МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра физики колебаний

Описание задачи спецпрактикума

РАВНОВЕСНЫЙ ШУМ

СТЕПАНОВ А.В.

МОСКВА 2012 г.

В задаче изучаются равновесные флуктуации тока и напряжения, способы описания и измерения шумов усилителей, подавление шумов в системе с отрицательной обратной связью. Краткое описание характеристик случайных процессов приведено в Приложении 1.

РАВНОВЕСНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ШУМ

Равновесные флуктуации имеют место в любой термодинамически равновесной системе. Другими названиями этого шума являются тепловой шум, шум Найквиста, шум Джонсона, броуновский шум. Джонсон первый экспериментально обнаружил эти электрические флуктуации (1928), а Найквист получил выражение для мощности шума (1928). Формула Найквиста является частным случаем флуктуационно-диссипационной теоремы (1951). На связь флуктуаций и трения впервые указал Эйнштейн при рассмотрении движения броуновской частицы (1905).

Система с постоянным числом частиц находится в термодинамическом равновесии со своим окружением (термостатом), если средний поток энергии между ними равен нулю. Равновесие подразумевает взаимодействие системы и термостата посредством некоторого физического механизма, который в среднем уравнивает противоположно направленные потоки энергии: от системы к термостату и обратный потоки. Это взаимодействие происходит на микроскопическом уровне и носит случайный характер. Флуктуации возникают уже в силу того, что термостат состоит из огромного числа частиц и поэтому имеет исключительно сложную траекторию движения в фазовом пространстве.

Когда на систему действует внешняя сила, равновесие нарушается, и возникает средний поток энергии от системы к термостату - диссипация энергии, сообщаемой системе за счет действия силы. Если внешняя сила достаточно мала, отклонение системы от равновесного состояния также невелико. Поэтому, в первом приближении, механизм, контролирующий потоки энергии между системой и термостатом, остается прежним. Таким образом, один и тот же механизм взаимодействия системы и термостата отвечает и за флуктуации и за рассеяние энергии. Отсюда возникает связь между величиной равновесных флуктуаций в системе и макроскопическими параметрами, отвечающими за диссипацию энергии при действии внешней силы (диссипативными параметрами, коэффициентами трения, активными сопротивлениями в электрических системах). Флуктуационно-диссипационная теорема дает количественное выражение этой связи.

Рассмотрим систему двух линейных двухполюсников $Z_{1,2} = R_{1,2} + jX_{1,2}$, которые находятся в равновесии с термостатом (Рис.1). Для того чтобы учесть флуктуационное действие термостата, в систему вводят так называемые случайные (шумовые) источники. Их представляют в виде генераторов шумовой э.д.с. $e(t)$, включенных последовательно с сопротивлением, или в виде генераторов шумового тока $i(t)$, включенных параллельно сопротивлению (Рис.2). Оба представления эквивалентны, пересчетное соотношение: $e(\omega)= i(\omega)Z(\omega)$.

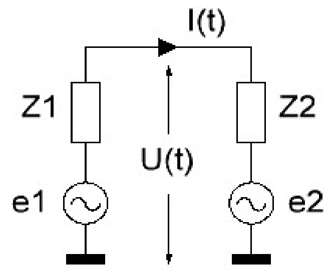


Рис.1

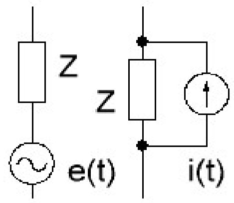


Рис.2

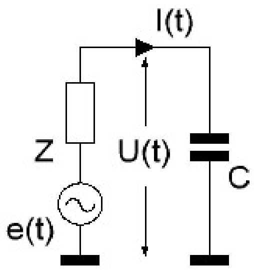


Рис.3

Поскольку система на Рис.1 находится в равновесии, средняя мощность в цепи, соединяющей двухполюсники должна быть равна нулю: <U(t)I(t)> = 0. Т.е. равновесный ток и напряжение двухполюсника взаимно не коррелированны. Э.д.с. e_1 и e_2 независимы, так как действие термостата на каждый из двухполюсников не зависит от присутствия другого двухполюсника. Тогда в спектральном представлении условие нулевой мощности выражается в виде:

$$\int_0^\infty df \frac{R_1 S_2 - R_2 S_1}{|(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)|^2} = 0 \quad ,$$

где $S_{1,2}$ – спектральные плотности шумовых э.д.с. $e_{1,2}$.

Полученное равенство выполняется для произвольных двухполюсников, если подынтегральное выражение равно нулю. Это означает, что шумовая э.д.с. равна нулю, если активное сопротивление нулевое, и что для любого двухполюсника Z отношение R/S является некоторой универсальной постоянной. Ее значение можно получить, рассмотрев частный случай равновесной системы.

На микроскопическом уровне причиной флуктуаций напряжения и тока в проводнике является хаотическое движение носителей заряда. Так, в металле оно обусловлено случайным рассеянием электронов на колебаниях кристаллической решетки, которая играет роль термостата для электронной системы. Время корреляции флуктуаций определяется характерным временем свободного пробега носителей, поскольку в ходе столкновений теряется информация о первоначальной скорости носителя. В большинстве практических случаев время корреляции, обусловленное конечным временем пробега носителей (например, порядка 10^{-14} сек в чистых металлах при комнатной температуре), пренебрежимо мало по сравнению с инерционностью электрической цепи, в которую включено сопротивление. Поэтому для чисто активного сопротивления хороших проводников можно считать, что случайные источники $e(t)$ и $i(t)$ являются белым шумом.

В качестве примера для расчета равновесного шума возьмем RC-цепочку, показанную на Рис.3. Э.д.с. $e(t)$ считается белым шумом, и ее спектральная плотность S_E является некоторой постоянной величиной. Требуется найти S_E .

Определив коэффициент передачи э.д.с. $e(t)$ в напряжение на конденсаторе $u(t)$, можно получить выражение для спектральной плотности флуктуаций напряжения на конденсаторе $S_U(f)$:

$$S_U(f) = \frac{1}{1 + (2\pi f \tau)^2} S_E \quad ,$$

где $\tau = RC$ - постоянная времени цепи. Спектр такого вида называется спектром Лоренца и характеризует шум в релаксационной системе, имеющей одну постоянную времени.

В состоянии термодинамического равновесия при температуре T средняя энергия, запасенная в конденсаторе, определяется равенством:

$$\frac{C < u^2(t) >}{2} = \frac{k_B T}{2}, \quad k_B \text{ - постоянная Больцмана } (1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}).$$

Интегрирование спектральной плотности напряжения $S_U(f)$ по всем частотам и подстановка полученной величины мощности шумового напряжения $< u^2 >$ в предыдущее соотношение дает выражения для спектральной плотности шумовой э.д.с. и, следовательно, спектральной плотности шумового тока, - формулу Найквиста:

$$S_E = 4k_B TR \quad , \qquad S_I = 4k_B T / R \,. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что в общем случае произвольного двухполюсника с комплексным сопротивлением $Z(f)$ спектральные плотности равновесной шумовой э.д.с. и равновесного шумового тока соответственно равны:

$$S_E(f) = 4k_B T \cdot \mathrm{Re}\{Z(f)\},$$

$$S_I(f) = 4k_B T \cdot \mathrm{Re}\{Z(f)\} / |Z(f)|^2 .$$

Вид этих соотношений показывает, что тепловые флуктуации связаны с активным сопротивлением цепи. Реактивные элементы лишь преобразуют спектр флуктуаций.

