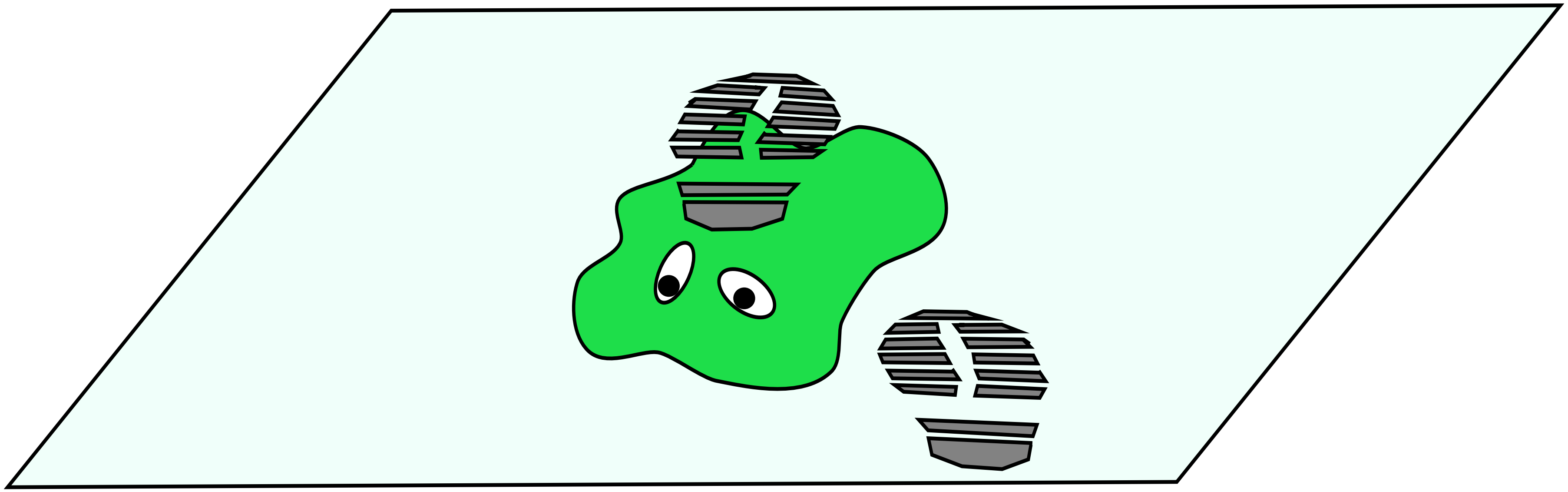
ТЕОРИИ С БОЛЬШИМИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

Эмин Нугаев

ИЯИ РАН, Москва



Зачем нужны дополнительные измерения?

- Они могут помочь объединить гравитацию и материю

Kaluza 1921,
Klein 1926

Теория Калуца-Клейна: 5-ти мерная метрика имеет дополнительные компоненты, которые могут быть интерпретированы как 4-х мерные векторные и скалярные поля

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ A_\nu & \phi \end{pmatrix}$$

Дополнительные измерения $\Rightarrow$ неабелевы калибровочные поля.

Зачем нужны дополнительные измерения?

- Они могут помочь объединить гравитацию и материю

Kaluza 1921,
Klein 1926

Теория Калуца-Клейна: 5-ти мерная метрика имеет дополнительные компоненты, которые могут быть интерпретированы как 4-х мерные векторные и скалярные поля

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ A_\nu & \phi \end{pmatrix}$$

Дополнительные измерения $\Rightarrow$ неабелевы калибровочные поля.

- ...необходимы в теории струн

Единственным непротиворечивым подходом к квантовой теории гравитации в настоящее время является теория суперструн. Однако, эта теория может быть последовательно сформулирована только в 10 измерениях. Таким образом, если теория струн реализуется в природе, должны существовать дополнительные измерения.

- . . . могут помочь решить проблемы 4-х мерных теорий, например

Arkani-Hamed, Dimopulous, Dvali 1998; Randall, Sundrum 1999

  * Проблему калибровочной иерархии, т.е. огромную разницу между масштабом электрослабого нарушения и планковским масштабом

$$\frac{M_{Pl}}{M_W} = 10^{17} \, .$$

- . . . могут помочь решить проблемы 4-х мерных теорий, например

  * Проблему калибровочной иерархии, т.е. огромную разницу между масштабом электрослабого нарушения и планковским масштабом

$$\frac{M_{Pl}}{M_W} = 10^{17} \, .$$

  * Происхождение трех фермионных поколений и массы нейтрино.

