующим образом  $a_d^q + \Gamma b_d^q$ . Цель этих манипуляций — найти такую  $\Gamma$ , чтобы обратились в ноль коэффициенты при  $a$ :

$$T^4 \psi^2 \xi_0^* \xi A^* e^{i\Phi_a} + \Gamma \left( R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^{*2} + \theta_0^2 \psi^2) \right) \xi_0^* \xi A^* e^{i\Phi_b} = 0 \quad (33a)$$

и при  $a_-^\dagger$ :

$$T^4 \psi^2 \xi_0 \xi^* A e^{-i\Phi_a} + \Gamma \left( R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^2 + \theta_0^{*2} \psi^2) \right) \xi_0 \xi^* A e^{-i\Phi_b} = 0. \quad (33b)$$

В уравнения (33), очевидно, фазовые углы  $\Phi_a$  и  $\Phi_b$  входят только в виде разности, поэтому один из них можно временно исключить из рассмотрения. Обозначим разность гомодинных углов  $\Phi_b - \Phi_a = \Phi$  и разделим уравнения на  $e^{i\Phi_a}$ .

$$\xi_0^* \xi A^* \left[ T^4 \psi^2 + \Gamma e^{i\Phi} \left\{ R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^{*2} + \theta_0^2 \psi^2) \right\} \right] = 0 \quad (34a)$$

$$\xi_0 \xi^* A \left[ T^4 \psi^2 + \Gamma e^{-i\Phi} \left\{ R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^2 + \theta_0^{*2} \psi^2) \right\} \right] = 0 \quad (34b)$$

Выражение в фигурных скобках в (34b) переобозначим:

$$R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^2 + \theta_0^{*2} \psi^2) = U.$$

Тогда выражение в фигурных скобках в (34a)

$$R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^{*2} + \theta_0^2 \psi^2) = U^* (-\Omega);$$

Для обращения выражений (34) в тождества, нужно, чтобы выполнялось

$$T^4 \psi^2 = -\Gamma e^{i\Phi} U^* (-\Omega) = -\Gamma e^{-i\Phi} U.$$

$$e^{i2\Phi} = \frac{U}{U^* (-\Omega)}. \quad (35)$$

Это возможно, когда

$$\left| \frac{U}{U^* (-\Omega)} \right| = \left| \frac{R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^2 + \theta_0^{*2} \psi^2)}{R_2^2 \psi^2 + R_1^2 - R^2 (\theta_0^{*2} + \theta_0^2 \psi^2)} \right| = 1. \quad (36)$$

Последнее условие, очевидно, выполнимо, когда  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . Например при настройке интерферометра в резонанс с излучением накачки  $\theta_0 = 1$ . Для определенности далее принимается, что осуществлен именно этот режим. Тогда при любом значении  $\psi$  выполняется условие (36), а из условия (35) получается  $\Phi = 0$ . Сама по себе величина  $\Phi = \Phi_b - \Phi_a$  не несет существенного смысла, и то, что она равна нулю, означает попросту, что в обоих портах нужно использовать одинаковый тип детектирования — амплитудный, фазовый или же гомодинный с произвольным гомодинным углом,

главное — гомадинный угол должен быть одинаковым в обоих портах. Из физических соображений ясно, что в случае настройки интерферометра в резонанс с накачкой ( $\delta = 0 \Rightarrow \theta_0 = 1$ ), следует измерять фазовые квадратуры сигналов. То есть, величина  $\Phi = \pi/2$ . Коэффициент же  $\Gamma$  принимает значение