Численный пример для RC-цепочки, показанной на Рис.3: при комнатной температуре, сопротивлении 1 кОм и емкости 10 пФ шумовое напряжение $u(t)$ имеет полосу частот ($1/2\pi\tau$) 16 МГц, спектральную плотность в этой полосе $17 \cdot 10^{-18}$ В^2/Гц, мощность шума $4 \cdot 10^{-10}$ В^2 (среднеквадратичное отклонение 20 мкВ).

Следует отметить, что формула Найквиста следует из общих соображений о равновесии линейных двухполюсников и поэтому справедлива для любого реального двухполюсника с той степенью точности, с которой его свойства описываются линейной системой. Если используется экспериментальное значение импеданса, то при этом автоматически учитываются все механизмы электрических потерь (например, рассеяние электронов на фононах, дефектах решетки, вязкое трение при движении ионов в электролите, потери на излучение и т. д.) и их частотная зависимость в реальной системе.

Приведенные выражения для теплового шума справедливы в классической области, когда средняя энергия тепловых колебаний намного больше энергии кванта электромагнитного излучения:

$$k_B T >> hf, \quad h \text{ - постоянная Планка } (6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}*\text{сек}),$$

и справедливо классическое выражение для средней энергии флуктуаций, приходящейся на одну степень свободы: $E = k_B T/2$.

В квантовой области приведенные выше выражения для спектральной плотности шума сохраняют вид, но в них вместо величины $k_B T$ (средняя энергия классического осциллятора) следует использовать ее квантовый аналог:

$$k_B T \quad \to \quad \frac{1}{2}hf + \frac{hf}{\exp(hf / k_B T) - 1} \; .$$

При комнатной температуре (300К) равенству энергий $k_B T = hf$ соответствует частота $6 \cdot 10^{12}$ Гц, что соответствует длине волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$ мм. На более низких частотах справедлива классическая формула Найквиста. Для длины волны $\lambda = 3$ см, соответствующей частоте $f = 10^{10}$ Гц, формула Найквиста выполняется вплоть до температуры жидкого гелия $(T = 4{,}2K)$.

Для нелинейных систем и систем с изменяющимися во времени параметрами (в том числе, - флуктуирующими) формула Найквиста, строго говоря, несправедлива. Но в случае слабой нелинейности и малых изменений параметров поправки малы по величине. Для нелинейной чисто резистивной системы в формуле Найквиста вместо активного сопротивления R следует использовать дифференциальное сопротивление в рабочей точке двухполюсника: $R_d = dU/dI$, (Гупта, 1978).

ШУМЫ УСИЛИТЕЛЯ

Усилители электрических сигналов являются наиболее распространенным элементом измерительных и коммуникационных систем. Усилители, как и любые другие электронные устройства, содержат внутренние источники флуктуаций. Шумы действуют наряду с усиливаемым сигналом и искажают его. Влияние шума наиболее существенно, когда величина сигнала мала, поэтому в первую очередь важны шумы, присутствующие во входной цепи усилителя.

Эквивалентная схема усилителя напряжения с источниками шума показана на Рис.4. Источник сигнала представлен генератором напряжения $e_R(t)$ и внутренним сопротивлением R, которое предполагается чисто активным. Реальный усилитель с входным сопротивлением, намного превышающим R, рассматривается в виде комбинации идеального, не шумящего усилителя и входных шумовых источников напряжения $e(t)$ и тока $i(t)$. Эти источники описывают реальные шумовые напряжения и токи, которые действуют во входной цепи усилителя, а также учитывают шумы, которые действуют в других цепях усилителя и с соответствующими коэффициентами могут быть приведены к входу усилителя. Шумовое напряжение $e_{ВЫХ}$, действующее на выходе усилителя, пересчитывается в эквивалентное входное напряжение $e_{ВЫХ}/K$, K — коэффициент усиления. Поэтому для уменьшения влияния выходных шумов усилителя и шумов следующих каскадов усиления коэффициент усиления должен быть достаточно большой.

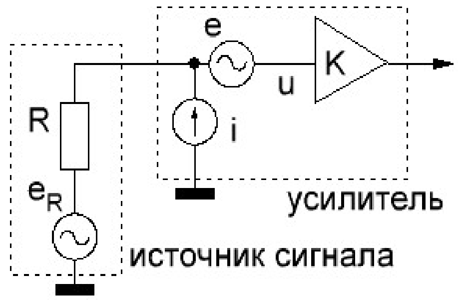


Рис.4

Всякий реальный источник сигнала помимо полезной составляющей производит некоторый шум. Идеальный источник с минимальным уровнем шума генерирует только тепловые флуктуации. Качество усилителя с точки зрения его шумовой характеристики оценивается тем, насколько шум, вносимый усилителем, мал по сравнению с собственным шумом источника сигнала. Поэтому при рассмотрении шумов усилителя достаточно считать, что источник сигнала вырабатывает только тепловые флуктуации.

Напряжение $u(t)$, действующее на входе идеального усилителя, является суммой вкладов от всех генераторов схемы:

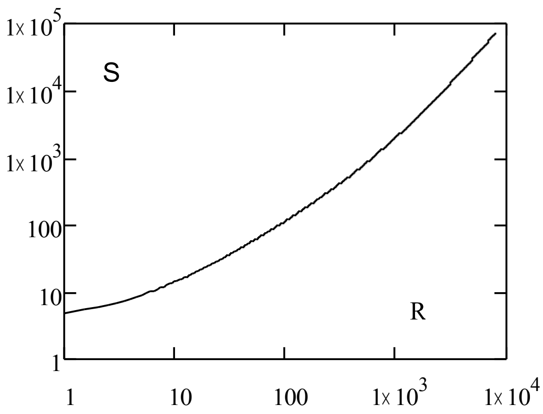
$$u(t) = e_R + e + R \cdot i\,.$$

В предположении, что шумовые источники статистически независимы, спектральная плотность входного напряжения определяется суммой спектральных плотностей соответствующих слагаемых:

$$S_U(f) = 4k_BTR + S_E(f) + R^2S_I(f) = 4k_BTR\cdot\{1+\frac{S_E(f)}{4k_BTR}+\frac{RS_I(f)}{4k_BT}\}. \qquad (2)$$

Фигурными скобками выделено выражение, показывающее, во сколько раз полный шум входной схемы превышает тепловой шум источника сигнала. Это отношение называется **коэффициентом шума усилителя (F)**. Для идеального усилителя без внутренних шумов коэффициент шума равен единице.