Arkani-Hamed, Dimopulous, Dvali 1998; Randall, Sundrum 1999

Arkani-Hamed, Schmaltz 1998; Gherghetta, Pomarol, 2000; Frere, Libanov, Nugaev, Troitsky 2000

- . . . могут помочь решить проблемы 4-х мерных теорий, например

  * Проблему калибровочной иерархии, т.е. огромную разницу между масштабом электрослабого нарушения и планковским масштабом

  $$\frac{M_{Pl}}{M_W} = 10^{17} \, .$$

  Arkani-Hamed, Dimopulous, Dvali 1998; Randall, Sundrum 1999

  * Происхождение трех фермионных поколений и массы нейтрино.

  Arkani-Hamed, Schmaltz 1998; Gherghetta, Pomarol, 2000; Frere, Libanov, Nugaev, Troitsky 2000

  * Проблему космологической постоянной.

  Arkani-Hamed et al, 2000,2002; Kashru, Schulz, Silverstein 2000;

- ...могут помочь решить проблемы 4-х мерных теорий, например

  * Проблему калибровочной иерархии, т.е. огромную разницу между масштабом электрослабого нарушения и планковским масштабом

  $$\frac{M_{Pl}}{M_W} = 10^{17} .$$

  Arkani-Hamed, Dimopulous, Dvali 1998; Randall, Sundrum 1999

  * Происхождение трех фермионных поколений и массы нейтрино.

  Arkani-Hamed, Schmaltz 1998; Gherghetta, Pomarol, 2000; Frere, Libanov, Nugaev, Troitsky 2000

  * Проблему космологической постоянной.

  Arkani-Hamed et al, 2000,2002; Kashru, Schulz, Silverstein 2000;

  * Загадку космических лучей сверхвысоких энергий.

  Jain, McKay, Panda, Ralston 2001;Anchordoqui et al, 2001; Kachelreiss, Plumacher, 2000

- . . . могут помочь решить проблемы 4-х мерных теорий, например

  Arkani-Hamed, Dimopulous, Dvali 1998; Randall, Sundrum 1999

  * Проблему калибровочной иерархии, т.е. огромную разницу между масштабом электрослабого нарушения и планковским масштабом

$$\frac{M_{Pl}}{M_W} = 10^{17} .$$

  Arkani-Hamed, Schmaltz 1998; Gherghetta, Pomarol, 2000; Frere, Libanov, Nugaev, Troitsky 2000

  * Происхождение трех фермионных поколений и массы нейтрино.

  Arkani-Hamed et al, 2000,2002; Kashru, Schulz, Silverstein 2000;

  * Проблему космологической постоянной.

  Jain, McKay, Panda, Ralston 2001;Anchordoqui et al, 2001; Kachelreiss, Plumacher, 2000

  * Загадку космических лучей сверхвысоких энергий.

- . . . служат теоретической лабораторией для проверки новых идей и подходов к старым проблемам.

- ... могут помочь решить проблемы 4-х мерных теорий, например

  Arkani-Hamed, Dimopulous, Dvali 1998; Randall, Sundrum 1999

  * Проблему калибровочной иерархии, т.е. огромную разницу между масштабом электрослабого нарушения и планковским масштабом

$$\frac{M_{Pl}}{M_W} = 10^{17} \, .$$

  Arkani-Hamed, Schmaltz 1998; Gherghetta, Pomarol, 2000; Frere, Libanov, Nugaev, Troitsky 2000

  * Происхождение трех фермионных поколений и массы нейтрино.

  Arkani-Hamed et al, 2000,2002; Kashru, Schulz, Silverstein 2000;

  * Проблему космологической постоянной.

  Jain, McKay, Panda, Ralston 2001;Anchordoqui et al, 2001; Kachelreiss, Plumacher, 2000

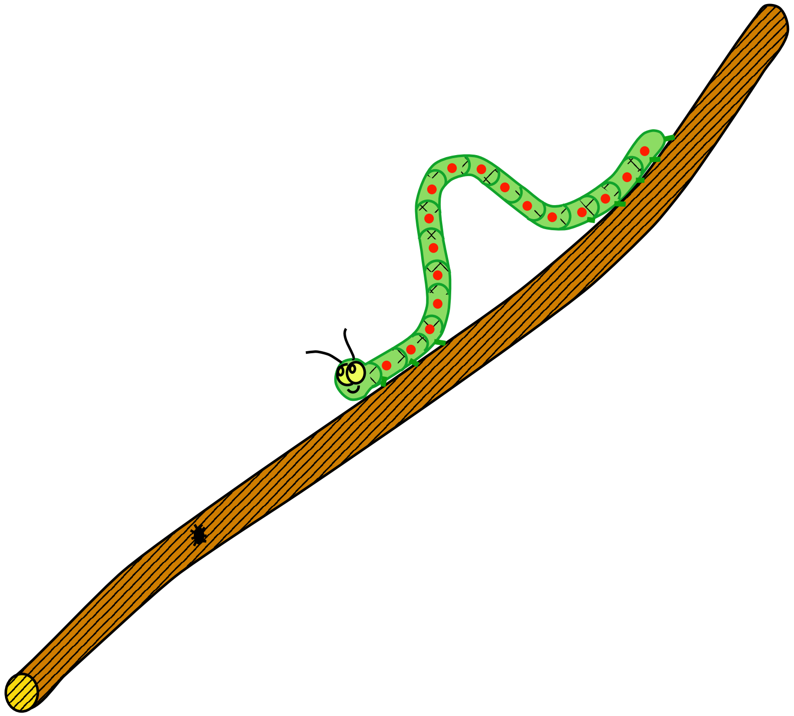
  * Загадку космических лучей сверхвысоких энергий.