$$\Gamma = \frac{T^4 \psi^2}{R^2(1 + \psi^2) - R_2^2 \psi^2 - R_1^2}.$$



## Список литературы

- [1] K.S. Thorne, 1994 Summer Study on High Energy Physics: Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology in the Next Millenium (SNOWMASS94), arXiv:gr-qc/9506086v1 (1995).
- [2] R. Blandford, K.S. Thorne, Ph 136: Applications of Classical Physics (California Institute of Technology, Pasadena, 2003) chap 26.
- [3] В.А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М. (1948).
- [4] J. Weber, Phys.Rev., 117, 306 (1960).
- [5] J. Weber, Phys.Rev. Lett., 22, 1320 (1969).
- [6] L. Baggio et. al., Phys. Rev. Lett., 94, 241101 (2005).
- [7] P. Astone et. al., Class. Quantum Grav. 23, S57 - S62 (2006).
- [8] I.S. Heng et. al., Class. Quantum Grav. 19, 1889 - 1895 (2001).
- [9] P.R. Saulson, AIP Conf. Proc, 873: 41-48 (2006).
- [10] Герценштейн М.Е., Пустовойт В.И., ЖЭТФ, 16, 433, (1962).
- [11] R.E. Frey, Материалы конференции C2CR07 (2007).
- [12] B.Abbott, et al, arXiv:0711.3041[gr-qc] (2007).
- [13] D.Sigg, Class. Quantum Grav., 25 No 11 114041 (2007).
- [14] K. Kawebe, J.Phys: Conf. Ser. 120 032003 (2007).
- [15] Сайт LIGO, URL <http://www.ligo.caltech.edu>.
- [16] C. Bradaschia et. al., Nucl. Instruments and Methods in Phys. Research A, 289, 518-525 (1990).
- [17] F. Acernese et. al., Class. Quantum Grav. 23, S635 (2006).
- [18] B. Mours, Материалы встречи April 2008 EGO Council (2008).
- [19] Сайт Virgo, URL <http://www.virgo.infn.it>.
- [20] B. Willke, Class. Quantum Grav. 24 S389-S397 (2007).
- [21] H. Luck, Материалы конференции Moriond 2007 (2007).

- [22] H. Grote, *Class. Quantum Grav.* 25 114043 (2008).
- [23] Сайт GEO-600, URL <http://geo6000.aei.mpg.de>.
- [24] M.Ando et. al., *Class Quantum Grav.* 22, S881 (2005).
- [25] Сайт TAMA-300, URL <http://tamago.mtk.nao.ac.jp>.
- [26] D.E. McClelland, et al., *Class Quantum Grav.* 23, S41 (2006).
- [27] Сайт ACIGA, URL <http://www.anu.edu.au/physics/aciga>
- [28] V.B. Braginsky, S.P. Vyatchanin, *Phys. Lett. A*, 312, 244 (2003).
- [29] M.M. Fejer et al., *Phys. Rev. D*, 70, 82003 (2006).
- [30] K.H. Wanser, *Electron. Lett.*, 28, 53 (1998).
- [31] V.B. Braginsky, M.L. Gorodetsky, S.P. Vyatchanin, *Phys. Lett. A*, 271, 303-307 (2000).
- [32] V.B. Braginsky, M.L. Gorodetsky, S.P. Vyatchanin, *Phys. Lett. A*, 264, 1-10 (1999).
- [33] S.-C. Wu, et al., *Chin. Phys. Lett.*, 23, 3173, (2006).
- [34] В.Б.Брагинский, *ЖЭТФ*, 53, 1453 (1967).
- [35] S.Kawamura and Y.Chen, *Phys. Rev. Lett.* 93, 211103 (2004), arXiv:gr-qc/0405093v2.
- [36] Y.Chen and S.Kawamura, *Phys. Rev. Lett.* 96, 231102 (2006), arXiv:gr-qc/0504108v3.
- [37] Y.Chen et. al., *Phys. Rev. Lett.* 97, 151103 (2006), arXiv:gr-qc/0603054v2.
- [38] S.P. Tarabrin and S.P. Vyatchanin, arXiv:gr-qc/0804.3955 (2008).
- [39] S. Sato et. al., *Phys. Rev. Lett.* 98, 141101 (2007)
- [40] S. Sato et. al., *J. Phys.: Conf. Ser.* 120, 032006 (2008).
- [41] A. Nishizawa et. al., *Phys. Rev. Lett.* 101, 081101 , arXiv:gr-qc/08050102 (2008).
- [42] S.P. Tarabrin, A.A.Seleznev, arXiv:0804.4292[gr-qc] (2008).