Выражение (2) показывает, что шум усилителя существенно зависит от сопротивления источника сигнала. Пример зависимостей мощности шума и коэффициента шума от величины сопротивления представлен на Рис.5.



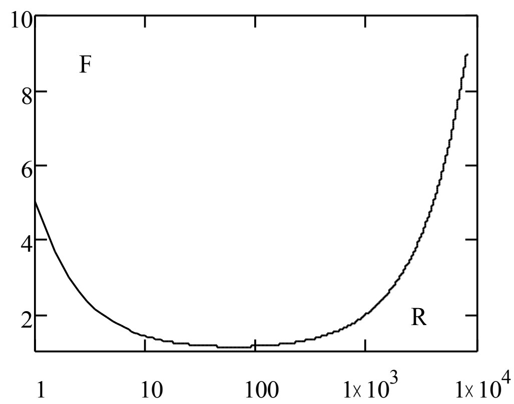


Рис.5. Зависимости спектральной плотности $S = S_U/4k_BT$ и коэффициента шума F от сопротивления источника сигнала R . Величина R выражена в единицах кОм, предполагается, что шумы усилителя *e(t)* и *i(t)* имеют эквивалентные шумовые сопротивления 4кОм и 1МОм соответственно.

При малых значениях сопротивления доминирует шумовое напряжение усилителя *e(t)*. В этой области шум схемы слабо зависит от сопротивления источника сигнала и равен шуму усилителя с закороченным входом. При увеличении сопротивления, начиная со значения порядка $S_E(f)/4k_BT$, начинает преобладать тепловой шум источника сигнала, и мощность шума линейно растет вместе с сопротивлением. Шумы усилителя относительно невелики, и коэффициент шума усилителя близок к единице. При еще большем увеличении сопротивления, в области $R > 4k_BT/S_I(f)$ сказывается влияние шумового тока усилителя *i(t)*. Здесь мощность шума растет пропорционально квадрату сопротивления, и коэффициент шума ухудшается.

Область оптимальных значений сопротивления, при которых коэффициент шума, близок к единице, определяется мощностью шумовых источников усилителя *e(t)* и *i(t)*. Для усиления сигналов низкоомных датчиков предпочтительны усилители с малыми значениями шумового напряжения. Здесь более подходят малошумящие усилители на биполярных транзисторах. При работе с высокоомными источниками необходимы усилители с минимальным шумовым током. В этом случае применяются усилители на полевых транзисторах.

Вследствие частотной зависимости спектральных плотностей шумовых источников *e(t)* и *i(t)* коэффициент шума и область оптимальных сопротивлений также зависят от частоты. В частности, на низких частотах коэффициент шума обычно ухудшается из-за фликкерных шумов. Для частот порядка нескольких килогерц типичные значения спектральных плотностей напряжения и тока малошумящих усилителей составляют: $1нВ/\sqrt{Гц}$ и $0.1пА/\sqrt{Гц}$ - для усилителей на биполярных транзисторах, и $10нВ/\sqrt{Гц}$ и $1фА/\sqrt{Гц}$ - для усилителей на полевых транзисторах.

Для сравнения шумовых напряжений и токов, действующих в системе, с уровнем равновесных флуктуаций системы удобно выражать шумовое напряжение или ток в виде **эквивалентного шумового сопротивления**. Величина шумового сопротивления для заданной температуры T определяется по формуле Найквиста (1) и равна сопротивлению R, равновесное шумовое напряжение (ток) которого равен данному шумовому напряжению (току). Например, при температуре 300К, значение $1нВ/\sqrt{Гц}$ соответствует равновесному напряжению сопротивления 60 Ом, а значение $1фА/\sqrt{Гц}$ - равновесному току сопротивления 17 ГОм.

Другим используемым представлением является выражение шумового напряжения или тока в виде **эквивалентной шумовой температуры**. Величина шумовой температуры для заданного сопротивления R определяется по формуле Найквиста (1) и равна температуре T сопротивления R, равновесное шумовое напряжение (ток) которого равен данному шумовому напряжению (току).

В представлениях шумовых сопротивлений (R_X) и шумовых температур (T_X) выражение (2) для шума усилителя имеет вид:

$$S_U(f) = 4k_BTR\cdot\{1+R_E(f)/R+R/R_I(f)\} = 4k_BTR\cdot\{1+\frac{T_E(f)+T_I(f)}{T}\}$$

Эти представления следует использовать с должной осторожностью, помня о том, что они привязаны к конкретным значениям температуры и сопротивления источника сигнала. В частности, получается, что шумовая температура усилителя (T_E+T_I) зависит от сопротивления источника сигнала, хотя соответствующие напряжения и токи возникают внутри усилителя.

ШУМЫ СИСТЕМЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Принцип отрицательной обратной связи повсеместно применяется для стабилизации параметров системы при наличии помех, возмущающих систему, изменения условий работы аппаратуры (напряжения питания, температуры и т. п.), для уменьшения нелинейностей в трактах усиления сигналов. Для компенсации внешнего воздействия на систему в цепи обратной связи вырабатывается сигнал, пропорциональный воздействию. Поэтому обратная связь является основой многих измерительных методов. Ниже рассматриваются шумы простейшей системы с обратной связью.

В измерительных устройствах широко используются **усилители для регистрации тока** (другие названия — преобразователи ток-напряжение, трансимпедансные усилители). Обычно преобразователь представляет собой усилитель напряжения с большим коэффициентом усиления, охваченный отрицательной обратной связью (Рис.6а).

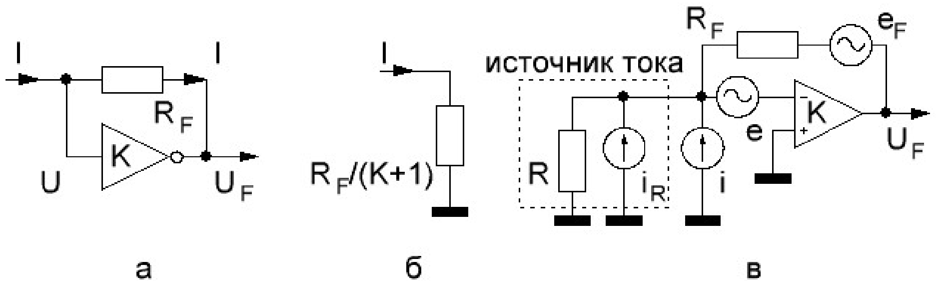


Рис.6. Регистрация тока: а - схема преобразователя ток-напряжение, б - эквивалентное входное сопротивление, в — схема с источниками шума.