- ... служат теоретической лабораторией для проверки новых идей и подходов к старым проблемам.

- ... просто интересные и увлекательные теории.

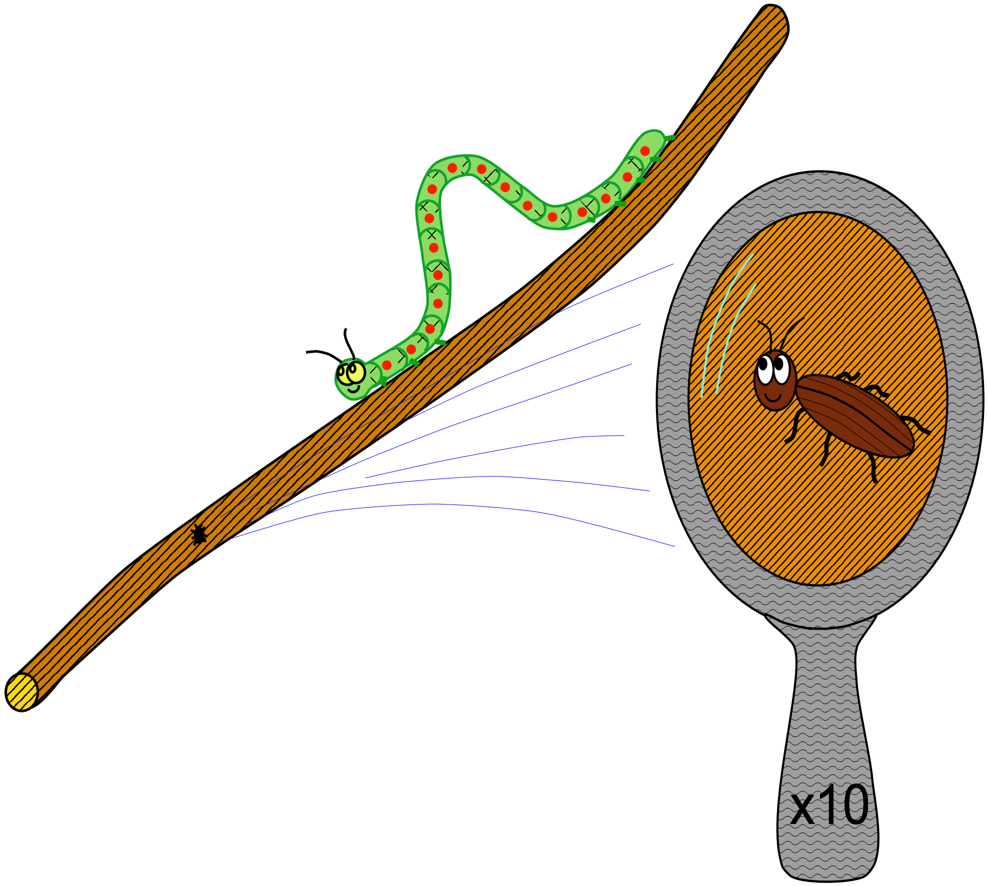
Почему дополнительные измерения невидимы?

- Они компактны и малы



Почему дополнительные измерения невидимы?

- Они компактны и малы



- ...и каков характерный размер?

Должен определяться гравитационным взаимодействием. В естественной системе единиц

$$\hbar = c = 1 \Rightarrow 1\text{ГэВ} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-14}\text{см}}$$

константа гравитационного взаимодействия

$$G_N = 6.67 \times 10^{-11}\text{м}^3\text{кг}^{-1}\text{с}^{-2} = 6.7 \times 10^{-39}\frac{1}{\text{ГэВ}^2}$$

является единственным размерным параметром и определяет масштабы энергий (масс) и длин (времен):

$$M_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{G_N}} = 1.2 \times 10^{19}\text{ГэВ} = 2.1 \times 10^{-5}\text{г}$$

$$L_{Pl} = \frac{1}{M_{Pl}} = 1.7 \times 10^{-33}\text{см} = 5.5 \times 10^{-44}\text{с}$$

- ...и каков характерный размер?