Принцип действия заключается в следующем. Входное сопротивление инвертирующего усилителя с коэффициентом усиления K предполагается настолько большим, что можно считать, что ток I, создаваемый внешним источником, протекает только через сопротивление обратной связи R_F и создает на нем падение напряжения $I{\cdot}R_F$. С другой стороны, входное (U) и выходное (U_F) напряжения усилителя связаны соотношением $U_F = - KU$. Если коэффициент усиления стремится к бесконечности, конечное значение напряжения на выходе может получаться только в том случае, когда напряжении на входе стремится к нулю ($U \to 0$). В результате получается, что выходное напряжение пропорционально току: $U_F = -I{\cdot}R_F$. Коэффициент пропорциональности R_F не зависит от сопротивления внешней цепи, по которой течет ток, и называется трансимпедансом.

Кажущееся сопротивление между входом и землей, которое создает рассмотренная схема, равно $R_F /(K+1)$ (Рис.6б). При большом коэффициенте усиления оно стремится к нулю, что и требуется для идеального измерителя тока. При $K \to \infty$ вход усилителя имеет нулевой потенциал независимо от тока в цепи, но не соединен с землей напрямую. Эта точка называется виртуальная земля.

В практических схемах преобразователей тока обычно используются операционные усилители. Такая схема с источниками шума показана на Рис.6в, где i_R и i_F - тепловые шумы внешнего источника тока с внутренним сопротивлением R и сопротивления обратной связи, i, e - шумы операционного усилителя. В предположении бесконечного коэффициента усиления K полный шумовой ток I, создаваемый на входе усилителя всеми источниками шума, определяется выражением:

$$I(t) = i_R + i + e/R + e_F/R_F \ .$$

Отсюда следует, что для независимых шумовых источников спектральная плотность полного шумового тока равна:

$$S_I(f) = \frac{4k_BT}{R} + \frac{S_e(f)}{R^2} + S_i(f) + \frac{4k_BT}{R_F} = \frac{4k_BT}{R} \cdot \{1 + \frac{S_e(f)}{4k_BTR} + \frac{RS_i(f)}{4k_BT} + \frac{R}{R_F}\} \ .$$

Фигурными скобками выделено выражение для коэффициента шума. Он отличается от приведенного выше коэффициента шума усилителя (2) наличием слагаемого R/R_F, которое отражает влияние шума цепи обратной связи. Для того чтобы этот шум не сказывался, сопротивление обратной связи должно быть во много раз больше внутреннего сопротивления источника измеряемого тока.

В иной трактовке схема на Рис.6в является усилителем напряжения (Рис.7). Действительно, если источник сигнала представить в виде сопротивления R и последовательно включенной э.д.с. e_R, то за счет образования виртуальной земли при большой величине K ток этого источника будет равен e_R/R, а выходное напряжение равно $-e_R R_F/R$. Коэффициент усиления напряжения равен $-R_F/R$. Применительно к операционным усилителям такая схема называется инвертирующим включением операционного усилителя. Коэффициент шума, разумеется, не зависит от трактовки: усилитель тока или напряжения.

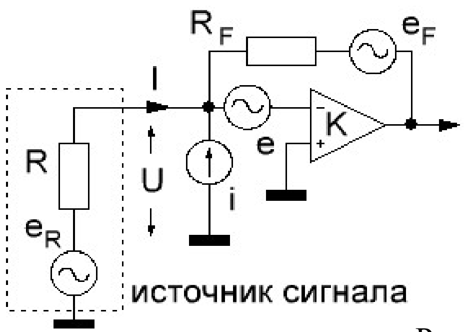


Рис.7

Схему на Рис.7 можно рассматривать и как **систему автоматического регулирования**. Пусть э.д.с. e_R является некоторым внешним воздействием (помехой), которое в отсутствие схемы обратной связи создает на выводах сопротивления R нежелательное напряжение. Как было показано выше, при бесконечно большом коэффициенте усиления K нешумящая схема обратной связи вырабатывает такой сигнал, что напряжение U на выводах сопротивления равно нулю - помеха полностью подавляется.

В действительности шумы всегда есть, а коэффициент усиления нельзя сделать бесконечным из-за того, что неизбежный фазовый сдвиг в цепи обратной связи приведет к самовозбуждению системы. Шумы схемы обратной связи препятствуют подавлению помехи, поэтому необходимо, чтобы они были малы по сравнению с помехой.

Спектральная плотность напряжение на сопротивлении R имеет вид:

$$S_U(f) = \frac{1}{(1+G)^2}(G^2 S_e + S_R), \qquad (3)$$

где S_e - спектральная плотность шумового напряжения усилителя, S_R - спектральная плотность э.д.с. e_R. Остальными шумами можно пренебречь, если шумовые токи усилителя и сопротивления R_F малы по сравнению с эквивалентным током э.д.с. e_R : e_R/R. Величина G - коэффициент усиления в петле обратной связи: $G = K{\cdot}R/(R+R_F)$, называется петлевым усилением. Предполагается, что $R_F >> R$.

Выражение (3) показывает, что петлевое усиление по-разному влияет на помеху и на шум системы регулирования. С увеличением усиления подавление помехи улучшается, но при этом флуктуации, обусловленные собственным шумом системы регулирования, наоборот, возрастают. Нетрудно показать, что минимуму флуктуаций U на сопротивлении R соответствуют условия:

$$\min S_U(f) = \frac{S_e S_R}{S_e + S_R}, \quad G_{opt} = \frac{S_R}{S_e}.$$

Система регулирования имеет практическое значение лишь, когда ее шум намного меньше помехи, т.е. выполняются условия: $S_R >> S_e$, $G >> 1$, $\min S_U = S_e$. В этом случае минимум шума очень слабый, и точная настройка на этот минимум не важна. Но и увеличение усиления сверх оптимального значения не имеет никакого смысла. Иллюстрация дана на Рис.8.

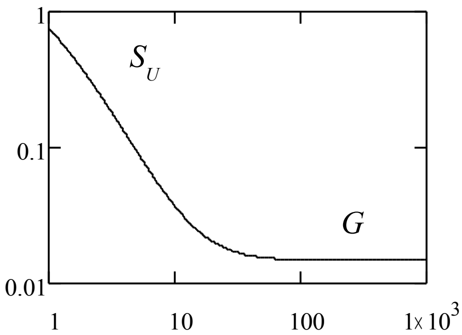


Рис.8. Зависимость мощности флуктуаций S_U от петлевого усиления G. В относительных единицах: $S_R = 3$, $S_e = 0.015$.

Вернемся к случаю, когда э.д.с. e_R -тепловой шум сопротивления R. Из предыдущего рассмотрения следует, что обратная связь подавляет флуктуации напряжения на сопротивлении, поэтому их величина уменьшается по сравнению с равновесным шумом этого сопротивления в отсутствие обратной связи. Механизм этого уменьшения можно пояснить следующим образом.

Пусть к сопротивлению R параллельно подключено другое сопротивление r , имеющее ту же температуру T. При изменении величины r в соответствии с формулой Найквиста будут изменяться шумовые напряжение и ток, однако система будет оставаться в состоянии равновесия, и средняя мощность в цепи всегда будет равна нулю (напряжение и ток не коррелируют). Если теперь изменить температуру T_r сопротивления r , то равновесие системы нарушится. В случае $T_r > T$ возникает поток электрической энергии от сопротивления r к сопротивлению R , и в цепи возникает корреляция тока и напряжения. В случае $T_r < T$ направление потока энергии и знак корреляции тока и напряжения изменятся на противоположные значения.