Должен определяться гравитационным взаимодействием. В естественной системе единиц

$$\hbar = c = 1 \Rightarrow 1\text{ГэВ} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-14}\text{см}}$$

константа гравитационного взаимодействия

$$G_N = 6.67 \times 10^{-11}\text{м}^3\text{кг}^{-1}\text{с}^{-2} = 6.7 \times 10^{-39}\frac{1}{\text{ГэВ}^2}$$

является единственным размерным параметром и определяет масштабы энергий (масс) и длин (времен):

$$M_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{G_N}} = 1.2 \times 10^{19}\text{ГэВ} = 2.1 \times 10^{-5}\text{г}$$

$$L_{Pl} = \frac{1}{M_{Pl}} = 1.7 \times 10^{-33}\text{см} = 5.5 \times 10^{-44}\text{с}$$

Размер дополнительных измерений очень мал: L_{Pl}!

На сегодняшний день мы достигли масштабов $\sim$ ТэВ$^{-1} \simeq 10^{-17}$см $\simeq 10^{16} L_{Pl}$!

Можно ли обойти полученное ограничение на размер дополнительных измерений?

Можно ли обойти полученное ограничение на размер дополнительных измерений?

Да!

- Гравитационная постоянная определяется из закона Ньютона

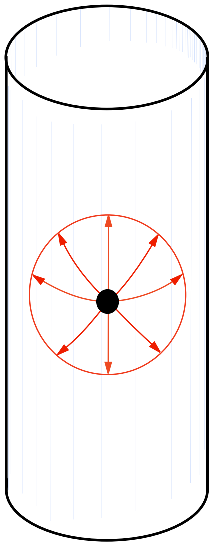
$$\vec{F}(r) = -\frac{1}{M_{Pl}^2}\frac{\vec{r}}{r}\frac{m_1 m_2}{r^2} = -m_2 \vec{\nabla} V(r)$$

$$\Delta V = \frac{4\pi}{M_{Pl}^2} m_1 \delta(\vec{r})$$

$$m_2 \int d^3 r \Delta V = -\oint d\vec{s}\vec{F} = \frac{4\pi}{M_{Pl}^2} m_1 m_2$$

- Закон Ньютона зависит от числа измерений.

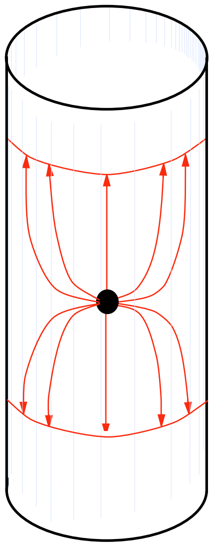
Рассмотрим $(2+1)$-мерный случай: одно пространственное измерение компактно, второе — нет.



При $r \ll L$

$$\oint d\vec{s}\vec{F} = 2\pi r F(r) = -\frac{2\pi}{M_{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{(3)}} \frac{m_1 m_2}{r}$$



При $r \gg L$

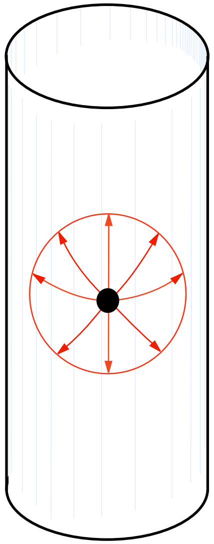
$$\oint d\vec{s}\vec{F} = 4\pi L F(r) = -\frac{2\pi}{M_{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{(3)}} \frac{m_1 m_2}{2L} \simeq$$

$$-\frac{1}{M_{(3)}} \frac{m_1 m_2}{V_{\text{Доп. изм.}}}$$

- Закон Ньютона зависит от числа измерений.

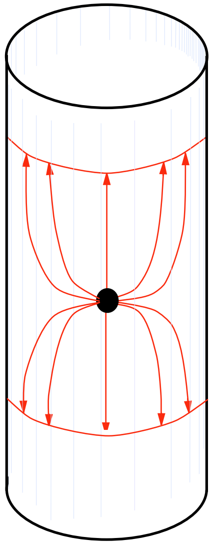
Рассмотрим $(2+1)$-мерный случай: одно пространственное измерение компактно, второе — нет.



При $r \ll L$

$$\oint d\vec{s}\vec{F} = 2\pi r F(r) = -\frac{2\pi}{M_{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{(3)}}\frac{m_1 m_2}{r}$$



При $r \gg L$

$$\oint d\vec{s}\vec{F} = 4\pi L F(r) = -\frac{2\pi}{M_{(3)}} m_1 m_2$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{(3)}}\frac{m_1 m_2}{2L} \simeq -\frac{1}{M_{(3)}}\frac{m_1 m_2}{V_{\text{Доп. изм.}}}$$

В общем случае d дополнительных измерений получаем

$$F(r) = -\frac{1}{M_{(d+4)}^{2+d}}\frac{m_1 m_2}{r^{2+d}} \quad \text{при} \quad r \ll L$$

$$F(r) = -\frac{1}{M_{(d+4)}^{2+d} V_d}\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{при} \quad r \gg L$$

$\boxed{\text{Эффективная масса Планка}}$

- Эффективная четырехмерная масса Планка равна

$$M_{Pl}^2 = M_{(d+4)}^{2+d} V_d$$

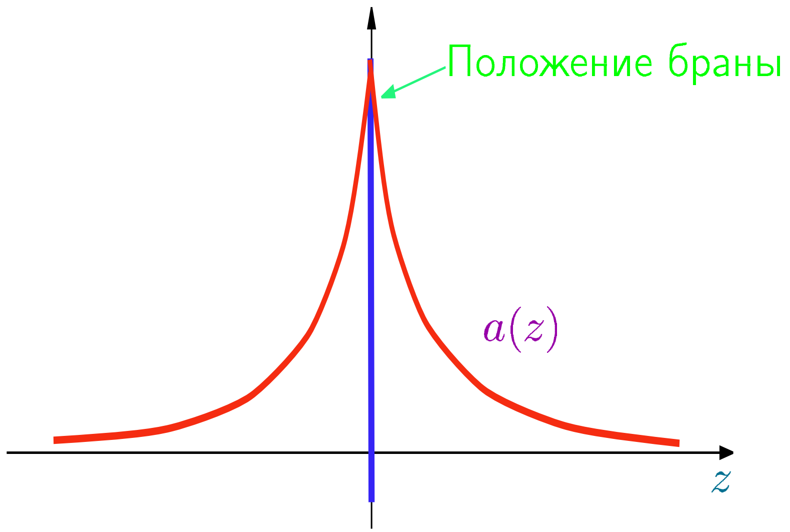
Рассмотрим частные случаи. Пусть $M_{(d+4)} = 1$ *ТэВ* — позволяет решить проблему калибровочной иерархии,

d	L
1	10^{15}см$\sim$ 100 а.е.
2	1мм
3	10^{-6}см

На сегодняшний день закон Ньютона экспериментально проверен вплоть до 0.1 *мм. Таким образом, даже случай* $d = 2$ *экспериментально еще не закрыт!*

Бесконечно большие дополнительные измерения. Модель Рэндалл-Сандрам.

Randall, Sundrum 1999



Брана (тонкая доменная стенка) находится в точке $z = 0$ пятимерного пространства-времени с отрицательной космологической постоянной Λ. При определенном соотношении между Λ и натяжением браны (плотностью энергии браны) решение уравнений Эйнштейна будет

$$ds^2 = a^2(z)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2$$

с масштабным фактором $a(z)$

$$a(z) = \mathrm{e}^{-k|z|}.$$

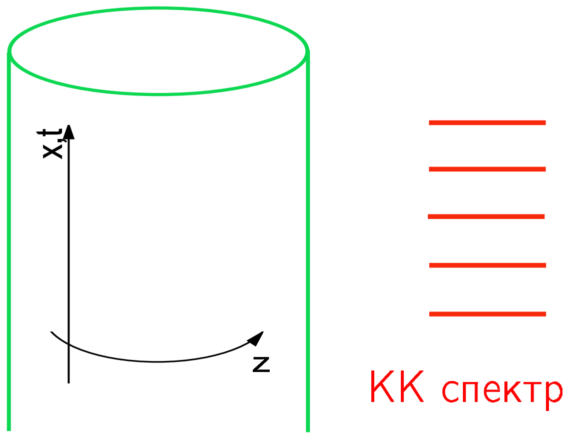
Здесь k является комбинацией космологической постоянной и натяжения браны.

Благодаря $a(z)$ гравитация на бране является четырехмерной!

Почему дополнительные измерения никак не проявляют себя в других взаимодействиях?

Почему дополнительные измерения никак не проявляют себя в других взаимодействиях?

- Редукция Калуцы-Клейна.



Решением уравнения Клейна-Гордона для безмассового скалярного поля с периодическими граничными условиями

$$\partial^2\Phi(x,z) \equiv \left(\partial_\mu^2 - \partial_z^2\right)\Phi = 0\ , \quad \Phi(x,z) = \Phi(x, z+2\pi L)$$

является

$$\Phi(x,z) = \sum_n \varphi_n^c(x)\cos\left(\frac{nz}{L}\right) + \varphi_n^s(x)\sin\left(\frac{nz}{L}\right)$$

$$\partial_\mu^2\varphi_n^{s,c} + \frac{n^2}{L^2}\varphi^{s,c} = 0$$

Дополнительные измерения $\Leftrightarrow$ бесконечный набор полей — Калуца-Клейновская башня — с массами $M_n = \dfrac{n}{L}$.