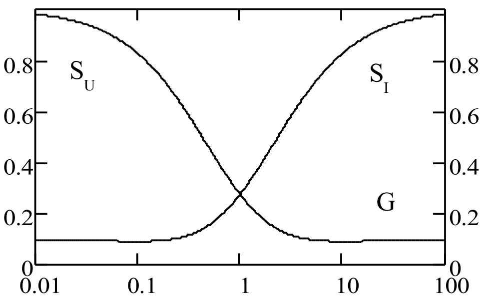
Как указывалось выше, схема обратной связи, подключенная к сопротивлению R, эквивалентна подключению сопротивления величиной $R_F/(K+1)$. «Температура» этого сопротивления определяется шумами схемы обратной связи и отличается от физической температуры сопротивления R. Поэтому рассматриваемая система является неравновесной. При изменении усиления изменяется как величина эквивалентного сопротивления схемы обратной связи, так и его эффективная температура.

В предположении, что $R_F >> R$, и что шумы усилителя малы по сравнению с шумом сопротивления R, получаются следующие выражения для спектральных плотностей напряжения и тока, а также для их взаимной спектральной плотности:

$$S_U(f) = \frac{4k_B TR}{(1+G)^2}(x_e G^2 + 1), \qquad S_I(f) = \frac{4k_B T}{R(1+G)^2}(G^2 + x_I),$$

$$S_{IU}(f) = \frac{4k_B T}{(1+G)^2}(G - x_e G^2 - x_I), \qquad (3)$$

где $x_e = R_e/R$, $x_I = R/R_I << 1$ – малые параметры, R_e ,R_I - шумовые сопротивления генераторов шумового напряжения и шумового тока усилителя $e(t)$, $i(t)$. Зависимости иллюстрируют графики на Рис.9.



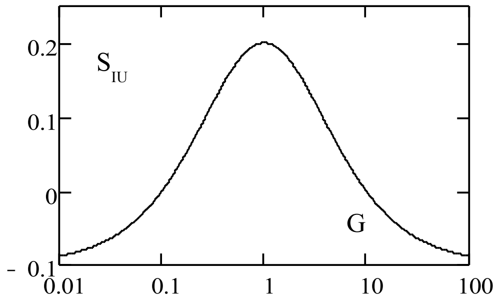


Рис.9. Зависимости спектров напряжения и тока и их взаимного спектра от петлевого усиления. Спектры соответственно выражены в единицах $4k_BTR$, $4k_BT/R$ и $4k_BT$; параметры $x_e = x_I = 0.1$.

Можно выделить три области значений петлевого усиления. При малых *G* эффективная температура схемы обратной связи больше температуры сопротивления, и средний поток энергии направлен к сопротивлению. Это же происходит и в области больших значений *G* . С увеличением *G* со стороны малых значений и при его уменьшении со стороны больших значений эффективная температура схемы обратной связи уменьшается.

При определенных значениях *G* система становится квазиравновесной, и средний поток энергии становится равным нулю. Этим точкам соответствуют минимум флуктуаций тока сопротивления при малых *G* и минимум флуктуаций напряжения на сопротивления при больших *G* .

Между этими точками располагается область, в которой эффективная температура схемы обратной связи меньше температуры сопротивления *R*, и средний поток энергии направлен от сопротивления. Из приведенных соотношений следует, что при $G\approx 1$ взаимная спектральная плотность достигает максимального значения

$$\max S_{IU} \approx k_B T(1 - x_e - x_I)\,.$$

Этот максимум соответствует случаю, когда к сопротивлению *R* подключено такое же по величине эквивалентное сопротивление схемы обратной связи, но имеющее шум намного меньше теплового шума сопротивления *R*.

Таким образом, схема обратной связи выступает в роли своеобразного «демона Максвелла», который управляет потоком энергии между сопротивлением *R* и схемой обратной связи, и который может отбирать энергию тепловых флуктуаций у сопротивления. Мощность такого стохастического охлаждения крайне мала. Полосе частот действия обратной связи Δf соответствует средняя электрическая мощность $S_{IU}\Delta f$. Ее максимальное значение равно $k_B\Delta f$, что при комнатной температуре для полосы частот 1 МГц составляет примерно $4\cdot 10^{-15}$ Вт.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Упрощенная схема лабораторного макета показана на Рис.10.

С помощью усилителя, имеющего коэффициент усиления 230, измеряется шумовое напряжение **U** на сопротивлении **R**. Величина сопротивления задается с помощью переключателя **П1**. Соответствие положения переключателя и значения сопротивления приведено в таблице:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R	0	1к	3.9к	7.5к	24к	62к	160к	390к	1М	3.1М	7.8М

Обозначения в таблице: к - килоОм, М - МегаОм, положениям переключателя - 1...11, соответствуют номера 0...10 на схеме.

С помощью переключателя **П2** к сопротивлению **R** могут параллельно подключаться различные нагрузки. Положениям переключателя 1...5, соответствуют номера 0...4 на схеме. В положении 1 нагрузки отключены. В других положениях нагрузками служат: конденсатор **C** с емкостью 1 нФ (положение 2), и сопротивление **R1** величиной 62 кОм (положения 3,4,5). В положениях 4,5 на сопротивление **R1** подается сигнал отрицательной обратной связи. Цепь обратной связи включает инвертирующий усилитель с коэффициентом усиления K = 57 и резистор **Rf** величиной 680 кОм. С помощью линейного потенциометра, включенного на выходе усилителя, регулируется петлевое усиление **G** цепи обратной связи. Минимальное значение **G** равно нулю (соответствует положению 0), максимальное значение равно 4.8 = 57*62/(62+680) (соответствует положению 10). Ток **I** в цепи нагрузки измеряется с помощью преобразователя ток-напряжение, имеющего трансимпеданс: 2 МОм (фактическое значение) x 19 (последующее усиление напряжения).