При достаточно малых L в спектре низкоэнергетической присутствует только нулевая мода $\varphi_0^c(x)$ ...

- . . . а что будет в случае больших дополнительных измерений?

При $L = 1$*мм*

$$M_1 = \frac{1}{L} = 2 \times 10^{-4}\text{эВ}\,,$$

и мы обнаружили бы вплоть до энергии 100 ГэВ

$$\frac{\text{100 ГэВ}}{M_1} \simeq 10^{13} \quad \text{новых состояний!}$$

- . . . а что будет в случае больших дополнительных измерений?

При $L = 1$*мм*

$$M_1 = \frac{1}{L} = 2 \times 10^{-4}\text{эВ}\,,$$

и мы обнаружили бы вплоть до энергии 100 ГэВ

$$\frac{\text{100 ГэВ}}{M_1} \simeq 10^{13} \quad \text{новых состояний!}$$

!!! НУЖЕН ДРУГОЙ МЕХАНИЗМ !!!

Локализация на доменной стенке.

Rubakov & Shaposhnikov, 1983

- Кинк (доменная стенка).

Рассмотрим в пятимерном пространстве-времени скалярное поле с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 - v^2)^2$$

В этой модели существует устойчивое статическое решение уравнений движения

$$\partial_z^2\varphi - 2\lambda\varphi(\varphi^2 - v^2) = 0$$

$$\varphi(z \to \pm\infty) = \pm v$$

называемое кинком — простейшим топологическим солитоном

$$\varphi_k(z) = v\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\lambda}vz\right)$$

- Фермион в поле кинка.

Рассмотрим безмассовый фермион, взаимодействующий с полем φ. Уравнение Дирака для такого фермиона в поле кинка имеет вид

$$i\partial_t\Psi + i\gamma_0\gamma_i\partial_i\Psi = (\gamma_0\gamma_5\partial_z + g\varphi_k\gamma_0)\Psi \equiv H_z\Psi$$

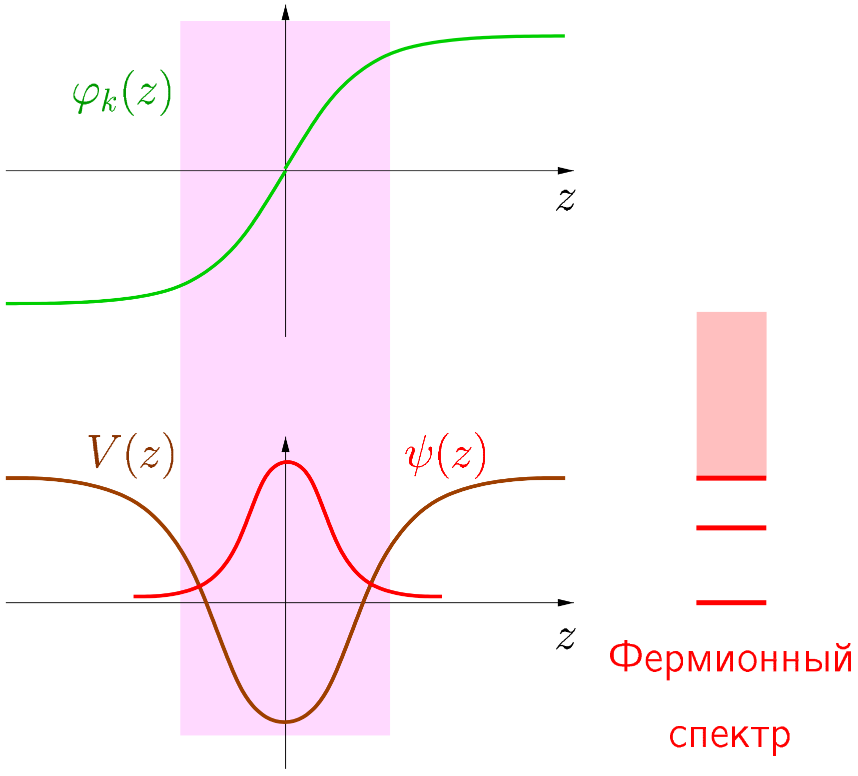
Если бы $\varphi = v$, то это было бы уравнение для фермиона с массой gv. Во внешнем поле кинка фермион имеет массу gv вне стенки, и нулевую массу на стенке. Поэтому фермион притягивается к стенке.