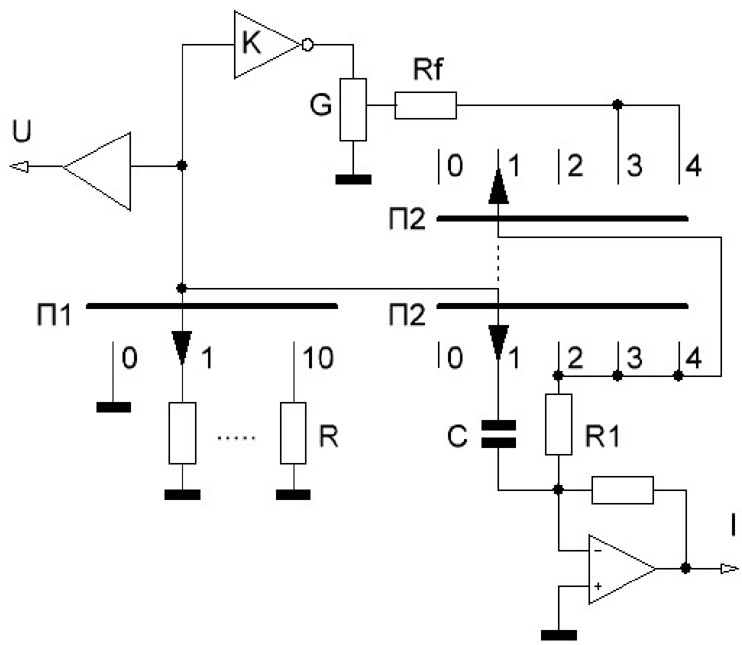
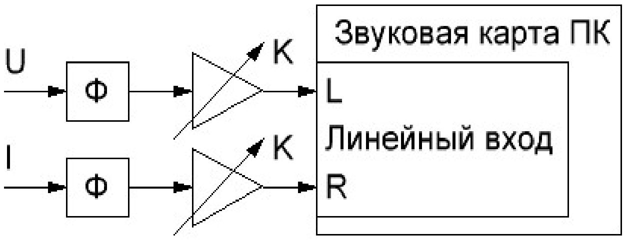


Рис.10. Упрощенная схема лабораторного макета.

Сигналы **U** и **I**, пропорциональные напряжению и току в исследуемой цепи дополнительно усиливаются и затем подаются на входы звуковой карты персонального компьютера (Рис.11). В качестве внешних регулируемых усилителей используются вольтметры переменного напряжения В3-42 или аналогичные с чувствительность порядка 100 мкВ. На входе усилителей включены фильтры низких частот, задающие верхнюю границу полосы частот сигналов 20 кГц. Ограничение/искажение спектра в высокочастотной области также вызвано внутренними усилителями установки. На низких частотах полоса пропускания ограничена внешними усилителями и составляет порядка 50 Гц. Сигнал напряжения подается на вход левого канала звуковой карты, сигнал тока — на вход правого. Спектральный анализ сигналов проводится в компьютере с помощью программы SpectraLAB или аналогичной.

Рис.11. Схема подключения макета к персональному компьютеру.



УПРАЖНЕНИЯ

1. Общие указания.

Для подробного ознакомления с работой программы спектрального анализа смотрите справочник программы. Краткие пояснения по работе с программой SpectraLAB приводятся в Приложении 2.

Рекомендуемый диапазон спектрального анализа – 100Гц…10кГц.

Внимание. Во время работы следите за перегрузкой, вовремя подстраивайте коэффициент усиления. Нормальное значение сигнала – 1/4 … 1/2 шкалы звуковой карты (окно «Time series»).

При графическом представлении результатов измерений следует использовать логарифмический масштаб по обеим осям графиков.

2. Измерение теплового шума сопротивления и шумовых параметров усилителя.

Установите переключатель П2 в положении 1. Измерьте зависимость спектральной плотности шумового напряжения от величины сопротивления R. Спектральную плотность измеряйте на горизонтальном участке спектра.

Для сопротивлений $R = 0$ и $R =$ 7.8 МОм измерьте зависимость спектральной плотности напряжения от частоты в диапазоне 100Гц…10кГц.

По данным, полученным для трех различных значений сопротивления ($R = 0$, 160 кОм, 7.8 МОм), с помощью соотношения (2) определите спектральные плотности источников шумового напряжения и тока усилителя, рассчитайте соответствующие шумовые сопротивления. При расчете можно сделать следующие допущения. При $R = 0$ шум на входе усилителя создается только источником шумового напряжения усилителя $e(t)$, а при $R =$ 160 кОм шум обусловлен суммарным действием шумового напряжения усилителя и теплового шума этого сопротивления (шумовым током усилителя можно пренебречь). При $R =$ 7.8 МОм шум на входе усилителя создается тепловым шумом этого сопротивления и шумовым током усилителя $i(t)$, протекающим по сопротивлению (шумовым напряжением усилителя можно пренебречь).

Постройте зависимость коэффициента шума усилителя от сопротивления источника сигнала (соотношение (2)).

3. Измерение теплового шума RC-цепочки.

Установите переключатель П2 в положение 2. Для сопротивлений R = 7.5к, 24к, 62к, 160к, 390к измерьте спектральные плотности напряжения и тока в диапазоне частот 100Гц…10кГц. Результаты измерений при различных значениях R постройте на одном графике.

4. Измерение шумовых напряжений и токов сопротивления.

Установите переключатель П2 в положение 3. Измерьте зависимости спектральных плотностей напряжения и тока от сопротивления R. Спектральную плотность измеряйте на горизонтальном участке спектра.

5. Измерение шума в системе с отрицательной обратной связью.

Установите переключатель П1 в положение 11 (R= 7.8 МОм), переключатель П2 в положение 4. Измерьте зависимости спектральных плотностей тока и напряжения от величины петлевого усиления G. Рекомендуемая частота измерения - 1...2 кГц.

Установите режим измерения взаимной спектральной плотности. Измерьте зависимость взаимной спектральной плотности тока и напряжения от величины петлевого усиления G. Из-за значительного статистического разброса рекомендуется увеличить число усредняемых спектров и брать среднее значение взаимного спектра в окрестности частоты 1 кГц.

6. Объясните результаты проведенных измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. - М.: Наука, 1981.
2. Ван дер Зил. А. Шумы при измерениях. - М.: Мир, 1979.
3. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах. - М.: Мир, 1986.

Приложение 1

Случайные процессы

Описание случайных процессов основано на понятии **статистического ансамбля**. Пусть $x(t)$ - зависимость от времени некоторой случайной величины в наблюдаемой системе, например, запись напряжения электрической батареи, - так называемая реализация случайного процесса. Постулируется, что существует множество различных реализаций, соответствующих допустимым движениям системы, и предполагается, что в распоряжении наблюдателя сразу имеются все возможные реализации – статистический ансамбль реализаций $x(t)$. Вероятность некоторого события, связанного с данным случайным процессом, определяется как отношение числа реализаций, в которых данное событие происходит, к общему числу реализаций в ансамбле, или как предел этого отношения, если число реализаций в ансамбле бесконечно. Ансамбль полностью определяет статистические свойства флуктуаций в системе, так как с его помощью можно рассчитать вероятность любого события.

В случае, когда параметры рассматриваемой системы и свойства ее окружения постоянны во времени, вероятностные характеристики шума, генерируемого в системе, не зависят от начала отсчета времени. Такие процессы называются **стационарными**.

Многие природные флуктуации являются стационарными. Далее рассматриваются характеристики стационарного шума.

Вероятностные характеристики дают наиболее полное описание случайного процесса. При решении задач, связанных с шумами, в большинстве случаев не требуется такой детальной информации и достаточно знания параметров, характеризующих шум в среднем. **Средним значением** (по ансамблю) некоторой функции F от случайного процесса $x(t)$ называется величина:

$$< F > = \int_{-\infty}^{\infty} F \cdot w(F) dF$$

где $w(F)$ — плотность вероятности значения F.

На практике усреднение производится по времени (по одной реализации)**:**

$$\overline{F} = \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} F(\theta) d\theta$$

где t - начало интервала усреднения, T - длительность усреднения. Возможность усреднения по времени основана на том, что случайные процессы, как правило, обладают конечной памятью - временем корреляции. В этом случае одну реализацию можно разбить на отдельные независимые участки, и получить тем самым подобие статистического ансамбля. Процессы, для которых усреднение по времени (при бесконечном времени усреднения) эквивалентно усреднению по ансамблю, называются эргодическими.

На практике, прежде всего, важны следующие средние: среднее значение процесса, дисперсия, корреляционная функция и/или спектральная плотность.

Среднее значение $<x(t)>$ стационарного случайного процесса не зависит от времени и является некоторой постоянной. Обычно ее просто вычитают из наблюдаемого процесса, и собственно флуктуациями или шумом называют это отклонение от среднего. Поэтому в дальнейшем среднее значение шума считается равным нулю.

Дисперсия, называемая также **интенсивностью** или **мощностью** шума, характеризует средний размах флуктуаций около среднего значения: $\sigma^2 = <x^2(t)>$. Для стационарного шума она не зависит от времени.

В реальных системах изменение флуктуирующей величины не может происходить бесконечно быстро, поэтому значения случайного процесса в разные моменты времени оказываются взаимосвязанными - шум обладает определенной памятью. Характеристикой шума, которая отражает связь между значениями случайного процесса в два момента времени, разделенные некоторым интервалом τ, является **автокорреляционная функция**:

$$K(\tau) = < x(t) x(t+\tau) >$$

Если интервал τ стремится к нулю, значения шума становятся одинаковыми, и, следовательно, корреляционная функция равна дисперсии шума: $K(0) = \sigma^2$. В противоположном случае, когда интервал τ неограниченно возрастает, значения флуктуаций становятся взаимно независимыми, и, следовательно, корреляционная функция стремиться к нулю. Величина временного интервала, на котором значение корреляционной функции существенно отличается от нуля, то есть время, в течение которого сохраняется информация о начальном значении процесса, называется **временем корреляции** шума τ_K. Корреляционная функция является четной.

Наряду с корреляционной функцией для описания динамических свойств шума используется спектральное представление. Если стационарный шум $x(t)$ пропустить через узкополосный фильтр, и тем самым выделить спектральные составляющие в некоторой полосе частот df около частоты f, интенсивность флуктуаций на выходе фильтра σ_f^2 будет пропорциональна полосе частот фильтра:

$$\sigma_f^2 = S(f)df\,,\ \ df \to 0\,.$$

Функция частоты $S(f)$ называется **спектральной плотностью** шума и характеризует распределение интенсивности флуктуаций по частоте. Полная мощность процесса $x(t)$ может быть представлена в виде суммы интенсивностей всех его спектральных составляющих:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty S(f)df\,.$$

Реальные процессы имеют конечную мощность, и их спектральная плотность обязательно стремится к нулю при неограниченном увеличении частоты. Интервал частот Δf, который занимает спектральная плотность, называется **полосой частот** шума.

Согласно **теореме Винера-Хинчина** автокорреляционная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса взаимно однозначно связаны преобразованием Фурье:

$$K(\tau) = \int_0^\infty S(f)\cos(2\pi f\tau)df\,,$$

$$S(f) = 2\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau\,.$$

Поэтому автокорреляционная функция и спектральная плотность в равной мере описывают изменчивость случайного процесса во времени. Чем шире полоса частот шума, тем быстрее изменяется значение флуктуирующей переменной, и тем быстрее процесс забывает свое начальное состояние - с увеличением полосы частот шума Δf время корреляции τ_K уменьшается. Для всех процессов с одинаковой формой спектра и, следовательно, с корреляционной функцией одного вида произведение $\Delta f\tau_K$ является некоторой константой. Спектральная плотность обязательно должна быть четной положительной функцией.

При прохождении шума через линейную систему с коэффициентом передачи $G(f)$ спектральные плотности на входе $S_X(f)$ и выходе $S_Y(f)$ системы связаны простым соотношением:

$$S_Y(f) = |G(f)|^2 S_X(f)\,.$$

Поэтому при анализе шумов в линейных системах обычно используется спектральное представление.

При расчете флуктуаций в различных системах часто применяется модель шума с постоянной, не зависящей от частоты спектральной плотностью – так называемый **белый шум**. Время корреляции белого шума равно нулю, и в любые различные моменты времени значения процесса между собой не связаны. Автокорреляционная функция шума представляет собой δ - функцию, поэтому по-другому этот шум называется δ -коррелированным шумом. В реальности белый шум не существует, однако такую модель можно использовать, когда в полосе частот системы шум, действующий на эту систему, имеет примерно постоянную спектральную плотность.

Среднее, дисперсия и автокорреляционная функция (или спектральная плотность) являются основными характеристиками шума, обычно используемыми на практике. Они относительно просто измеряются, и их знания достаточно для решения многих задач, связанных с шумами. С другой стороны, важность этих параметров заключается в том, что они полностью определяют вероятностные характеристики важнейшего класса случайных процессов – **гауссовского шума**.

Согласно **центральной предельной теореме** сумма большого числа независимых случайных процессов является гауссовским случайным процессом. Суперпозиция множества случайных возмущений лежит в основе механизмов возникновения шума в подавляющем числе природных систем, поэтому реальные шумы, как правило, являются гауссовскими.

Статистическую связь двух стационарных и стационарно связанных процессов $x(t)$ и $y(t)$ характеризует **взаимная корреляционная функция** $K_{XY}(\tau) = \langle x(t)y(t+\tau)\rangle$.
В отличие от автокорреляционной функции $K_{XX}(\tau)$ она может быть несимметричной относительно $\tau = 0$. Пример - взаимная корреляция стационарного шума и этого же, но задержанного по времени, шума. Нормированную корреляционную функцию называют **коэффициентом взаимной корреляции**: $\rho_{XY}(\tau) = K_{XY}(\tau)/(\sigma_X\sigma_Y)$. Коэффициент взаимной корреляции удовлетворяет условию: $/\rho_{XY}(\tau)/ \leq 1$.

В спектральном представлении статистическую связь двух процессов характеризует в**заимная спектральная плотность** $S_{XY}(f)$, которая является преобразованием Фурье взаимной корреляционной функции:

$$K_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(f)\exp(2\pi f\tau)df \quad ,$$

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{XY}(\tau)\exp(-2\pi f\tau)df \quad .$$

В общем случае взаимная спектральная плотность является комплексной функцией частоты.