Будем искать решение в виде

$$\Psi(x,z) = \sum_n \psi_n(z) \otimes \chi_n(x)$$

$$H_z\psi_n = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z + g\varphi_k \\ \partial_z + g\varphi_k & 0 \end{pmatrix} \psi_n = m_n\psi_n$$

- Два свойства последнего уравнения:



$*$ *Существует* одна *нулевая мода, локализованная на стенке, и она левая*

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \exp\left[-g\int\limits^z \varphi_k(y)dy\right] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}vz\right]^{-\sqrt{\frac{g^2}{\lambda}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1-\gamma_5}{2}\psi_0 = 0$$

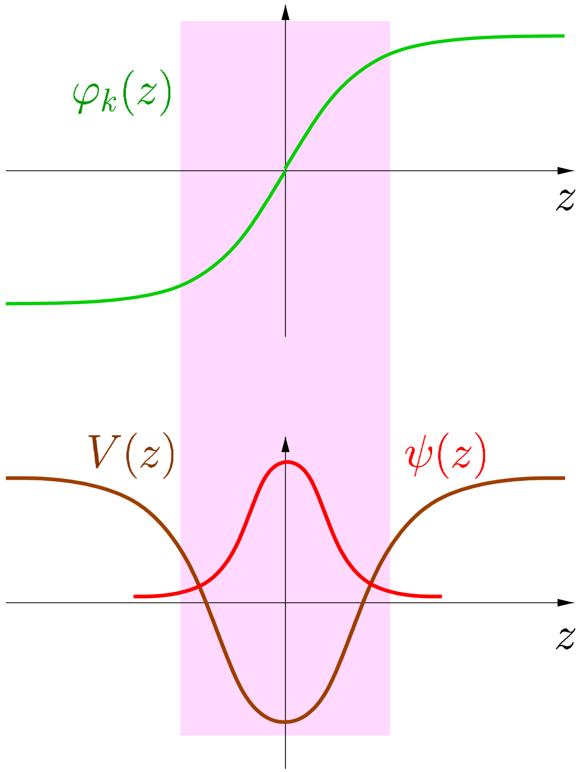
Размер локализации $(vg)^{-1}$

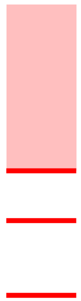
$*$ *Возможно существуют несколько дискретных уровней с*

$$m_n \simeq gv$$

При $m > gv$ *спектр непрерывный.*

- Два свойства последнего уравнения:





Фермионный спектр

∗ *Существует одна нулевая мода, локализованная на стенке, и она левая*

$$\psi_0 = \left(\exp\left[-g\int_0^z \varphi_k(y)dy\right] \right) = \left(\underset{0}{\left[\mathrm{ch}\sqrt{\lambda}vz\right]^{-\sqrt{\frac{g^2}{\lambda}}}} \right)$$