Если с помощью одинаковых узкополосных фильтров выделить спектральные составляющие процессов $x(t)$ и $y(t)$ в некоторой полосе частот df около частоты f , взаимная корреляционная функция $k_f(\tau)$ выделенных составляющих будет равна:

$$k_f(\tau) = 2[\mathrm{Re}\{S_{XY}(f)\}\cos(2\pi f\tau) + \mathrm{Im}\{S_{XY}(f)\}\sin(2\pi f\tau)]df\,, \qquad df \to 0\,.$$

Отсюда следует, что взаимная мощность спектральных составляющих определяется действительной частью взаимной спектральной плотности: $k_f(0) = 2\,\mathrm{Re}\{S_{XY}(f)\}df$. Для стационарных процессов спектральные составляющие, имеющие разные частоты, взаимно не коррелированны.

Нормированная взаимная спектральная плотность называется **функцией когерентности** $\gamma(f)$: $\gamma(f) = S_{XY}(f)/\sqrt{S_X(f)S_Y(f)}$, $|\gamma(f)| \leq 1$.

При измерении характеристик случайного процесса производится усреднение по конечному интервалу времени T. Результат измерения является случайной величиной, и полученное значение отличается от истинного значения для бесконечного времени усреднения - возникает **статистическая ошибка** измерения. Величина ошибки определяется эффективным числом независимых отсчетов измеряемой величины на интервале T , которое для процессов с конечным временем корреляции $\tau_к$ оценивается отношением $T/\tau_к$.

При измерении мощности шума в полосе частот Δf ошибка измерения имеет вид:

$$\Delta\sigma^2 \sim \sigma^2/(\Delta f T)^{1/2} \;,$$

где $\Delta\sigma^2$ - отклонение измеренной мощности от истинного значения σ^2 . При измерении взаимной корреляции некоррелированных шумов х и у ошибка измерения нулевой корреляции $\Delta(xy)$ по порядку величины равна:

$$\Delta(xy) \sim (\sigma_x^2 \sigma_y^2 / \Delta f T)^{1/2} .$$

Измерение спектральной плотности по существу является измерением мощности составляющих шума в достаточно узкой полосе частот. Из приведенного выше выражения видно, что улучшение спектрального разрешения (уменьшение ширины полосы частот) и уменьшение ошибки измерения спектральной плотности являются противоречивыми требованиями, и их соотношение выбирается из компромиссных соображений.

При измерении мощности шума обычно используют относительное измерение. Измерительная цепь, измерительные приборы обязательно содержат элементы для регулировки усиления сигнала. С их помощью устанавливается уровень сигнала, оптимальный для его обработки, например, для спектрального анализа. Если измеряемый шум со спектральной плотностью S_0 вызывает показание анализатора спектра A_0 при величине коэффициента усиления K_0, а шум со спектральной плотностью S вызывает показание индикатора A при величине коэффициента усиления K, то отношение этих спектральных плотностей (для измерителя с линейным детектором) определяется выражением:

$$S_0 / S = (K A_0 / K_0 A)^2 .$$

Если одна из спектральных плотностей известна, тем самым определяется величина другой. Как правило, измерения проводятся относительно теплового шума источника сигнала.

Приложение 2

Работа с программой SpectraLAB.

Дисплей программы показывает квадратный корень из относительной спектральной плотности сигнала ($S^{1/2}$), значение выражается в децибелах ($20\log S^{1/2}$). Например, изменение коэффициента усиления сигнала в 2 раза вызывает изменение спектральной плотности в 4 раза. При этом показание на дисплее изменяется на 6 децибел: 20log2 = 6 (увеличение вдвое), 20log1/2 = -6 (уменьшение вдвое).

1. **Включите питание компьютера.** После загрузки операционной системы программа SpectraLAB запустится автоматически.

2.**Установите/Проверьте настройки звуковой карты.** Для этого в операционной системе выполните: «Пуск» - «Панель управления» - «Звуки и аудиоустройства» - «Аудио». Откроется окно настроек звуковых устройств. В это окно также можно попасть, щелкнув правой кнопкой мыши на значке громкоговорителя в нижнем правом углу окна Windows и выбрав «Настройка аудиопараметров» - «Установить аудиопараметры».

В открывшемся окне в разделе «Запись звука» нажмите «Громкость». Далее выберите в качестве источника сигнала Линейный вход, движок регулировки уровня записи поставьте в крайнее нижнее положение.

Закройте все окна, которые были открыты для настройки звуковой карты. Включите питание установки.

3. **Загрузите рекомендуемую конфигурацию анализатора спектра.** В меню программы SpectraLAB выполните: «Config» - «Load Configuration», выберите файл C:\SPECLAB\config\config_0.cfg. Параметры конфигурации можно посмотреть с помощью команд меню «Config» - «View Configuration».

4. **Основные регулировки и измерение.** Оцифрованный сигнал звуковой карты и спектр отображаются в окнах: «Time series» и «Spectrum».

Окно «Time series» служит для визуального контроля амплитуды сигнала и обычно не требует регулировки. Наблюдение сигнала следует проводить при запущенном анализаторе. Индикатор перегрузки расположен в левом нижнем углу окна программы.

В окне «Spectrum» можно вручную установить пределы оси амплитуды с помощью регулировок «Plot Top» и «Plot Range» или воспользоваться автоматической установкой с помощью кнопки «Autoscale current spectrum». Левее расположены регулировки оси частоты, рекомендуется установить диапазон частот 100Гц - 10кГц. В правой стороне окна расположены настройки «Set» и «On», с помощью которых можно запомнить до 4-х спектров и включать/выключать их для последующего сравнения спектров.

В главном окне программы расположены кнопки «Run» и «Stop», с помощью которых запускается и останавливается анализатор, и поле ввода числа усредняемых спектров «Avg». С помощью команд меню «Options-Settings» и «Options-Scaling» можно получить доступ к основным настройкам анализатора.

Для измерения спектральной плотности в меню «Options-Settings» в окне «Dual Channel Spectral Processing Options» установите режим измерения «Both Left and Right», в окне «Averaging Settings» установите режим усреднения «Exponential».

Для измерения взаимной спектральной плотности в меню «Options-Settings» в окне «Dual Channel Spectral Processing Options» установите режим измерения «Cross Spectrum (Left*Right)» , в окне «Averaging Settings» установите режим усреднения «Vector». Для уменьшения статистического разброса при измерении взаимного спектра рекомендуется увеличить число усредняемых спектров до 800...1000 (поле «Avg»).

При переключении/изменении режима работы установки возникают переходные процессы. Для сокращения времени реакции анализатора остановите, а потом снова запустите анализатор. Дождитесь устойчивого значения спектра. Остановите анализатор. Перемещая указатель мыши по графику спектра при нажатой левой кнопке, сделайте отсчет амплитуды и частоты в требуемой точке.

5. Выключение питания. После завершения работы с программой SpectraLAB выключите питание установки, закройте программу. Выполните: «Пуск» - «Завершение работы» - «Завершение работы». После разрешающего сообщения выключите питание компьютера.