$$\frac{1-\gamma_5}{2}\psi_0 = 0$$

Размер локализации $(vg)^{-1}$

∗ *Возможно существуют несколько дискретных уровней с*

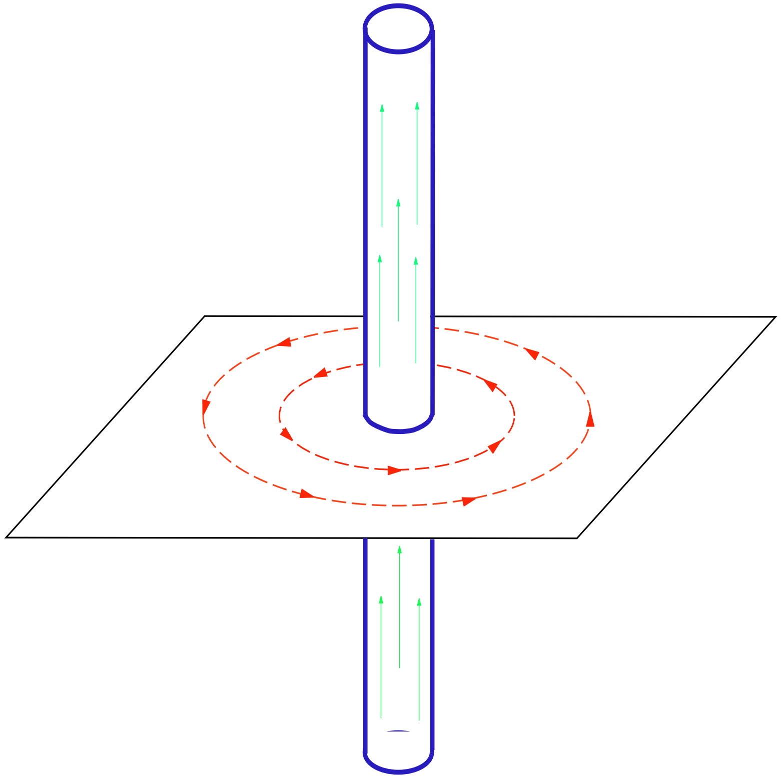
$$m_n \simeq gv$$

При $m > gv$ *спектр непрерывный.*

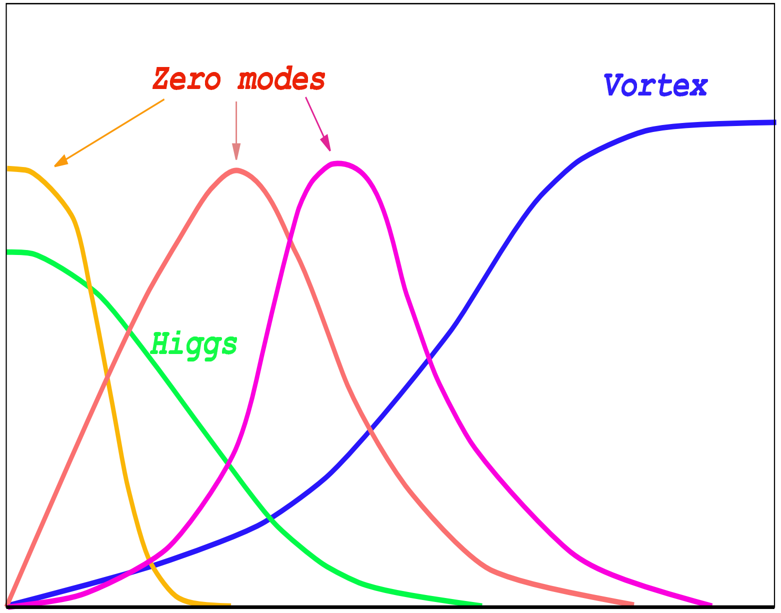
Можно локализовать киральный фермион в дополнительных измерениях!

Происхождение трех фермионных поколений.

Frere,Libanov,Nugaev,Troitsky
2000-2005



- Наше четырехмерное пространство представляет собой кор вихря Абрикосова-Нильсена-Олесена в шестимерном пространстве-времени.
- Дополнительные измерения могут быть как бесконечно большими, так и компактными.
- В шестимерном пространстве существует лишь одно векторoподобное (по отношению к полям стандартной модели) поколение фермионов.



- Благодаря специальному взаимодействию фермионов с полями вихря, три нулевые моды соответствующей киральности локализуются в центре вихря. Эти три моды можно интерпретировать как три фермионных поколения стандартной модели.

- В результате взаимодействия поля Хиггса с полем вихря, первое получает ненулевое вакуумное среднее в коре вихря и стремится к нулю вне вихря.

- Взаимодействия фермионов с полем Хиггса дают фермионным нулевым модам ненулевые массы и смешивания в эффективной четырехмерной теории.

- Из-за разных профилей фермионных волновых функций возникает степенная иерархия фермионной массовой матрицы. При этом число параметров модели меньше числа параметров стандартной модели.

- Нейтрино приобретает ненулевую, но малую массу, если допустить существование правого нейтрино, свободно распространяющегося в дополнительных измерениях.
- Характерной чертой модели является предсказание процессов с нарушением лептонного числа. Причиной этого служит происхождение фермионов из одного поколения, благодаря чему ненулевые моды калибровочных бозонов могут приводить к нарушению номера поколения. Однако, при этом оказывается, что основным процессом будет распад каона

$$K_0 \to \mu^{\pm} e^{\mp}$$

Этот процесс дает ограничение на размер локализации калибровочных бозонов порядка $(10\text{ТэВ})^{-1}$.

Заключение

- Большие дополнительные измерения могут объяснить многие актуальные вопросы современной физики, такие как

  — проблему калибровочной иерархии;

  — проблему происхождения фермионных поколений;

  — проблему иерархии фермионной массовой матрицы;

  — проблему массы нейтрино;

  — проблему космологической постоянной и темной материи;

  — . . . и многие другие.

- Теории с большими дополнительными измерениями предсказывают множество новых явлений и эффектов, таких как
  - — исчезновение частиц «в никуда»;
  - — модификацию гравитации на сверхгалактических масштабах;
  - — редкие процессы;
  - — рождение квантовых черных дыр на ускорителях;
  - — . . . и многие другие.

- Теории с большими дополнительными измерениями предсказывают множество новых явлений и эффектов, таких как
  — исчезновение частиц «в никуда»;
  — модификацию гравитации на сверхгалактических масштабах;
  — редкие процессы;
  — рождение квантовых черных дыр на ускорителях;
  — ... и многие другие.
- Модели с большими дополнительными измерениями еще далеки от завершения:
  — до сих пор не построен приемлемый механизм локализации калибровочных полей;
  — не решена проблема сильной связи или возникновения духов в моделях с модифицированной гравитацией;
  — ... и многие другие.

Неудивительно, что эти модели интересны и увлекательны.

Неудивительно, что эти модели интересны и увлекательны.

Осталось только открыть дополнительные измерения. . .